jedoch bereits nach dem ersten Wurfe aufhören zu spielen und sich nun in den Einsatz theilen wollen; wie viel wird dann demnach jeder bekommen müssen?

Hätte **A** auf's erste Mal die bestimmte Zahl nicht geworfen, so wäre das Spiel für ihn verloren, und **B** bekäme alsdann den Einsatz 36 Mal. Wäre aber **A** so glücklich gewesen, im ersten Wurfe die bestimmte Zahl zu erhalten, so ist seine Probabilität, auch noch im zweiten Wurfe dieselbe bestimmte Zahl zu werfen, $\frac{1}{6}$ = derjenigen Probabilität, das Spiel zu gewinnen, bevor noch **A** den zweiten Wurf thut; für **B** wäre diese Probabilität $\frac{5}{6}$. Mithin müßte, nachdem **A** und **B** sich nach dem ersten Wurfe bereits getrennt haben, **A** den sechsten Theil vom 36fachen Einsatze, d. h. den Einsatz 6 Mal, und **B** $\frac{5}{6}$ des 36fachen Einsatzes, d. h den Einsatz 30 Mal erhalten; oder auch es müßte **B** 5 mal mehr als **A** bekommen. Wäre z. B. dieser Einsatz = 3 Thlr. 18 Gr.; so würde

$$A = \frac{1}{6}\ (3\ \text{Thlr.}\ 18\ \text{Gr.}) = -\ \text{Thlr.}\ 15\ \text{Gr.}$$

$$B = \frac{5}{6}\ (3\ \text{Thlr.}\ 18\ \text{Gr.}) = 3\ -\ 3\ -$$

bekommen müssen.

Zweiter Theil.

Von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Abschnitt.

Von der Bestimmung der Probabilität aus Gründen.

(Wahrscheinlichkeitsrechnung a priori.)

Erstes Capitel.

Von dem Würfelspiel.

§. 1. Wir wollen zuerst das Würfelspiel vornehmen und hierbei stets sechsseitige Würfel, welche bei den meisten gewöhnlichen Spielen anzutreffen sind, voraussetzen.

Wenn n die Anzahl sämmtlicher sechsseitigen Würfel, deren jeder die Augen **1, 2, 3, 4, 5** und **6** hat, bezeichnet und **A, B, C, D,... N** die n einzelnen Würfel sind; so können offenbar mit diesen n Würfeln 6^n Würfe gethan werden. Bezeichnen wir daher die Anzahl aller möglichen Würfe mit n Würfeln durch A_n, so hat man

$$A_n = 6^n \qquad 1).$$

Ferner ist offenbar n die kleinste, und 6n die größte mögliche Zahl Augen, die man mit n Würfeln werfen kann. Diese Anzahlen n und 6n sind jede nur ein Mal, die folgenden Anzahlen von Augen

$$n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots.\ 6n-1,\ 6n$$

aber nach und nach bis auf die Mitte immer häufiger, von da an jedoch die bis zu 6n folgenden Anzahlen von Augen wieder nach und nach immer seltener zu werfen möglich. Es entsteht hierbei noch die wichtige Frage: **Wie oft kann die Anzahl p von Augen mit n sechsseitigen Würfeln geworfen werden?**

Bezeichnen wir durch ${}^n\underline{N}_p$ die Zahl, welche ausdrückt, wie oft p geworfen werden kann, so ist klar, daß ${}^n\underline{N}_p$ gleich ist der Anzahl der Variationen mit Wiederholungen der nten Klasse für p Elemente, und man wird also haben:

$${}^n\underline{N}_p = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p+1-n)}{1.2.\ldots.(n-1)} - \frac{n}{1}\cdot\frac{(p-7)(p-8)\ldots.(p-5-n)}{1.2.\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(p-13)(p-14)\ldots(p-11-n)}{1.2.\ldots(n-1)} - \ldots\ldots \qquad 2),$$

wo die Anzahl der Factoren in jedem Zähler gleich ist der Anzahl der Factoren des zugehörigen Nenners; übrigens bricht die Reihe mit demjenigen Gliede ab, dessen nachfolgendes Glied den ersten negativen Zähler erhält.

Beispiel. Es sei $n=5$, $p=19$; so ist nach 2)

$${}^5\underline{N}_{19} = \frac{18.17.16.15}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{5}{1}\cdot\frac{12.11.10.9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{5.4}{1.2}\cdot\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$$
$$= 3060 - 2475 + 150 = 735.$$

§. 2. Soll ${}^n\underline{N}_p$ bei unveränderter Anzahl n Würfel für die auf p zunächst folgende Zahl, d. h. also für $p+1$ berechnet werden, so darf nur in den für ${}^n\underline{N}_p$ gegebenen allgemeinen Ausdruck 2) $p+1$ statt p gesetzt werden, und es wird kommen

$${}^n\underline{N}_{p+1} = \frac{p(p-1(p-2)\ldots(p+2-n)}{1.2.3.\ldots.(n-1)} - \frac{n}{1}\cdot\frac{(p-6)(p-7)\ldots.(p-4-n)}{1.2.\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(p-12)(p-13)\ldots.(p-10-n)}{1.2.\ldots(n-1)} - \ldots.,$$

mithin, wenn

$$ {}^{n}\underline{N}_{p+1} - \underline{N}_{p} = {}^{n}\Delta_{p} $$

gesetzt wird:

$$ {}^{n}\Delta_{p} = \frac{(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p+2-n)}{1.2\ldots\ldots(n-2)} - \frac{n}{1} \cdot \frac{(p-7)(p-8)\ldots(p-4-n)}{1.2\ldots(n-2)} $$

$$ + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(p-13)(p-14)\ldots(p-10-n)}{1.2\ldots(n-2} - \ldots\ldots \quad 3). $$

Beispiele. Es sei $n=4$, $p=17$; so hat man nach 3)

$$ {}^{n}\Delta_{p} = \frac{16.15}{1.2} - \frac{4}{1} \cdot \frac{10.9}{1.2} + \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{4.3}{1.2} $$

$$ = 120 - 180 + 36 = -24. $$

Es sei $n=8$, $p=14$; so erhält man

$$ {}^{8}\Delta_{14} = \frac{13.12.11.10.9.8}{1.\ 2.\ 3.\ 4.5.6} - \frac{8}{1} \cdot \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6} $$

$$ = 1716 - 56 = +1660. $$

§. 3. Soll jedoch ${}^{n}\underline{N}_{p}$ bei unveränderter Anzahl p Augen für $n+1$ Würfel bestimmt werden; so braucht bloß in den für ${}^{n}\underline{N}_{p}$ gegebenen allgemeinen Ausdruck 2) $n+1$ statt n gesetzt zu werden, und es wird kommen

$$ {}^{n+1}\underline{N}_{p} = \frac{(p-1)\,p-2)\ldots(p-n)}{1.2\ldots.n} - \frac{(n+1)}{1} \cdot \frac{(p-7)(p-8)\ldots(p-6-n)}{1.2\ldots.n} $$

$$ + \frac{(n+1)n}{1.2} \cdot \frac{(p-13)(p-14)\ldots(p-12-n)}{1.2\ldots.n} $$

$$ - \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3} \cdot \frac{(p-19)(p-20)\ldots.(p-18-n)}{1.2\ldots.n} $$

$$ + \ldots., $$

also, wenn ${}^{n+1}\underline{N}_{p} - {}^{n}\underline{N}_{p} = {}^{n+1}\Delta_{p}$ gesetzt wird:

$$ {}^{n+1}\Delta_{p} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n+1)\,[(p-n)-n]}{1.2.3\ldots.\ (n-1)\,n} $$

$$ - \frac{(p-7)(p-8)\ldots.(p-5-n)\,[(p-6-n)(n+1)-n^2]}{1.\qquad 1.2\ldots.\ (n-1)\,n} $$

$$ + \frac{(p-13)(p-14)\ldots(p-11n)\,[(p-12-n)(n+1)n-n^2(n-1)]}{1.2.\qquad 1.2\ldots\ldots\ (n-1)\,n} \quad 4) $$

$$ - \ldots\ldots\ldots $$

Beispiele. Sei $n=4$, $p=5$, so kommt nach 4)

$$ {}^{5}\Delta_{5} = \frac{4.3.2.(-3)}{1.2.3.4} = -3; $$

sei $${}^{6}\Delta_{9} = \frac{8.7.6.5.(-1)}{1.2.3.4.5} = -14.$$

§. 4. Die allgemeinen Ausdrücke für ${}^{n}\Delta_{p}$ und ${}^{n+1}\Delta_{p}$ in den beiden letzten Paragraphen können, besonders der für ${}^{n}\Delta_{p}$, sehr vortheilhaft zur Entwerfung einer Tafel dienen, welche angiebt, wie groß ${}^{n}\underline{N}_{p}$ für jedes n und p ist, d. h. mit andern Worten, wie oft die Anzahl p von Augen mit n sechsseitigen Würfeln geworfen werden kann. Wir geben hier den Anfang einer Tafel, die beliebig fortgesetzt werden kann:

Tafel,

welche angiebt, wie oft die Zahl p mit n sechsseitigen Würfeln zu werfen möglich ist.

p	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588.

§. 5. Die Wahrscheinlichkeit w, mit n sechsseitigen Würfeln p Augen zu werfen, ist, wie man leicht einsehen wird, gleich der möglichen Anzahl ${}^{n}N_{-p}$ von Würfen, deren jeder p Augen giebt, dividirt durch die Anzahl 6^n aller möglichen Würfe mit n sechsseitigen Würfeln; d. h. also

$$w = \frac{{}^{n}N_{-p}}{6^n} \qquad 5).$$

Es wird folglich z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln die Summe 19 der Augen zu werfen,

$$w = \frac{735}{6^5} = \frac{245}{2304} = 0{,}106\ldots,$$

also nur wenig mehr als $\frac{1}{10}$ sein.

Sucht man die Probabilität w, mit 4 Würfeln 16 zu werfen; so ist erstlich $n = 4$, $p = 16$; also nach 2)

$${}^{4}N_{-16} = \frac{15.14.13}{1.2.3} - \frac{4}{1}\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3} + \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{3.2.1}{1.2.3} = 125,$$

und daher zweitens nach 5)

$$w = \frac{125}{6^4} = \frac{125}{1296} = 0.096\ldots.$$

d. h. die gesuchte Probabilität beträgt nahe $\frac{1}{10}$.

Mit 3 Würfeln hat man für

p	${}^{3}N_{p}$	p	${}^{3}N_{-p}$	p	${}^{3}N_{-p}$	p	${}^{3}N_{-p}$
3	1	5	6	7	15	9	25
4	3	6	10	8	21	10	27

und

$${}^{3}N_{-3} + {}^{3}N_{-4} + {}^{3}N_{-5} + {}^{3}N_{-6} + {}^{3}N_{-7} + {}^{3}N_{8} + {}^{3}N_{-9} + {}^{3}N_{-10} = 108,$$

mithin ist die Wahrscheinlichkeit, eine der Zahlen 3, 4, . . . 9, 10 zu werfen, $\frac{108}{3^6} = \frac{1}{2}$, also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Probabilität, mehr als 10 zu werfen, ebenfalls $\frac{1}{2}$. Es ist folglich gleiche Wahrscheinlichkeit vorhanden, mit 3 Würfeln weniger als 11 und mehr als 10 zu werfen. Nach Lacroix ist dieser Satz die Grundlage desjenigen Spiels, das man unter dem Namen Knöcheln (passe dix) kennt. Die obige Tafel dient zur Beantwortung fast aller bei Würfelspielen vorkommenden Fälle. Wir wollen dieß in einigen Beispielen zeigen.

§. 6. Beispiel 1. Zwei Personen A und B spielen mit 3 Würfeln um den jedesmaligen Ueberschuß der Augen. A will erfahren, wie für ihn das Spiel in dem Falle beschaffen ist, daß er 8 wirft, wenn **B** 5 wirft.

Da nach der Tafel

für **A** $\quad {}^{3}\underset{-8}{N} = 21$

für **B** $\quad {}^{3}\underset{-5}{N} = 6$

beträgt, so ist

$\frac{21}{216} = \frac{7}{72}$ die Wahrscheinlichkeit für **A**, 8 zu werfen, und

$\frac{6}{216} = \frac{2}{72}$ die Wahrscheinlichkeit für **B**, 5 zu werfen.

Es wird daher, wenn beide Personen gleich viel Mal geworfen haben, **B** die Zahl 5 erst zwei Mal treffen, wenn **A** die Zahl 8 bereits sieben Mal getroffen hat. Mithin sind unter 7 möglichen Würfen nur zwei günstige Würfe für **A**, und es würde also die Probabilität zu gewinnen für **A** $\frac{2}{7}$ und für **B** $\frac{5}{7}$ betragen: das Spiel ist demnach für den in Rede stehenden Fall für **A** hinsichtlich der Aussicht zu gewinnen ziemlich zweifelhaft, da $\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

Beispiel 2. Es will **A** den Fall erforschen, welcher, wenn er den Ueberschuß 7 mit 2 Würfeln zu gewinnen beabsichtigt, für ihn am vortheilhaftesten ist, d. h. mit andern Worten, welcher von denjenigen Würfen, die von **A** und **B** gethan, für **A** den Ueberschuß 7 der Augen giebt, für **A** der sicherste zu spielen ist.

Mit 2 Würfeln sind nur folgende, den für **A** sich ergebenden Ueberschuß 7 der Augen betreffend, mögliche Würfe:

A	${}^{2}\underset{-p}{N}$	$w_{,}$	B	${}^{2}\underset{-p}{N}$	w'	$w_{,} : w'_{,}$
9	4	$\frac{4}{36}$	2	1	$\frac{1}{36}$	4 : 1
10	3	$\frac{3}{36}$	3	2	$\frac{2}{36}$	3 : 2
11	2	$\frac{2}{36}$	4	3	$\frac{3}{36}$	2 : 3
12	1	$\frac{}{36}$	5	4	$\frac{4}{36}$	1 : 4.

Hieraus ersieht man sogleich, daß der für **A** günstigste Fall für den Ueberschuß 7 der Augen derjenige ist, wo **A** 10 und **B** 3 wirft, weil, wenn **A** und **B** beide gleich viel Mal geworfen haben, **B** die Zahl 3 schon zwei Mal werfen wird, wenn **A** die Zahl 10 drei Mal getroffen hat, also, da die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, für **A** die Aussicht zu gewinnen für diesen Fall sehr wahrscheinlich. — Wettet daher **A**, daß dieser hinsichtlich des Ueberschusses 7 für ihn günstigste Fall: er werde 10 und

B 3 werfen, unter jenen vier möglichen Fällen gleich das erste Mal eintreten werde, **B** aber, es werde dieß nicht geschehen; so hat man, wenn **B** mit 5 Thalern diese Wette eingehet, um zu erfahren, wie viel **A** sicher einstellen kann, nach 40) S. 30.

$$m \text{ Thlr.} : 5 \text{ Thlr.} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3},$$

also

$$m = \left(\frac{2}{3} \times 5\right) : \frac{1}{3} = 10 \text{ Thlr.},$$

d. h. **A** kann bei dieser Wette eine doppelt so große Mise als **B** wagen, weil die Wahrscheinlichkeit für **A**, es werde dieser Fall eintreten, doppelt so groß ist als die Wahrscheinlichkeit für **B**, es werde dieser Fall nicht eintreten.

Beispiel 3. **A** und **B** spielen mit 4 Würfeln, und **A** macht den Spielhalter oder sogenannten Banquier, **B** den eigentlichen Spieler; wie muß das Würfelspiel eingerichtet werden, wenn es für **A** und wenn es für **B** vortheilhaft sein soll.

Soll das Spiel für **A** vortheilhaft sein, so müssen die höchsten Gewinne auf die am wenigsten, die kleinsten auf die am häufigsten vorkommenden Würfe, immer aber so gesetzt werden, daß die Gewinne im umgekehrten Verhältnisse (oder doch wenigstens möglich nahe) zu denjenigen Zahlen stehen, welche angeben, wie oft sich die respectiven Würfe ereignen können. Die folgende Tabelle nun giebt demnach das für **A** vortheilhafte Spiel, wobei die Zahlen der zweiten Columne aus voriger Tafel entlehnt sind.

Summe der Augen.		Verhältnißzahlen der Gewinne.	Beispiel von Gewinnen.			
4	1	146.00	219	Thlr.	—	Gr.
5	4	36.50	54	„	18	„
6	10	14.60	21	„	22	„
7	20	7.30	11	„	—	„
8	35	4.17	6	„	6	„
9	56	2.61	3	„	22	„
10	80	1.82	2	„	18	„
11	104	1.40	2	„	2	„
12	125	1.17	1	„	18	„
13	140	1.04	1	„	13	„
14	146	1.00	1	„	12	„
15	140	1.04	1	„	13	„
16	125	1.17	1	„	18	„
17	104	1.40	2	„	2	„
18	80	1.82	2	„	18	„
19	56	2.61	3	„	22	„
20	35	4.17	6	„	6	„
21	20	7.30	11	„	—	„
22	10	14.60	21	„	22	„
23	4	36.50	54	„	18	„
24	1	146.00	219	„	—	„ .

Soll das Spiel für **B** vortheilhaft sein, so müssen die höchsten Gewinne auf die am häufigsten, die kleinsten auf die am wenigsten vorkommenden Würfe, immer aber so gesetzt werden, daß die Gewinne im directen Verhältnisse zu denjenigen Zahlen stehen, welche angeben, wie oft die respectiven Würfe sich ereignen können; mithin sind die Verhältnißzahlen der Gewinne gleich den letzterwähnten Zahlen selbst. Die folgende Tabelle nun giebt demnach das für **B** vortheilhafte Spiel, wobei die Zahlen der zweiten Columne aus mehrerwähnter Tafel entlehnt sind.

Summe der Augen.		Verhältnißzahlen der Gewinne.	Beispiel von Gewinnen.		
4	1	1	1 Thlr.	12	Gr.
5	4	4	6 „	—	„
6	10	10	15 „	—	„
7	20	20	30 „	—	„
8	35	35	52 „	12	„
9	56	56	84 „	—	„
10	80	80	120 „	—	„
11	104	104	156 „	—	„
12	125	125	187 „	12	„
13	140	140	210 „	—	„
14	146	146	219 „	—	„
15	140	140	210 „	—	„
16	125	125	187 „	12	„
17	104	104	156 „	—	„
18	80	80	120 „	—	„
19	56	56	84 „	—	„
20	35	35	52 „	12	„
21	20	20	30 „	—	„
22	10	10	15 „	—	„
23	4	4	6 „	—	„
24	1	1	1 „	12	„.

§. 7. Wenn jemand mit 1 Würfel wirft, und man will die Probabilität w bestimmen, daß in 3 Würfen hinter einander die Augen **m**, **n** und **p** geworfen werden, so hatman nach 22) S. 12

$$w = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0{,}004\ldots$$

Spielen 3 Personen, **A**, **B** und **C** so, daß **A** und **B** mit 2 Würfeln, **C** nur mit 1 Würfel werfen, und fragt man nach der Wahrscheinlichkeit w, **A** werde zwei gleiche, **B** zwei ungleiche Zahlen und **C** die Zahl 6 werfen; so ist nach 20) S. 11.

$$w = \frac{6}{36} \times \frac{30}{32} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0{,}023\ldots.$$

Will man die Wahrscheinlichkeit w wissen, daß in 4 Würfen nach einander 2, 3, 9 und 12 geworfen werden; so hat man

$$w = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18.18.18.36} = \frac{1}{209952}.$$

Endlich, um die Probabilität w zu erfahren, mit 2 Würfeln alle 6 Päsche der Reihe nach zu werfen, hat man ebenfalls nach 22) S. 12.

$$w = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{5832 \times 5832}$$

oder

$$w = \frac{1}{34012224};$$

die Probabilität aber, in 2 Würfen nach einander 4 und 9 zu werfen, ist

$$w = \frac{3}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{108} = 0{,}0092\ldots.$$

Zweites Capitel.

Von dem Pharaospiel (Pharao).

§. 8. Das Pharao ist das vornehmste aller Hazardspiele, und wird mit der französischen Karte, die aus 52 Blättern besteht, zwischen dem sogenannten Banquier (Spielhalter) und einer oder mehreren Personen, den Spielern, gespielt, und zwar auf folgende, gewöhnlichste Art:

Der Banquier nimmt, nachdem er gut gemischt hat, alle 52 Karten zusammen verkehrt in die Hand, zieht eine Karte nach der andern, von oben angefangen, ab, und legt je zwei Karten, das erste Mal rechts und das zweite Mal links, offen neben einander auf den Tisch. Zwei solche neben einander liegende Kartenblätter werden eine Taille genannt. Nach jeder Taille nun kann jeder Spieler eben so gut, wie beim Anfange des Spiels, auf eine einzige oder mehrere, jedoch bestimmte Blätter eine angegebene Summe setzen, d. h. die Mise bestimmen, welche der Banquier gewinnt, sobald das von dem Spieler besetzte Blatt in einer ungeraden Zahl, d. h. auf die rechte Seite fällt, hingegen das Aequivalent der Mise bezahlen muß, wenn dieß nicht der Fall ist, d. h. sobald die besetzte Karte auf die linke Seite fällt; doch gewinnt der Banquier die Hälfte der Mise, sobald in einer und derselben Taille das vom Spieler besetzte Blatt zweimal fällt, d. h. zweimal neben einander zu liegen kommt. Nur das allerletzte Kartenblatt ist ungültig für den Spieler, während die vorletzte Karte, wenn sie die vom Spieler besetzte sein sollte, dem Banquier zum Vortheil fällt, mag nun hierbei die letzte Taille aus zwei gleichen oder ungleichen Blättern bestehen.

§. 9. Die Wahrscheinlichkeit w, daß in der 1sten, oder 2ten, oder 3ten, oder 4ten, u. s. w. oder $r$ten Taille zwei Blätler des Spielers fallen, ohne daß in den vorhergehenden Taillen ein Blatt des Spielers fällt, ist, sobald der Banquier noch p Karten, unter welchen die Karte des Spielers q Mal vorkommt, in Händen hat, dann:

$$w = \frac{q(q-1)}{p(p-1)} + \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots \frac{q(p-1)(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}$$

$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)(p-q-4)(p-q-5)}{p(p-1))(p-2)(p-3)p-4)(p-5)(p-6)(p-7)}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{q(q-1)(p-q)p-q-1) \;.\;.\;.\;.\;.\; (p-q-2r+3)}{p(p-1)(p-2)(p-3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (p-2r+1)} \quad 6),$$

wo p stets eine gerade Zahl ist, q aber nur die **4** Werthe

$$q = 1,\; q = 2,\; q = 3,\; q = 4$$

haben, r hingegen von **1** bis **25** wachsen kann.

Ist nun

a) $q = 1$, so ist der größte Werth von

$$r = \frac{p}{2};$$

b) $q = 2$, so ist der größte Werth von

$$r = \frac{p}{2};$$

c) $q = 3$, so ist der größte Werth von

$$r = \frac{p-2}{2};$$

d) $q = 4$, so ist der größte Werth von

$$r = \frac{p-2}{2}:$$

es muß mithin für $q = 1$ und $q = 3$ in der rten Taille entweder das noch vorhandene Blatt des Banquiers und ein Blatt des Spielers, oder auch 2 Blätter des Spielers fallen, das Spiel sich offenbar endigen, und entweder der Banquier oder der Spieler gewinnen. Dagegen muß für $q = 2$ und $q = 4$ in der rten Taille der Banquier, weil nun 2 Blätter des Spielers fallen müssen, nothwendig gewinnen, also auch das Spiel aufhören.

§. 10. Was ferner die mathematische Hoffnung g für den Banquier, die $= 1$ gesetzte Mise des Spielers zu gewinnen, betrifft; so ist sie für

$$q = 1,\; g = \frac{1}{p};$$

$$q = 2,\ g = \frac{p+2}{2p(p-1)};$$

$$q = 3,\ g = \frac{3}{4(p-1)};$$

$$q = 4,\ g = \frac{2p-5}{2(p-1)(p-3)}.$$

Die nach diesen Ausdrücken entworfene Tafel wird nach dem Obigen für die 26ste Taille und für $q = 1, = 2, = 3$, so wie für die 25ste Taille und für $q = 1$, gar keine mathematische Hoffnung oder keinen Vortheil für den Banquier enthalten können. Betrachtet man diese Tafel näher, so wird man finden, daß der Spieler am vortheilhaftesten spielen kann, sobald er solche Karten, welche erst zwei Mal heraus gekommen sind, so bald als möglich gleich nach einer der ersten Taillen besetzt, und sobald er überhaupt nur in den ersten Taillen eine Karte besetzt, jedoch die Mise desto kleiner macht, je mehr Taillen schon gezogen sind.

Tafel

des Vortheils für den Banquier, wenn

p	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
52	0.000	0.000	0.000	0.020
50	0.000	0.009	0.015	0.021
48	0.021	0.011	0.016	0.021
46	0.022	0.012	0.017	0.022
44	0.023	0.012	0.018	0.024
42	0.024	0.013	0.019	0.025
40	0.025	0.013	0.020	0.026
38	0.027	0.014	0.020	0.027
36	0.028	0.015	0.021	0.029
34	0.029	0.016	0.022	0.030
32	0.031	0.017	0.024	0.033
30	0.033	0.019	0.026	0.035
28	0.037	0.020	0.028	0.038
26	0.039	0.021	0.030	0.040
24	0.042	0.023	0.032	0.044
22	0.045	0.026	0.035	0.049
20	0.050	0.029	0.039	0.054
18	0.056	0.033	0.044	0.061
16	0.062	0.037	0.050	0.069
14	0.071	0.043	0.058	0.077
12	0.083	0.053	0.068	0.096
10	0.100	0.067	0.083	0.119
8	0.125	0.089	0.107	0.156
6	0.167	0.133	0.150	0.233
4	0.250	0.250	0.050	0.500.

§. 11. Es ist hier vorausgesetzt worden, daß das Pharao mit Ruhe und Reellität gespielt wird, was leider nur zu bekannt nicht der Fall ist, indem gewöhnlich vorsichtslos und mit Leidenschaft gespielt wird, auch fast immer die sogenannten Banquiers oder Spielhalter abgefeimte Spieler sind, die durch ihre schändlichen Kunstkniffe, wie z. B. das Volteschlagen, den Gebrauch marquirter Karten u. s. w., jungen lebhaften Leuten, die in ihr Netz gelockt sind, auf die gewissenloseste Art direct das Vermögen und dadurch indirect auch Ehre, Gesundheit und Leben oft in wenigen Stunden rauben.

Drittes Capitel.

Von der Zahlenlotterie oder dem Lotto.

§. 12. Es giebt 2 Arten von Spielen, bei denen Zahlen gezogen werden, die von Gewinnsten begleitet sind: 1) das Lotto (**Lotto di Genova, Loterie de France**) und 2) die Lotterie (deutsche Klassenlotterie).

I. Vom Lotto.

§. 13. Das gewöhnliche Lottospiel besteht darin, daß aus einem Glücksrade, in welches die 90 Nummern 1 bis 90 gethan worden sind, jedesmal nur 5 Nummern gezogen werden, welche gewinnen, und zwar erhält jeder Spieler, der vor Beginn der Ziehung nach seinem Gutdünken fünf von jenen 90 Nummern einzeln gewählt und besetzt hat, seinen Einsatz, sobald unter seinen 5 besetzten Nummern sich eine von den gezogenen befindet, eine gewisse Anzahl Mal wieder, was ein einfacher Auszug genannt wird. Es steht aber auch jedem Spieler frei, die in den von ihm gewählten 5 Zahlen enthaltenen Verbindungen zu zwei, drei, vier oder fünf, d. h. Amben, Ternen, Quaternen oder Quinten zu besetzen, welche Einsätze bei den meisten Lottos höher bezahlt werden, als die einzelnen, einfachen Auszüge.

§. 14. Wenn ein Lotto aus N Nummern besteht, von denen s Nummern besetzt worden sind, und es wird nach der Wahrscheinlichkeit w, von diesen s besetzten Zahlen werden gewiß t Zahlen herauskommen, gefragt; so ist, wenn man weiß, daß jedes Mal r Nummern auf einmal gezogen werden,

$$w = \frac{(N-s)\ldots(N-s-r+t+1).s\ldots(s-t+1).r\ldots(r-t+1)}{1.2.3.4\ldots t.N(N-1)\ldots.(N-r+1)} \qquad 7),$$

wo die Wahrscheinlichkeit w desto größer wird, je geringer t gegen s ist. Um dieses zu beweisen, besetze man eben so viel Nummern, als auf einmal gezogen werden, d. h. man nehme $s=r$ an; so geht die Gleichung 7) über in den Ausdruck

$$w = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+t+1)\,r^2\ldots(r-t+1)^2}{1.2.3.4\ldots t.\,N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 8);$$

dann hat man für einen einfachen Auszug, $t=1$ setzend,

$$w_1 = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+2).r^2}{1.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 9),$$

für eine Ambe, wo $t=2$,

$$w_2 = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+3).r^2(r-1)^2}{1.2.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 10),$$

für eine Terne, wo $t=3$,

$$w_3 = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+4).r^2(r-1)^2(r-2)^2}{1.2.3\,N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 11)$$

für eine Quaterne, wo $t=4$,

$$w_4 = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+5)\,r^2(r-1)^2(r-2)^2(r-3)^2}{1.2.3.4\,N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 12)$$

und für eine Quinte, wo $t=5$,

$$w_5 = \frac{(N-r)\ldots(N-2r+5)r^2(r-1)^2(r-2)^2(r-3)^2(r-4)^2}{1.2.3.4.5.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 13),$$

5 Werthe also, die offenbar der Reihe nach kleiner werden. Um dieses noch deutlicher zu zeigen, hat man für das gewöhnliche Lotto, wo $N=90$, $r=5$ ist,

für einen einfachen Auszug

$$w_1 = \frac{85.84.83.82.25}{1.90.89.88.87.86} = \frac{10133925}{43949268},$$

für eine Ambe

$$w_2 = \frac{85.84.33.25.16}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{246925}{10987317},$$

für eine Terne

$$w_3 = \frac{85\ 84.25.16.9}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{2975}{3662439},$$

für eine Quaterne

$$w_4 = \frac{85.25.16.9.4}{1.2.3.4.90.89.88.87.86} = \frac{425}{43949268},$$

und für eine Quinte

$$w_5 = \frac{25.16.9.4.1}{1.2.3.4.5.90.89.88.87.86} = \frac{1}{43949268}$$

Diese 5 Werthe nun, mit den nächst folgenden berechneten

Zahlenwerthen verglichen, geben, von der Quinte aus rückwärts gehend,

für die Quinte	0.00000002	— 0.00000002	= 0.00000000
„ „ Quaterne	0.0000097	— 0.0000019	= 0.0000058
„ „ Terne	0.00081	— 0.00008	= 0.00079
„ „ Ambe	0.0225	— 0.0025	= 0.0200
für den einf. Ausz.	0.230	— 0.056	= 0.164,

durch welche wachsende Differenzen obige Behauptung bestätigt wird.

Hat man 2 Nummern gesetzt, und will eine Ambe gewinnen, so ist, weil $s = 2$, $t = 2$, nach 7)

$$w = \frac{(N-2)\ldots(N-r+1)\ldots2\ldots1.r\ldots(r-1)}{1.2.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 14),$$

für eine Terne, weil $s = 3$, $t = 3$,

$$w = \frac{(N-3)\ldots(N-r+1).3.2.1.r\ldots(r-2)}{1.2.3.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 15),$$

für eine Quaterne, da $s = 4$, $t = 4$,

$$w = \frac{(N-4)\ldots(N-r+1).4.3.2.1.r\ldots(r-3)}{1.2.3.4.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 16)$$

und für eine Quinte, da $s = 5$, $t = 5$,

$$w = \frac{(N-5)\ldots(N-r+1).5.4.3.2.1.r\ldots(r-4)}{1.2.3.4.5.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 17).$$

Weil bei dem gewöhnlichen Lotto $N = 90$ ist, so hat man für eine Ambe die Wahrscheinlichkeit, sie zu gewinnen,

$$w = \frac{88\ldots(91-r).2.1.r\ldots(r-1)}{1.2.90.89\ldots(91-r)} \qquad 18),$$

für eine Terne

$$w = \frac{87..(91-r).3.2.1.r\ldots(r-2)}{1.2.3.90.89\ldots.(91-r)} \qquad 19),$$

für eine Quaterne

$$w = \frac{88\ldots(91-r).4.3.2.1.r\ldots(r-3)}{1.2.3.4.90.89\ldots(91-r)} \qquad 20),$$

und für eine Quinte

$$w = \frac{85\ldots(91-r).5.4.3.2.1.r\ldots(r-4)}{1.2.3.4.5.90.89\ldots(91-r)} \qquad 21).$$

Da stets nur 5 Nummern gezogen werden, so erhält man, $r = 5$ setzend,

für die Ambe die Wahrscheinlichkeit w zu gewinnen

$$\frac{88.87.86.2.1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86} = \frac{2}{801} = 0{,}002497\ldots,$$

für die Terne die Wahrscheinlichkeit w zu gewinnen

$$\frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748} = 0{,}000085,$$

für die Quaterne die Wahrscheinlichkeit w zu gewinnen

$$\frac{86.4.3.2.1.5.4.3.2}{1.2.3.4.90.89.88.87.86} = \frac{1}{511038} = 0{,}000001957\ldots.$$

und für die Quinte die Wahrscheinlichkeit w zu gewinnen

$$\frac{5.4.3.2.1.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.90.89.88.87.86} = \frac{1}{43949268} = 0{,}000000023\ldots$$

Will man aber die Wahrscheinlichkeit w, einen einfachen Auszug zu gewinnen, bestimmen; so setze man in 7) $s = 1$, $t = 1$, und man wird erhalten:

$$w = \frac{(N-1)\ldots(N-r+1).1.r}{1.N(N-1)\ldots(N-r+1)} \qquad 22),$$

also beim gewöhnlichen Lotto, wo $N = 90$, $r = 5$ ist,

$$w = \frac{89.88.87.86.1.5}{1.90.89.88.87.86} = \frac{1}{18} = 0{,}0555\ldots.$$

§. 15. Es ist nur noch übrig, die Anwendung der Formel 7) an einigen Beispielen zu zeigen, die für das gewöhnliche Lotto von 90 Nummern, von denen alle Mal 5 gezogen werden, gelten, so daß also jene Formel 7) für das gewöhnliche Lotto übergehet in

$$w = \frac{(90-s)\ldots(86-s+t)s\ldots(s-t+1)5.4\ldots(6-t)}{1.2.3.4\ldots t.90.89.88.87.86} \qquad 23).$$

Darnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 besetzten Nummern gewiß eine herauskommt, da hier $s = 2$, $t = 1$,

$$w = \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} = \frac{85}{801} = 0{,}10611\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 besetzten Nummern eine, oder zwei oder alle drei Nummern herauskommen werden, ist, da hier der Reihe nach $s=3$ und $t=1$; $s=3$ und $t=2$; $s=3$ und $t=3$,

$$w = \frac{87.86.85.84.3.5}{1.90.89.88.87.86} = \frac{595}{3916} = 0{,}15194\ldots.$$

$$w = \frac{87.86.85.3.2.5.4}{1.2.90.89.88.87.86} = \frac{85}{11748} = 0{,}00723\ldots.$$

$$w = \frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748} = 0{,}000085\ldots.$$

§. 16. Hat der Spieler den Einsatz m entrichtet, so bekommt er, wenn er einen einfachen Aussatz gewonnen,

$$m : \frac{1}{18},$$

hat er eine Ambe gewonnen,

$$m : \frac{2}{801},$$

hat er eine Terne gewonnen,

$$m : \frac{1}{11748},$$

hat er eine Quaterne gewonnen,

$$m : \frac{1}{511038},$$

hat er eine Quinte gewonnen,

$$m : \frac{1}{43949248}$$

von der Lottodirection ausgezahlt, nämlich respective

18 m, 400.5 m, 11748 m, 511038 m und 43949268 m.

Diese nach richtigen Principien bestimmte Auszahlung erfolgt jedoch in der Wirklichkeit wegen der enormen Steigerung, wegen der Verwaltungskosten des ganzen Lottospiels und wegen des aus jenen Verhältnissen für die Lottodirection zu befürchtenden starken Risico niemals. Statt des Verhältnisses 18 : 400.5 : 11748 besteht gewöhnlich das Verhältniß 15 : 270 : 5200. Um daher für die Quaterne die Verhältnißzahl x zu finden, setze man:

$$18 : 400\tfrac{1}{2} : 11748 : 511038 = 15 : 270 : 5200 : x,$$

woraus

$$x = \frac{511038 \times 270 \times 36 \times 5200}{801 \times 11748 \times 15} = 18299 \text{ oder sehr nahe } 18300,$$

und für die Quinte findet man die Verhältnißzahl x aus dem Verhältniß

$$18 : 400\tfrac{1}{2} : 11748 : 511038 : 43949268 = 15 : 270 : 5200 : 18300 : x,$$

nämlich

$$x = \frac{49349248 \times 5200 \times 15 \times 801 \times 18300}{511038 \times 11748 \times 36} = 522456.$$

Also würde die wirkliche Auszahlung für eine Quaterne nur **18300** m und für eine Quinte nur **522456** m sein. Doch auch Quaternen und Quinten werden, weil sie außerordentlich selten eintreffen, bei den meisten Lottos niemals berücksichtigt.

§. 17. Der vorige Paragraph enthielt die Beantwortung der Frage, wie groß die Probabilität sei, daß von s besetzten Nummern t Nummern sämmtlich herauskommen. Man kann nun aber auch nach der Probabilität fragen, daß von s besetzten Nummern t Nummern wenigstens herauskommen, mag nun s kleiner oder größer als r sein, d. h. mögen weniger oder mehr Nummern, als überhaupt gezogen werden, besetzt worden sein. Diese Frage nun — da, wenn **wenigstens** t Nummern herauskommen sollen, dieß so viel heißt, es können t, oder $t+1$, oder $t+2$, u. s. w. Nummern herauskommen — wird natürlich dadurch beantwortet werden müssen, daß man die Probabilitäten für die einzelnen Fälle t, $t+1$, $t+2$, u. s. w. bestimmt, welche Reihe, wenn $s \leqq r$, sich bis s, wenn $s > r$, sich bis r nur erstreckt; es wird dann, weil die gesuchte Probabilität eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist, die Summe der gefundenen einzelnen Probabilitäten die für gegenwärtigen Fall gesuchte Wahrscheinlichkeit **W** sein, d. h.

$$W = w_t + w_{t+1} + w_{t+2} + \cdots$$

Beispiel 1. Es sind in einem gewöhnlichen Lotto 2 Nummern besetzt worden, und es soll die Probabilität, daß von diesen 2 Nummern **wenigstens** eine gezogen werde, bestimmt werden.

Hier ist $N = 90$, $r = 5$, $s = 2$, also weil $s < r$, $t = 1$ und $t + 1 = 2$; daher nach

für $t = 1$

$$w_1 = \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} = \frac{85}{89.9}$$

und für $t = 2$

$$w_2 = \frac{88.87.86.2.1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86} = \frac{2}{89.9},$$

mithin ist

$$W = w_1 + w_2 = \frac{85}{89.9} + \frac{2}{89.9} \text{ oder}$$

$$W = \frac{87}{801}, \text{ d. h. } W > \frac{108}{1000} \text{ und } < \frac{109}{1000}.$$

Beispiel 2. Jemand hat 7 Nummern besetzt, und wünscht zu wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß von diesen 7 Zahlen **wenigstens** 3 herauskommen werden

Hier ist wieder $N = 90$, $r = 5$; $s = 7$, aber weil $s > r$, kann t nur nach und nach

$$t = 3,\ t+1 = 4,\ t+2 = 5$$

gesetzt werden; man erhält demnach:

$$w_3 = \frac{83.82.7.6.5.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{119105}{43949268}$$

$$w_4 = \frac{83.7.6.5.4.5.4.3.2}{1.2.3.4.90.89.88.87.86} = \frac{2905}{43949268}$$

$$w_5 = \frac{7.6.5.4.3.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.90.89.88.87.86} = \frac{21}{43949268};$$

also weil $W = w_3 + w_4 + w_5$ ist,

$$W = \frac{122031}{43949268} = \frac{40677}{14649756}, \text{ d. h. } W > \frac{2}{1000} \text{ und } < \frac{3}{1000}.$$

Beispiel 3. Ist $N = 90$, $r = 5$, $s = 5$, und es wird nach der Probabilität W gefragt, daß von diesen 5 besetzten Nummern wenigstens zwei herauskommen; so hat man zu setzen

$$t = 2,\ t+1 = 3,\ t+2 = 4 \text{ und } t+3 = 5,$$

folglich:

$$w_2 = \frac{85.84.83.5.4.5.4}{1.2.90.89.88.87.86} = \frac{85.83.35.4}{89.86.29.22.9} = \frac{987420}{89.86.29.22.9}$$

$$w_3 = \frac{85.84.5.4.3.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{85.21.20}{89.86.29.22.9} = \frac{35700}{89.86.29.22.9}$$

$$w_4 = \frac{85.5.4.3.2.5.4.3.2}{1.2.3.4.90.89.88.87.86} = \frac{85.5}{89.86.29.22.9} = \frac{425}{89.86.29.22.9}$$

$$w_5 = \frac{5.4.3.2.1.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.90.89.88.87.86} = \frac{1}{89.86.29.22.9} = \frac{1}{89.86.29.22.9},$$

also

$$w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{1023546}{89.86.29.22.9} = \frac{170591}{7324878},$$

d. h. W ist $> \frac{23}{1000}$ und $< \frac{24}{1000}$.

Man sieht aus diesen drei Beispielen sogleich, daß das Spiel im ersten Falle am vortheilhaftesten, im zweiten Falle dagegen am unvortheilhaftesten ist.

§. 18. Fragt man nach der Probabilität W, von N Nummern eines Lotto werden unter r gezogenen Zahlen s bestimmte herauskommen; so ist:

$$W_s = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)} \qquad 24),$$

und sollen diese s bestimmte Nummern in einer gewissen Ordnung herauskommen:

$$W_{s'} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{1.2.3.4\ldots s.N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)} \qquad 25).$$

Beim gewöhnlichen Lotto, wo $N = 90$ und $r = 5$ ist, hat man für einen bestimmten einfachen Auszug, weil $s = 1$,

$$W_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$W_{1'} = \frac{5}{1.90} = \frac{1}{18};$$

für eine bestimmte Ambe, weil $s = 2$,

$$W_2 = \frac{5.4}{90.89} = \frac{2}{89.9} = \frac{2}{801}$$

$$W_{2'} = \frac{5.4}{1.2.89.90} = \frac{1}{89.9} = \frac{1}{801};$$

für eine bestimmte Terne, weil $s = 3$,

$$W_3 = \frac{5.4.3}{90.89.88} = \frac{1}{89.22.6} = \frac{1}{11748}$$

$$W_{3'} = \frac{5.4.3}{1.2.3.90.89.88} = \frac{1}{6.89.22.6} = \frac{1}{70488};$$

für eine bestimmte Quaterne, weil $s = 4$,

$$W_4 = \frac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \frac{1}{89.87.66} = \frac{1}{511038}$$

$$W_{4'} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4.90.89.88.87} = \frac{1}{24.89.87.66} = \frac{1}{12264912};$$

und für eine bestimmte Quinte, weil $s = 5$,

$$W_5 = \frac{5.4.3.2.1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{89.43.29.22.18} = \frac{1}{43949268}$$

$$W_{5'} = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.90.89.88.87.86.} = \frac{1}{120.89.43.29.22.18} = \frac{1}{5273912160}.$$

Man sieht hieraus, daß der Fall, es werden unter r aus N Nummern gezogenen Zahlen s bestimmte Nummern herauskommen, gleiche Probabilität hat mit demjenigen Fall, wo von s besetzten Nummern t Nummern sämmtlich herauskommen, d. h. wo $t = s$ angenommen wird.

§. 19. Ist in 24) $s = r$, d. h. sollen sämmtliche r Nummern, welche in einer Ziehung gezogen werden, vorausbestimmte Nummern sein, so hat man, in 24) $s = r$ setzend,

$$W_s = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.3.2.1}{N(N-1)(N-2)\ldots.(N-r+1)} \qquad 26),$$

und sollen sie überdieß nach einer bestimmten Ordnung herauskommen, so hat man, in 25) $s = r$ setzend,

$$W_{s'} = \frac{1}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-r+1)} \qquad 27).$$

Beim gewöhnlichen Lotto, wo $r = 5$, $N = 90$ ist, wird man demnach erhalten:

$$W_5 = \frac{5.4.3.2.1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{43949268} = 0.000000023\ldots$$

$$W_{5'} = \frac{1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{5273912160} = 0.0000000001\ldots.$$

also resp. einerlei mit den beiden Fällen, eine bestimmte Quinte überhaupt und in einer gewissen Ordnung zu treffen.

§. 20. Eine sehr wichtige Frage ist auch ganz besonders die, wie groß die Wahrscheinlichkeit W_i sein wird, daß, wenn bei einem Lotto i Mal hinter einander jedes Mal r Nummern gezogen worden, alle N Nummern des Lotto dann wirklich herausgekommen sein werden; eine Frage, mit deren Beantwortung sich vorzüglich Euler und Laplace befaßt haben, und zwar immer, wie es auch in der Natur der Sache liegt, unter der Voraussetzung, daß die Anzahl sämmtlicher Ziehungen nicht kleiner sei als der Quotient der Anzahl der jedes Mal gezogenen Nummern in die Zahl aller Nummern, d. h. daß i stets $\overline{>} \frac{N}{r}$ sein müsse.

Den sehr schwierigen, großen Scharfsinn erfordernden, Weg zur Auflösung dieser berühmten Aufgabe hier übergehend, mag es genug sein, die Berechnung dieser Probabilität W_i erst allgemein, und zwar wie sie Euler angegeben hat, und dann speciell an ein paar Beispielen zu zeigen. Man berechne nämlich zuerst

$$A = \frac{[N-r]^i}{1.N^{i-1}}$$

$$B = \frac{[(N-r)(N-r-1)]^i}{1.2.[N(N-1)]^{i-1}}$$

$$C = \frac{[(N-r)(N-r-1)(N-r-2)]^i}{1.2.3.[N(N-1)(N-2)]^{i-1}}$$

$$D = \frac{[(N-r)(N-r-1)(N-r-2)(N-r-3)]^i}{1.2.3.4.[N(N-1)(N-2)(N-3)]^{i-1}}$$

u. s. w.

und zwar so weit, bis irgend eine der folgenden Größen gleich Null wird (gewöhnlich jedoch nur so weit, als man die Genauigkeit treiben will, bis etwa auf 7 Decimalstellen); so hat man dann:

$$\begin{aligned} W_i = 1 - \frac{N}{1}\left[\frac{N-r}{N}\right]^i &+ \frac{(N-1)}{2} A \left[\frac{N-r-1}{N-1}\right]^i \\ &- \frac{(N-2)}{3} B \left[\frac{N-r-2}{N-2}\right]^i \\ &+ \frac{(N-3)}{4} C \left[\frac{N-r-3}{N-3}\right]^i \\ &- \frac{(N-4)}{5} D \left[\frac{N-r-4}{N-4}\right]^i \\ &+ \ldots\ldots \qquad 28). \end{aligned}$$

Beispiel 1. Beim gewöhnlichen Lotto, wo $N=90$ und $r=5$ ist, soll die Wahrscheinlichkeit W_{100} bestimmt werden, daß nach 100 Ziehungen alle 90 Nummern herausgekommen sind. Hier ist $i=100$, und demnach steht die Rechnung wie folgt:

$$A = \frac{85^{100}}{1.90^{99}}, \qquad \log A = 0.4718825-1,$$

$$B = \frac{A}{2}\cdot\frac{84^{100}}{89^{99}}, \ \log B = 0.6091725-2,$$

$$C = \frac{B}{3}\cdot\frac{83^{100}}{88^{99}}, \ \log C = 0.5360739-3,$$

$$D = \frac{C}{4}\cdot\frac{82^{100}}{87^{99}}, \ \log D = 0.3029932-4,$$

$$E = \frac{D}{5}\cdot\frac{81^{100}}{86^{99}}, \ \log E = 0.9371717-6;$$

u. s. w. u. s. w.

folglich, weil

$$\begin{aligned} W_0 = 1 - \frac{90}{1}\left(\frac{85}{90}\right)^{100} & \\ + \frac{89}{2} A \left(\frac{84}{89}\right)^{100} & \\ - \frac{88}{3} B \left(\frac{83}{88}\right)^{100} & \\ + \frac{87}{4} C \left(\frac{82}{87}\right)^{100} & \\ - \frac{86}{5} D \left(\frac{81}{86}\right)^{100} & \\ + \frac{85}{6} E \left(\frac{80}{85}\right)^{100} & \\ - \ldots\ldots & \end{aligned}$$

ist; dann:

$$W_0 = 1 \left.\begin{aligned} & - 0.2964003 \\ & + 0.0406605 \\ & - 0.0034370 \\ & + 0.0002009 \\ & - 0.0000086 \\ & + 0.0000002 \\ & - \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{ oder } W_0 = 0.7410158$$

Beispiel 2. Ein Lottospiel bestehe aus 30 Nummern, von denen jedes Mal 24 Nummern auf einmal gezogen werden; wie groß wird die Probabilität W_3 sein, daß nach 3 Ziehungen alle Nummern herausgekommen sind?

Hier ist $N=30$, $r=24$, $i=3$, und folglich:

$$A = \frac{6^3}{1.(30)^2} = \frac{6}{25}, \text{ also } \log A = 0.3802113-1$$

$$B = \frac{(6.5)^3}{1.2.(30.29)^2} = \frac{15}{841}, \quad \log B = 0.2512953-2$$

$$C = \frac{(6.5.4)^3}{1.2.3.(30.29.28)^2} = \frac{20}{39809}, \quad \log C = 0.7010487-4$$

$$D = \frac{(6.5.4.3)^3}{1.2.3.4.(30.29.28.27)^2} = \frac{20}{4450572}, \quad \log D = 0.6532125-6$$

$$E = \frac{(6.5.4.3.2)^3}{1.2.3.4.5.(30.29.28.27\ 26)^2} = \frac{2}{188036667}, \quad \log E = 0.0000000-8$$

$$F = \frac{(6.5.4.3.2.1)^3}{1.2.3.4.5.6(30.29.28.27.26.25)^2} = \frac{1}{352568750625}, \log F = 0.4771213\text{-}12;$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} W_3 = 1 - \frac{30}{1}\left(\frac{6}{30}\right)^3 &+ \frac{29}{2} A\left(\frac{5}{29}\right)^3 \\ &- \frac{28}{3} B\left(\frac{4}{28}\right)^3 \\ &+ \frac{27}{4} C\left(\frac{3}{27}\right)^3 \\ &- \frac{26}{5} D\left(\frac{8}{26}\right)^3 \\ &+ \frac{25}{6} E\left(\frac{1}{25}\right)^3 \end{aligned}\right\} \text{ also } \begin{aligned} W_3 = 1 - \frac{6}{25} &+ \frac{125}{1682} A \\ &- \frac{4}{147} B \\ &+ \frac{1}{108} C \\ &- \frac{2}{845} D \\ &+ \frac{1}{3750} E, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} W_3 = 1 - 0.2480000 &+ 0.0178359 \\ &- 0.0004853 \\ &+ 0.0000046 \\ &- 0.0000000 \end{aligned}$$

oder

$$W_3 = 0.7693552,$$

die Wahrscheinlichkeit nähert sich der Gewißheit bis auf $\frac{23}{100}$ etwa, während im erstern Beispiele die Probabilität nur um ungefähr $\frac{7}{25}$ größer als $\frac{1}{2}$ ist.

§. 21. Die Auflösung von Laplace übertrifft die Euler'sche insofern an Allgemeinheit, als Laplace annimmt, es werde die Probabilität W_i gesucht, daß in i Ziehungen nicht gerade alle n, sondern überhaupt nur q Nummern herauskommen werden. Diese Probabilität nun *) ist nach Laplace

$$
\begin{aligned}
w_i = 1 &- \frac{q}{1}\left[\frac{(N-r)}{N}\right]^i \\
&+ \frac{q(q-1)}{1.2}\left[\frac{(N-r)(N-r-1)}{N(N-1)}\right]^i \\
&- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left[\frac{(N-r)(N-r-1)(N-r-2)}{N(N-1)(N-2)}\right]^i \\
&+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}\left[\frac{(N-r)(N-r-1)(N-r-2)(N-r-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)}\right]^i \\
&- \ldots\ldots\ldots \\
&\mp \frac{q}{1}\left[\frac{(N-r)(N-r-1)\ldots\ldots(N-r-q+2)}{N\;(N-1)\ldots\ldots(N-q+2)}\right]^i \\
&\pm \left[\frac{(N-r)(N-r-1)\ldots\ldots(N-r-q+1)}{N\;(N-1)\ldots\ldots(N-q+1)}\right]^i \qquad 29).
\end{aligned}
$$

Setzt man in diesem ganz allgemeinen Ausdrucke $q = N$, so erhält man leicht die weniger allgemeine Auflösung Euler's, die im vorigen §. dargestellt worden ist.

Im zweiten Beispiele des vorigen §. war $N = 30$, $r = 24$, $i = 3$; also muß auch $q = 30$ gesetzt werden; hiermit folgt nach dem Ausdruck von Laplace:

$$
\begin{aligned}
W_3 = 1 - \frac{6}{5^2} + \frac{15}{29^2} - \frac{20}{29^2.7^2} + \frac{5}{29^2.7^2.3^3} \\
- \frac{2}{29^2.7^2.3^3.13^2} + \frac{1}{29^2.7^2.27^2.13^3.3},
\end{aligned}
$$

d. h.

$$
\begin{aligned}
W_3 = 1.0000000 - 0.2400000 + 0.0178288 - 0.0004853 \\
+ 0.0000045 - 0.0000000 + \ldots = 0.7773480,
\end{aligned}
$$

also um beinahe 0.008 größer als das im vorigen §. erhaltene Resultat.

II. Von der Lotterie.

§. 22. Die meisten Lotterien bestehen darin, daß aus einem Glücksrade, in das N Nummern (1 bis N) gethan worden sind, anfangs n_1 Nummern gezogen werden, und hierzu aus einem zweiten Glücksrade, in welches n_1 verschiedene Gewinne gethan worden sind, diese n_1 Gewinne gleichzeitig gezogen werden. Hierauf werden von den $N - n_1$ übrig gebliebenen Nummern auf's

*) Doch immer vorausgesetzt $i \overline{\overline{>}} (N:R)$.

Neue n_2 Nummern gezogen, wozu gleichzeitig aus dem zweiten Glücksrade, in das n_2 Gewinne gethan worden, diese n_2 Gewinne gezogen werden. Nun sind noch $N - n_1 - n_2$ Nummern übrig, von denen wieder n_3 Nummern mit n_3 Gewinnen gezogen werden u. s. w. Eine jede solche Ziehung pflegt man eine Klasse zu nennen. Bei der letzten Klasse (Ziehung), welche die $m$te sein mag, werden von den letzten übrig gebliebenen $N - n_1 - n_2 - n_3 - \ldots - n_{m-1}$ Nummern nur eine gewisse Anzahl $= n'$ gezogen, denen aus dem zweiten Glücksrade n' Gewinne zufallen; so daß die liegen gebliebenen $N - n_1 - n_2 - n_3 - \ldots\ldots - n_{m-1} - n'$ Nummern nun bloß sogenannte Nieten erhalten.

Bei einer solchen Lotterie geschieht die Einzahlung bei m Klassen m Mal und zwar dergestalt, daß beim Anfang der Ziehung erster, zweiter, dritter, u. s w., vorletzter und letzter Klasse von N, $N - n_1$, $N - n_1 - n_2$, ... $N - n_1 - n_2 - \ldots - n_{m-2}$, $N - n_1 - n_2 - \ldots - n_{m-2} - n_{m-1}$ Nummern, welches die nach der 0ten, ersten, 2ten, ... $(m-2)$ten und $(m-1)$ten Ziehung noch übrigen Loose (so heißt nämlich jede Nummer der Lotterie) sind, der Einsatz entrichtet werden muß, was man von der zweiten Klasse an das Renoviren der Loose zu nennen pflegt. Was die Gewinne betrifft, so steigen sie von Klasse zu Klasse, und in der letzten Klasse wird der höchste Gewinn, bekanntlich das große Loos genannt, welches für die Spieler das eigentliche Lockmittel, in die Lotterie zu setzen, abgiebt, indem jeder der Spieler hofft, es zu erhalten so glücklich zu sein. Es versteht sich übrigens von selbst, daß sämmtliche nach und nach zu leistenden Einzahlungen in ihrem Totalbetrage gleich sein müssen der Summe aller Gewinne, und daß, je größer die Gewinne in der letzten Klasse ausfallen sollen, von den für die letzte Klasse übrig gebliebenen Loosen desto mehr derselben Nieten erhalten müssen.

§. 23. Um das Vorhergehende noch mehr zu erläutern, wollen wir als ein Beispiel die königl. sächs. Landeslotterie zu Leipzig und deren Plan durchgehen. Sie besteht (jetzt, im Jahre 1838) aus 34000 Loosen und 17000 in 5 Klassen vertheilten Gewinnen. In jeder Klasse werden nur so viele Nummern gezogen, als planmäßig Gewinne vorhanden sind, und die nach Ziehung der planmäßigen 11000 Gewinne der 5ten Klasse aus dem Nummerrade nicht gezogenen Loose sind Nieten.

Die Einlage beträgt auf ein ganzes Loos in jeder Klasse 8 Thaler, also überhaupt 40 Thaler preuß. Courant. Hierbei werden von den gezogenen Gewinnen unter 1000 Thaler Zehn vom Hundert und von Gewinnen von 1000 Thaler und darüber Zwölf und ein Halb vom Hundert abgezogen: die Collecteurs erhalten überdieß von jedem Gewinnthaler 9 Pfennige. Die ganze Einrichtung der Lotterie wird man nun am besten aus dem hier stehenden Plane ersehen können.

Plan

zur 14ten Königl. Sächsischen Landes-Lotterie in Leipzig.

Erste Klasse à 8 Thaler Einlage.		Zweite Klasse à 8 Thaler Einlage.	
Gew.	Thaler.	Gew.	Thaler.
1 à 2000	2000	1 à 3000	3000
1 - 1000	1000	1 - 1000	1000
5 - 400	2000	5 - 400	2000
8 - 200	1600	8 - 200	1600
35 - 100	3500	35 - 100	3500
50 - 40	2000	50 - 50	2500
100 - 30	3000	100 - 40	4000
1300 - 20	26000	1300 - 30	39000
1500 Gew. betr. Thlr.	41100	1500 Gew. betr. Thlr.	56600

Dritte Klasse à 8 Thaler Einlage.		Vierte Klasse à 8 Thaler Einlage.	
Gew.	Thaler.	Gew.	Thaler.
1 à 4000	4000	1 à 5000	5000
1 - 2000	2000	1 - 2000	2000
2 - 1000	2000	2 - 1000	2000
6 - 400	2400	6 - 400	2400
10 - 200	2000	10 - 200	2000
50 - 100	5000	60 - 100	6000
130 - 60	7800	120 - 60	7200
1300 - 40	52000	1300 - 50	65000
1500 Gew. betr. Thlr.	77200	1500 Gew. betr. Thlr.	91600

Fünfte Klasse à 8 Thlr. Einlage.		
Gew.		Thaler.
1 à	100000	100000
1 -	50000	50000
1 -	30000	30000
1 -	20000	20000
2 -	10000	20000
4 -	5000	20000
10 -	2000	20000
60 -	1000	60000
100 -	400	40000
150 -	200	30000
1000 -	100	100000
9670 -	50	483500
11000 Gew. betr. Thlr.		973500

Einnahme. *Bilanz.* Ausgabe.

Einnahme.	Ausgabe.
34000 Loose à 8 ₰ 1ster Kl. betr. 272000 ₰	1500 Gewinne 1ster Kl. betr. 41100 ₰
32500 - - 8 - 2ter - - 260000 -	1500 - 2ter - - 56600 -
31000 - - 8 - 3ter - - 248000 -	1500 - 3ter - - 77200 -
29500 - - 8 - 4ter - - 236000 -	1500 - 4ter - - 91600 -
28000 - - 8 - 5ter - - 224000 -	11000 - 5ter - - 973500 -
Summa 1240000 ₰	17000 Gewinne betragen.... 1240000 ₰.

§. 24. Um nun beurtheilen zu können, ob dieser Plan für die in dieser Lotterie spielenden Personen überhaupt mehr Hoffnung gewährt, gewinnen zu können, gleichviel ob weniger oder mehr, als eine andere Lotterie oder selbst das Lotto, d. h. ob überhaupt der vorliegende Plan in moralischer und arithmetischer Hinsicht Anspruch auf Annehmbarkeit von Seiten der Spielenden sowohl, als auch darauf machen dürfe, daß er die Concessionsgewährung von Seiten des Staates wirklich verdiene; dürfen wir nur mehrere der wichtigsten Fälle besonders durchgehen.

§. 25. 1) Die Wahrscheinlichkeiten, in dieser Lotterie zu gewinnen und zu verlieren, sind einander völlig gleich; denn bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeiten respective durch w_g und w_v so hat man

$$w_g : w_v = \frac{17000}{34000} : \frac{17000}{34000},$$

d. h.

$$w_g : w_v = 1 : 1,$$

also

$$w_g = w_v.$$

2) In der ersten Klasse ist die Wahrscheinlichkeit w_h herauszukommen, also jetzt schon zu gewinnen:

$$w_h = \frac{1500}{34000} = \frac{3}{68},$$

mithin die Wahrscheinlichkeit w_n, in der ersten Klasse noch nicht zu gewinnen, sondern das Loos zum ersten Mal renoviren zu müssen:

$$w_n = \frac{32500}{34000} = \frac{65}{68};$$

also

$$w_h : w_n = 3 : 65; \text{ d. h.}$$

die Befürchtung, in der ersten Klasse nicht herauszukommen, ist $\frac{65}{3} = 21.6666\ldots$ Mal größer als die Hoffnung, in der ersten Klasse bereits zu gewinnen.

3) In der zweiten Klasse ist

$$w_h = \frac{1509}{32500} = \frac{3}{65}$$

$$w_n = \frac{31000}{32500} = \frac{62}{65};$$

also

$$w_h : w_n = 3 : 62, \text{ d. h.}$$

die Befürchtung, in der zweiten Klasse nicht herauszukommen ist $\frac{62}{3} = 20.6666\ldots$ Mal größer als die Hoffnung, in der zweiten Klasse schon einen Gewinn zu erhalten.

4) In der dritten Klasse ist

$$w_h = \frac{1500}{31000} = \frac{3}{62}$$

$$w_n = \frac{29500}{31000} = \frac{59}{62};$$

also

$$w_h : w_n = 3 : 59, \text{ d. h.}$$

die Befürchtung, in der dritten Klasse noch nicht herauszukommen, ist $\frac{59}{3} = 19.6666\ldots$ Mal größer als die Hoffnung, in dieser Klasse bereits zu gewinnen.

5) In der vierten Klasse ist

$$w_h = \frac{1500}{29500} = \frac{3}{59}$$

$$w_n = \frac{28000}{29500} = \frac{56}{59},$$

also

$$w_h : w_n = 3 : 56, \text{ d. h.}$$

die Befürchtung, auch in der vierten Klasse noch nicht herauszukommen, ist $\frac{56}{3} = 18.6666\ldots$ Mal größer als die Hoffnung, in dieser Klasse einen Gewinn zu bekommen.

6) In der fünften Klasse ist

$$w_h = \frac{11000}{28000} = \frac{11}{28}$$

$$w_n = \frac{17000}{28000} = \frac{17}{28};$$

also

$$w_h : w_n = 11 : 17, \text{ d. h.}$$

die Befürchtung, sogar in der fünften Klasse durchzufallen, d. h. eine Niete zu erhalten, ist $\frac{17}{11} = 1.5454\ldots$ Mal größer als die Hoffnung, wenigstens in der letzten Klasse einen Gewinn zu erhalten.

§. 26. 7) In der ersten Klasse ist die Probabilität w_t, t Thaler zu gewinnen, sobald m t Thalergewinne in dieser Klasse vorhanden sind,

$$w_t = \frac{m}{1500} \cdot \frac{3}{68} = \frac{3m}{102000} = \frac{m}{34000},$$

in der zweiten Klasse

$$w_t = \frac{m}{1500} \cdot \frac{3}{65} = \frac{3m}{97500} = \frac{m}{32500},$$

in der dritten Klasse

$$w_t = \frac{m}{1500} \cdot \frac{3}{62} = \frac{3m}{93000} = \frac{m}{31000},$$

in der vierten Klasse

$$w_t = \frac{m}{1500} \cdot \frac{3}{59} = \frac{3m}{88500} = \frac{m}{29500}$$

und in der fünften Klasse

$$w_t = \frac{m}{11000} \cdot \frac{11}{28} = \frac{m}{28000}.$$

So sind z. B. für den Gewinn von 1000 Thlr., da $t = 1000$, und für die 5 Klassen m respective = 1, 1, 2, 2, 60 ist, die respectiven Probabilitäten

$$\frac{1}{34000} = \frac{1}{34000} = 0.00003.....$$

$$\frac{1}{325000} = \frac{1}{32500} = 0.00003.....$$

$$\frac{2}{31000} = \frac{1}{15500} = 0.00006.....$$

$$\frac{2}{29500} = \frac{1}{14750} = 0.00006.....$$

$$\frac{60}{28000} = \frac{3}{1400} = 0.00214.....$$

Für den Gewinn von 100 Thlr., da $t = 100$, und für die 5 Klassen m respective = 35, 35, 50, 60, 1000 ist, sind die respectiven Probabilitäten

$$\frac{35}{34000} = \frac{7}{6800} = 0.001029.....$$

$$\frac{35}{32500} = \frac{7}{6500} = 0.001076.....$$

$$\frac{50}{31000} = \frac{1}{620} = 0.001615.....$$

$$\frac{60}{29500} = \frac{6}{2950} = 0.002033.....$$

$$\frac{1000}{28000} = \frac{1}{28} = 0.035714.....$$

§. 27. Man sieht aus diesen berechneten Beispielen, daß das Spielen in dieser sächsischen Landeslotterie ein ziemlich gewagtes genannt werden muß, welche Behauptung auch durch einen einzigen Blick auf die im Plane stehenden Gewinne, hinsichtlich ihrer Anzahl und Größe, bestätigt wird. Denn erstlich verlieren in dieser Lotterie überhaupt eben so viele Nummern als gewinnen, und zweitens sind in der letzten Klasse einige zu große Gewinne, die zum Spielen recht locken sollen, während eine vernünftigere und gerechtere Lockung einzig und allein darin bestehen sollte, etwas mehr Nummern zu Gewinnen als zu Nieten zu bestimmen, und überdieß aus den ersten zwei oder drei größten Gewinnen der fünften Klasse eine größere Anzahl nicht so bedeutender Gewinne zu formiren. Das Spielen in einer solchen Lotterie würde, weil mehr Hoffnung zum Gewinnen sich darböte, alsdann weniger gefahrvoll sein; denn es ist immer besser, größere Hoffnung zu haben, daß man öfter einen mäßigen Gewinn erhalten werde, als eine nur sehr geringe Hoffnung hegen zu können, daß man einmal einen ungewöhnlich großen Gewinn erhalten werde.

Auch ist es leicht begreiflicher Weise eine in ihren Folgen nicht unbedeutende Ungerechtigkeit, welche die Spielenden auf ihre Gefahr hin zu erdulden haben, daß, nach §. 1. der allgemeinen Bestimmungen für die sächsische Landeslotterie, die nach Ziehung der planmäßigen 11000 Gewinne der fünften Klasse aus dem Nummerrade nicht gezogenen 17000 Loose als Nieten betrachtet werden, was wahrscheinlich nur aus Rücksicht auf die Bequemlichkeit des Ziehungsgeschäfts geschieht, während sämmtliche 28000 Nummern der fünften Klasse, sowohl die Gewinne als die Nieten, wirklich gezogen werden sollten, um die gehörige Durch- und Aufeinanderfolge der Gewinne und Nieten gleichzeitig, und hierdurch auch eine gerechtere Vertheilung, zum gleichen Vor- und Nachtheile aller Spielenden zu bewirken.

§. 28. Der nun folgende Plan einer von mir entworfenen Lotterie soll nur andeuten, wie, gemäß dem, was im vorigen §. gesagt worden ist, eine Lotterie eingerichtet werden könnte, wo mehr Gewinne als Nieten vorhanden, und wo zwar die Gewinne nicht die Höhe der sächsischen Landeslotterie erreichen, dafür aber in der letzten Klasse mehr verhältnißmäßig große Gewinne als in der fünften Klasse der mehrerwähnten Lotterie vorkommen. Wie man aus dem von uns mitgetheilten Plane ersieht, kostet ein ganzes Loos dieser Lotterie 30 Thaler, nämlich in jeder der vier ersten Klassen 5 und in der letzten 10 Thaler; unter den sämmtlichen 30000 Loosen gewinnen 2000 mehr als verlieren, indem nämlich nur 14000 Nieten angenommen worden sind. Es ist mithin die Hoffnung, in dieser Lotterie zu gewinnen, $\frac{8}{7} = 1.142857\ldots$ Mal größer, als die Furcht zu verlieren. Auch sind die Probabilitäten, t Thaler zu gewinnen, sobald m t Thalergewinne in irgend einer gewissen Klasse sich befinden, meistens größer als in derselben Klasse der sächs. Landeslotterie.

Schema einer Lotterie.

Erste Klasse
à 5 Thlr. Einlage.

Gew.		Thaler.
1 à	1000	1000
1 -	600	600
3 -	300	900
5 -	100	500
20 -	50	1000
30 -	40	1200
40 -	35	1400
50 -	30	1500
100 -	25	2500
250 -	20	5000
500 -	13	6000
1000 -	8	8000
2000 Gew. betr. Thlr.		29600

Zweite Klasse
à 5 Thlr. Einlage.

Gew.		Thaler.
1 à	2000	2000
1 -	1600	1600
3 -	1300	3900
5 -	1000	5000
20 -	500	10000
30 -	100	3000
40 -	60	2400
50 -	40	2000
100 -	30	3000
250 -	25	6250
500 -	20	10000
1000 -	15	15000
2000 Gew. betr. Thlr.		64150

Dritte Klasse
à 5 Thlr Einlage.

Gew.		Thaler.
1 à	3000	3000
1 -	2000	2000
3 -	1000	3000
5 -	800	4000
20 -	650	13000
30 -	500	15000
40 -	250	10000
50 -	100	5000
100 -	50	5000
250 -	40	10000
500 -	30	15000
1000 -	20	20000
2000 Gew. betr. Thlr.		105000

Vierte Klasse
à 5 Thlr. Einlage.

Gew.		Thaler.
1 à	4000	4000
1 -	3000	3000
3 -	2000	6000
5 -	1000	5000
20 -	750	15000
30 -	500	15000
40 -	300	12000
50 -	100	5000
100 -	60	6000
250 -	50	12500
500 -	40	20000
1000 -	30	30000
2000 Gew. betr. Thlr.		133500

Fünfte Klasse
à 10 Thlr. Einlage.

Gewinne.		Thaler.
1 à	24000	24000
1 -	16000	16000
1 -	12000	12000
1 -	10000	10000
2 -	5200	10400
4 -	2000	8000
10 -	1000	10000
40 -	100	4000
65 -	90	5850
125 -	80	10000
250 -	70	17500
500 -	60	30000
1000 -	50	50000
2000 -	40	80000
4000 -	35	140000
8000 Gew. betr. Thlr.		427750

Einnahme. *Bilanz.* **Ausgabe.**

Einnahme		Ausgabe	
30000 Loose à 5 Rß 1ster Kl. betr.	150000 Rß	2000 Gew. 1ster Kl. betr.	29600 Rß
28000 - - 5 - 2ter - -	140000 -	2000 - 2ter - -	64150 -
26000 - - 5 - 3ter - -	130000 -	2000 - 3ter - -	105000 -
24000 - - 5 - 4ter - -	120000 -	2000 - 4ter - -	133500 -
22000 - - 10 - 5ter - -	220000 -	8000 - 5ter - -	427750 -
Summa.....	760000 Rß	16000 Gewinne betragen....	760000 Rß

Denn man hat

für die 1ste Klasse $w_t = \frac{m}{2000} \cdot \frac{2}{30} = \frac{m}{30000}$,

für die 2te Klasse $w_t = \frac{m}{2000} \cdot \frac{2}{28} = \frac{m}{28000}$,

für die 3te Klasse $w_t = \frac{m}{2000} \cdot \frac{2}{26} = \frac{m}{26000}$,

für die 4te Klasse $w_t = \frac{m}{2000} \cdot \frac{2}{24} = \frac{m}{24000}$,

für die 5te Klasse $w_t = \frac{m}{8000} \cdot \frac{4}{11} = \frac{m}{22000}$.

So sind z. B. für den Gewinn von 1000 Thlr., da $t = 1000$, und für die 5 Klassen m respective $= 1, 5, 3, 5, 10$ ist, die respectiven Probabilitäten

$$\frac{1}{30000} = \frac{1}{30000} = 0.0003$$

$$\frac{5}{28000} = \frac{1}{5600} = 0.00017$$

$$\frac{3}{26000} = \frac{3}{26000} = 0.00011$$

$$\frac{5}{24000} = \frac{1}{4800} = 0.00020$$

$$\frac{10}{22000} = \frac{1}{2200} = 0.00045.$$

§. 29. Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir mehrere beim Lotto angeführte Fälle auf die sächsische Landeslotterie anwenden.

a) Man nimmt vor Anfang dieser Lotterie s Loose; man will die Probabilität wissen, daß von diesen s Loosen gewiß t Nummern bei der Ziehung der ersten Klasse herauskommen werden. Es ist, da $N = 34000$ und $r = 1500$, nach 7)

$$w = \frac{(34000-s)\ldots(32501-s+t).s\ldots(s-t+1)1500\ldots(1501-t)}{1.2.3\ldots t.34000.33999.33998\ldots\ldots 32501},$$

für die zweite Klasse, da $N = 32500$ und $r = 1501$,

$$w = \frac{(32500-s)\ldots(31001-s+t)\ldots(s-t+1)1500\ldots(1501-t)}{1.2.3\ldots t.32500.32499.32498\ldots\ldots 31001},$$

für die dritte Klasse, da $N = 31000$ und $r = 1500$,

$$w = \frac{(31000-s)\ldots(29501-s+t)s\ldots(s-t+1)1500\ldots(1501-t)}{1.2.3\ldots t.31000.30999.30998\ldots\ldots 29501},$$

für die vierte Klasse, da $N = 29500$ und $r = 1500$,

$$w = \frac{(29500-s)\ldots(28001-s+t)s\ldots(s-t+1)1500\ldots(1501-t)}{1.2.3\ldots t.29500.29499.29498\ldots\ldots28001},$$

und für die fünfte Klasse, wo $N = 28000$, $r = 11000$,

$$w = \frac{(28000-s)\ldots.(17001-s+t)s\ldots(s-t+1)11000\ldots(11001-t)}{1.2.3\ldots t.28000.27999.27998\ldots\ldots17001}.$$

§. 30. b) Sollen s bestimmte Loose in dieser Lotterie herauskommen, so ist nach 24) die Probabilität

bei der ersten Klasse

$$W = \frac{1500\ .\ 1499\ .\ 1498\ldots..\ (1501-s)}{34000\ .\ 33999\ .\ 33998\ldots..(34001-s)},$$

bei der zweiten Klasse

$$W_s = \frac{1500\ .\ 1499\ .\ 1498\ldots.\ (1501-s)}{32500\ .\ 32499\ .\ 32498\ldots.\ (32501-s)},$$

bei der dritten Klasse

$$W_s = \frac{1500\ .\ 1499\ .\ 1498\ldots..\ (1501-s)}{31000\ .\ 30999\ .\ 30998\ldots..\ (31001-s)},$$

bei der vierten Klasse

$$W_s = \frac{1500\ .\ 1499\ .\ 1498\ldots\ldots\ (1501-s)}{29500\ .\ 29499\ .\ 29498\ldots\ldots\ (29501-s)}$$

und bei der fünften Klasse

$$W_s = \frac{11000\ .\ 10999\ .\ 10998\ldots\ldots\ (11001-s)}{28000\ .\ 27999\ .\ 27998\ldots\ldots\ (28001-s)}.$$

§. 31. c) Eine Gesellschaft von 10 Personen will in der Lotterie unter der Bedingung spielen, daß jede Person eine Nummer so nehmen soll, daß sämmtliche 10 Loose verschieden sind. Sie will nun die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von diesen 10 besetzten Nummern in der ersten Klasse gewiß vier herauskommen, um dann den auf diese vier fallenden Gewinne zu gleichen Theilen unter die 10 Theilnehmer, der getroffenen Uebereinkunft gemäß, vertheilen zu können.

Man hat, da $s = 10$, $t = 4$ ist, nach §. 29. a)

$$w = \frac{33990\ldots..32495.10.9.8.7.1500\ldots\ldots1497}{1.2.3.4.34000.33999.33998\ldots\ldots32501},$$

für die zweite Klasse

$$w = \frac{32490\ldots..30995.10.9.8.7.1500\ldots.\ 1497}{1.2.3.4.32500.32499.32498\ldots\ldots\ 31001},$$

für die dritte Klasse

$$w = \frac{30990\ldots.29495.10.9.8.7.1500\ldots..\ 1497}{1.2.3.4.31000.30999.30998\ldots\ldots29501},$$

für die vierte Klasse

$$w = \frac{29490\ldots.27995.10.9.8.7.1500\ldots.\ 1497}{1.2.3.4.29500.29499.29498\ldots\ldots\ 28001}$$

und für die fünfte Klasse

$$w = \frac{27990\ldots.16995.10.9.8.7.11000\ldots10997}{1.2.3.4.28000.27999.27998\ldots..17001};$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner dieser 5 Brüche die gleichen Factoren aufhebt, kürzer

für die erste Klasse

$$w = \frac{32500\ldots32495.210.1500\ldots1497}{34000\ldots\ldots\ldots33991},$$

für die zweite Klasse

$$w = \frac{31000\ldots30995.210.1500\ldots1497}{32500\ldots..32491},$$

für die dritte Klasse

$$w = \frac{29500\ldots29495.210.1500\ldots1497}{31000\ldots\ldots.30991},$$

für die vierte Klasse

$$w = \frac{28000\ldots27995.210.1500\ldots.1497}{29500\ldots\ldots.29491}$$

und für die fünfte Klasse

$$w = \frac{17000\ldots.16995.210.11000\ldots10998}{28000\ldots\ldots27991}.$$

§. 32. d) Sollen die (s. §. 31. c)) vier herauskommenden Nummern vier **bestimmte** sein, so hat man, da $s = 4$, nach §. 30. b)

bei der ersten Klasse

$$w_4 = \frac{1500\ldots\ 1497}{34000\ldots33997}$$

bei der zweiten Klasse

$$w_4 = \frac{1500\ldots\ 1497}{32500\ldots\ 32497},$$

bei der dritten Klasse

$$w_4 = \frac{1500\ldots\ 1497}{31000\ldots30997},$$

bei der vierten Klasse

$$w_4 = \frac{1500 \ldots 1497}{29500 \ldots 29497},$$

und bei der fünften Klasse

$$w_4 = \frac{11000 \ldots 10997}{28000 \ldots 27997}.$$

Wäre aber $s = 1$, d. h. wollte man die Probabilität erfahren, daß nur eine bestimmte Nummer herauskommen werde; so würde diese Probabilität sein:

in der ersten Klasse

$$w_1 = \frac{1500}{34000} = \frac{3}{68},$$

in der zweiten Klasse

$$w_1 = \frac{1500}{32500} = \frac{3}{65},$$

in der dritten Klasse

$$w_1 = \frac{1500}{31000} = \frac{3}{62},$$

in der vierten Klasse

$$w_1 = \frac{1500}{29500} = \frac{3}{59}$$

und in der fünften Klasse

$$w_1 = \frac{11000}{28000} = \frac{11}{28},$$

welche Werthe mit denen in §. 25. 2), 3), 4), 5) und 6) für w_h gefundenen identisch sind, wie es auch in der That der Fall sein muß.

Es würde nun (nach §. 20. S. 15)

$$1 - \left(\frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} \cdot \frac{56}{59} \cdot \frac{17}{28}\right) = 1 - \frac{56.17}{68.28} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

die Probabilität sein, daß eine bestimmte Nummer in dieser Lotterie nicht ganz durchfallen, sondern daß sie wenigstens in der ersten, vielleicht auch in der zweiten erst, vielleicht auch gar erst in der dritten oder vierten Klasse herauskommen, oder, wenn selbst dieß noch nicht geschehen ist, wenigstens in der letzten Klasse mit einem Gewinne erscheinen werde, welche Probabilität $\frac{1}{2}$ also, da in der ganzen Lotterie die Hälfte aller Nummern gewinnt, wirklich richtig ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person entweder **100** oder **1000** Thaler in der sächsischen Landeslotterie gewinnen werde, ist nach 16) §. **12**. S. **10**:

bei der Ziehung der ersten Klasse

$$\frac{35+1}{34000} = \frac{36}{34000} = \frac{9}{8500} = 0{,}00105\ldots\ldots,$$

bei der Ziehung der zweiten Klasse

$$\frac{35+1}{34000} = \frac{36}{34000} = \frac{9}{8500} = 0{,}00105\ldots\ldots,$$

bei der Ziehung der dritten Klasse

$$\frac{50+2}{31000} = \frac{52}{31000} = \frac{13}{7750} = 0{,}0016\ldots\ldots,$$

bei der Ziehung der vierten Klasse

$$\frac{60+2}{29500} = \frac{62}{29500} = \frac{31}{14750} = 0{,}0020\ldots.,$$

und bei der Ziehung der fünften Klasse

$$\frac{1000+60}{28000} = \frac{1060}{28000} = \frac{53}{1400} = 0{,}0378\ldots.,$$

woraus die wachsende Hoffnung dieser Person bei Ziehung jeder folgenden Klasse hervorgehet.

Viertes Capitel.

Von der Stimmenmehrheit.

§. 33. Bekanntlich werden fast in allen Versammlungen oder Gesellschaften die meisten Fragen, Vorschläge, Wahlen u. s. w. der Ansicht zufolge, daß die Majorität (Stimmenmehrheit) fast immer die eigentliche Meinung der ganzen Versammlung zu erkennen gebe, durch die Majorität entschieden. Es giebt nämlich jedes stimmberechtigte Mitglied auf irgend eine Art, z. B. mittelst Stimmzettel oder weißen und schwarzen Kugeln, sein Ja oder Nein in Bezug auf eine vorgelegte Frage stillschweigend ab; hierauf werden die Mengen der bejahenden und verneinenden Stimmen gezählt, wo alsdann die größere von diesen beiden Mengen, d. h. also die Majorität entscheidet. Oefters wird auch durch Namensaufruf abgestimmt. Soll nun aber hierbei von einem gewissen Werthe und von einer genügenden Sicherheit der, durch ein solches gewöhnliches Verfahren bewerkstelligten, Entscheidungen, auf welche nebst ihren Folgen doch offenbar Alles ankommt, die Rede sein; so hat man zu berücksichtigen, daß der Werth und die Sicherheit einer Entscheidung natürlich sich nach dem Werthe und der Sicherheit der Majorität richten. Letztere hängen aber nicht etwa von der absoluten Größe der Stimmenmehrheit allein ab, sondern werden hauptsächlich bedingt: 1) durch das Verhältniß der Minorität (Stimmenminderheit) zur Majorität und 2) durch die genaue Kenntniß der Einsicht und Unparteilichkeit jeder stimmberechtigten Person.

§. 34. Das Verhältniß der Minorität zur Majorität wird gewöhnlich nur sehr unvollständig berücksichtigt, indem man die Stimmenmehrheit, sollte sie auch bisweilen bloß um eine Stimme größer als die Minorität sein, stets als entscheidungsfähig gelten läßt, ausgenommen den Fall, wo die Mengen der bejahenden und verneinenden Stimmen gleich groß sind, in welchem Falle, weil er des offenbaren Zweifels wegen keine Entscheidung zuläßt, entweder die Abstimmung noch einmal vorgenommen, oder nach den, für diesen Fall in den Statuten der Gesellschaft vorgeschriebenen, Regeln verfahren wird. Uebrigens wird gewöhnlich hierbei kein Unterschied zwischen einer größern und geringern Majorität gemacht, was offenbar falsch ist. Denn wenn von $n+1$ Votirenden die Majorität $\frac{1}{2}n+1$, die Minorität $\frac{1}{2}n$ ist; so ist (nach S. 4 §. 8.) die Wahrscheinlichkeit, daß die Meinung eines jeden dieser Stimmenden, alle gleich vorurtheilsfrei angenommen, die wahre sei, offenbar sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$, d. h. nahe gleich der Probabilität des Gegentheils, daß nämlich seine Meinung nicht die wahre sei. Sind sie aber alle derselben Meinung, d. h. ist die Majorität $=n+1$, die Minorität $=0$, so ist jene Probabilität jedes einzelnen Votirenden sehr nahe gleich der Einheit, d. h. der Gewißheit. Außer diesen beiden äußersten Grenzen kann mithin nur die Größe des Verhältnisses der Minorität zur Majorität entscheiden, welches Verhältniß von $\frac{1}{2}$ bis 1 wachsen kann.

§. 35. In dieser Hinsicht setzt nun freilich manche Gesellschaft fest, daß bei nur unbedeutender Majorität eine Entscheidung durch Stimmenmehrheit noch gelte, sobald letztere wenigstens um eine, zwei, drei Stimmen u. s. w. größer als die Minorität sei, d. h. mit andern Worten, wenn die Versammlung einen gewissen arithmetischen Unterschied zwischen der Minorität und Majorität als diejenige Grenze festsetzt, bei welcher die Stimmenmehrheit noch als entscheidend angesehen werden und mithin alle Fälle, wo gedachter Unterschied kleiner ausfällt, davon ausgeschlossen bleiben sollen. Sei z. B. 2 diese Grenze, so wird man haben bei einer Gesellschaft

	Majorität.	Minorität.	Verhältniß.
von 4 Personen	3	1	1 : 3.00
„ 6 „	4	2	1 : 2.00
„ 8 „	5	3	1 : 1.67
„ 10 „	6	4	1 : 1.50
„ 26 „	14	12	1 : 1.17
„ 50 „	26	24	1 : 1.08
„100 „	51	49	1 : 1.04.

§. 36. Dieses Schema zeigt indeß deutlich, daß für einen und denselben Unterschied zwischen beiderlei Stimmen, deren Verhältniß bei zunehmender Anzahl der Stimmenden sich überhaupt immer mehr der Einheit nähert, die Entscheidungen selbst desto unsicherer ausfallen müssen, je stärker die Gesellschaft wird.

Dasselbe wird der Fall sein, wenn statt 2 eine größere Zahl als Unterschied zwischen Minorität und Majorität festgesetzt wäre; z. B. ist 3 diese Grenze, so wird man haben bei einer Gesellschaft

	Majorität.	Minorität.	Verhältniß.
von 5 Personen	4	1	1 : 4.00
„ 9 „	6	3	1 : 2.00
„ 15 „	9	6	1 : 1.50
„ 85 „	44	41	1 : 1.07,

folglich wieder die vorhin erwähnte Annäherung des Verhältnisses zur Gleichheit. So lange also dieser arithmetische Unterschied derselbe bleibt, desto geringer wird dann der Werth und die Sicherheit der Majorität, je zahlreicher die Gesellschaft wird.

Es muß daher jede Versammlung, die einen arithmetischen Unterschied zwischen beiderlei Stimmen als Grenze festsetzen will, eine möglichst kleinste sein, will sie anders werthvolle und sichere Entscheidungen mittelst Majorität erhalten.

§. 37. Da jedoch eine kleinere Versammlung für die von ihr zu vertretenden Interessen natürlich weniger Garantie als eine größere Corporation gewähren kann; so wird deshalb und dem Obigen zufolge statt des arithmetischen Unterschiedes immer ein gewisses geometrisches Verhältniß der Minorität zur Majorität als Grenze anzunehmen sein, d. h. jede Gesellschaft muß festsetzen, daß bei nur unbedeutender Stimmenmehrheit eine Entscheidung durch die Majorität noch gelten solle, sobald letztere wenigstens zwei, drei, vier Mal, u. s. w. so groß als die Minorität sei. Sei z. B. als kleinste noch geltende Stimmenmehrheit diejenige, welche 2 Mal größer als die Minorität ist; so wird man haben bei einer Gesellschaft

	Maj.	Min.	Differenz.
von 3 Personen	2	1	2
„ 6 „	4	2	2
„ 12 „	8	4	4
„ 24 „	16	8	8
„ 45 „	30	15	15
„ 90 „	60	30	30.

§. 38. Dieses Schema nun zeigt offenbar, daß für ein und dasselbe geometrische Verhältniß zwischen beiderlei Stimmen, deren Unterschied bei zunehmender Anzahl der Stimmenden überhaupt immer größer wird, die Entscheidungen desto sicherer ausfallen müssen, je stärker die Gesellschaft wird.

Dasselbe wird der Fall sein, wenn die Majorität statt wenigstens 2 Mal wenigstens 3 Mal größer als die Minorität sein soll; denn dann wird man z. B. haben bei einer Versammlung

	Maj.	Min.	Unterschied.
von 4 Personen	3	1	2
„ 12 „	9	3	6
„ 24 „	18	6	12
„164 „	123	41	82,

folglich wieder das vorhin erwähnte Größerwerden des Unterschiedes zwischen Minorität und Majorität. So lange also dieses geometrische Verhältniß stets dasselbe bleibt, desto größer wird der Werth und die Sicherheit der Majorität, je zahlreicher die Gesellschaft wird.

§. 39. Wir ersehen nun hieraus, daß es also, um den durch Stimmenmehrheit zu bewerkstelligenden Entscheidungen so viel als möglich Werth und Sicherheit zu verschaffen, sehr unstatthaft ist, jede nach dem bisher gewöhnlichen Abstimmungsverfahren gefundene Majorität als entscheidungsfähig anzusehen, oder einen gewissen Unterschied derselben von der Minorität als diejenige Grenze anzunehmen, wo die nicht sehr groß gefundene Majorität noch als entscheidungsfähig gelten soll; sondern: daß vielmehr zu dieser Grenze ein bestimmtes geometrisches Verhältniß der Minorität zur Majorität für eine Gesellschaft von einer bestimmten Anzahl Mitglieder angenommen werde.

§. 40. Die zweite Bedingung, von welcher der Werth und die Sicherheit der Stimmenmehrheit abhängt, ist die genaue Kenntniß der Einsicht und Unparteilichkeit jeder stimmberechtigten Person. Diese Bedingung ist jedoch weit schwerer als die erste zu erfüllen, da eine solche genaue Kenntniß meistens kaum zu erlangen, und folglich auch nur sehr schwer in Rechnung zu nehmen sein wird. Denn wie könnte wohl die Beschaffenheit oder der Grad der Einsicht und Unparteilichkeit eines jeden Votirenden durch Zahlen völlig genau dargestellt werden, und was müßte die Einheit oder das Maaß hierzu sein?

§. 41. Es giebt indeß einige auf die Erfahrung gegründete, von der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestätigte Sätze, die zu einer wenigstens indirecten Beseitigung des nachtheiligen Einflusses dienen werden, den ein größerer oder geringerer Mangel an Kenntniß der Einsicht und Unparteilichkeit der Stimmenden auf den Werth und die Sicherheit der Majorität und der Entscheidung ausüben kann. Diese Sätze sind nun zwar ganz allgemein, jedoch wird ihre möglichste Berücksichtigung bei der Wahl der Personen, aus denen die Gesellschaft gebildet werden soll, den möglichst besten Erfolg hinsichtlich der Abstimmungen und Entscheidungen gewähren. Einige solcher allgemeinen Sätze sind folgende: 1) Jedes Mitglied muß sittliche und Schulbildung genossen haben; 2) richtig zu denken vermögen; 3) möglichst genau mit dem Gegenstande, um den es sich eben handelt und über welchen abgestimmt werden soll, bekannt sein; 4) von allgemein herrschenden Vorurtheilen seiner Zeit nicht eingenommen sein; 5) ohne alle Leidenschaft und Parteilichkeit, bloß die Wichtigkeit der zu entscheidenden Frage im Auge behaltend, nach seiner wahrhaften innern Ueberzeugung seine Stimme abgeben; doch vorausgesetzt, daß diese Ueberzeugung nicht gleich auf die erste Ansicht der Sache gefolgt sei, da dieselbe gar oft trügt, und mithin die Wahrheit nicht stets zugleich auch wahrscheinlich ist; 6) muß auch die Gesellschaft aus desto mehr Personen zusammengesetzt werden, je größer dasjenige ist, welches durch die Gesellschaft repräsentirt oder vertreten werden soll.

§. 42. Sind daher bei Constituirung einer gewissen Versammlung diese allgemeinen Sätze nicht unberücksichtigt gelassen worden, und wird nach jeder erfolgten Abstimmung, welche eine nur geringe Majorität herausgestellt hat, deren Verhältniß zur Minorität mit dem, von der Versammlung ein für alle Mal festgesetzten, geometrischen Verhältnisse vor der sich nach der Stimmenmehrheit richtenden Entscheidung erst gehörig verglichen; — so werden dadurch, vorausgesetzt, daß die Gesellschaft jederzeit vollzählig sei *), die Anfangs erwähnten Hauptbedingungen gewiß erfüllt, die sich ergebenden Majoritäten folglich und die nach diesen vorzunehmenden Beschlüsse der Versamm-

*) Es ist aus leicht aufzufindenden Gründen unerläßlich, daß, wenn einige Mitglieder zu erscheinen behindert sind, dann deren Stellvertreter einberufen werden.

lung möglichsten Werth und möglichste Sicherheit erlangen, die Abstimmung möge übrigens auf irgend eine Art, welche sie sei, vorgenommen worden sein.

§. 43. Wir wollen zum Beschlusse zwei von dem gewöhnlichen Verfahren etwas abweichende Abstimmungsmethoden, die nicht viel umständlicher und zeitraubender, wohl aber genauer und sicherer als jenes sind, mittheilen und durch Beispiele erläutern. Sie sind jedoch nur da anwendbar, wo bloß durch Ja und Nein entschieden werden soll.

Erste Methode. Es kann jede stimmberechtigte Person einen Stimmzettel so angeben, daß sie auf ihm, wenn **I** die Bejahung und **N** die Verneinung bezeichnet, **I** oben und **N** unten, sobald sie mit Ja, **N** aber oben und **I** unten setzt, sobald sie mit Nein stimmen will. Man legt dann die sämmtlichen eingegangenen Stimmzettel neben einander, giebt dem obern Buchstaben den Werth 2, dem untern den Werth 1, und addirt hierauf alle Werthe von **I** und alle Werthe von **N**; die größere der beiden gefundenen Summen giebt endlich die gesuchte Majorität.

Beispiel. 5 Personen votiren, und es giebt die nachherige Nebeneinanderstellung ihrer Stimmzettel folgendes Schema:

Person	1.	2.	3.	4.	5.	
	N	N	N	N	I	Werth 2,
	I	I	I	I	N	Werth 1;

mithin die Stimmenmenge

für **I** $1+1+1+1+2=6$,

für **N** $2+2+2+2+1=9$,

also besitzt **N** die Majorität und die Verneinung gilt als Entscheidung.

Zweite Methode. Es kann öfters bei der vorigen Methode jeder Stimmende zugleich angeben, wie viel Mal sicherer er, seiner Ueberzeugung nach, dem einen als dem andern Falle beitreten zu müssen glaube. Wenn also z. B. Jemand auf seinen Stimmzettel 3 **N** oben und **I** unten angesetzt hat, so will er dadurch andeuten, daß er die Verneinung für 3 Mal vortheilhafter als die Bejahung halte, oder, daß er der Verneinung ein drei Mal größeres Gewicht als der Bejahung beilegen zu müssen glaube.

Gesetzt nun, es sei nach diesem Abstimmungsverfahren obiges Schema so ausgefallen:

	1.	2	3.	4.	5.
Person	3 N I	2 N I	4 N I	10 N I	2 I N;

so erhält man hieraus die Stimmenmenge

für I $1+1+1+1+2=6$,

für N $3+2+4+10+1=20$,

mithin hat die Verneinung wieder die Majorität für sich und gilt folglich als Entscheidung

Sind mehrere Vorschläge gemacht, oder soll die Wahl eines von mehrern zu einer erledigten Stelle sich gemeldeten Candidaten bewerkstelligt werden, oder dergleichen, und man soll durch Abstimmen darüber entscheiden; so kann dieses Abstimmen nach der im folgenden Capitel mitgetheilten allgemeinen Methode mehr oder minder modificirt geschehen.

Fünftes Capitel.

Von den Wahlen (bei Besetzung von Stellen), den Censuren und Prämienvertheilungen.

§. 44. Wenn n Candidaten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$ sich zu einer erledigten Stelle, über deren Besetzung die m Personen A, B, C, ..., L, M zu verfügen das Recht besitzen, gemeldet haben; so kann die von diesen m Personen zu treffende Wahl desjenigen, welcher unter den n Candidaten die meisten Ansprüche auf die fragliche Stelle hat, am allgemeinsten und sichersten auf folgende Art bewerkstelligt werden.

§. 45. Es sind bei jedem der n Candidaten unter mancherlei Umständen namentlich folgende als die wichtigsten, weil sie den Grad der Ansprüche eines jeden der n Bewerber auf die Stelle offenbar bedingen, zu berücksichtigen durchaus nöthig:

1) das Alter a,
2) der Gesundheitszustand g,
3) das Vermögen v,
4) das Ledig- oder Verheirathetsein l und
5) der Charakter, die Kenntnisse und Leistungen k.

Was nun die Punkte 1) und 4) betrifft; so herrscht hinsichtlich derselben wohl jedes Mal Gewißheit; rücksichtlich des zweiten und dritten Punktes können meistens nur wenig von einander differirende Ansichten stattfinden. Dagegen werden die Wähler wegen des fünften Punktes öfters abweichender Meinung sein weshalb jeder Wähler durch eine Zahl anzudeuten hat, wie hoch er den Punkt 5) bei jedem der sich gemeldeten Candidaten anschlägt.

§. 46. Die nun bald folgenden Regeln für das ganze Wahlverfahren gründen sich hauptsächlich auf nachstehende Bemerkungen. Je älter oder je gesünder irgend ein Candidat als der andere ist, desto größer müssen natürlich des erstern Ansprüche auf die Stelle vor denen des letztern sein. Ferner, je wohlhabender irgend ein Bewerber als der andere ist, desto mehr ist offenbar der letztere vor dem erstern zu berücksichtigen; ein Verheiratheter endlich hat stets mehr Ansprüche auf eine Versorgung, als ein Lediger, und zwar um so mehr, je stärker seine Familie ist; auch hat ohne Weiteres der kenntnißreichere und geschicktere Bewerber vor dem minder kenntnißreichen und dem weniger geschickten den Vorzug.

§. 47. Das allgemeinste und sicherste Wahlverfahren möchte nun folgendes sein. Jeder der m Wähler **A**, **B**, .. **L**, **M** schreibt auf ein Blatt Papier, der Stimmzettel genannt, der Reihe nach die Namen der n Candidaten $\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu$ unter einander, und setzt jedem derselben diejenige Zahl z bei, die nach seiner, durch eine vorausgegangene sorgfältige Untersuchung gewonnenen, Ansicht die Verdienste des Candidaten zu dieser Wahl unparteiisch ausdrücken soll. Diese sich folglich nur nach dem Charakter, den Kenntnissen und Leistungen des resp. Candidaten richtende Zahl z hat er dann noch mit dem Gewicht **W** der durch das Alter a, den Gesundheitszustand g, das Vermögen v, und das Ledig= oder Verheirathetsein l derselben Person bedingten, besondern Ansprüche zu multipliciren, um diejenige Zahl $Z = Wz$ zu erhalten, die er dieser Person dann überhaupt auf seinem Stimmzettel beilegen muß, um hierauf den letztern selbst als zur vollständigen Wahl mitwirkend abgeben zu können. Was das hierbei vorkommende Gewicht **W** anbelangt, so ist für jeden Candidaten offenbar

$$W = agvl \qquad 30),$$

wofür a, g, v und l das Alter des jüngsten, des kränklichsten, des reichsten und jedes ledigen Candidaten die respectiven Einheiten sind, von denen, wie bereits erwähnt, a und l übereinstimmend, g und v aber mehr oder minder hoch von den einzelnen Wählern angenommen werden. Doch kann auch hinsichtlich der beiden letzten Punkte bisweilen eine Vereinigung unter den Wählern zu Stande kommen oder bereits eine einstimmige Ansicht stattfinden, was dann die Rechnung allerdings etwas vereinfachen würde. Uebrigens ist l stets = 2, 3, 4, u. s. w. zu setzen, wenn der verheirathete Candidat respective 0, 1, 2, u. s. w. Kinder hat.

Haben endlich auf die oben angezeigte Art die m Wähler **A, B, . . . L, M** ihre Stimmzettel mit den eigentlichen Stimmen **Z** eingegeben; so addirt man die von jedem Wähler jedem Candidaten ertheilten Stimmen zusammen, und demjenigen nun, welcher die größte Stimmenmenge für seine Person erhalten hat, ist, weil er hierdurch die meisten Ansprüche auf die Stelle erhalten hat, diese Stelle mit Sicherheit und Rechtmäßigkeit zu übertragen.

Das Schema eines Stimmzettels würde daher dem Vorhergehenden zufolge so ausfallen:

Stimmzettel des Wählers, z. B. **D.**

Candidat.	Zahl z	Alter.	Gesundheit.	Vermögen.	Ledig= oder Verheirathetsein.	Gewicht W	Stimmenmenge Z
α	z_1	a_1	g_1	v_1	l_1	$a_1 g_1 v_1 l_1$	$W_1 z_1$
β	z_2	a_2	g_2	v_2	l_2	$a_2 g_2 v_2 l_2$	$W_2 z_2$
γ	z_3	a_3	g_3	v_3	l_3	$a_3 g_3 v_3 l_3$	$W_3 z_3$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
ν	z_ν	a_ν	g_ν	v_ν	l_ν	$a_\nu g_\nu v_\nu l_\nu$	$W_\nu z_\nu$

§. 48. Ein vollständig ausgeführtes Beispiel wird das ganze Verfahren noch mehr erläutern.

7 Candidaten α, β, γ, δ, ε, ζ, η haben sich gemeldet zu einer Stelle, deren Besetzung den 4 Personen **A, B, C, D** zusteht. α ist 17, β 20, γ 21, $\delta = 25$, $\varepsilon = 28\frac{1}{2}$, $\zeta = 30$ und η 32 Jahre alt. Ferner halten die vier Wähler den Candidaten δ für den kränklichsten, ζ für gesünder als δ, η für gesünder als ε, β für gesünder als η, für kränklicher aber als γ und den Candidaten α für den gesündesten von allen. Hinsichtlich des Vermögens folgen sie in der Ordnung β, α, η, ζ, δ, γ und ε, so daß β der reichste und ε der ärmste ist. Endlich sind α, γ, ε, η ledig, β hat bloß eine Frau, δ hat eine Frau mit einem Kinde, und ζ ist ein Wittwer mit 2 Kindern.

Man hat nun erstlich wegen des Alters

$$\begin{aligned} a = 1.00 &\text{ für } \alpha \\ 1.18 &\text{ ,, } \beta \\ 1.24 &\text{ ,, } \gamma \\ 1.47 &\text{ ,, } \delta \\ 1.68 &\text{ ,, } \varepsilon \\ 1.76 &\text{ ,, } \zeta; \end{aligned}$$

ferner wegen des Gesundheitszustandes

$g = 1$ für δ
2 „ ζ
3 „ ε
4 „ η
5 „ β
6 „ γ
7 „ α;

ferner wegen des Vermögens

$v = 1$ für β
2 „ α
3 „ η
4 „ ζ
5 „ δ
6 „ γ
7 „ ε;

endlich wegen des Ledig- oder Verheirathetseins

$= 1$ für α
1 „ γ
1 „ ε
1 „ η
2 „ β
3 „ δ
3 „ ζ.

Daher erhält man

für α den Werth $W = 1.00 \times 7 \times 2 \times 1 = 14.00$
„ β „ „ $W = 1.18 \times 5 \times 1 \times 2 = 11.80$
„ γ „ „ $W = 1.24 \times 6 \times 6 \times 1 = 44.64$
„ δ „ „ $W = 1.47 \times 1 \times 5 \times 3 = 22.05$
„ ε „ „ $W = 1.68 \times 3 \times 7 \times 1 = 35.28$
„ ζ „ „ $W = 1.76 \times 2 \times 4 \times 3 = 42.24$
„ η „ „ $W = 1.82 \times 4 \times 3 \times 1 = 21.84$.

Setzt man nun **W** eines jeden Candidaten auf den Stimmzettel statt **agvl**; so fällt das Schema eines Stimmzettels (s. oben) sehr einfach aus, nämlich, wenn hinsichtlich des Charakters, der Kenntnisse und Leistungen

der Wähler	A	B	C	D	die Zahlen
für α	4	3	2	2	
β	2	5	4	3	
γ	1	2	1	1	
δ	2	2	2	3	
ε	3	2	3	3	
ζ	2	1	2	1	
η	3	2	1	4	angesetzt worden sind,

Stimmzettel des Wählers **A.**

Candidat.	z	w	Stimmenmenge.
α	4	14.00	56 00
β	2	11.80	23.60
γ	1	44.64	44.64
δ	2	22.05	44.10
ε	3	35.28	105.84
ζ	2	42.24	84.48
η	3	21.84	65.52;

Stimmzettel des Wählers **B.**

Candidat.	z	w	Stimmenmenge.
α	3	14.00	42.00
β	5	11.80	59 00
γ	2	44.64	89.28
δ	2	22.05	44.10
ε	2	35.28	70.56
ζ	1	42.24	42.24
η	2	21.84	43.68;

Stimmzettel des Wählers **C.**

Candidat.	z	w	Stimmenmenge.
α	2	14.00	28.00
β	4	11.80	47.20
γ	1	44.64	44.64
δ	2	22.05	44.10
ε	3	35.28	105.84
ζ	2	42.24	84.48
η	1	21.84	21.84;

Stimmzettel des Wählers **D.**

Candidat.	z	w	Stimmenmenge.
α	2	14.00	28.00
β	3	11.80	35.40
γ	1	44.64	44.64
δ	3	22.05	66.15
ε	3	35.28	105.84
ζ	1	42.24	42.24
η	4	21.84	87.36.

Dann ergiebt die Zusammenstellung der 4 Stimmzettel der Wähler **A**, **B**, **C** und **D** folgende Stimmenmengen für die sieben Candidaten:

α	hat	154.00	Stimmen und überhaupt
β	„	165.20	
γ	„	223.20	
δ	„	198.45	
ε	„	388.08	
ζ	„	253.44	
η	„	218.40	

ε die meisten, α die wenigsten Stimmen erhalten. Der Reihe nach folgen die 7 Candidaten nun so:

Cand.	Stimmen.	Alter.	Gesund-heit.	Ver-mögen.	Familie.
ε	388	$28\frac{1}{2}$	3	7	1
ζ	253	30	2	4	3
γ	223	21	6	6	1
η	218	32	4	3	1
δ	198	25	1	5	3
β	165	20	5	1	2
α	154	17	7	2	1

§. 49. Da es öfters schwierig ist, den Gesundheitszustand oder das Vermögen, oder beides zusammen, eines oder mehrerer Bewerber genau zu erfahren; so ist es in diesem Falle am rathsamsten, diese beiden Punkte in dem vorhergehenden Bestimmungsverfahren gar nicht mit zu berücksichtigen, sondern sie bei sämmtlichen Candidaten einander gleich (etwa $= 1$) anzunehmen. Dann aber geht der Ausdruck für **W** in 30) über in

$$W = al \qquad 31).$$

Man würde demnach im vorigen Beispiele erhalten

		W
für	α	1.00
	β	1.18
	γ	1.24
	δ	1.47
	ε	3.36
	ζ	5.28
	η	5.46

folglich:

Candidat.	A	B	C	D	Summen der Stimmenmengen.
α	4.00	3.00	2.00	2.00	11.00
β	2.36	5.90	4.72	3.54	16.52
γ	1.24	2.48	1.24	1.24	6.20
δ	2.94	2.94	4.41	4.41	13.23
ε	10.08	6.72	10.08	10.08	36.96
ζ	10.56	5.28	5.28	5.28	31.68
η	16.38	10.92	21.84	21.84	54.60,

wo also nun η die meisten, γ die wenigsten Stimmen bekommen hat.

§. 50. Gewöhnlich werden selbst auch das Alter und das Ledig= oder Verheirathetsein nicht mit berücksichigt. Dann muß man diese beiden Punkte bei sämmtlichen Candidaten gleichfalls einander gleich (etwa $= 1$) annehmen, und es wird der Ausdruck für **W** in 31) übergehen in

$$W = 1,$$

mithin auch $Z = z$ werden, d. h. es ist dann nur nöthig, daß jeder Wähler jedem Candidaten diejenige Zahl z beisetzt, die nach seiner Ansicht die Verdienste des Candidaten zur Wahl ausdrücken soll.

Man würde demnach im letzten Beispiele unmittelbar erhalten

für	A	B	C	D	Summe der Stimmenmengen.
α	4	3	2	2	11
β	2	5	4	3	14
γ	1	2	1	1	5
δ	2	2	2	3	9
ε	3	2	3	3	11
ζ	2	1	2	1	6
η	3	2	1	4	10,

wo also β die meisten, ζ die wenigsten Stimmen bekommen hat.

§. 51. Ein anderes fast eben so einfaches, wie das letzte im vorigen §. erwähnte, Verfahren, ist folgendes: Jeder Wähler entwerfe seinen Stimmzettel so, daß er den Namen desjenigen Candidaten, den er für den besten hält, oben ansetzt, durch den nächst darunter gesetzten Namen eines andern Candidaten bezeichnet, daß dieser der jenem nächst würdigste sei, u. s. w. und durch den unten zuletzt angesetzten Namen den diesen Namen führenden Candidaten als den zur Stelle am wenigsten tauglichen zu er=

kennen giebt. Nun denke man sich dem auf der untersten Zeile stehenden Candidaten den Werth 1, dem zunächst darüber stehenden den Werth 2, u. s. w. und dem auf der obersten Zeile angesetzten Candidaten den höchsten Werth beigelegt, und addire hierauf die jedem Candidaten zugefallenen Werthe, als die gesuchten Stimmenmengen betrachtet.

Beispiel. Zur Besetzung einer gewissen Stelle sind den Wählern **A, B, C, D, E** die 3 Candidaten α, β, γ vorgeschlagen worden, und es findet sich folgende Zusammenstellung:

A	B	C	D	E	Werth.
β	β	γ	β	α	3
α	α	β	γ	β	2
γ	γ	α	α	γ	1.

Es hat demnach

der Candidat α $2+2+1+1+3 = 9$ Stimmen
" " β $3+3+2+3+2 = 13$ "
" " γ $1+1+3+2+1 = 8$ "

und mithin bekommt β, weil er die meisten Stimmen hat, die Stelle.

§. 52. Die vorhergehenden Methoden, besonders die zuletzt erwähnte, können, wie man sogleich bemerken wird, vorzüglich benutzt werden, sobald irgend eine Gesellschaft aus mehrern Personen constituirt werden soll, wo die als Candidaten betrachteten zur Wahl der Directoren, Sekretären, Deputirten u. s. w. dieser Gesellschaft von den dabei betheiligten als Wähler betrachteten Personen **A, B, C,** u. s. w. vorgeschlagen und gewählt werden sollen. Hierbei werden diejenigen Corporationen, welche sich, ihren Institutionen gemäß, am Ende einer jeden Periode von mehrern Jahren ganz erneuern sollen, stets sicherer gehen, wenn sie in kleinern Perioden wenigstens eine theilweise Erneuerung der Wahlen vornehmen. Der Grund dieser Maßregel liegt darin, daß die neuen Wahlen immer von den Meinungen abhängen, die gerade um die Zeit dieser Wahlen die vorherrschendsten sind. Je öfter also diese Wahlen theilweise vorgenommen werden, desto mehr wird man sich der allgemeinen Meinung des größten Theils der Gesellschaft überhaupt annähern. — Auch wird man bald finden, wie eine möglichst der Wahrheit nahe kommende und also gerechte Austheilung von Censuren und Prämien hinsichtlich der sittlichen Aufführung, des Fleißes, der Kenntnisse, Leistungen, u. s. w. an Schüler aller Art und jedes Alters mit Hilfe der vorhergehenden Methoden zu bewerkstelligen sei. Die Censuren würden nach ihren verschiedenen Graden am besten durch Zahlen darzustellen sein, und was die Prämien betrifft, so kann man mit der Austheilung derselben völlig auf dieselbe Weise verfahren, welche in diesem Capitel, besonders in den §.§. 50 und 51, gelehrt worden ist. Es bedarf wohl hier keiner weitern Erläuterung durch Beispiele.

Schlußbemerkung. Leider können noch immer die Interessen der einzelnen Wähler und mehrere andere den Verdiensten der Candidaten oft ganz fremde Rücksichten die Ordnung und Sicherheit, welche man bei solchen Wahleinrichtungen zu erreichen beabsichtigt, sehr leicht stören. Dann möchte es freilich am gerathensten sein, die Wahl lieber wie bisher durch absolute Stimmenmehrheit zu bewerkstelligen, hierbei aber wenigstens alle diejenigen Bewerber, welche die Majorität gleich anfangs verschmäht, ganz auszuschließen.

Sechstes Capitel.

Von den Gerichtsurtheilen.

§. 53. Alle diejenigen Gerichte, welche sehr wichtige Aussprüche zu thun oder schwere Verurtheilungen (als das Resultat ihrer Verhandlungen) auszusprechen haben, müssen natürlich im Besitze der stärksten Gründe für die Existenz der zu strafenden Verbrechen sein. Weil aber jede nur moralische Ueberzeugung keine unwidersprechliche Wahrheit, sondern eine bloße Wahrscheinlichkeit ist; so muß man, zumal man weiß, daß selbst die scheinbar gerechtesten Richter bereits zu viele beklagenswerthe Mißgriffe gethan haben, hinsichtlich der Aussprüche oder Verurtheilungen, namentlich zum Tode, mit der größten Vorsicht verfahren, obschon es meistens rein unmöglich ist, den Gerichtsurtheilen eine mathematische Gewißheit abzufordern, die jedoch möglichst zu erlangen die Gefahr gebietet, der die Gesellschaft, bliebe das Verbrechen straflos, sonst ausgesetzt sein würde. Um daher diese Schwierigkeiten so viel als möglich zu beseitigen, muß man sich bemühen, für das von dem Beklagten begangene Verbrechen wenigstens so starke Beweise zu erlangen, daß die bürgerliche Gesellschaft durch die unschuldige Verurtheilung des Beklagten weniger zu befürchten hat, als wenn der schuldige Beklagte, frei gesprochen, durch seine künftigen Verbrechen die bürgerliche Gesellschaft eben so bedroht, wie durch das Beispiel, welches seine Lossprechung ähnlichen Verbrechen giebt. Leider hängt die gedachte Beseitigung obiger Schwierigkeiten von vielen oft schwer zu erkennenden Nebenumständen ab, und es wird fast stets unmöglich sein, den zu einer Verurtheilung erforderlichen Grad der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens mit Gewißheit anzugeben, was folglich jedem Richter zur Bedingung macht, seinem innern Gefühle, welches sich meistens nach der Kenntniß der Gesetze und Menschen richtet, durch Umsicht und Scharfsinn bestimmt und durch viele vorausgegangene Erfahrungen bei ähnlichen Fällen unterstützt wird, zu folgen und dem gemäß zu handeln. Der Richter hat überdieß die Größe der Strafe oder das sogenannte Strafmaaß wohl in's Auge zu fassen, weil die Strafe offenbar dem Verbrechen angemessen sein muß, und besonders die Beweise für die auszusprechende Todesstrafe ein ganz anderes Gewicht als die für eine Gefängnißstrafe von einem oder etlichen Jahren besitzen müssen, indem sonst z. B. schwere Strafen auf leichte Verbrechen gesetzt nur dazu beitragen würden, viele besonders schwere Schuldige ganz freizusprechen. Ueberhaupt gilt als Regel: das Maaß der Gefahr, das für die bürgerliche Gesellschaft aus der Freisprechung des Schuldigen unfehlbar entstehen kann, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, es sei das Verbrechen wirklich begangen worden, multiplicirt durch die Größe des Verbrechens.

§. 54. Um nun die Wahrscheinlichkeit, ein solches durch die Mehrheit der stimmenden Richter ausgesprochene Urtheil sei wirklich ein gerechtes Urtheil, zu finden, ist Folgendes zu berücksichtigen. Offenbar geht aus der nur eine einzige Stimme betragenden Differenz zwischen den verurtheilenden und lossprechenden Stimmen die große Zweifelhaftigkeit des zu verhandelnden Gegenstandes und also auch die nichthumane Verurtheilung des Angeklagten hervor. Dagegen wird ein durch die Totalität aller Stimmen ausgesprochenes Urtheil eine sehr große Wahrscheinlichkeit für die Gerechtigkeit einer solchen Sentenz geben, obschon diese Unanimität der Stimmen keine nothwendige Bedingung für eine schwere Strafe sein kann, indem, da die Totalität der Stimmen verhältnißmäßig nur selten eintreten wird, sonst gewiß zu viele Schuldige ungestraft loskommen würden.

Beides, diese Unanimität der Richter, und jene nur eine Stimme betragende Differenz zwischen der Majorität und Minorität sind Extreme, die man vermeiden muß.

§. 55. Soll jedoch a) jene Differenz als zur Entscheidung noch geltend angesehen werden, so ist die Differenz bei einer größern Anzahl von Richtern auch verhältnißmäßig zu vergrößern; und soll b) die Unanimität der Stimmen als sicher entscheidend gelten, so ist die Anzahl der Richter verhältnißmäßig zu vermindern.

§. 56. Es sei nun überhaupt $p + q$ die Anzahl sämmtlicher Richter eines Tribunals, von welchen p den Angeklagten verurtheilen, q aber ihn freisprechen; so wird die Wahrscheinlichkeit w, es sei in dem gefällten Urtheil ein Fehler zu befürchten, sein:

$$w = \frac{1}{2^{(p+q+1)}} \left\{ 1 + \frac{(p+q+1)}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1 \cdot 2} \right.$$
$$+ \frac{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$\left. + \frac{(p+q+1)(p+q) \cdots (p+2)}{1 \cdot 2 \cdots q} \right\} \qquad 32)$$

und, wenn zur Giltigkeit der Verurtheilung die Unanimität der Stimmen gefordert wird,

$$w = \frac{1}{2^{p+1}} \qquad 33)$$

und wenn die Majorität nur um eine Stimme größer als die Minorität, d. h. wenn $q = p - 1$ sein soll,

$$w = \frac{1}{2^2} \left\{ 1 + \frac{2p}{1} + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} + \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{2p(2p-1) \cdots (p+2)}{1 \cdot 2 \cdots (p-1)} \right\} \qquad 34).$$

§. 57. In der als Beispiel gegebenen Tabelle

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	w
4	3	1	3.000	0.187
6	4	2	2.000	0.227
10	6	4	1.500	0.274
16	9	7	1.285	0.314

zeigen die Zahlen in der Columne $\frac{p}{q}$, daß sich das Verhältniß der Majorität zur Minorität desto mehr der Einheit, d. h. also der Gleichheit nähert, je größer bei übrigens gleichbleibender Differenz beiderlei Stimmen die Anzahl der Richter wird, bis endlich für ein sehr großes $p + q$, d. h. für ein sehr zahlreiches Tribunal beiderlei Stimmen sehr nahe gleich werden, also die eine Hälfte der Richter für und die andere Hälfte der Richter gegen die Strafe ist, wodurch das Resultat ganz unentschieden bleibt, was auch die Zahlen in der Columne w bestätigen, indem diese durch ihr Wachsen das Zunehmen der Wahrscheinlichkeit, die ausgesprochene Sentenz sei ungerecht, anzeigen. Dasselbe wird immer stattfinden, wenn auch die Differenz beiderlei Stimmen größer wäre. Daraus folgt nun offenbar, daß die Besorgniß eines unrichtigen Urtheils, und mithin auch die Unsicherheit des Angeklagten desto größer werden muß, je größer die Anzahl der Richter ist. Somit ist auch die Richtigkeit obiger ersten Behauptung: „Soll eine Differenz als zur Entscheidung noch geltend angesehen werden, so ist die Differenz bei einer größern Anzahl von Richtern auch verhältnißmäßig zu vergrößern“ hinlänglich bestätigt. — Das folgende Beispiel, wenn man in ihm die gedachte Differenz beiderlei Stimmen mit der Zunahme sämmtlicher Richter ebenfalls zunehmen läßt, wird dieß durch die Zahlen in der letzten Columne w, so wie auch schon durch die vorletzte Columne, sehr deutlich zeigen.

p + q	p	q	$\frac{p}{q}$	w
3	2	1	1.0	0.313
6	4	2	2.0	0.227
10	7	3	2.3	0.113
18	14	4	3.5	0.009.

Hingegen wird man aus der, als ein Beispiel für den Fall der Unanimität der Richter entworfenen, gegebenen Tabelle

p + q	w
3	$\frac{1}{2^4} = 0.0625$
6	$\frac{1}{2^7} = 0.0078$
10	$\frac{1}{2^{11}} = 0.0005$
18	$\frac{1}{2^{19}} = 0.0000$

alsbald ersehen, daß obige zweite Behauptung: „eine durch die Totalität aller Stimmen ausgesprochenes Urtheil gebe eine desto größere Wahrscheinlichkeit für die Gerechtigkeit einer Sentenz, je größer p + q, d. h. je zahlreicher ein Tribunal ist“ sich gleichfalls bestätigt.

§. 58. Ist die Majorität nur um eine Stimme größer als die Minorität, so zeigt die nach 34) §. 56. entworfene Tabelle

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	w
3	2	1	2.0000	0.3125
5	3	2	1.5000	0.3412
7	4	3	1.3333	0.3633
9	5	4	1.2500	0.3770
11	6	5	1.2000	0.3872

u. s. w.

ebenfalls, daß sich das Verhältniß der Majorität zur Minorität desto mehr der Gleichheit nähert, und daß die Wahrscheinlichkeit w, es sei in dem gefällten Urtheile ein Fehler zu befürchten, fortwährend wachse.

Wurde die Unanimität der Stimmen erfordert, und war w gegeben, so folgt aus 33)

$$p = \frac{\log 2 - \log w}{\log 2} \qquad 33^*).$$

Für den Fall $p = q = n$, d. h. wo von $2n$ Richtern die eine Hälfte verurtheilt, die andere aber losgesprochen hat, folgt aus 32)

$$w = \frac{1}{2^{2n+1}} \left\{ 1 + \frac{(2n+1)}{1} + \frac{(2n+1)2n}{1\,.\,2} + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n+1)2n\ldots\ldots(n+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,n} \right\} = \tfrac{1}{2},$$

wie es auch in der That sein muß, da in diesem Falle natürlich wegen vollkommenen Zweifels keine Entscheidung erfolgen kann.

Siebentes Capitel.

Von dem Aussagen der Zeugen.

§. 59. Die Aussagen von Zeugen, d. h. solcher Personen, die, freiwillig oder gezwungen, bei einer gerichtlichen Untersuchung etwas mittheilen oder bestätigen wollen oder sollen, sind für den Gang einer jeden gerichtlichen Untersuchung von großer Wichtigkeit.

§. 60. Bei einem Zeugenverhör nun können mehrere besondere Fälle vorkommen.

1) Ein Zeuge sagt aus, von N angeblich sich zugetragenen Fällen habe sich der Fall F wirklich zugetragen, d. h. dieser Zeuge behauptet, es habe der Fall F statt gefunden. Welches wird nun die Wahrscheinlichkeit w sein, daß dieser Fall F sich wirklich ereignet habe?

(Man sieht leicht ein, daß man dafür auch sagen kann: Eine Urne enthält N Nummern, und eine Person, die bei der Ziehung dieser Nummern gegenwärtig war, sagt aus, die Nummer F sei gezogen worden; welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Nummer F in der That gezogen worden ist?)

Wenn p die Wahrhaftigkeit des Zeugen, d. h. die Wahrscheinlichkeit, er suche nicht zu betrügen, und r die Sicherheit des Zeugen oder die Wahrscheinlichkeit, er betrüge sich nicht selbst, d. h. er irre sich nicht, bedeutet; so wird man haben

$$w = pr + \frac{(1-p)(1-r)}{N-1} \qquad 35).$$

Wenn nun der Zeuge wirklich sich nicht irrt, so muß $r=1$ gesetzt werden, und man erhält dann

$$w = p,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, der Fall F habe sich wirklich ereignet, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge nicht zu betrügen gesucht habe.

Wenn aber der Zeuge, wie man weiß, wirklich nicht zu betrügen sucht, so muß seine Wahrhaftigkeit $p=1$ gesetzt werden, und man erhält dann

$$w = r,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit w, daß der Fall F wirklich statt gefunden habe, wird gleich sein der Sicherheit r des Zeugen, d. h. gleich der Wahrscheinlichkeit, der Zeuge habe sich nicht geirrt.

Beispiele. a) Jemand, von dem man weiß, daß er sich eben so oft irrt als nicht, daß er jedoch streng wahrheitsliebend ist, sagt aus, daß bei der Ziehung einer Lotterie von 34000 Loosen wirklich die Nummer 25850 gezogen worden sei. Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Nummer 25850 in der That gezogen worden ist? Hier ist $N = 34000$, $p = 1$, $r = \frac{1}{2}$, also nach 35)

$$w = 1 \times \tfrac{1}{2} + \frac{0 \times \frac{1}{2}}{33999} = \tfrac{1}{2},$$

mithin zweifelhaft.

b) Ist der Zeuge ein anerkannter Betrüger und ein stets völlig zerstreuter Mann, so muß seine Wahrhaftigkeit $p = 0$, und seine Sicherheit oder die Wahrscheinlichkeit, er betrüge sich nicht selbst, r ebenfalls $= 0$ gesetzt werden. Dann aber hat man nach 35)

$$w = 0 + \frac{1 \times 1}{33999} = 0{,}00002\ldots$$

d. h. die von diesen Zeugen erfolgte Aussage ist fast völlig falsch und die besagte Nummer so gut wie gar nicht gezogen worden.

Je größer N wird, desto mehr wird sich w der Größe pr nähern, d. h. desto zuversichtlicher kann man behaupten, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit, der Fall F habe sich wirklich zugetragen, der Wahrhaftigkeit des Zeugen in dessen Sicherheit multiplicirt gleich sei.

Dieß gilt jedoch nur bei sich gleich bleibenden Werthen von p und q. Je größer aber diese Werthe bei einem stets wachsenden N werden, desto mehr wird sich auch die Wahrscheinlichkeit, der Fall F habe sich wirklich zugetragen, der Gewißheit selbst nähern, wie folgende berechnete Tabelle offenbar zeigt:

p	r	N	pr	$\frac{(1-p)(1-r)}{N-1}$	W
0.3	0.3	15	0.09	0.035000	0.125000
0.4	0.4	31	0.16	0.012000	0.172000
0.5	0.5	87	0.25	0.002907	0.252907
0.6	0.6	213	0.36	0.000755	0.360755
0.7	0.7	815	0.49	0.000110	0.490110
0.8	0.8	1277	0.64	0.000031	0.640031
0.9	0.9	3045	0.81	0.000003	0.810003
1.0	1.0	7000	1.00	0.000000	1.000000 .

§. 61. Es ist klar, daß alle vorhergehenden Resultate nur dann richtig sein können, wenn der Zeuge, sobald er sich irrt, eben so leicht auf einen als auf einen andern der in der That nicht statt gefundenen (der angeblich sich zugetragenen) Fälle verfallen kann. Sollten aber zwei oder mehrere von diesen N vorgebrachten Fälle eine größere Aehnlichkeit unter sich haben und also leichter verwechselt werden können, oder sollte der Zeuge für diesen oder jenen Fall besonders eingenommen sein, u. dgl., so würden offenbar die obigen Resultate als keine richtigen zu betrachten sein.

§. 62. 2) Von N Fällen sei nur ein einziger, der nicht für einen Angeschuldigten, hätte dieser Fall wirklich statt gefunden, günstig sprechen würde. Ein Zeuge sagt nun aus, dieser Fall habe statt gefunden. Welches wird dann die Wahrscheinlichkeit w sein, daß in der That sich dieser Fall ereignet habe? Werden die vorigen Bezeichnungen beibehalten, so hat man

$$w = \frac{pr + (1-p)(1-r)}{pr + (1-p)(1-r) + \{1-pr-(1-p)(1-r)\}(N-1)} \qquad 36),$$

und für die Wahrscheinlichkeit $w'(=1-w)$, dieser dem Angeschuldigten ungünstige Fall habe in der That nicht statt gefunden,

$$w' = \frac{[1-pr-(1-p)(1-r)](N-1)}{pr+(1-p)(1-r)+[1-pr-(1-p)(1-r)](N-1)} \qquad 37).$$

(Für alles dieses kann man auch setzen: Eine Urne enthalte $N-1$ weiße und eine schwarze Kugel. Ein Zeuge sagt aus, es sei die schwarze Kugel gezogen worden; welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in der That die schwarze Kugel gezogen worden sei? Eben so ist die Wahrscheinlichkeit w', daß nicht die schwarze, sondern eine weiße Kugel gezogen worden sei.)

Je größer N wird, desto zweifelhafter wird die Aussage des Zeugen, wenn nicht zugleich $pr + (1-p)(1-r)$ sehr nahe $= 1$ ist. Je größer hingegen N wird, desto außerordentlicher erscheint auch der von dem Zeugen ausgesagte Fall, ein Beweis, wie sehr die Außerordentlichkeit eines Falles die Aussage des Zeugen schwächt. Uebrigens zeigt die Größe $pr + (1-p)(1-r)$ die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zeuge die Wahrheit, so wie sie ihm erschien, wirklich gesagt, d. h. daß er weder betrogen noch sich geirrt, oder daß er zugleich betrogen und sich geirrt habe. Setzt man daher $pr+(1-p)(1-r)=q$, so erhalten obige beide Gleichungen 36) und 37) die folgenden einfachern Formen

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{q}{q+(1-q)(N-1)} \\ w' &= \frac{(1-q)(N-1)}{q+(1-q)(N-1)} \end{aligned}\right\} \qquad 38).$$

Wenn, sobald N in $N+\Delta N$ übergehet, q in $q+\Delta q$ übergehet, so hat man, $p=1$ gesetzt,

$$q = r,$$

also

$$q+\Delta q = r+\Delta r$$

und folglich nach 38)

$$w+\Delta w = \frac{r+\Delta r}{r+\Delta r+(1-r-\Delta r)(N+\Delta N-1)}.$$

Ist nun für $N=5$, $r=0.1$, so erhält man für

$N+\Delta N$	$r+\Delta r$	w
5	0.1	$\frac{0.1}{3.7} = \frac{1}{37} = 0.027$
6	0.2	$\frac{0.2}{4.2}$ $\frac{1}{21}$ 0.048
7	0.3	$\frac{0.3}{4.5}$ $\frac{1}{15}$ 0.067
8	0.4	$\frac{0.4}{4.6}$ $\frac{2}{23}$ 0.087
9	0.5	$\frac{0.5}{4.5}$ $\frac{1}{9}$ 0.111
10	0.6	$\frac{0.6}{4.2}$ $\frac{1}{7}$ 0.143
11	0.7	$\frac{0.7}{3.7}$ $\frac{7}{37}$ 0.189
12	0.8	$\frac{0.8}{3.0}$ $\frac{4}{15}$ 0.267
13	0.9	$\frac{0.9}{2.1}$ $\frac{3}{7}$ 0.429
14	1.0	$\frac{1.0}{1.0}$ $\frac{1}{1}$ 1.000,

durch welche zunehmenden Werthe von w obige Behauptung vollkommen bestätigt wird, daß, wenn die Aussage des Zeugen bei wachsendem N nicht zweifelhafter werden soll, auch der Werth von q, d. h. wenn $p = 1$ ist, der Werth von r desto mehr sich der Einheit nähern muß; oder mit andern Worten: Ist der Zeuge wirklich kein Betrüger, so muß er, wenn die Zahl der Fälle sich vergrößert, sich desto weniger irren, wenn die Wahrscheinlichkeit, es habe von der erwähnten Zahl von Fällen wirklich der Fall **F** statt gefunden, sich der Gewißheit immer mehr nähern soll.

§. 63. 3) Eine Urne enthält **N** weiße und eine andere Urne **N** schwarze Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel, wirft diese in die andere Urne, und zieht endlich aus dieser wieder eine Kugel. Ein Zeuge sagt nun aus, in der ersten Ziehung sei eine weiße Kugel, und ein zweiter Zeuge, in der zweiten Ziehung sei gleichfalls eine weiße Kugel gezogen worden. Welches wird die Wahrscheinlichkeit w sein, daß wirklich in beiden Ziehungen eine weiße Kugel ergriffen worden sei?

Bedeuten q und q′ die Wahrscheinlichkeiten, daß beide Zeugen die Wahrheit gesagt haben, so ist wie vorher

$$q = pr + (1-p)((1-r),$$

also

$$q' = p'r' + (1-p')(1-r'),$$

und wird der Kürze wegen

$$qq' + (1-q)(1-q') = Q$$

gesetzt, so wird man dann haben

$$w = \frac{qq'}{Q + (1-Q)N} \qquad 39),$$

welche Wahrscheinlichkeit folglich wieder desto geringer wird, je größer N, d. h. je außerordentlicher der von den beiden Zeugen ausgesagte Fall ist.

Wenn z. B. $p = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$; $p' = \frac{3}{10}$, $r' = \frac{3}{4}$ und $N = 5$ ist; so erhält man

$$q = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$q' = \frac{9}{40} + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{40} + \frac{7}{40} = \frac{2}{5} = 0.4,$$

und also

$$Q = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

mithin nach 39)

$$w = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} \times 5)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{2}{5 + 25} = \frac{1}{15} = 0.0666\ldots.$$

$$\text{und} \quad w' = 0.9333\ldots.;$$

es ist daher die Wahrscheinlichkeit, es sei wirklich in beiden Ziehungen eine weiße Kugel ergriffen worden, sehr gering.

§. 64. 4) Zwei Zeugen sagen im Betreff irgend eines Ereignisses übereinstimmend dasselbe aus. Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß sich wirklich zutrug?

Als hierzu gewähltes Beispiel enthalte eine Urne N Nummern und beide Zeugen sagten aus, die Nummer F sei gezogen worden. Man bezeichne, wie vorher, durch p und p' die Wahrhaftigkeiten beider Zeugen, und nehme an, diese beiden Zeugen hätten sich nicht geirrt; so ist, weil nun $r = r' = 1$ angenommen werden muß, die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{(N-1)pp'}{(N-1)pp' + (1-p)(1-p')} \qquad 40),$$

mithin die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer F nicht gezogen worden ist, weil diese Wahrscheinlichkeit $= 1 - w$,

$$w' = \frac{(1-p)(1-p')}{(N-1)pp' + (1-p)(1-p')} \qquad 41).$$

Für N = 2 werden beide Wahrscheinlichkeiten einander gleich, denn man erhält

$$w = w' = \frac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')} \qquad 42),$$

welches überhaupt die Gleichung für die Wahrscheinlichkeit eines von zwei Zeugen übereinstimmend ausgesagten Ereignisses ist, sobald das Eintreffen und Nichteintreffen dieses Ereignisses gleich möglich sein kann.

Sind die Wahrscheinlichkeiten, daß beide Zeugen nicht zu betrügen suchen, gleich groß, d. h. ist $p' = p$, so geht die letzte Gleichung 42) über in

$$w = w' = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2} \qquad 43).$$

Sind statt zwei, überhaupt z gleich wahrhafte Zeugen gegenwärtig, welche die Existenz eines solchen Ereignisses aussagen; so ist die Wahrscheinlichkeit w_z, dieses Ereigniß habe in der That statt gefunden,

$$w_z = \frac{p^z}{p^z + (1-p)^z} \qquad 44),$$

jedoch dabei immer vorausgesetzt, daß die Existenz und Nichtexistenz dieses Ereignisses gleich möglich sei.

Anmerkung. Je größer die Anzahl N der in der Urne liegenden Nummern wird, desto näher kommt in 40) die Größe w der Einheit, d. h. je mehr Nummern in der Urne enthalten sind, desto wahrscheinlicher wird es, daß die Nummer F wirklich gezogen worden sei. Dieß kommt daher, weil die Zeugen, wenn sie ja betrügen wollten, doch unmöglich alle eine und dieselbe Nummer angegeben haben würden.

§. 65. 5) Der Zeuge **A** sagt aus, es sei die Nummer a aus einer **N** Nummern enthaltenden Urne gezogen worden, der Zeuge **B** hingegen sagt aus, daß die Nummer b aus dieser Urne gezogen worden sei. Man weiß, daß der Grad des Sichnichtirrens bei beiden Zeugen, deren Wahrhaftigkeiten p und p' sind, der größte, also $r' = r = 1$ ist. Dann wird die Wahrscheinlichkeit w, die Nummer a sei wirklich gezogen worden.

$$w = \frac{p(N-1)(1-p')}{(N-1)(1-pp') - (1-p)(1-p')} \qquad 45).$$

Für $N = 2$ und $p = p'$ wird

$$w = \tfrac{1}{2} \text{ und } w' = \tfrac{1}{2},$$

wo w' die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, daß nämlich die Nummer b gezogen worden sei, bezeichnet. Dieser Fall ist der, wo die Existenz der beiden Ereignisse, welche die Zeugen **A** und

B aussagen, eben so wahrscheinlich als die Nichtexistenz derselben, und wo überdieß die Wahrhaftigkeiten beider Zeugen gleich groß sind. Da nun $w = w' = \frac{1}{2}$, so heben sich beide Zeugnisse gegenseitig auf.

Noch haben wir zu bemerken, daß, wenn ein Fall dieser Art von f Zeugen bejahet und von g Zeugen verneint wird, auch hierbei die Wahrhaftigkeiten aller f + g Zeugen gleich groß sind, die Wahrscheinlichkeit w_f, dieser Fall habe sich in der That zugetragen, dann gleich sei

$$w_f = \frac{p^{f-g}}{p^{f-g} + (1-p)^{f-g}} \qquad 46),$$

welche Wahrscheinlichkeit (zufolge in §. 64. 4)) eben so groß ist, als wäre sie von f — g Zeugen bestätigt worden.

§. 66. 6) Littrow hat in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung *) einen sehr interessanten Fall, der bisweilen bei historischen Untersuchungen mit nicht geringem Nutzen anzuwenden sein dürfte, allgemein dargestellt. Wenn nämlich die Aussage, daß z. B. aus einer Urne, die N Nummern enthält, die Nummer F gezogen worden, nach und nach, auf dem Wege der Tradition, durch z Zeugen bestätigt worden ist; so ist die Wahrscheinlichkeit w_z, daß dieser Fall in der That statt gehabt habe:

$$w_z = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \cdot \frac{(Np_1-1)(Np_2-1)(Np_3-1)\ldots(Np_z-1)}{(N-1)^z} \qquad 47),$$

wo p_1, p_2, p_3, u. s. w., p_z die Wahrhaftigkeit des 1sten, 2ten, 3ten, u. s. w., zten Zeugen bedeutet.

Wäre hier N unendlich groß, so würde sein

$$w_z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{z-1} \cdot p_z. \qquad 48).$$

Wäre aber N = 2, d. h. wäre die Existenz des Falles eben so möglich als seine Nichtexistenz, so würde man aus 47), wenn daselbst N = 2 gesetzt würde, erhalten:

$$w_z = \frac{1}{2} + \frac{(2p_1-1)(2p_2-1)(2p_3-1)\ldots(2p_{z-1}-1)(2p_z-1)}{2} \qquad 49)$$

und überhaupt: je weiter diese Reihe der Traditionen sich erstreckte, desto mehr würde sich der Werth von w der Größe $\frac{1}{N}$, d. h. der absoluten Wahrscheinlichkeit nähern, daß die Nummer F

*) J. J. Littrow, die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben. Wien, 1833.

in der That gezogen worden sei. Aus der Gleichung 47) kann man übrigens augenblicklich abnehmen, wie die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit durch spätere Zeugen immer mehr vermindert wird, indem offenbar die Bruchfactoren $\frac{Np_1-1}{N-1}$, $\frac{Np_2-1}{N-1}$, $\frac{Np_3-1}{N-1}$ u. s. w. stets kleiner werden, weil die Werthe von p_1, p_2, p_3 u. s. w. mit der Zeit immer mehr abnehmen müssen.

§. 67. Das Zeugenaussagen muß natürlich, was die Wahrscheinlichkeit desselben betrifft, alle Gerichte und Juristen überhaupt sehr interessiren. Freilich ist es uns öfters gar nicht möglich, auf solchen Wegen, wie die in den vorigen §§. angedeuteten sind, zur Wahrheit selbst zu gelangen, weil außer andern Nebendingen und Zufälligkeiten gerade die beiden Hauptelemente der Rechnung, nämlich die Wahrhaftigkeit und die Sicherheit der Zeugen meistentheils unbekannt bleiben. Das soll jedoch nicht etwa abschrecken, die vorgetragenen Bestimmungsmethoden auf mancherlei einfache Fälle anzuwenden, weil ja offenbar einer schwankenden auf bloßes subjectives Gutdünken und zum Theil unrichtige Meinungen gegründeten Ansicht eine wenn auch nur genäherte Kenntniß, unterstützt durch Rechnung, stets vorzuziehen ist. Uebrigens steht dieses Capitel seinem Inhalte nach, wie man sieht, mit dem vorhergehenden in genauer Verbindung, indem die Gerichtsurtheile unter andern auch mit von den Aussagen der Zeugen abhängen.

Achtes Capitel.

Von der Ziehung von Kugeln aus Urnen.

§. 68. Wenn eine Urne x Kugeln enthält und man greift in dieselbe auf's Geradewohl; so wird die Probabilität w, eine gerade Anzahl Kugeln zu ergreifen,

$$w = \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} \qquad 50),$$

und die Probabilität w′, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ergreifen, weil $w_1 = 1 - w$,

$$w_1 = \frac{2^{x-1}}{2^x-1} \qquad 51),$$

ihre Summe

$$w + w_1 = \frac{2^{x-1}-1+2^{x-1}}{2^x-1}$$

aber, wie es (nach §. 9. 5)) sein muß, gleich der Einheit sein. Die Formel 51) für w_1 zeigt übrigens, daß $w_1 > w$, d. h. daß es wahrscheinlicher ist, eine ungerade als eine gerade Anzahl Kugeln zu ergreifen. Da nun $w_1 > w$, so sei

$$w_1 = \frac{2^{x-1}}{2^x-1} = \frac{1}{2} + y, \text{ also } w = \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} = \frac{1}{2} - y.$$

Bestimmt man jetzt aus der erstern dieser beiden Gleichungen y, so findet man leicht

$$y = \frac{1}{2(2^x-1)} \qquad 52),$$

und daher

$$w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^x-1)},\ w = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2^x-1)}.$$

Betrachtet man nun diese beiden Ausdrücke genauer, so findet man bald, daß, je größer x wird, y oder der Bruch $\frac{1}{2(2^x-1)}$ desto kleiner wird. Mithin nähern sich, je größer x wird, die beiden Wahrscheinlichkeiten w_1 und w desto mehr dem Bruche $\frac{1}{2}$, d. h. es wird dann desto wahrscheinlicher, eben so gut eine ungerade als eine gerade Anzahl Kugeln aus der Urne zu ergreifen. Je kleiner aber x wird, desto mehr wird sich y, d. h. $\frac{1}{2(2^x-1)}$ dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähern, mithin wird die Probabilität w_1, eine ungerade Anzahl zu ergreifen, der Gewißheit, dagegen die Probabilität, eine gerade Anzahl zu ergreifen, der Null, d. h. der Unmöglichkeit, immer näher kommen. Läge also z. B. nur eine einzige Kugel in der Urne, so würde man, da $x = 1$ ist, erhalten

$$w = 0$$
$$w_1 = 1$$
$$y = \tfrac{1}{2},$$

d. h. es ist mathematisch gewiß, keine gerade, sondern nur eine ungerade Anzahl von Kugeln, d. h. eben bloß die einzige in der Urne liegende Kugel auf's Geradewohl zu ergreifen.

§. 69. Wäre die Anzahl aller in einer Urne befindlichen Kugeln unbekannt, man wüßte jedoch, daß sie nicht größer als n, mithin x selbst nur alle Werthe von 1 bis n haben kann; so würde sein

$$w_1 = \frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2} \qquad 53),$$

und, weil $w = 1 - w_1$,

$$w = \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2} \qquad 54).$$

Hat eine Urne x weiße und x schwarze Kugeln, so giebt es zwei Fälle zu unterscheiden.

Man kann nämlich erstens fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit w sein wird, daß, wenn man eine gerade Anzahl Kugeln aus der Urne ergriffen hätte, die eine Hälfte davon aus weißen, die andere Hälfte aus schwarzen Kugeln bestehe; zweitens kann man fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit w_1 sein wird, daß, man mag eine gerade oder eine ungerade Anzahl Kugeln aus der Urne ergriffen haben, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln gezogen worden sei.

Ist

$$\frac{1.2.3.4\ldots 2x}{(1.2.3.4\ldots x)^2} = y$$

gesetzt worden, so hat man

$$w = \frac{y-1}{2^{2x-1}-1} \qquad 53^*), \qquad w_1 = \frac{y-1}{2^{2x}-1} \qquad 54^*);$$

also, weil $2^{2x} - 1 > 2^{2x-1} - 1$, offenbar

$$w_1 < w,$$

wie es auch sein muß.

Beispiele. 1) Eine Urne hat 8 Kugeln, so hat man nach 50)

$$\frac{2^7-1}{2^8-1} = \frac{127}{255} = 0.498$$

als die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl, und nach 51)

$$\frac{2^7}{2^8-1} = \frac{128}{255} = 0.502$$

als die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl Kugeln auf's Geradewohl aus der Urne zu ziehen. Der Werth von y endlich ist nach 52)

$$\frac{1}{2(2^8-1)} = \frac{1}{510} = 0.002.$$

2) Wenn man aber nur weiß, daß die Urne nicht mehr als 7 Kugeln enthalte, so würde dann die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln aus der Urne auf das erste Mal zu ergreifen, nach 54)

$$\frac{2^7-7-1}{2^8-7-2} = \frac{120}{247} = 0.485\ldots.$$

sein, die Wahrscheinlichkeit aber, eine ungerade Anzahl zu ergreifen, nach 53)

$$\frac{2^7-1}{2^8-7-2} = \frac{127}{247} = 0.514\ldots.$$

3) Eine Urne enthalte 5 weiße und 5 schwarze Kugeln. Wenn nun von diesen 10 Kugeln eine gerade Anzahl gezogen worden ist, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß die eine Hälfte davon aus weißen, die andere Hälfte aus schwarzen Kugeln bestehe, nach 53*) sein, weil

$$y = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.1.2.2.3.3.4.4.5.5} = 252 \text{ ist},$$

$$\frac{252-1}{2^9-1} = \frac{251}{511} = 0.491\ldots.$$

Dagegen wird die Wahrscheinlichkeit, daß, man mag eine gerade oder eine ungerade Anzahl Kugeln aus dieser Urne ergriffen haben, d. h. man mag ganz willkürlich in die Urne gegriffen haben, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln gezogen worden sei, nach 54*) sein

$$\frac{252-1}{2^{10}-1} = \frac{251}{1023} = 0.245\ldots.$$

4) Die Anzahl aller in einer Urne befindlichen Kugeln ist zwar unbekannt, man weiß aber, daß sie nicht größer als 100 ist. Es ist nach 53)

$$w_1 = \frac{2^{100}-1}{2^{101}-102},$$

und nach 54)

$$w = \frac{2^{100}-101}{2^{101}-102}.$$

Um diese Ausdrücke nun bequem berechnen zu können, darf man nur Zähler und Nenner Glied für Glied durch 2^{101} dividiren; also:

$$w_1 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{101}}}{1-\frac{102}{2^{101}}} \text{ und } w = \frac{\frac{1}{2}-\frac{101}{2^{101}}}{1-\frac{102}{2^{101}}},$$

wo dann die gemeinen Brüche

$$\frac{1}{2^{101}},\ \frac{101}{2^{101}} \text{ und } \frac{102}{2^{101}}$$

als Decimalbrüche darzustellen sein würden, was mittelst der Logarithmen sehr gut geschehen könnte.

§. 70. Diese Aufgaben lassen sich leicht verallgemeinern, und es führt dann die Beschäftigung mit den Lösungen derselben zu einem sehr wichtigen Theile der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich zur Bestimmung der Probabilität bei wiederholten Versuchen, wovon wir bereits §. 22 u. ff. gehandelt haben. Hier mag nur noch nachträglich bemerkt werden, daß bei allen diesen Untersuchungen die Lehre von den Combinationen mit und ohne Wiederholungen ganz unentbehrlich ist, und die Untersuchungen selbst mit zu den schwierigsten gehören, welche in der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen können.

Zweiter Abschnitt.

Von der Bestimmung der Probabilität aus Beobachtungen.

(Wahrscheinlichkeitsrechnung a posteriori).

Neuntes Capitel.

Von der Methode der kleinsten Quadrate.

§. 71. Beobachtungen werden theils mit freien, theils mit bewaffneten Sinnen angestellt. Es versteht sich hierbei von selbst, daß eine Person um so viel geschickter zum Beobachten sei, je schärfer deren freie Sinne, namentlich das Gesicht und Gehör, sind, und diese Person wird es dann noch in weit höherem Grade, je unbefangener und freier sie von Vorurtheilen und Leidenschaftlichkeiten ist. Sie muß auch überdieß behutsam und beharrlich sein, so wie selbst die Nebenumstände gar wohl beachten.

§. 72. Der jetzige Zustand der Wissenschaften macht es unumgänglich nothwendig, die mögliche Schärfe der durch die Werkzeuge erhaltenen Beobachtungen mittelst der Kenntniß der Güte und Fehler der gebrauchten Instrumente zu erfahren, daher denn auch eine genaue Beschreibung und Abbildung der letztern, so wie des Beobachtungsverfahrens selbst, nicht fehlen darf. Ist nun dieses alles auch wirklich und sorgfältigst berücksichtigt worden, so können demungeachtet die erhaltenen Resultate noch immer nicht für bereits vollkommen genau gehalten werden, weil aus der begrenzten Schärfe der Sinne und der Instrumente natürlich mehr oder weniger Fehler hervorgehen müssen. Es ist folglich von großer Wichtigkeit, die Grenze der möglichen Fehler einer Beobachtung zu bestimmen, über welche hinaus sie nicht mehr für absolut genau betrachtet werden kann, ohne jedoch deshalb zu behaupten, daß sie nur bis zu dieser Grenze wirklich genau sei. Diese Grenze wird erhalten, sobald man bestimmt, bis wie weit in allen einzelnen zu einer Beobachtung gehörenden Theilen Genauigkeit zu erreichen ist, und hierauf die Summe der so gefundenen Größen durch das gefundene ganze Resultat dividirt.

§. 73. Uebrigens vermag man jene Grenze durch Wiederholung der Beobachtungen dann immer schärfer zu bestimmen, wenn alle Beobachtungen ganz oder wenigstens nahe von gleich großer Genauigkeit sind, weshalb auch offenbar fehlerhafte von den übrigen bessern gewöhnlich ausgeschlossen werden. Ist nun auf diese Weise das nahe richtige Resultat gefunden worden, so können endlich die zu sehr von diesem Resultate abweichenden Ergebnisse ausgeschieden werden.

§. 74. Die aus mehrern einzelnen Beobachtungen für sich durch Berechnung derselben gefundenen Resultate müssen den im Vorigen angeführten Gründen zufolge mit geringern oder größern Fehlern behaftet sein, werden folglich nicht genau mit einander übereinstimmen. Gewöhnlich nimmt man dann, um das richtigste Resultat aus allen zu erhalten, das arithmetische Mittel aus ihnen, vorausgesetzt, daß die zu sehr abweichenden bereits vorher ausgeschlossen worden sind. Hat man nämlich aus n verschiedenen Beobachtungen für eine gewisse Größe x die n verschiedenen Werthe x_1, x_2, x_3, ... x_n gefunden, so erhält man den sogenannten arithmetischen Mittelwerth X von x oder das der Wahrheit näher kommende X als jede der Größen x_1, x_2, x_3, ... x_n durch die Gleichung

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \qquad 55),$$

welche Größe X auch als der wahrscheinlichste Werth der Größen x_1, x_2, ... x_n, so wie endlich $X - x_1$, $X - x_2$, $X - x_3$, ... $X - x_n$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen angesehen werden können. Dann ist, wenn man durch W das Gewicht jener Bestimmung von X als des mittlern oder wahrscheinlichsten Werthes von x bezeichnet,

$$W = \frac{X^2}{2\,\Sigma(X-x)^2},$$

wo

$$\Sigma(X-x)^2 = (X-x_1)^2 + (X-x_2)^2 + (X-x_3)^2 + \ldots + (X-x_n)^2$$

ist. Man sieht übrigens aus dem für W gegebenen Ausdruck sogleich, daß das Gewicht W desto größer sein wird, je größer die Anzahl n der Beobachtungen und je kleiner die Größen $X - x_1$, $X - x_2$, $X - x_3$, ... $X - x_n$, d. h. je genauer die Beobachtungen selbst sind.

§. 75. So lange jedoch alle Beobachtungen mit nicht absolut vollkommenen Sinnen und Instrumenten angestellt werden, so lange kann auch das, nach dem im vorigen §. gelehrten Verfahren bestimmte, Resultat noch nicht anders als der Wahrheit nur sehr nahe liegend betrachtet werden, weil man dort als wahrscheinlich voraussetzt, es sei außer den ganz genauen Beobachtungen eben so oft zu wenig als zu viel gemessen worden, so daß also diese entgegengesetzten Größen sich bei ihrer Summirung wechselseitig aufheben müßten. Allein gerade diese Voraussetzung ist, wie gesagt, auch nur eine bloß wahrscheinliche, und mithin kann — weil es eben so gut möglich ist, daß z. B. zwei oder drei Mal mehr auf der Seite des Zuwenig als des Zuviel gefehlt worden — das nach 55) bestimmte Resultat keineswegs schon für absolut gewiß gelten. Dieß hat auch die Erfahrung bereits gelehrt.

§. 76. Man wird also der Wahrheit noch weit näher kommen, je kleiner die Summe der erwähnten theils positiven theils negativen Fehler ist, und man könnte sich schon begnügen, alle diese Fehler als positiv zu betrachten und deren Summe durch eine Differentialgleichung zur kleinsten zu machen, sobald hierbei nicht eine zu willkürliche Umänderung statt fände. Dieser nun auszuweichen, erhebt man die Fehler, damit alles positiv werde, auf die zweite Potenz oder das Quadrat, und bringt die Summe dieser Quadrate der Fehler auf ein Minimum, welches dadurch geschieht, daß man die Gleichung für die Quadrate der Fehler nach den constanten Größen differentiirt und den Werth der Differentialgleichung = 0 setzt, allerdings nur dann möglich, wenn die Summe aller Glieder, welche jedes einzelne Differential der Constanten multipliciren, = 0 gesetzt wird, wo man dann so viele Gleichungen als beständige Größen erhält, aus denen diese letztern endlich numerisch zu entwickeln sind. Das ganze Verfahren nennt man bekanntlich die Methode der kleinsten Quadrate, die sich also, auf Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhend, als eine zu derselben gehörende, der Wahrheit sich am meisten nähernde Theorie mit vollem Rechte betrachten läßt. Denn erst seit ihrer Anwendung in der Astronomie und Physik, so wie in andern Erfahrungswissenschaften, ist man zu möglichst Vertrauen gewährenden und eigentlich brauchbaren Resultaten gelangt; seitdem erst sind eine Menge sonst statt gefundener willkürlicher Annahmen bei derartigen Rechnungen, als nicht mehr nöthig, nun völlig ausgeschlossen worden, wodurch folglich der Calcul selbst an strengern Grundlagen gewonnen hat.

§. 77. Es sei, wie es auch gewöhnlich der Fall ist, die Anzahl der unbekannten Größen x, y, z, ... geringer als die Zahl der durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen

$$X = \alpha - bx - cy - dz - \ldots.$$

$$X_1 = \alpha_1 - b_1 x - c_1 y - d_1 z - \ldots.$$

$$X_2 = \alpha_2 - b_2 x - c_2 y - d_2 z - \ldots. \quad \text{u. s. w.}$$

aus welchen x, y, z, . . . bestimmt werden sollen. Setzt man für die möglichen Fehler die Werthe Δ, Δ_1, Δ_2, so hat man, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned} A - \alpha &= a \\ A_1 - \alpha_1 &= a_1 \\ A_2 - \alpha_2 &= a_2 \end{aligned}$$

u. s. w.

gesetzt, wo **A**, **A**$_1$, **A**$_2$, ... die durch unmittelbare Beobachtungen resp. gefundenen Werthe der Functionen **X**, **X**$_1$, **X**$_2$, . . . bedeuten mögen, alsdann

$$\begin{aligned} \Delta &= a + bx + cy + dz + \ldots \\ \Delta_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z + \ldots \\ \Delta_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Man berechne jetzt

$$\left.\begin{aligned} (ab) &= ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots. \\ (ac) &= ac + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots. \\ (ad) &= ad + a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots. \\ &\text{u. s. w.} \\ (bb) &= bb + b_1 b_1 + b_2 b_2 + \ldots. \\ (bc) &= bc + b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots. \\ (bd) &= bd + b_1 d_1 + b_2 d_2 + \ldots. \\ &\text{u. s. w.} \\ (cc) &= cc + c_1 c_1 + c_2 c_2 + \ldots. \\ (cd) &= dd + c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots. \\ &\text{u. s. w.} \\ (dd) &= dd + d_1 d_1 + d_2 d_2 + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad 56),$$

u. s. w.

so sind

$$\left.\begin{aligned} (ab) + (bb)x + (bc)y + (bd)z + \ldots &= 0 \\ (ac) + (bc)x + (cc)y + (cd)z + \ldots &= 0 \\ (ad) + (bd)x + (cd)y + (dd)z + \ldots &= 0 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad 57)$$

die zur Bestimmung von x, y, z, ... dienenden Gleichungen.

Beispiel. Man habe die Gleichungen

$$X = x - y + 2z$$
$$X_1 = 3x + 2y - 5z$$
$$X_2 = 4x + y + 4z$$
$$X_3 = -x + 3y + 3z$$

und durch Beobachtungen gefunden

$$A = 3,\ A_1 = 5,\ A_2 = 21,\ A_3 = 14;$$

so ist

$$\varDelta = 3 - x + y - 2z$$
$$\varDelta_1 = 5 - 3x - 2y + 5z$$
$$\varDelta_2 = 21 - 4x - y - 4z$$
$$\varDelta_3 = 14 + x - 3y - 3z, \quad \text{d. h.}$$

$a = 3$	$b = -1$	$c = 1$	$d = -2$
$a_1 = 5$	$b_1 = -3$	$c_1 = -2$	$d_1 = 5$
$a_2 = 21$	$b_2 = -4$	$c_2 = -1$	$d_2 = -4$
$a_3 = 14$	$b_3 = 1$	$c_3 = -3$	$d_3 = -3,$

folglich nach 56)

$(ab) = -88$	$(bb) = 27$	$(cc) = 15$	$(dd) = 54,$
$(ac) = -70$	$(bc) = 6$	$(cd) = 1$	
$(ad) = -107$	$(bd) = 0$		

daher nach 57)

$$-88 + 27x + 6y = 0$$
$$-70 + 6x + 15y + z = 0$$
$$-107 + y + 54z = 0,$$

aus welchen 3 Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe

$$x = 2.470,\ y = 3.551,\ z = 1.916$$

folgen.

§. 78. Ein sehr elegantes Verfahren von **Gauß**, die wahrscheinlichsten Werthe von $x, y, z, \ldots$ und ihre resp. Gewichte $W, W_1, W_2, \ldots$ (das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt) zu berechnen, ist folgendes:

Man setze

$$\left.\begin{aligned} (ab) + (bb)x + (bc)y + (bd)z + \ldots &= P \\ (ac) + (bc)x + (cc)y + (cd)z + \ldots &= Q \\ (ad) + (bd)x + (cd)y + (dd)z + \ldots &= R \end{aligned}\right\} \quad 57^*)$$

u. s. w.

und eliminire hieraus x, y, z, . . . nach irgend einer der gewöhnlichen Methoden, so werden x, y, z, . . . stets dargestellt werden können in den Formen

$$\left.\begin{aligned} x &= L + A_0^0 P + B_0^0 Q + C_0^0 R + \ldots \\ y &= L_1 + A_1^1 P + B_1^1 Q + C_1^1 R + \ldots \\ z &= L_2 + A_2^2 P + B_2^2 Q + C_2^2 R + \ldots \end{aligned}\right\} \quad 58)$$

u. s. w.

Hat man diese Ausdrücke wirklich numerisch entwickelt, so sind nun die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z, ...

$$x = L,\; y = L_1,\; z = L_2,\; \ldots . \quad 58^*)$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sqrt{A_0^0}} \\ W_1 &= \frac{1}{\sqrt{B_1^1}} \\ W_2 &= \frac{1}{\sqrt{C_2^2}},\ \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad 59).$$

Bezeichnen Φ, Φ_1, Φ_2, . . . die mittlern zu befürchtenden Fehler, die man bei der Bestimmung der wahrscheinlichen Werthe von x, y, z, . . . nach 58) begangen haben mag; so ist

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{0.282095}{\sqrt{W}} \\ \Phi_1 &= \frac{0.282095}{\sqrt{W_1}} \\ \Phi_2 &= \frac{0.282095}{\sqrt{W_2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\log\ 0.282095 = 9.450395) \\ &60). \end{aligned}$$

u. s. w.

Endlich sind die wahrscheinlichen Fehler **F**, **F**$_1$, **F**$_2$,...., die man bei der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z,. . . begangen haben kann, d. h. diejenigen Fehler, von welchen es eben so wahrscheinlich ist, daß man sie begangen als nicht begangen habe, folgende:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{0.476936}{\sqrt{W}} \\ F_1 &= \frac{0.476936}{\sqrt{W_1}} \\ F_2 &= \frac{0.476936}{\sqrt{W_2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\log\ 0.476936 = 9.678460) \\ &61). \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Grenzen ΔF, ΔF_1, ΔF_2, ..., zwischen welche die wahren wirklich statt habenden Werthe von $F, F_1, F_2, \ldots$ fallen werden, sind, sobald n die Anzahl der Beobachtungen oder die Zahl der gegebenen Gleichungen in 57) bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= F\left(1 \pm \frac{0.476936}{n}\right) \\ \Delta F_1 &= F_1\left(1 \pm \frac{0.476936}{n}\right) \\ \Delta F_2 &= F_2\left(1 \pm \frac{0.476936}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad 62).$$

u. s. w.

Die Anwendung dieser allgemeinen Ausdrücke auf unser letztes Beispiel wird geben erstens nach 57*)

$$\begin{aligned} -\ 88 + 27x + 6y \qquad &= P \\ -\ 70 + 6x + 15y + z &= Q \\ -\ 107 \qquad + y + 54z &= R; \end{aligned}$$

zweitens nach 58)

$$x = \frac{49154}{19899} + \frac{809}{19899} P - \frac{324}{19899} Q + \frac{6}{19899} R$$

$$y = \frac{2617}{737} - \frac{12}{737} P + \frac{54}{737} Q - \frac{1}{737} R$$

$$z = \frac{12707}{6633} + \frac{2}{6633} P - \frac{9}{6633} Q + \frac{123}{6633} R;$$

drittens nach 58*)

$$x = \frac{49154}{19899} = 2.4702$$

$$y = \frac{2617}{737} = 3.5509$$

$$z = \frac{12707}{6633} = 1.9157;$$

viertens nach 59)

$$W = \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4.9595$$

$$W_1 = \sqrt{\frac{737}{54}} = 3.6943$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7.3435,$$

woraus folgt, daß z von allen am schärfsten und y am wenigsten genau bestimmt mithin y nur etwa halb so sicher als z ist.

Ueberhaupt ist x $\frac{4.9595}{3.6943}$ oder 1.34 Mal und z $\frac{7.3435}{3.6943}$ oder 1.99 Mal sicherer als z.

Fünftens ergiebt sich nach 60)

$$\Phi = 0.1267,\ \Phi_1 = 0.1468,\ \Phi_2 = 0.1041$$

als die mittlern zu befürchtenden, und nach 61)

$$F = 0.2142,\ F_1 = 0.2481,\ F_2 = 0.1760$$

als die wahrscheinlichsten Fehler;

endlich sechstens nach 62)

$$\Delta F = \binom{1.23847}{0.76153} F = 0.2653 \text{ und } 0.1630$$

$$\Delta F_1 = \binom{1.23847}{0.76153} F_1 = 0.3071 \text{ und } 0.1890$$

$$\Delta F_2 = \binom{1.23847}{0.76153} F_2 = 0.2180 \text{ und } 0.1341.$$

§. 79. Gauß hat noch ein anderes Verfahren angegeben, Gleichungen vom ersten Grade, sobald deren Anzahl die Zahl der in ihnen vorkommenden unbekannten Größen weit übersteigt, so nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen, daß erstlich diese Gleichungen in so viele andere umgeformt werden, als Unbekannte vorkommen, von welchen Gleichungen dann jede folgende eine Unbekannte weniger als die vorhergehende enthält, was die endlich vorzunehmende Bestimmung der einzelnen Unbekannten wesentlich erleichtert. Da dieses Verfahren sich zwar auf jede Anzahl von unbekannten Größen anwenden läßt, aber zugleich auch die zu gedachter Umformung nöthige Rechnung immer beschwerlicher wird; so ist es gut, das Verzeichniß von Formeln, die in jedem besondern Falle in Zahlen zu übersehen sind, stets vor sich zu haben, um nicht irre zu werden. Für die Praxis mögen daher die Schemata für die ersten sechs am häufigsten vorkommenden Fälle hier vollständig mitgetheilt stehen:

§. 80. **I. Fall.** Mit 6 Unbekannten z, z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5.

Es seien

$$\begin{aligned} az + bz_1 + cz_2 + dz_3 + ez_4 + fz_5 + n &= 0 \\ a_1 z + b_1 z_1 + c_1 z_2 + d_1 z_3 + e_1 z_4 + f_1 z_5 + n_1 &= 0 \\ a_2 z + b_2 z_1 + c_2 z_2 + d_2 z_3 + e_2 z_4 + f_2 z_5 + n_2 &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

gegeben; so berechne man zuerst:

$$(nn) = nn + n_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(an) = an + a_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(bn) = bn + b_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(cn) = cn + c_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(dn) = dn + d_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(en) = en + e_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(fn) = fn + f_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(aa) = aa + a_{,}a_{,} + \ldots$$
$$(ab) = ab + a_{,}b_{,} + \ldots$$
$$(ac) = ac + a_{,}c_{,} + \ldots$$
$$(ad) = ad + a_{,}d_{,} + \ldots$$
$$(ae) = ae + a_{,}e_{,} + \ldots$$
$$(af) = af + a_{,}f_{,} + \ldots$$
$$(bb) = bb + b_{,}b_{,} + \ldots$$
$$(bc) = bc + b_{,}c_{,} + \ldots$$
$$(bd) = bd + b_{,}d_{,} + \ldots$$
$$(be) = be + b_{,}e_{,} + \ldots$$
$$(bf) = bf + b_{,}f_{,} + \ldots$$
$$(cc) = cc + c_{,}c_{,} + \ldots$$
$$(cd) = cd + c_{,}d_{,} + \ldots$$
$$(ce) = ce + c_{,}e_{,} + \ldots$$
$$(cf) = cf + c_{,}f_{,} + \ldots$$
$$(dd) = dd + d_{,}d_{,} + \ldots$$
$$(de) = de + d_{,}e_{,} + \ldots$$
$$(df) = df + d_{,}f_{,} + \ldots$$
$$(ee) = ee + e_{,}e_{,} + \ldots$$
$$(ef) = ef + e_{,}f_{,} + \ldots$$
$$(ff) = ff + f_{,}f_{,} + \ldots;$$

dann:

$$(an.1) = (an) - \frac{(af)\,(fn)}{(ff)}$$
$$(aa.1) = (aa) - \frac{(af)\,(af)}{(ff)}$$
$$(ab.1) = (ab) - \frac{(af)\,(bf)}{(ff)}$$
$$(ac.1) = (ac) - \frac{(af)\,(cf)}{(ff)}$$
$$(ad.1) = (ad) - \frac{(af)\,(df)}{(ff)}$$
$$(ae.1) = (ae) - \frac{(af)\,(ef)}{(ff)}$$
$$(bn.1) = (bn) - \frac{(bf)\,(fn)}{(ff)}$$
$$(bb.1) = (bb) - \frac{(bf)\,(bf)}{(ff)}$$
$$(bc.1) = (bc) - \frac{(bf)\,(cf)}{(ff)}$$
$$(bd.1) = (bd) - \frac{(bf)\,df)}{(ff)}$$
$$(be.1) = (be) - \frac{(bf)\,(ef)}{(ff)}$$
$$(cn.1) = (cn) - \frac{(cf)\,(fn)}{(ff)}$$
$$(cc.1) = (cc) - \frac{(cf)\,(cf)}{(ff)}$$
$$(cd.1) = (cd) - \frac{(cf)\,(df)}{(ff)}$$
$$(ce.1) = (ce) - \frac{(cf)\,(ef)}{(ff)}$$
$$(dn.1) = (dn) - \frac{(df)\,(fn)}{(ff)}$$
$$(dd.1) = (dd) - \frac{(df)\,(df)}{(ff)}$$
$$(de.1) = (de) - \frac{(df)\,(ef)}{(ff)}$$
$$(en.1) = (en) - \frac{(ef)\,(fn)}{(ff)}$$
$$(ee.1) = (ee) - \frac{(ef)\,(ef)}{(ff)}$$

$$(nn.1) = (nn) - \frac{(nf)\,(nf)}{(ff)};$$

ferner:

$$(an.2) = (an.1) - \frac{(ae.1)(en.1)}{(ee.1)} \qquad (bc.2) = (bc.1) - \frac{(be.1)(ce.1)}{(ee.1)}$$

$$(aa.2) = (aa.1) - \frac{(ae.1)(ae.1)}{(ee.1)} \qquad (bd.2) = (bd.1) - \frac{(be.1)(de.1)}{(ee.1)}$$

$$(ab.2) = (ab.1) - \frac{(ae.1)(be.1)}{(ee.1)} \qquad (cn.2) = (cn.1) - \frac{(ce.1)(en.1)}{(ee.1)}$$

$$(ac.2) = (ac.1) - \frac{(ae.1)(ce.1)}{(ee.1)} \qquad (cc.2) = (cc.1) - \frac{(ce.1)(ce.1)}{(ee.1)}$$

$$(ad.2) = (ad.1) - \frac{(ae.1)(de.1)}{(ee.1)} \qquad (cd.2) = (cd.1) - \frac{(ce.1)\, cd.1)}{(ee.1)}$$

$$(bn.2) = (bn.1) - \frac{(be.1)(en.1)}{(ee.1)} \qquad (dn.2) = (dn.1) - \frac{(de.1)(en.1)}{(ee.1)}$$

$$(bb.2) = (bb.1) - \frac{(be.1)(be.1)}{(ee.1)} \qquad (dd.2) = (dd.1) - \frac{(de.1)(de.1)}{(ee.1)}$$

$$(nn.2) = (nn.1) - \frac{(ne.1)(ne.1)}{(ee.1)};$$

ferner:

$$(an.3) = (an.2) - \frac{(ad.2)(dn.2)}{(dd.2)} \qquad (bb.3) = (bb.2) - \frac{(bd.2)(bd.2)}{(dd.2)}$$

$$(aa.3) = (aa.2) - \frac{(ad.2)(ad.2)}{(dd.2)} \qquad (bc.3) = (bc.2) - \frac{(bd.2)(cd.2)}{(dd.2)}$$

$$(ab.3) = (ab.2) - \frac{(ad.2)(bd.2)}{(dd.2)} \qquad (cn.3) = (cn.2) - \frac{(cd.2)(dn.2)}{(dd.2)}$$

$$(ac.3) = (ac.2) - \frac{(ad.2)(cd.2)}{(dd.2)} \qquad (cc.3) = (cc.2) - \frac{(cd.2)(cd.2)}{(dd.2)}$$

$$(bn.3) = (bn.2) - \frac{(bd.2)(dn.2)}{(dd.2)} \qquad (nn.3) = (nn.2) - \frac{(dn.2)(dn.2)}{(dd.2)};$$

ferner:

$$(an.4) = (an.3) - \frac{(ac.3)(cn.3)}{(cc.3)} \qquad (bn.4) = (bn.3) - \frac{(bc.3)(cn.3)}{(cc.3)}$$

$$(aa.4) = (aa.3) - \frac{(ac.3)(ac.3)}{(cc.3)} \qquad (bb.4) = (bb.3) - \frac{(bc.3)(bc.3)}{(cc.3)}$$

$$(ab.4) = (ab.3) - \frac{(ac.3)(bc.3)}{(cc.3)} \qquad (nn.4) = (nn.3) - \frac{(cn.3)(cn.3)}{(cc.3)}$$

und

$$(an.5) = (an.4) - \frac{(ab.4)(bn.4)}{(bb.4)}$$

$$(aa.5) = (aa.4) - \frac{(ab.4)(ab.4)}{(bb.4)}$$

$$(nn.5) = (nn.4) - \frac{(nb.4)(nb.4)}{(bb.4)};$$

so hat man nun zur Bestimmung von z, z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5 die Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
(aa.5)z & = -(an.5) \\
(bb.4)z+(bb.4)z_1 & = -(bn.4) \\
(ac.3)z+(bc.3)z_1+(cc.3)z_2 & = -(cn.3) \\
(ad.2)z+(bd.2)z_1+(cd.2)z_2+(dd.2)z_3 & = -(dn.2) \\
(ae.1)z+(be.1)z_1+(ce.1)z_2+(de.1)z_3+(ee.1)z_4 & = -(en.1) \\
(af)z+(bf)z_1+(cf)z_2+(df)z_3+(ef)z_4+(ff)z_5 & = -(fn),
\end{array}
$$

und wenn **S** die Summe der Quadrate der Fehler bedeutet,

$$S = (nn.5) = \frac{(an.5)\,(an.5)}{(aa.5)}.$$

§. 81. **II. Fall.** Mit 5 Unbekannten z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5.

Es seien

$$
\begin{array}{l}
bz_1 + cz_2 + dz_3 + ez_4 + fz_5 + n = 0 \\
b_{,}z_1 + c_{,}z_2 + d_{,}z_3 + e_{,}z_4 + f_{,}z_5 + n_{,} = 0 \\
b_2z_1 + c_2z_2 + d_2z_3 + e_2z_4 + f_2z_5 + n_2 = 0
\end{array}
$$

u. s. w.

gegeben, so berechne man zuerst:

$$
\begin{array}{ll}
(nn) = nn + n_{,}n_{,} + \ldots & (bf) = bf + b_{,}f_{,} + \ldots \\
(bn) = bn + b_{,}n_{,} + \ldots & (cc) = cc + c_{,}c_{,} + \ldots \\
(cn) = cn + c_{,}n_{,} + \ldots & (cd) = cd + c_{,}d_{,} + \ldots \\
(dn) = dn + d_{,}n_{,} + \ldots & (ce) = ce + c_{,}e_{,} + \ldots \\
(en) = en + e_{,}n_{,} + \ldots & (cf) = cf + c_{,}f_{,} + \ldots \\
(fn) = fn + f_{,}n_{,} + \ldots & (dd) = dd + d_{,}d_{,} + \ldots \\
(bb) = bb + b_{,}b_{,} + \ldots & (de) = de + d_{,}e_{,} + \ldots \\
(bc) = bc + b_{,}c_{,} + \ldots & (df) = df + d_{,}f_{,} + \ldots \\
(bd) = bd + b_{,}d_{,} + \ldots & (ee) = ee + e_{,}e_{,} + \ldots \\
(be) = be + b_{,}e_{,} + \ldots & (ef) = ef + e_{,}f_{,} + \ldots
\end{array}
$$

$$(ff) = ff + f_{,}f_{,} + \ldots;$$

dann:

$$(bn.1) = (bn) - \frac{(bf)(fn)}{(ff)} \qquad (cd.1) = (cd) - \frac{(cf)(df)}{(ff)}$$

$$(bb.1) = (bb) - \frac{(bf)\,bf)}{(ff)} \qquad (ce.1) = (ce) - \frac{(cf)(ef)}{(ff)}$$

$$(bc.1) = (bc) - \frac{(bf)(cf)}{(ff)} \qquad (dn.1) = (dn) - \frac{(df)(fn)}{(ff)}$$

$$(bd.1) = (bd) - \frac{(bf)(df)}{(ff)} \qquad (dd.1) = (dd) - \frac{(df)(df)}{(ff)}$$

$$(be.1) = (be) - \frac{(bf)(ef)}{(ff)} \qquad (de.1) = (de) - \frac{(df)(ef)}{(ff)}$$

$$(cn.1) = (cn) - \frac{(cf)(fn)}{(ff)} \qquad (en.1) = (en) - \frac{(ef)(fn)}{(ff)}$$

$$(cc.1) = (cc) - \frac{(cf)(cf)}{(ff)} \qquad (ee.1) = (ee) - \frac{(ef)(ef)}{(ff)}$$

$$(nn.1) = (nn) - \frac{(nf)(nf)}{(ff)}$$

ferner:

$$(bn.2) = (bn.1) - \frac{(be.1)(en.1)}{(ee.1)} \qquad (cc.2) = (cc.1) - \frac{(ce.1)(ce.1)}{(ee.1)}$$

$$(bb.2) = (bb.1) - \frac{(be.1)(be.2)}{(ee.1)} \qquad (cd.2) = (cd.1) - \frac{(ce.1)(cd.1)}{(ee.1)}$$

$$(bc.2) = (bc.1) - \frac{(be.1)(ce.1)}{(ee.1)} \qquad (dn.2) = (dn.1) - \frac{(de.1)(en.1)}{(ee.1)}$$

$$(bd.2) = (bd.1) - \frac{(be.1)(de.1)}{(ee.1)} \qquad (dd.2) = (dd.1) - \frac{(de.1)(de.1)}{(ee.1)}$$

$$(cn.2) = (cn.1) - \frac{(ce.1)(en.1)}{(ee.1)} \qquad (nn.2) = (nn.1) - \frac{(ne.1)(ne.1)}{(ee.1)};$$

ferner:

$$(bn.3) = (bn.2) - \frac{(bd.2)(dn.2)}{(dd.2)} \qquad (cn.3) = (cn.2) - \frac{(cd.2)(dn.2)}{(dd.2)}$$

$$(bb.3) = (bb.2) - \frac{(bd.2)(bd.2)}{(dd.2)} \qquad (cc.3) = (cc.2) - \frac{(cd.2)(cd.2)}{(dd.2)}$$

$$(bc.3) = (bc.2) - \frac{(bd.2)(cd.2)}{(dd.2)} \qquad (nn.3) = (nn.2) - \frac{(dn.2)(dn.2)}{(dd.2)};$$

ferner:

$$(bn.4) = (bn.3) - \frac{(bc.3)(cn.3)}{(cc.3)}$$

$$(bb.4) = (bb.3) - \frac{(bc.3)(bc.3)}{(cc.3)}$$

und

$$(nn.4) = (nn.3) - \frac{(cn.3)(cn.3)}{(cc.3)};$$

so hat man zur Bestimmung von z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5 die Gleichungen

$$\begin{array}{llllll}
(bb.4)z_1 & & & & & = -(bn.4) \\
(bc.3)z_1 & +(cc.3)z_2 & & & & = -(cn.3) \\
(bd.2)z_1 & +(cd.2)z_2 & +(dd.2)z_3 & & & = -(dn.2) \\
(be.1)z_1 & +(ce.1)z_2 & +(de.1)z_3 & +(ee.1)z_4 & & = -(en.1) \\
(bf)z_1 & +(cf)z_2 & +(df)z_3 & +(ef)z_4 & +(ff)z_5 & = -(fn)
\end{array}$$

und

$$S = (nn.4) - \frac{(bn.4)\,(bn.4)}{(bb.4)}.$$

§. 82. **III. Fall.** Mit 4 Unbekannten z_2, z_3, z_4 und z_5. Es seien

$$\begin{array}{l}
cz_2 + dz_3 + ez_4 + fz_5 + n = 0 \\
c_{,}z_2 + d_{,}z_3 + e_{,}z_4 + f_{,}z_5 + n_{,} = 0 \\
c_2z_2 + d_2z_3 + e_2z_4 + f_2z_5 + n_2 = 0 \\
\text{u. s. w.}
\end{array}$$

gegeben; so berechne man zuerst:

$$\begin{array}{ll}
(nn) = nn + n_{,}n_{,} + \ldots & (ce) = ce + c_{,}e_{,} + \ldots \\
(cn) = cn + c_{,}n_{,} + \ldots & (cf) = cf + c_{,}f_{,} + \ldots \\
(dn) = dn + d_{,}n_{,} + \ldots & (dd) = dd + d_{,}d_{,} + \ldots \\
(en) = en + e_{,}n_{,} + \ldots & (de) = de + d_{,}e_{,} + \ldots \\
(fn) = fn + f_{,}n_{,} + \ldots & (df) = df + d_{,}f_{,} + \ldots \\
(cc) = cc + c_{,}c_{,} + \ldots 2 & (ee) = ee + e_{,}e_{,} + \ldots \\
(cd) = cd + c_{,}d_{,} + \ldots & (ef) = ef + e_{,}f_{,} + \ldots
\end{array}$$

$$(ff) = ff + f_{,}f_{,} + \ldots;$$

dann:

$$\begin{array}{ll}
(cn.1) = (cn) - \frac{(cf)\,(fn)}{(ff)} & (dd.1) = (dd) - \frac{(df)\,(df)}{(ff)} \\
(cc.1) = (cc) - \frac{(cf)\,(cf)}{(ff)} & (de\ 1) = (de) - \frac{(df)\,(ef)}{(ff)} \\
(cd.1) = (cd) - \frac{(cf)\,(df)}{(ff)} & (en.1) = (en) - \frac{(ef)\,(fn)}{(ff)} \\
(ce.1) = (ce) - \frac{(cf)\,(ef)}{(ff)} & (ee.1) = (ee) - \frac{(ef)\,(ef)}{(ff)} \\
(dn.1) = (dn) - \frac{(df)\,(fn)}{(ff)} & (nn.1) = (nn) - \frac{(nf)\,(nf)}{(ff)};
\end{array}$$

ferner:

$$(cn.2) = (cn.1) - \frac{(ce.1)(en.1)}{(ee.1)} \quad (dn.2) = (dn.1) - \frac{(de.1)(en.1)}{(ee.1)}$$

$$(cc.2) = (cc.1) - \frac{(ce.1)(ce.1)}{(ee.1)} \quad (dd.2) = (dd.1) - \frac{(de.1)(de.1)}{(ee.1)}$$

$$(cd.2) = (cd.1) - \frac{(ce.1)(cd.1)}{(ee.1)} \quad (nn.2) = (nn.1) - \frac{(ne.1)(ne.1)}{(ee.1)} ;$$

ferner:

$$(cn.3) = (cn.2) - \frac{(cd.2)(dn.2)}{(dd.2)}$$

$$(cc.3) = (cc.2) - \frac{(cd.2)(cd.2)}{(dd.2)}$$

und

$$(nn.3) = (nn.2) - \frac{(dn.2)(dn.2)}{(dd.2)} ;$$

so hat man zur Bestimmung von z_2, z_3, z_4 und z_5

$$\begin{aligned}
&(cc.3)z_2 && = - (cn.3)\\
&(cd.2)z_2 + (dd.2)z_3 && = - (dn.2)\\
&(ce.1)z_2 + (de.1)z_3 + (ee.1)z_4 && = - (en.1)\\
&(cf)z_2 + (df)z_3 + (ef)z_4 + (ff)z_5 && = - (fn)
\end{aligned}$$

und

$$S = (nn.3) - \frac{(cn.3)(cn.3)}{(cc.3)} .$$

§. 83. **IV. Fall.** Mit 3 Unbekannten z_3, z_4 und z_5.

Es seien

$$\begin{aligned}
dz_3 + ez_4 + fz_5 + n &= 0\\
d_,z_3 + e_,z_4 + f_,z_5 + n_, &= 0\\
d_2z_4 + e_2z_4 + f_2z_5 + n_2 &= 0
\end{aligned}$$

u. s. w.

gegeben; so berechne man zuerst:

$$\begin{aligned}
(nn) &= nn + n_,n_, + \ldots & (de) &= de + d_,e_, + \ldots\\
(dn) &= dn + d_,n_, + \ldots & (df) &= df + d_,f_, + \ldots\\
(en) &= en + e_,n_, + \ldots & (ee) &= ee + e_,e_, + \ldots\\
(fn) &= fn + f_,n_, + \ldots & (ef) &= ef + e_,f_, + \ldots\\
(dd) &= dd + d_,d_, + \ldots & (ff) &= ff + f_,f_, + \ldots ;
\end{aligned}$$

dann:

$$(dn.1) = (dn) - \frac{(df)(fn)}{(ff)} \quad (en.1) = (en) - \frac{(ef)(fn)}{(ff)}$$

$$(dd.1) = (dd) - \frac{(df)(df)}{(ff)} \quad (ee.1) = (ee) - \frac{(ef)(ef)}{(ff)}$$

$$(de.1) = (de) - \frac{(df)(ef)}{(ff)} \quad (nn.1) = (nn) - \frac{(nf)(nf)}{(ff)};$$

ferner

$$(dn.2) = (dn.1) - \frac{(de.1)(en.1)}{(ee.1)}$$

$$(dd.2) = (dd.1) - \frac{(de.1)(de.1)}{(ee.1)}$$

und

$$(nn.2) = (nn.1) - \frac{(ne.1)(ne.1)}{(ee.1)};$$

so hat man zur Bestimmung von z_3, z_4 und z_5 die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(dd.2)z_3 &&= -(dn.2)\\ &(de.1)z_3 + (ee.1)z_4 &&= -(en.1)\\ &(df)z_3 + (ef)z_4 + (ff)z_5 &&= -(fn) \end{aligned}$$

und

$$S = (nn.2) - \frac{(dn.2)(dn.2)}{(dd.2)}.$$

§. 84. V. Fall. Mit 2 Unbekannten z_4 und z_5.

Es seien

$$\begin{aligned} ez_4 + fz_5 + n &= 0\\ e_{,}z_4 + f_{,}z_5 + n_{,} &= 0\\ e_2z_4 + f_2z_5 + n_2 &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

gegeben; so berechne man zuerst

$$(nn) = nn + n_{,}n_{,} + \ldots \quad (ee) = ee + e_{,}e_{,} + \ldots$$

$$(en) = en + e_{,}n_{,} + \ldots \quad (ef) = ef + e_{,}f_{,} + \ldots$$

$$(fn) = fn + f_{,}n_{,} + \ldots \quad (ff) = ff + f_{,}f_{,} + \ldots;$$

dann

$$(en.1) = (en) - \frac{(ef)(fn)}{(ff)}$$

$$(ee.1) = (ee) - \frac{(ef)(ef)}{(ff)}$$

und

$$(nn.1) = (nn) - \frac{(nf)(nf)}{(ff)};$$

so hat man zur Bestimmung von z_4 und z_5 die Gleichungen

$$(ee.1)z_4 \qquad\qquad = -(en.1)$$
$$(ef)z_4 + (ff)z_5 = -(fn)$$

und
$$S = (nn.1) - \frac{(en.1)\,(en.1)}{(ee.1)}.$$

§. 85. **VI. Fall.** Mit einer Unbekannten z_5.

Es seien
$$f z_5 + n = 0$$
$$f_{,}z_5 + n_{,} = 0$$
$$f_2 z_5 + n_2 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

gegeben; so berechne man
$$(nn) = nn + n_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(fn) = fn + f_{,}n_{,} + \ldots$$
$$(ff) = ff + f_{,}f_{,} + \ldots$$

und man wird haben zur Bestimmung von z_5 die Gleichung
$$(ff)z_5 = -(fn)$$

und
$$S = (nn) - \frac{(fn)\,(fn)}{(ff)}.$$

Wir wollen zur Erläuterung das zuletzt gegebene numerische Beispiel noch einmal vornehmen. Es ist, wenn wir x, y, z respective mit z_3, z_4, z_5 vertauschen, nach dem für den **IV.** Fall gegebenen Schema:
$$- \ z_3 + \ z_4 - 2z_5 + \ 3 = 0$$
$$- 3z_3 + 2z_4 + 5z_5 + \ 5 = 0$$
$$- 4z_3 - \ z_4 - 4z_5 + 21 = 0$$
$$+ \ z_3 - 3z_4 - 3z_5 + 14 = 0,$$

wo

$d = -1$	$d_1 = -3$	$d_2 = -4$	$d_3 = +1$
$e = +1$	$e_2 = -2$	$e_2 = -1$	$e_3 = -3$
$f = -2$	$f_1 = +5$	$f_2 = -4$	$f_3 = -3$
$n = +3$	$n_1 = +5$	$n_2 = +21$	$n_3 = +14;$

also
$$(nn) = +9 + 25 + 441 + 196 = +671$$
$$(dn) = -3 - 15 - 84 + 14 = -88$$
$$(en) = +3 - 10 - 21 - 42 = -70$$
$$(fn) = -6 + 25 - 84 - 42 = -107$$
$$(dd) = +1 + 9 + 16 + 1 = +27$$
$$(de) = -1 + 6 + 4 - 3 = +6$$
$$(df) = +2 - 15 + 16 - 3 = -0$$
$$(ee) = +1 + 4 + 1 + 9 = +15$$
$$(ef) = -2 - 10 + 4 + 9 = +1$$
$$(ff) = +4 + 25 + 16 + 9 = +54;$$

dann:

$$(dn.1) = -88 - \frac{0 \times -107}{54} = -88$$

$$(dd.1) = +27 - \frac{0 \times 0}{54} = +27$$

$$(de.1) = +6 - \frac{0 \times 0}{54} = +6$$

$$(en.1) = -70 - \frac{1 \times -107}{54} = -68.019$$

$$(ee.1) = +15 - \frac{1 \times 1}{54} = +14.981$$

$$(nn.1) = +671 - \frac{-107 \times -107}{54} = +458.981;$$

ferner:

$$(dn.2) = -88 - \frac{6 \times -68.019}{14.981} = -60.758$$

$$(dd.2) = +27 - \frac{6 \times 6}{14.981} = +24.597,$$

$$(nn.2) = +458.981 - \frac{-68.019 \times 68.019}{14.981} = +150.151,$$

mithin

$$\begin{aligned} 24.597 z_3 \qquad\qquad &= 60.758 \\ 6 z_3 + 14.981 z_4 \qquad &= 68.019 \\ z_4 + 54 z_5 &= 107.000, \end{aligned}$$

woraus

$$z_3 = 2.4701,\ z_4 = 3.5510,\ z_5 = 1.9157$$

und

$$S = +150.151 - \frac{-60.758 \times -60.758}{24.597} = +0071$$

folgt.

§. 86. Um die Gewichte der Bestimmungen von $z, z_1, z_2 \ldots$ zu bestimmen, gebe man den, in dem Schema I. Fall zur Bestimmung von z, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 dienenden, Gleichungen der Kürze wegen die Form:

$$\begin{aligned} &\alpha z &&= \nu \\ &\alpha_1 z + \beta_1 z_1 &&= \nu_1 \\ &\alpha_2 z + \beta_2 z_1 + \gamma_2 z_2 &&= \nu_2 \\ &\alpha_3 z + \beta_3 z_1 + \gamma_3 z_2 + \delta_3 z_3 &&= \nu_3 \\ &\alpha_4 z + \beta_4 z_1 + \gamma_4 z_2 + \delta_4 z_3 + \varepsilon_4 z_4 &&= \nu_4 \\ &\alpha_5 z + \beta_5 z_1 + \gamma_5 z_2 + \delta_5 z_3 + \varepsilon_5 z_4 + \zeta_5 z_5 &&= \nu_5, \end{aligned}$$

welche Gleichungen man nun nach 57 *) auch so ansetzen kann:

$$
\begin{aligned}
&-\nu + \alpha z &&= P\\
&-\nu_1 + \alpha_1 z + \beta_1 z_1 &&= Q\\
&-\nu_2 + \alpha_2 z + \beta_2 z_1 + \gamma_2 z_2 &&= R\\
&-\nu_3 + \alpha_3 z + \beta_3 z_1 + \gamma_3 z_2 + \delta_3 z_3 &&= S\\
&-\nu_4 + \alpha_4 z + \beta_4 z_1 + \gamma_4 z_2 + \delta_4 z_3 + \varepsilon_4 z_4 &&= T\\
&-\nu_5 + \alpha_5 z + \beta_5 z_1 + \gamma_5 z_2 + \delta_5 z_3 + \varepsilon_5 z_4 + \zeta_5 z_5 &&= U.
\end{aligned}
$$

Eliminirt man hieraus nach und nach z, z_1, z_2, u. s. w., so erhält man successive für die Größen z, z_1, z_2, ... die Ausdrücke von der Form

$$
\begin{aligned}
z &= L + \frac{1}{\alpha}P\\
z_1 &= L_1 + A_1^1 P + \frac{1}{\beta_1} Q\\
z_2 &= L_2 + A_2^2 P + B_2^2 Q + \frac{1}{\gamma_2} R\\
z_3 &= L_3 + A_3^3 P + B_3^3 Q + C_3^3 R + \frac{1}{\delta_3} S\\
z_4 &= L_4 + A_4^4 P + B_4^4 Q + C_4^4 R + D_4^4 S + \frac{1}{\varepsilon_4} T\\
z_5 &= L_5 + A_5^5 P + B_5^5 Q + C_5^5 R + D_5^5 S + E_5^5 T + \frac{1}{\zeta_5} U,
\end{aligned}
$$

Ausdrücke also, die denen in 58) analog erscheinen; folglich werden nach dort

$$W = \sqrt{\alpha},\ W_1 = \sqrt{\beta_1},\ W_2 = \sqrt{\gamma_2},\ W_3 = \sqrt{\delta_3},\ W_4 = \sqrt{\varepsilon_4} \text{ nud } W_5 = \sqrt{\zeta_5}$$

die gesuchten Gewichte der Bestimmungen von z, z_1, z_2, ... sein; d. h. man wird, wenn für α, β_1, γ_2, δ_3, ε_4 und ζ_5 ihre anfänglichen Werthe restituirt werden, haben:

$$
\begin{aligned}
W &= \sqrt{(aa.5)} & W_1 &= \sqrt{(bb.4)}\\
W_2 &= \sqrt{(cc.3)} & W_3 &= \sqrt{(dd.2)}\\
W_4 &= \sqrt{(ee.1)} & W_5 &= \sqrt{(ff)};
\end{aligned}
$$

daher für das Schema **II. Fall**:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \sqrt{(bb.4)}, & W_2 &= \sqrt{(cc.3)},\\
W_3 &= \sqrt{(dd.2)}, & W_4 &= \sqrt{(ee.1)},
\end{aligned}
$$
$$W_5 = \sqrt{(ff)};$$

für das Schema **III. Fall.**

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \sqrt{(cc.3)}, & W_3 &= \sqrt{(dd.2)},\\
W_4 &= \sqrt{(ee.1)}, & W_5 &= \sqrt{(ff)};
\end{aligned}
$$

für das Schema IV. Fall:

$$w_3 = \sqrt{(dd.2)}, \qquad w_4 = \sqrt{(ee.1)},$$

$$w_5 = \sqrt{(ff)};$$

für das Schema V. Fall:

$$w_4 = \sqrt{(ee.1)}, \qquad w_5 = \sqrt{(ff)}$$

und für das Schema VI. Fall:

$$w_5 = \sqrt{(ff)}.$$

In dem letzten Beispiele wird man demnach haben

$$w_3 = \sqrt{24.597} = 4.959$$
$$w_4 = \sqrt{14.981} = 3.875$$
$$w_5 = \sqrt{54} \quad = 7.348.$$

Schlußbemerkung. Man sieht auf den ersten Blick, daß die Methode der kleinsten Quadrate eigentlich nichts anderes ist, als die bis jetzt richtigste Theorie der Bestimmung von Unbekannten, die durch mehr gegebene Gleichungen, in welchen sie vorkommen, bestimmt werden sollen, als eigentlich die Zahl der Unbekannten selbst beträgt, ein Fall, welcher der der unbestimmten Analitik (den sogenannten diophantischen Aufgaben), wo weniger Gleichungen als unbekannte Größen gegeben sind, entgegengesetzt ist. Da nun für n zu bestimmende Unbekannte auch n Gleichungen gegeben sein müssen, so sind, wenn die Zahl dieser Gleichungen die der Unbekannten übersteigt, die letztern mehr als bestimmt, und es entsteht mithin die Frage, welches sind die wahrscheinlichsten Werthe dieser Unbekannten: eine sehr wichtige Frage, welche also am einfachsten und sichersten, den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemäß, durch die Methode der kleinsten Quadrate vortrefflich beantwortet wird. Das folgende Kapitel nun behandelt einen der interessantesten Fälle, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate eine in ihren Folgen nicht unwichtige Anwendung findet.

Zehntes Capitel.

Von der Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung.

§. 87. Fast in allen Erfahrungswissenschaften trifft es sich häufig, daß die aus Beobachtungen oder Zählungen abgeleiteten Größen nach einem gewissen aber unbekannten Gesetze zu- und abnehmen, d. h. eine gewisse Periode bilden, die nach Ablauf einer bestimmten Zeit wiederkehrt.

Bisweilen kann das unbekannte Gesetz für diese Periode von Größen analytisch bestimmt, öfters aber auch gar nicht direct aufgefunden werden. Im letztern Falle muß man indirect verfahren, d. h. irgend einen analytischen Ausdruck so wählen, daß er jede einzelne Größe der Periode möglichst genau giebt, was dadurch geschieht, daß man die gewählte Formel hinsichtlich ihrer Constanten, jeder einzelnen Größe der Periode nach und nach möglichst anpassend, numerisch zu entwickeln sucht. Hierzu wird nun die Methode der kleinsten Quadrate wesentliche Dienste leisten, und Bessel gebührt das Verdienst, zuerst solches gethan zu haben und zwar auf eine sehr sinnreiche Art, die hinsichtlich der Praxis alle bisherigen Versuche, das unbekannte Gesetz einer Periode indirect annähernd zu bestimmen, an Eleganz und Genauigkeit weit übertrifft.

§. 88. Wenn nämlich eine periodische Erscheinung nach dem Ablauf k ihrer Periode stets wiederkehrt, und dabei immer von y, das wieder von x abhängig ist, abhängig bleibt; so kann die Eigenschaft, daß y, wenn auch x um k, 2k, 3k. u. s. w. vermehrt oder vermindert wird, stets sich gleich bleibe, nach Bessel durch die Formel

$$y_x = p_0 + u_1 \sin\left(U_1 + \frac{360^\circ}{k}.z\right) + u_2 \sin\left(U_2 + \frac{360^\circ}{k}.2x\right) + \ldots\ldots 63),$$

wo y_x das zu x gehörende y, ferner p_0, u_1, u_2, ... U_1, U_2, ... Constanten bezeichnen, vollständig dargestellt werden. Werden nun diese Constanten aus einer gegebenen Beobachtungs- oder Zählungsreihe bestimmt, so erhält man hierdurch dann die, die Stelle des eigentlichen, aber nicht auffindbaren Gesetzes sehr nahe vertretende, mathematische Theorie der Erscheinung entwickelt, und damit diese Theorie in ihren Resultaten so viel als möglich mit den durch die Erfahrung gegebenen übereinstimme, ist nach Bessel (und wie auch schon oben erwähnt) die vorhin erwähnte Bestimmung der Constanten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate zu bewerkstelligen, welches am einfachsten und leichtesten geschieht, sobald die empirisch gefundenen Werthe von y, auf die man die Bestimmung der Constanten gründen will, zu Werthen von x gehören, die in arithmetischer Reihe fortschreitend die ganze Periode ausfüllen, und wenn zugleich die Zahl der Constanten kleiner als die Anzahl der gegebenen Werthe von y ist. Diesen Fall bloß, welcher die Regelmäßigkeit für sich hat und am meisten vorkommt, wollen wir hier und in der Folge stets voraussetzen.

§. 89. Gehören n Werthe von y zu einer vollständigen Periode, und sind dieselben gegeben; so setze man, um die Formel 63) etwas zu vereinfachen,

$$\frac{360^0}{n} = z,$$

und man wird, z für $\frac{360^0}{k}$ in die Formel 55) substituirend, erhalten

$$y_x = p_0 + u_1 (U_1 + z.x) + u_2 \sin (U_2 + 2z.x) + u_3 \sin (U_3 + 3z.x) + .. \quad 64).$$

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nun ergiebt für die Bestimmung der Constanten p_0, u_1, u_2, u_3, ... U_1, U_2, U_3, ... folgendes Verfahren:

Man berechne die Hilfsgrößen p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; u. s. w. mittelst der Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{2}{n} [y_0 + y_1 \cos z + y_2 \cos 2z + \ldots + y_{n-1} \cos (n-1)z] \\
q_1 &= \frac{2}{n} [y_1 \sin z + y_2 \sin 2z + \ldots . + y_{n-1} \sin (n-1)z] \\
p_2 &= \frac{2}{n} [y_0 + y_1 \cos 2z + y_2 \cos 4z + \ldots . + y_{n-1} \cos 2(n-1)z] \\
q_2 &= \frac{2}{n} [y_1 \sin 2z + y_2 \sin 4z + \ldots . + y_{n-1} \sin 2(n-1)z] \\
p_3 &= \frac{2}{n} [y_0 + y_1 \cos 3z + y_2 \cos 6z + \ldots . + y_{n-1} \cos 3(n-1)z] \\
q_3 &= \frac{2}{n} [y_0 \sin 3z + y_2 \sin 6z + \ldots . + y_{n-1} \sin 3(n-1)x]
\end{aligned}\right\} \quad 65)$$

u. s. w.

so hat man dann zur Berechnung der Constanten die Gleichungen

$$p_0 = \frac{1}{n} [y + y_3 + y_2 + \ldots y_{n-2} + y_{n-1}]$$

$$\left.\begin{matrix}
p_1 = u_1 \sin U_1 & p_2 = u_2 \sin U_2 & p_3 = u_3 \sin U_3 \\
q_1 = u_1 \cos U_1 & q_2 = u_2 \cos U_2 & q_3 = u_3 \cos U_3
\end{matrix}\right\} \quad 66)$$

u. s. w.

§. 90. Wie viele Glieder in der für y_x gegebenen Formel und folglich auch wie viele Constanten zu wählen sein, hängt von der Bedingung ab, die Annahme der folgenden neuen Constanten zu unterlassen, sobald die Summe S der Quadrate der übrig bleibenden Fehler so klein geworden ist, daß sie nur Beobachtungsfehlern oder sonstigen außerordentlichen Störungen zugeschrieben werden kann. Es ist aber

$$\left.\begin{aligned} S = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y^2{}_{n-2} + y^2{}_{n-1}) - np_0^2 \\ - \frac{n}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots\ldots) \\ - \frac{n}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots\ldots) \end{aligned}\right\} \quad 67),$$

aus welchem Ausdrucke offenbar erhellet, daß man die Summe S der Quadrate der Fehler, die nach Hinzufügung eines neuen Gliedes in der Formel für y_x noch übrig bleibt, sofort ohne umständliche Rechnung finden kann.

Schließlich ist zu bemerken, daß durch n das Gewicht von p_0, und durch $\frac{1}{2}n$ das den Größen $p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots$ gemeinschaftliche Gewicht dargestellt wird.

§. 81. Es seien nun z. B. 8 Werthe von y, nämlich

$$\begin{array}{ll} y_0 = 2 & y_4 = 11 \\ y_1 = 3 & y_5 = 7 \\ y_2 = 6 & y_6 = 4 \\ y_3 = 10 & y_7 = 2 \end{array}$$

gegeben, welche zu den Werthen von $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und 7 gehörend, die Periode bilden; so erhält man erstlich, weil $n = 8$,

$$z = 45^0$$

und damit nach 64)

$$y_x = p_0 + u_1 \sin(U_1 + 45^0 . x)$$

wo nach 65)

$$p_1 = \tfrac{1}{4}\,[(y_0 - y_4) + (y_1 - y_3 - y_5 + y_7)\cos 45^0]$$
$$q_1 = \tfrac{1}{4}\,[(y_2 - y_6) + (y_1 + y_3 - y_5 - y_7)\sin 45^0]$$

und dann nach 66)

$$p_0 = \tfrac{1}{8}\,[(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7]$$
$$u_1 \sin U_1 = p_1$$
$$u_1 \cos U_1 = q_1 \text{ ist.}$$

Es ist mithin für unser Beispiel:

$$p_1 = \tfrac{1}{4}(-9 - 12\cos 45^0) = -2.25 - 3.\cos 45^0 = -4.3713$$
$$q_1 = \tfrac{1}{4}(+2 + 4\sin 45^0) = +0.50 + \sin 45^0 = +1.2071$$
$$p_0 = \tfrac{1}{8}(2 + 3 + 6 + 10 + 11 + 7 + 4 + 2) = 5.6250,$$

also
$$\log u_1 \sin U_1 = 0.640611\,n$$
$$\log u_1 \cos U_1 = 0.081743,$$

woraus

$$\log \operatorname{tg} U_1 = 0.558868\,n,\ U_1 = -74^\circ\, 33'\, 47''$$

oder

$$U_1 = 285^\circ\, 26'\, 13'',$$

daher

$$\log u_1 = 0.656569,\ u_1 = 4.5349.$$

Folglich

$$y_x = 5.6250 + 4.5349 \sin (285^\circ\, 26'\, 13'' + 45^\circ . x).$$

Diese Formel giebt nun für

x	y_x	Fehler.
0	$5.6250 + 4.5349 \sin 285^\circ\, 26'\, 13'' = 1.2537$	$-\ 0.7463$
1	$5.6250 + 4.5349 \sin 330\ \ 26'\, 13'' = 3.3876$	$+\ 0.3876$
2	$5.6250 + 4.5349 \sin\ \ 15\ \ 26\ \ 13 = 6.8321$	$+\ 0.8321$
3	$5.6250 + 4.5349 \sin\ \ 60\ \ 26\ \ 13 = 9.5695$	$-\ 0.4305$
4	$5.6250 + 4.5349 \sin 105\ \ 26\ \ 13 = 9.9963$	$-\ 1.0037$
5	$5.6250 + 4.5349 \sin 150\ \ 26\ \ 13 = 7.8624$	$+\ 0.8624$
6	$5.6250 + 4.5349 \sin 195\ \ 26\ \ 13 = 4.4179$	$+\ 0.4179$
7	$5.6250 + 4.5349 \sin 240\ \ 26\ \ 13 = 1.6805$	$-\ 0.3195$

und S ist

$$= 339 - 253.125 - 16.4332 - 5.8280$$

d. h.

$$S = 3.6138.$$

Da hier die Fehler noch zu bedeutend sind, so nehme man in die Formel für y_x noch das neue Glied

$$u_2 \sin (U_2 + 90^\circ . x)$$

auf, wo

$$p_2 = \tfrac{1}{4}\,(y_0 - y_2 + y_4 - y_6)$$
$$q_2 = \tfrac{1}{4}\,(y_1 - y_3 + y_5 - y_7)$$

und

$$u_2 \sin U_2 = p_2$$
$$u_2 \cos U_2 = q_2$$

erhalten wird. Für unser numerisches Beispiel wird man nach diesen Formeln folgende Rechnung anstellen müssen:

$$p_2 = \tfrac{1}{4}\,(2 - 6 + 11 - 4) = +\ 0.75$$
$$q_2 = \tfrac{1}{4}\,(3 - 10 + 7 - 2) = -\ 0.50,$$

also

$$\log u_2 \sin U_2 = 9.875061$$
$$\log u_2 \cos U_2 = 9.698970\,n,$$

woraus

$$\log \operatorname{tg} U_2 = 0.176091\,n,$$

also

$$U_2 = 123^\circ\, 41'\, 25'',$$

daher

$$\log u_2 = 9.954913,\; u_2 = 0.90139$$

und

$$u_2 \sin(U_2 + 90^\circ . x) = 0.90139 \sin(123^\circ\, 41'\, 25'' + 90^\circ . x).$$

Dieser Ausdruck giebt nun für

x	$0.9014 \sin(123^\circ\, 41'\, 25'' + 90^\circ . x)$
0	$0.9014 \sin 123^\circ\, 41'\, 25'' = + 0.7500$
1	$0.9014 \sin 213\;\; 41\;\; 25 = - 0.5000$
2	$0.9014 \sin 303\;\; 41\;\; 25 = - 0.7500$
3	$0.9014 \sin 33\;\; 41\;\; 25 = + 0.5000$
4	$0.9014 \sin 123\;\; 41\;\; 25 = + 0.7500$
5	$0.9014 \sin 213\;\; 41\;\; 25 = - 0.5000$
6	$0.9014 \sin 303\;\; 41\;\; 25 = - 0.7500$
7	$0.9014 \sin 33\;\; 41\;\; 25 = + 0.5000.$

Fügt man diese Werthe des dritten Gliedes als die Verbesserungen zu den gefundenen Werthen von y_x hinzu; so wird man die verbesserten oder genauern Werthe von y_x erhalten; nämlich für

x	y_x		Unterschied oder Fehler.
0	$1.2537 + 0.7500 = 2.0037$	$y_0 = 2$	$+ 0.0037$
1	$3.3876 - 0.5000 = 2.8876$	$y_1 = 3$	$- 0.1124$
2	$6.8321 - 0.7500 = 6.0800$	$y_2 = 6$	$+ 0.0800$
3	$9.5695 + 0.5000 = 10.0695$	$y_3 = 10$	$+ 0.0695$
4	$9.9963 + 0.7500 = 10.7463$	$y_4 = 11$	$- 0.2537$
5	$7.8624 - 0.5000 = 7.3624$	$y_5 = 7$	$+ 0.3624$
6	$4.4179 - 0.7500 = 3.6679$	$y_6 = 4$	$- 0.3321$
7	$1.6805 + 0.5000 = 2.1805$	$y_7 = 2$	$+ 0.1805.$

S ist

$$= 3.6138 - 2.2500 - 1.00,$$

d. h.

$$S = 0.3638.$$

Da hier die Fehler und die Summe ihrer Quadrate viel geringer als die vorigen sind; so giebt also die Formel

$$y_x = 5{,}625 + 4.536 \sin(285^\circ 26' 13'' + 45^\circ . x) + 0.901 \sin(123^\circ\, 41' 25'' + 90^\circ . x)$$

die Periode

$$y_0 = 2.00 \qquad y_4 = 11.00$$
$$y_1 = 3.00 \qquad y_5 = 7.00$$
$$y_2 = 6.00 \qquad y_6 = 4.00$$
$$y_3 = 10.00 \qquad y_7 = 2.00$$

sehr nahe durch

$$y_0 = 2.00 \qquad y_4 = 10.75$$
$$y_1 = 2.89 \qquad y_5 = 7.36$$
$$y_2 = 6.08 \qquad y_6 = 3.67$$
$$y_3 = 10.07 \qquad y_7 = 2.18$$

wieder, indem die Summe der Quadrate der Fehler dieser aus obiger Formel sich ergebenden Werthe nur 0.3638 beträgt.

Anmerkung. Es dürfte nicht unzweckmäßig scheinen, hier für einige der am häufigsten vorkommenden besondern Fälle die Ausdrücke und Gleichungen 64), 65) und 66) ausführlich entwickelt vollständig mitzutheilen.

I. Für $n = 5$, also $z = 72^\circ$, ist:

$$p_0 = \tfrac{1}{5}\,(y_0 + y_1 \ldots\ldots + y_4)$$
$$p_1 = \tfrac{2}{5}\,\{y_0 - (y_2 + y_3)\cos 36^\circ + (y_1 + y_4)\cos 72^\circ\}$$
$$q_1 = \tfrac{2}{5}\,\{(y_2 - y_3)\sin 36^\circ + (y_1 - y_4)\sin 72^\circ\}$$
$$u_1 \sin U_1 = p_1$$
$$u_1 \cos U_1 = q_1$$
$$y_x = p_0 + u_1 \sin (U_1 + 72^\circ . x).$$

II. Für $n = 6$, also $z = 60^\circ$, ist:

$$p_0 = \tfrac{1}{6}\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_5)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{3}\,\{(y_0 + y_3) + (y_1 - y_2 - y_4 + y_5)\cos 60^\circ\}$$
$$q_1 = \tfrac{1}{3}\,\{y_1 + y_2 - y_4 - y_5\}\sin 60^\circ$$
$$u_1 \sin U_1 = p_1$$
$$u_1 \cos U_1 = q_1$$
$$y_x = p_0 + u_1 \sin (U_1 + 60^\circ . x).$$

III. Für $n = 12$, also $z = 30^\circ$, ist:

$$p_0 = \tfrac{1}{12}\,(y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{11})$$
$$p_1 = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l}(y_0 - y_6) + (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11})\cos 30^\circ \\ \qquad + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10})\cos 60^\circ\end{array}\right\}$$
$$q_1 = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l}(y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11})\sin 30^\circ \\ \qquad + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})\sin 60^\circ\end{array}\right\}$$

$$p_2 = \tfrac{1}{6}\,\{(y_0 - y_3 + y_6 - y_9) + (y_1 - y_2 - y_4 + y_5 + y_7 - y_8 - y_{10} - y_{11}) \cos 60^\circ\}$$

$$q_2 = \tfrac{1}{6}\,\{y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11}\} \sin 60^\circ$$

$$u_1 \sin U_1 = p_1 \qquad u_2 \sin U_2 = p_2$$

$$u_1 \cos U_1 = q_1 \qquad u_2 \cos U_2 = q_2$$

$$y_x = p_0 + u_1 \sin (U_1 + 30_0 . x) + U_2 \sin (U_2 + 60^\circ . x).$$

IV. Für $n = 20$, also $z = 18^\circ$, ist:

$$p_0 = \tfrac{1}{20}\,(y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{19})$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 = \tfrac{1}{10}\,\{(y_0 - y_{10}) &+ (y_1 - y_9 - y_{11} + y_{19}) \cos 18^\circ \\ &+ (y_2 - y_8 - y_{12} + y_{18}) \cos 36^\circ \\ &+ (y_3 - y_7 - y_{13} + y_{17}) \cos 54^\circ \\ &+ (y_4 - y_6 - y_{14} + y_{16}) \cos 72^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 = \tfrac{1}{10}\,\{(y_5 - y_{15}) &+ (y_1 + y_9 - y_{11} - y_{19}) \sin 18^\circ \\ &+ (y_2 + y_8 - y_{12} - y_{18}) \sin 36^\circ \\ &+ (y_3 + y_7 - y_{13} - y_{17}) \sin 64^\circ \\ &+ (y_4 + y_6 - y_{14} - y_{16}) \sin 72^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p_2 = \tfrac{1}{10}\,\{&(y_0 - y_5 + y_{10} - y_{15}) \\ &+ (y_1 - y_4 - y_6 + y_9 + y_{11} - y_{14} - y_{16} + y_{19}) \cos 36^\circ \\ &+ (y_2 - y_3 - y_7 + y_8 + y_{12} - y_{13} - y_{17} + y_{18}) \cos 72^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q_2 = \tfrac{1}{10}\,\{&(y_1 + y_4 - y_6 - y_9 + y_{11} + y_{14} - y_{16} - y_{19}) \sin 36^\circ \\ &+ (y_2 + y_3 - y_7 - y_8 + y_{12} + y_{13} - y_{17} - y_{18}) \sin 72^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \sin U_1 = p_1 \qquad u_2 \sin U_2 = p_2$$

$$u_1 \cos U_1 = q_1 \qquad u_2 \cos U_2 = q_2$$

$$y_x = p_0 + u_1 \sin (U_1 + 18^\circ . x) + u_2 \sin (U_2 + 36^\circ . x).$$

V. Für $n = 24$, also $z = 15^\circ$, ist:

$$p_0 = \tfrac{1}{24}\,(y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{22} + y_{23})$$

$$\left.\begin{aligned} p_1 = \tfrac{1}{12}\,\{(y_0 - y_{12}) &+ (y_1 - y_{11} - y_{13} + y_{23}) \cos 15^\circ \\ &+ (y_2 - y_{10} - y_{14} + y_{22}) \cos 30^\circ \\ &+ (y_3 - y_9 - y_{15} + y_{21}) \cos 45^\circ \\ &+ (y_4 - y_8 - y_{16} + y_{20}) \cos 60^\circ \\ &+ (y_5 - y_7 - y_{17} + y_{19}) \cos 75^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 = \tfrac{1}{12}\,\{(y_6 - y_{18}) &+ (y_1 + y_{11} - y_{13} - y_{23}) \sin 15^\circ \\ &+ (y_2 + y_{10} - y_{14} - y_{22}) \sin 30^\circ \\ &+ (y_3 + y_9 - y_{15} - y_{21}) \sin 45^\circ \\ &+ (y_4 + y_8 - y_{16} - y_{20}) \sin 60^\circ \\ &+ (y_5 + y_7 - y_{17} - y_{19}) \sin 75^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} p_2 = \tfrac{1}{12} \{ & (y_0 - y_6 + y_{12} - y_{18}) \\ & + (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11} + y_{13} - y_{17} - y_{19} + y_{23}) \cos 30^\circ \\ & + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10} + y_{14} - y_{16} - y_{20} + y_{22}) \cos 60^\circ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 = \tfrac{1}{12} \{ & (y_3 - y_9 + y_{15} - y_{21}) \\ & + (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11} + y_{13} + y_{17} - y_{19} - y_{23}) \sin 30^\circ \\ & + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10} + y_{14} + y_{16} - y_{20} - y_{22}) \sin 60^\circ \} \end{aligned}$$

$$u_1 \sin U_1 = p_1 \qquad u_2 \sin U_2 = p_2$$

$$u_1 \cos U_1 = q_1 \qquad u_2 \cos U_2 = q_2$$

$$y_x = p_0 + u_1 \sin(U_1 + 15^\circ . x) + u_2 \sin(U_2 + 30^\circ . x).$$

§. 92. Sehr häufig kehren die aus Beobachtungen oder gewissen andern Bestimmungen hergeleiteten Werthe von y nicht nach dem letzten Werthe desselben in der nämlichen Ordnung wieder, sondern nehmen gewöhnlich nach einem andern unbekannten Gesetze bloß zu oder bloß ab, so daß sämmtliche y keine stets wiederkehrende Periode bilden. Dann kann natürlich die Gleichung 64) nicht mehr unmittelbar zur Darstellung der numerischen Werthe von y angewandt werden.

§. 93. a) Eine kleine Ueberlegung wird jedoch zeigen, daß man das in den vorigen Paragraphen gelehrte Verfahren Bessels mit einer einzigen Modification auch im gegenwärtigen Falle recht gut anwenden könne. Diese Modification besteht nämlich darin, daß man in dem Ausdrucke 64) des §. 89. zwischen dem ersten und zweiten Gliede noch ein Glied, bestehend aus einer mit x multiplicirten Constante, einschaltet, also nun die Formel

$$y_x = p_0 + wx + u_1 \sin(U_1 + z.x) + u_2 \sin(U_2 + 2z.x) + u_3 \sin(U_3 + 3z.x) + \ldots \quad 68),$$

wo $z = \frac{360^\circ}{n}$ ist, zur Berechnung der Werthe von y einer bloß steigenden oder bloß fallenden Reihe, und zwar ebenfalls mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, benutzt. Diese Benutzung kann im Praktischen am bequemsten auf folgende Weise geschehen:

Man setze zuerst

$$y_x = wx,$$

$$\text{also} \quad 0 = -y_x + xw,$$

und berechne

$$(ab) = -\{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + (n-1) y_{n-1}\}$$

$$(bb) = S(n-1)^2$$

$$w = -\frac{(ab)}{(bb)}.$$

Hierauf setze man $y_x - xw = Y_x$, so hat man dann:

$$Y_x = p_0 + u_1 \sin(U_1 + z.x) + u_2 \sin(U_2 + 2z.x) + u_3 \sin(U_3 + 3z.x) + \ldots,$$

und verfahre ganz so wie in §. 89. 64), nur daß hier Y_x statt des dortigen y_x gesetzt werden muß.

Beispiel. Es sei die Reihe gegeben:

$y_0 = 0.04$	$y_4 = 2.24$	$y_8 = 6.40$
$y_1 = 0.32$	$y_5 = 3.18$	$y_9 = 7.70$
$y_2 = 0.82$	$y_6 = 4.10$	$y_{10} = 9.16$
$y_3 = 1.46$	$y_7 = 5.22$	$y_{11} = 10.70.$

Hieraus erhält man erstlich, da $n = 12$,

$$(ab) = -(0.32 + 1.64 + 4.38 + 8.96 + 15.90 + 24.60 + 36.54 + 51.20 + 69.30 + 91.60 + 117.70)$$

$$(bb) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121,$$

also

$$w = \frac{422.14}{506.00} = +0.8343;$$

mithin folgt nun:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 0.04 - 0.0000 = +0.0400\\
Y_1 &= 0.32 - 0.8343 = -0.5143\\
Y_2 &= 0.82 - 1.6686 = -0.8486\\
Y_3 &= 1.46 - 2.5029 = -1.0429\\
Y_4 &= 2.24 - 3.3372 = -1.0972\\
Y_5 &= 3.18 - 4.1715 = -0.9915\\
Y_6 &= 4.10 - 5.0058 = -0.9058\\
Y_7 &= 5.22 - 5.8401 = -0.6201\\
Y_8 &= 6.40 - 6.6744 = -0.2744\\
Y_9 &= 7.70 - 7.5087 = +0.1913\\
Y_{10} &= 9.16 - 8.3430 = +0.8170\\
Y_{11} &= 10.70 - 9.1773 = +1.5227.
\end{aligned}$$

Zweitens erhält man hieraus, da $z = 30^0$ nach §. 89., weil $p_0 = \frac{1}{12}(Y_0 + Y_1 + Y_2 + .. + Y_{11})$, und

$$\begin{aligned}
p_1 &= \tfrac{1}{6}\{(Y_0-Y_6)+(Y_1-Y_5-Y_7+Y_{11})\cos 30^0+(Y_2-Y_4-Y_8+Y_{10})\cos 60^0\}\\
q_1 &= \tfrac{1}{6}\{(Y_3-Y_9)+(Y_1+Y_5-Y_7-Y_{11})\sin 30^0+(Y_2+Y_4-Y_8-Y_{10})\sin 60^0\}\\
p_2 &= \tfrac{1}{6}\{(Y_0-Y_3+Y_6-Y_9)+(Y_1-Y_2-Y_4+Y_5+Y_7-Y_8-Y_{10}+Y_{11})\cos 60^0\}\\
q_2 &= \tfrac{1}{6}(Y_1+Y_2-Y_4-Y_5+Y_7+Y_8-Y_{10}-Y_{11})\sin 60^0\\
p_3 &= \tfrac{1}{6}(Y_0-Y_2+Y_4-Y_6+Y_8-Y_{10})\\
q_3 &= \tfrac{1}{6}(Y_1-Y_3+Y_5-Y_7+Y_9-Y_{11});\ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

ist,

$$p_0 = -0.3103$$
$$p_1 = +0.1576 + 0.4367 \cos 30^\circ + 0.2233 \cos 60^\circ = +0.6474$$
$$q_1 = -0.2057 - 0.4014 \sin 30^\circ - 0.4147 \sin 60^\circ = -0.7655$$
$$p_2 = -0.0024 \quad + 0.1333 \cos 60^\circ = +0.0642$$
$$q_2 = \quad - 0.4181 \sin 60^\circ = -0.3621$$
$$p_3 = -0.0657 = -0.0657$$
$$q_3 = -0.1957 = -0.1957;$$

daher endlich nach

$\log u_1 \sin U_1 = 9.81117$	$\log u_2 \sin U_2 = 8.80753$	$\log u_3 \sin U_3 = 8.81757n$
$\log u_1 \cos U_1 = 9.88395n$	$\log u_2 \cos U_2 = 9.55883n$	$\log u_3 \cos U_3 = 9.29159n$,

woraus

$$U_1 = 139^\circ 46' 40'' \qquad U_2 = 169^\circ 56' 50'' \qquad U_3 = 198^\circ 33' 30''$$
$$\log u_1 = 0.00110; \qquad \log u_2 = 9.56560; \qquad \log u_3 = 9.31477;$$

also

$$Y_x = -0.3103 + \overline{0.00110} \sin (139^\circ 46' 40'' + 30^\circ . x)$$
$$+ \overline{9.56560} \sin (169^\circ 56' 50'' + 60^\circ . x)$$
$$+ \overline{9.31477} \sin (198^\circ 33' 30'' + 90^\circ . x),$$

und folglich:

$$y_x = -0.3103 + 0.8343 x + \overline{0.00110} \sin (139^\circ 46' 40'' + 30^\circ . x)$$
$$+ \overline{9.56560} \sin (169^\circ 56' 50'' + 60^\circ . x)$$
$$+ \overline{9.31477} \sin (198^\circ 33' 30'' + 90^\circ . x),$$

welche Gleichung für y folgende Resultate giebt:

x	gegebenes y	berechn. y	Fehler.	Quadrat der Fehler.
0	+ 0.040	+ 0.336	+ 0.296	0.087616
1	+ 0.320	+ 0.225	− 0.095	0.009025
2	+ 0.820	+ 0.739	− 0.081	0.006561
3	+ 1.460	+ 1.559	+ 0.099	0.009801
4	+ 2.240	+ 2.256	+ 0.016	0.000256
5	+ 3.180	+ 3.068	− 0.112	0.012544
6	+ 4.100	+ 4.047	− 0.053	0.002809
7	+ 5.220	+ 5.266	+ 0.046	0.002116
8	+ 6.400	+ 6.292	− 0.108	0.011664
9	+ 7.700	+ 7.704	+ 0.004	0.000016
10	+ 9.160	+ 9.160	+ 0.206	0.042436
11	+ 10.700	+ 10.352	− 0.348	0.121104
			Summe der Quadrate der Fehler:	0.305948.

§. 93. b) Das in den §. 88. u. ff. gezeigte Verfahren kann auch noch auf eine andere Weise, als es im §. 93. a) gelehrt worden ist, zu dem Zweck modificirt werden, um Reihen, die nur steigen oder nur fallen, darzustellen.

Sind nämlich die n Werthe von y in aufsteigender (oder fallender) Reihe gegeben:

für $x = 0$	y_0
1	y_1
2	y_2
3	y_3
4	y_4
.	.
.	.
.	.
$n-2$	y_{n-2}
$n-1$	y_{n-1};

so kann man als richtig annehmen, daß für

$$x = n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ \text{u. s. w.}$$

die Werthe von y wieder so ab- (oder zu-) nehmen, daß das Gesetz stattfindet:

	Werth von y	
für $x = 0$	y_0	
1	$y_1 = y_{2n-3}$	für $x = 2n-3$
2	$y_2 = y_{2n-4}$	$2n-4$
3	$y_3 = y_{2n-5}$	$2n-5$
4	$y_4 = y_{2n-6}$	$2n-6$
.	.	.
.	.	.
.	.	
.	.	.
$n-3$	$y_{n-3} = y_{n+1}$	$n+1$
$n-2$	$y_{n-2} = y_n$	$n.$
$n-1$	y^{n-1}	

Es können also die Gleichungen 64), 65) und 66) ebenfalls bei einer auf- (oder ab-) steigenden Reihe der n gegebenen Werthe von y angewendet werden, wenn man nur in den dort für z, p_0, p_1, p_2, p_3, ... gegebenen Ausdrücken $2n-2$ statt n setzt. Man wird dann finden, daß die Gleichungen 65) bei ihrer Entwickelung sehr einfach ausfallen werden, indem die gleichen Werthe

$$\begin{array}{lll} y_1 & \text{und} & y_{2n-3} \\ y_2 & ,, & y_{2n-4} \\ y_3 & ,, & y_{2n-5} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_{n-3} & ,, & y_{n+1} \\ y_{n-2} & ,, & y_n \end{array}$$

für jedes n zusammen- oder wegfallen, hingegen die Größen $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ gleich Null, und die constanten Winkel $U_1, U_3, U_3, U_4, \ldots$ für jedes n nicht besondere Werthe erhalten werden, sondern sämmtlich immer gleich 90 Grad sind, wodurch mithin die Gleichung 64), sobald man $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ für $u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots$ schreibt, in die einfachere

$$y_x = p_0 + p_1 \cos z.x + p_2 \cos 2z.x + p_3 \cos 3z.x + \ldots \quad 68^*)$$

übergeht, in welcher

$$z = \frac{180^0}{n-1} \quad 68^{**})$$

ist.

Ein Beispiel wird dieses Verfahren noch mehr erläutern.

Für $n = 13$ kann man setzen:

$$\begin{array}{l} y_0 \\ y_1 = y_{23} \\ y_2 = y_{22} \\ y_3 = y_{21} \\ y_4 = y_{20} \\ y_5 = y_{19} \\ y_6 = y_{18} \\ y_7 = y_{17} \\ y_8 = y_{16} \\ y_9 = y_{15} \\ y_{10} = y_{14} \\ y_{11} = y_{13} \\ y_{12} \end{array} \qquad z = \frac{180}{13-1} = 15^0;$$

also wird sich nach 66) und 65) finden

$$p_0 = \tfrac{1}{24}(y_0 + y_{12}) + \tfrac{1}{12}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{10} + y_{11})$$

$$\begin{aligned} p_1 = \tfrac{1}{12}(y_0 - y_{12}) &+ \tfrac{1}{6}(y_1 - y_{11})\cos 15^\circ + \tfrac{1}{6}(y_2 - y_{10})\cos 30^\circ \\ &+ \tfrac{1}{6}(y_3 - y_9)\cos 45^\circ + \tfrac{1}{6}(y_4 - y_8)\cos 60^\circ \\ &+ \tfrac{1}{6}(y_5 - y_7)\cos 75^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = \tfrac{1}{12}(y_0 - 2y_6 + y_{12}) &+ \tfrac{1}{6}(y_1 - y_5 - y_7 + y_{11})\cos 30^\circ \\ &+ \tfrac{1}{6}(y_1 - y_4 - y_8 + y_{10})\cos 60^\circ \end{aligned}$$

$$p_3 = \tfrac{1}{12}(y - 2y_4 + 2y_8 - y_{12}) + \tfrac{1}{6}(y_1 - y_3 - y_5 + y_7 + y_9 - y_{11})\cos 45^\circ$$

und

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 15^\circ . x + p_2 \cos 30^\circ . x + p_3 \cos 45^\circ . x.$$

Gesetzt nun, es seien folgende **13** Werthe von y gegeben

$$\begin{aligned} y_0 &= + \ 0.04 \\ y_1 &= + \ 0.32 \\ y_2 &= + \ 0.82 \\ y_3 &= + \ 1.46 \\ y_4 &= + \ 2.24 \\ y_5 &= + \ 3.18 \\ y_6 &= + \ 4.10 \\ y_7 &= + \ 5.22 \\ y_8 &= + \ 6.40 \\ y_9 &= + \ 7.70 \\ y_{10} &= + \ 9.16 \\ y_{11} &= + 10.70 \\ y_{12} &= + 12.40. \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben findet sich nach den obigen Formeln

$$\begin{aligned} p_0 &= + \ 4.7933 \\ p_1 &= - \ 5.0749 \\ p_2 &= + \ 0.8432 \\ p_3 &= - \ 0.5842 , \end{aligned}$$

also die Gleichung

$$\begin{aligned} y_x = + \ 4.7933 - 5.0749 \cos 15^\circ x &= 0.8432 \cos 30^\circ . x \\ &- 0.5842 \cos 45^\circ . x , \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} y_x = + \ 4.7933 &+ \overline{0.70543}n . \cos 15^\circ . x \\ &+ \overline{9.92593} \cos 30^\circ . x \\ &+ \overline{9.76656}n . \cos 45^\circ . x , \end{aligned}$$

wo die überstrichenen Coefficienten schon Logarithmen sind. Aus der letzten Gleichung ergeben sich folgende Werthe von y, und durch Vergleichung derselben mit den gegebenen, ihre Fehler.

x	Berechn. y	Fehler.
0	− 0.02	− 0.06
1	+ 0.11	− 0.21
2	+ 0.82	0.00
3	+ 1.62	+ 0.16
4	+ 2.42	+ 0.18
5	+ 2.34	− 0.84
6	+ 4.79	+ 0.69
7	+ 4.97	− 0.25
8	+ 6.33	− 0.07
9	+ 7.97	+ 0.27
10	+ 9.61	+ 0.45
11	+ 10.84	+ 0.24
12	+ 11.34	− 1.06.

Anmerkung. Auch hier dürfte es nicht unzweckmäßig scheinen, für einige der am häufigsten vorkommenden besondern Fälle die vollständigen Bestimmungsgleichungen mitzutheilen.

I. Für $n = 5$ hat man $z = 45^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{8}(y_0 + y_4) + \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{4}(y_0 - y_4) + \tfrac{1}{2}(y_1 - y_3) \cos 45^0$$
$$p_2 = \tfrac{1}{2}(y_0 - 2y_2 + y_4);$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 45^0.x + p_2 \cos 90^0.x.$$

II. Für $n = 6$ hat man $z = 36^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{10}(y_0 + y_5) + \tfrac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{5}(y_0 - y_5) + \tfrac{2}{5}(y_1 - y_4) \cos 36^0 + \tfrac{2}{5}(y_2 - y_3) \cos 72^0$$
$$p_2 = \tfrac{1}{5}(y_0 + y_5) - \tfrac{2}{5}(y_2 + y_3) \cos 36^0 + \tfrac{2}{5}(y_1 + y_4) \cos 72^0;$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 36.x + p_2 \cos 72.x.$$

III. Für $n = 7$ hat man $z = 30^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{12}(y_0 + y_6) + \tfrac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{6}(y_0 - y_6) + \tfrac{1}{3}(y_1 - y_5) \cos 30^0 + \tfrac{1}{3}(y_2 - y_4) \cos 60^0$$
$$p_2 = \tfrac{1}{6}(y_0 - 2y_3 + y_6) + \tfrac{1}{3}(y_1 - y_2 - y_4 + y_5) \cos 60;$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 30^0.x + p_2 \cos 60^0.x.$$

IV. Für $n = 8$ hat man $z = 25\tfrac{5}{7}{}^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{14}(y_0 + y_7) + \tfrac{1}{7}(y_1 + y_2 + \ldots + y_6)$$

$$p_1 = \tfrac{1}{7}(y_0 - y_7) + \tfrac{2}{7}(y_1 - y_6)\cos 25\tfrac{5}{7}{}^{0}$$
$$+ \tfrac{2}{7}(y_2 - y_5)\cos 51\tfrac{3}{7}{}^{0}$$
$$+ \tfrac{2}{7}(y_3 - y_4)\cos 77\tfrac{1}{7}{}^{0}$$
$$p_2 = \tfrac{1}{7}(y_0 + y_7) - \tfrac{2}{7}(y_3 + y_4)\cos 25\tfrac{5}{7}{}^{0}$$
$$+ \tfrac{2}{7}(y_1 + y_6)\cos 51\tfrac{3}{7}{}^{0}$$
$$- \tfrac{2}{7}(y_2 + y_5)\cos 77\tfrac{1}{7}{}^{0}$$
$$p_3 = \tfrac{1}{7}(y_0 - y_7) - \tfrac{1}{7}(y_2 - y_5)\cos 25\tfrac{5}{7}{}^{0}$$
$$- \tfrac{2}{7}(y_3 - y_4)\cos 51\tfrac{3}{7}{}^{0}$$
$$+ \tfrac{2}{7}(y_1 - y_6)\cos 77\tfrac{1}{7}{}^{0};$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 25\tfrac{5}{7}{}^{0}.x + p_2 \cos 51\tfrac{3}{7}{}^{0}.x + p_3 \cos 77\tfrac{1}{7}{}^{0}.x.$$

IV. Für $n = 10$ hat man $z = 20^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{18}(y_0 + y_9) + \tfrac{1}{9}(y_1 + y_2 + \ldots + y_8)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{9}(y_0 - y_9) + \tfrac{2}{9}(y_1 - y_8)\cos 20^0 + \tfrac{2}{9}(y_2 - y_7)\cos 40^0$$
$$+ \tfrac{2}{9}(y_3 - y_6)\cos 60^0 + \tfrac{2}{9}(y_4 - y_5)\cos 80^0$$
$$p_2 = \tfrac{1}{9}(y_0 + y_9) - \tfrac{2}{9}(y_4 + y_5)\cos 20^0 + \tfrac{2}{9}(y_1 + y_8)\cos 40^0$$
$$- \tfrac{2}{9}(y_3 + y_6)\cos 60^0 + \tfrac{2}{9}(y_2 + y_7)\cos 80^0$$
$$p_3 = \tfrac{1}{9}(y_0 - 2y_3 + 2y_6 - y_9)$$
$$+ \tfrac{2}{9}(y_1 - y_2 - y_4 + y_5 + y_7 - y_8)\cos 60^0;$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 20^0.x + p_2 \cos 40^0.x + p_3 \cos 60^0.x.$$

V. Für $n = 11$ hat man $z = 18^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{20}(y_0 + y_{10}) + \tfrac{1}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_9)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{10}(y_0 - y_{10}) + \tfrac{1}{5}(y_1 - y_9)\cos 18^0 + \tfrac{1}{5}(y_2 - y_8)\cos 36^0$$
$$+ \tfrac{1}{5}(y_3 - y_7)\cos 54^0 + \tfrac{1}{5}(y_4 - y_6)\cos 72^0$$
$$p_2 = \tfrac{1}{10}(y_0 - 2y_5 + y_{10}) + \tfrac{1}{5}(y_1 - y_4 - y_6 + y_9)\cos 36^0$$
$$+ \tfrac{1}{5}(y_2 - y_3 - y_7 + y_8)\cos 72^0$$
$$p_3 = \tfrac{1}{10}(y_0 - y_{10}) + \tfrac{1}{5}(y_3 - y_7)\cos 18^0 - \tfrac{1}{5}(y_4 - y_6)\cos 36^0$$
$$+ \tfrac{1}{5}(y_1 - y_9)\cos 54^0 - \tfrac{1}{5}(y_2 - y_8)\cos 72^0;$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 18^0.x + p_2 \cos 36^0.x + p_3 \cos 54^0.x.$$

VI. Für $n = 16$ hat man $z = 12^0$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{30}(y_0 + y_{15}) + \tfrac{1}{15}(y_1 + y_2 + \ldots. + y_{14})$$
$$p_1 = \tfrac{1}{15}(y_0 - y_{15}) + \tfrac{2}{15}(y_1 - y_{14})\cos 12^0 + \tfrac{2}{15}(y_2 - y_{13})\cos 24^0$$
$$+ \tfrac{2}{15}(y_3 - y_{12})\cos 36^0 + \tfrac{2}{15}(y_1 - y_{11})\cos 48^0$$
$$+ \tfrac{2}{15}(y_5 - y_{10})\cos 60^0 + \tfrac{2}{15}(y_6 - y_9)\cos 72^0$$
$$+ \tfrac{2}{15}(y_7 - y_8)\cos 84^0$$

$$\begin{aligned}
p_2 = {} & \tfrac{1}{15}(y_0 + y_{15}) - \tfrac{2}{15}(y_7 + y_8)\cos 12^\circ + \tfrac{2}{15}(y_1 + y_{14})\cos 24^\circ \\
& - \tfrac{2}{15}(y_6 + y_9)\cos 36^\circ + \tfrac{2}{15}(y_2 + y_{13})\cos 48^\circ \\
& - \tfrac{2}{15}(y_5 + y_{10})\cos 60^\circ + \tfrac{2}{15}(y_3 + y_{12})\cos 72^\circ \\
& - \tfrac{2}{15}(y_4 + y_{11})\cos 84^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 = {} & \tfrac{1}{15}(y_0 - 2y_5 + 2y_{10} - y_{15}) \\
& + \tfrac{2}{15}(y_1 - y_4 - y_6 + y_9 + y_{11} - y_{14})\cos 36^\circ \\
& + \tfrac{2}{15}(y_2 - y_3 - y_7 + y_8 + y_{12} - y_{13})\cos 72^\circ;
\end{aligned}$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 12^\circ.x + p_2 \cos 24^\circ.x + p_3 \cos 36^\circ.x.$$

VII. Für $n = 19$ hat man $z = 10^\circ$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{36}(y_0 + y_{18}) + \tfrac{1}{18}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{17})$$

$$\begin{aligned}
p_1 = {} & \tfrac{1}{18}(y_0 - y_{18}) + \tfrac{1}{9}(y_1 - y_{17})\cos 10^\circ + \tfrac{1}{9}(y_2 - y_{16})\cos 20^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_3 - y_{15})\cos 30^\circ + \tfrac{1}{9}(y_4 - y_{14})\cos 40^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_5 - y_{13})\cos 50^\circ + \tfrac{1}{9}(y_6 - y_{12})\cos 60^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_7 - y_{11})\cos 70^\circ + \tfrac{1}{9}(y_8 - y_{10})\cos 80^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 = {} & \tfrac{1}{18}(y_0 - 2y_9 + y_{18}) + \tfrac{1}{9}(y_1 - y_8 - y_{10} + y_{17})\cos 20^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_2 - y_7 - y_{11} + y_{16})\cos 40^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_3 - y_6 - y_{12} + y_{15})\cos 60^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_4 - y_5 - y_{13} + y_{14})\cos 80^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 = {} & \tfrac{1}{18}(y_0 - 2y_6 + 2y_{12} - y_{18}) \\
& + \tfrac{1}{9}(y_1 - y_5 - y_7 + y_{11} + y_{13} - y_{17})\cos 30^\circ \\
& + \tfrac{1}{9}(y_2 - y_4 - y_8 + y_{10} + y_{14} - y_{16})\cos 60^\circ;
\end{aligned}$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 10^\circ.x + p_2 \cos 20^\circ.x + p_3 \cos 30^\circ.x.$$

VIII. Für $n = 21$ hat man $z = 9^\circ$ und

$$p_0 = \tfrac{1}{40}(y_0 - y_{20}) + \tfrac{1}{20}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{19})$$

$$\begin{aligned}
p_1 = {} & \tfrac{1}{20}(y_0 - y_{20}) + \tfrac{1}{10}(y_1 - y_{19})\cos 9^\circ + \tfrac{1}{10}(y_2 - y_{18})\cos 18^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_3 - y_{17})\cos 27^\circ + \tfrac{1}{10}(y_4 - y_{18})\cos 36^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_5 - y_{15})\cos 45^\circ + \tfrac{1}{10}(y_6 - y_{14})\cos 54^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_7 - y_{13})\cos 63^\circ + \tfrac{1}{10}(y_8 - y_{12})\cos 72^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_9 - y_{11})\cos 81^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 = {} & \tfrac{1}{20}(y_0 - 2y_{10} + y_{20}) + \tfrac{1}{10}(y_1 - y_9 - y_{11} + y_{19})\cos 18^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_2 - y_8 - y_{12} + y_{18})\cos 36^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_3 - y_7 - y_{13} + y_{17})\cos 54^\circ \\
& + \tfrac{1}{10}(y_4 - y_6 - y_{14} + y_{16})\cos 72^\circ
\end{aligned}$$

$$p_3 = \tfrac{1}{20}(y_0 - y_{20}) - \tfrac{1}{10}(y_7 - y_{13})\cos 9^0 - \tfrac{1}{10}(y_6 - y_{14})\cos 18^0$$
$$+ \tfrac{1}{10}(y_1 - y_{19})\cos 27^0$$
$$- \tfrac{1}{10}(y_8 - y_{12})\cos 36^0 - \tfrac{1}{10}(y_5 - y_{15})\cos 45^0$$
$$+ \tfrac{1}{10}(y_2 - y_{18})\cos 54^0$$
$$- \tfrac{1}{10}(y_9 - y_{11})\cos 63^0 - \tfrac{1}{10}(y_4 - y_{16})\cos 72^0$$
$$+ \tfrac{1}{10}(y_3 - y_{17})\cos 81^0;$$

also

$$y_x = p_0 + p_1 \cos 9^0.x + p_2 \cos 18^0.x + p_3 \cos 27^0.x.$$

§. 94. In vielen Fällen jedoch verlangt man eine Formel, die alle gegebenen Werthe einer Reihe genau darstellt. Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist die Anzahl n der gegebenen Werthe von y eine gerade oder eine ungerade Zahl.

§. 95. I. Fall. Wenn n eine gerade Zahl ist.

Die dem Ausdrucke 68) (§. 93.) sehr ähnliche Formel:

$$y_x = u_0 + u_1 x + u_2 \sin(U_2 + zx) + u_3 \sin(U_3 + 2zx) + \ldots \quad 69),$$

wo

$$z = \frac{360^0}{n},$$

erfüllt die Forderung, wenn man in ihr so viele Glieder annimmt, bis in denselben n Constanten vorkommen, offenbar vollkommen, und der zur Bestimmung der numerischen Werthe der n Constanten erforderliche Eliminationsprozeß muß wegen $z = \frac{360^0}{n}$ hinsichtlich der trigonometrischen Functionen leicht begreiflicher Weise ungemein einfach und sicher ausfallen, wie ein vollständig ausgeführtes Beispiel erläutern und beweisen wird.

Beispiel. Gesetzt, es wären 8 Werthe von y gegeben; so ist

$$z = 45^0$$

und die Formel

$$y_x = u_0 + u_1 x + u_2 \sin(U_2 + 45^0 x) + u_3 \sin(U_3 + 90^0 x)$$
$$+ u_4 \sin(U_4 + 135^0 x),$$

wo die Constanten u_0; u_1; u_2, U_2; u_3, U_3 und u_4, U_4 zu bestimmen sind, anzunehmen.

Unsere angenommene Formel läßt sich auch so schreiben:

$$y_x = u_0 + u_1 x + u_2 \sin U_2 . \cos 45^0 x + u_2 \cos U_2 . \sin 45^0 x$$
$$+ u_3 \sin U_3 . \cos 90^0 x + u_3 \cos U_3 . \sin 90^0 x$$
$$+ u_4 \sin U_4 . \cos 135^0 x + u_4 \cos U_4 . \sin 135^0 x,$$

d. h. wenn man

$$\begin{array}{l|l|l} u_2 \sin U_2 = p_2 & u_3 \sin U_3 = p_3 & u_4 \sin U_4 = p_4 \\ u_2 \cos U_2 = q_2 & u_3 \cos U_3 = q_3 & u_4 \cos U_4 = q_4 \end{array}$$

setzt,

$$y_x = u_0 + u_1 x + \cos 45^0 x . p_2 + \sin 45^0 x . q_2 + \cos 90^0 x . p_3 \\ + \sin 90^0 x . q_3 + \cos 135^0 x . p_4 + \sin 135^0 x . q_4 .$$

Man hat also für die 8 verschiedenen Werthe von y die 8 Gleichungen

$$\begin{array}{lllll}
1) & y_0 = u_0 & + p_2 & + p_3 & + p_4 \\
2) & y_1 = u_0 + u_1 & + \cos 45^0 p_2 + \sin 45^0 q_2 & + q_3 & - \cos 45^0 . p_4 + \sin 45^0 q_4 \\
3) & y_2 = u_0 + 2u_1 & + q_2 & - p_3 & - q_4 \\
4) & y_3 = u_0 + 3u_1 & - \cos 45^0 p_2 + \sin 45^0 q_2 & - q_3 & + \cos 45^0 p_4 + \sin 45^0 q_4 \\
5) & y_4 = u_0 + 4n_1 & - p_2 & + p_3 & - p_4 \\
6) & y_5 = u_0 + 5u_1 & - \cos 45^0 p_2 - \sin 45^0 q_2 & + q_3 & + \cos 45^0 p_4 - \sin 45^0 q_4 \\
7) & y_6 = u_0 + 6u_1 & - q_2 & - p_3 & + q_4 \\
8) & y_7 = u_0 + 7u_1 & + \cos 45^0 p_2 - \sin 45^0 q_2 & - q_3 & - \cos 45^0 p_4 - \sin 45^0 q_4
\end{array}$$

zur Bestimmung der 8 Constanten u_0, u_1; p_2, q_2; p_3, q_3 und p_4, q_4.

Diese Bestimmung aber geschieht nun sehr leicht durch Addition und Subtraction der 8 Gleichungen unter einander; man erhält nämlich nach und nach:

$$u_0 + 4u_1 = \tfrac{1}{4}(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)$$

$$u_0 + 3u_1 = \tfrac{1}{4}(y_0 + y_2 + y_4 + y_6)$$

$$q_3 = \tfrac{1}{4}(y_1 - y_3 + y_5 - y_7) + u_1$$

$$p_3 = \tfrac{1}{4}(2y_0 - 2u_0 - y_2 + 2y_4 - y_6)$$

$$q_2 = \tfrac{1}{4}(4p_3 - y_0 + 2y_2 - y_4) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{y_1 + y_3 - 2u_0 - 4u_1}{\sin 45^0}\right)$$

$$p_2 = \tfrac{1}{4}(4p_3 + y_2 - 2y_4 + y_6) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{y_3 + y_5 - 2u_0 - 8u_1}{\cos 45^0}\right)$$

$$q_4 = -\tfrac{1}{2}(4p_3 - y_0 + 2y_2 - y_4) + q_2$$

$$p_4 = +\tfrac{1}{2}(4p_3 + y_2 - 2y_4 + y_6) - p_2 .$$

§. 96. II. Fall. Wenn n eine ungerade Zahl ist.

Die dem Ausdrucke 64) (§. 89) ebenfalls sehr ähnliche Formel

$$y_x = u_0 + u_1 \sin(U_1 + zx) + u_2 \sin(U_2 + 2zx) + \ldots . . \qquad 70),$$

wo
$$z = \frac{360^0}{n+1},$$

erfüllt die Forderung, alle Werthe von y einer gegebenen Reihe genau darzustellen, gleichfalls. Auch hier fällt der Elimina=

tionsproceß noch einfach und bequem genug aus, wie ein vollständig ausgeführtes Beispiel deutlich zeigen wird.

Beispiel. Gesetzt, es wären 7 Werthe von y gegeben; so ist

$$z = \frac{360^\circ}{7+1} = 45^\circ$$

und man hat die Formel

$$y_x = u_0 + u_1 \sin(U_0 + 45^\circ x) + u_2 \sin(U_2 + 90^\circ x) \\ + u_3 \sin(U_3 + 135^\circ x),$$

wo die Constanten u_0; u_1, U_1; u_2, U_2 und u_3, U_3 zu bestimmen sind, anzunehmen.

Unsere angenommene Formel läßt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} y_x = u_0 &+ u_1 \sin U_1 \cos 45^\circ x + u_1 \cos U_1 . \sin 45^\circ x \\ &+ u_5 \sin U_2 \cos 90^\circ x + u_2 \cos U_2 . \sin 90^\circ x \\ &+ u_3 \sin U_3 \cos 135^\circ x + u_3 \cos U_3 . \sin 145^\circ x, \end{aligned}$$

d. h. wenn man

$$\begin{array}{l|l|l} u_1 \sin U_1 = p_1 & u_2 \sin U_2 = p_2 & u_3 \sin U_3 = p_3 \\ u_1 \cos U_1 = q_1 & u_2 \cos U_2 = q_2 & u_3 \cos U_3 = q_3 \end{array}$$

setzt,

$$y_x = u_0 + \cos 45^\circ x . p_1 + \sin 45^\circ x . q_1 + \cos 90^\circ x . p_2 + \sin 90^\circ x . q_2 \\ + \cos 135^\circ x . p_3 + \sin 135^\circ x . q_3 .$$

Man hat daher für die 7 verschiedenen Werthe von y die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} 1)\ y_0 = u_0 & + p_1 & + p_2 & + p_3 \\ 2)\ y_1 = u_0 + \cos 45^\circ . p_1 + \sin 45^\circ . q_1 & & + q_2 & - \cos 45^\circ . p_3 + \sin 45^\circ . q_3 \\ 3)\ y_2 = u_0 & & + q_1 - p_2 & - q_3 \\ 4)\ y_3 = u_0 - \cos 45^\circ . p_1 + \sin 45^\circ . q_1 & & - q_2 & + \cos 45^\circ . p_3 + \sin 45^\circ . q_3 \\ 5)\ y_4 = u_0 & - p_1 & + p_2 & - p_3 \\ 6)\ y_5 = u_0 - \cos 45^\circ . p_1 - \sin 45^\circ . q_1 & & + q_2 & + \cos 45^\circ . p_3 - \sin 45^\circ . q_3 \\ 7)\ y_6 = u_0 & & - q_1 - p_2 & + q_3 \end{array}$$

zur Bestimmung der 7 Constanten u_0; p_1, q_1; p_2, q_2 und p_3, q_3. Diese Bestimmung wird gleichfalls sehr leicht durch Addition und Subtraction der 7 Gleichungen unter einander bewerkstelligt. Man erhält nämlich nach und nach:

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{4}(y_0 + y_2 + y_4 + y_6) \\ p_2 &= \tfrac{1}{2}(y_0 + y_4) - u_0 \\ q_1 + q_3 &= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3 - u_0) : \sin 45^\circ \\ -q_1 + q_3 &= \tfrac{1}{2}(y_0 + y_4 + 2y_6 - 4u_0) \end{aligned}$$

$$p_3 - p_1 = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_5 - 2u_0) : \cos 45^0$$
$$- p_3 - p_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 + 2y_4 + y_6 - 4u_0]$$
$$q_2 = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_3) - (p_1 - p_3)\cos 45^0.$$

§. 97. Da $n=9$ und $n=12$ häufig vorkommen möchten, so wollen wir die hierzu nöthigen Formeln noch mittheilen.

I. Für $n=9$ hat man:

$$y_x = u_0 + u_1 \sin(U_1 + 36^0 x) + u_2 \sin(U + 72^0 x) + u_3 \sin(U_3 + 108^0 x) + u_4 \sin(U_4 + 144^0 x)$$

und

$$p_3 = \{2(y_0 - y_5)\cos 72^0 - (y_2 + y_8 - y_3 - y_7)\} : 4(\cos 36^0 + \cos 72^0)$$
$$p_1 = \tfrac{1}{2}(y_0 - y_5) - p_3$$
$$A = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_6) - p_1 \cos 36^0 + p_3 \cos 72^0$$
$$B = \tfrac{1}{4}(y_2 + y_3 - y_7 - y_8)$$
$$q_3 = \tfrac{4}{5}(A \sin 72^0 - B \sin 36^0)$$
$$q_1 = \tfrac{4}{5}(A \sin 36^0 + B \sin 72^0)$$
$$C = y_3 + y_7 + 2\cos 72^0 . p_1 - 2\cos 36^0 . p_3$$
$$D = 2(y_0 - p_1 - p_3)$$
$$E = y_1 + y_4 - 2\sin 36^0\, q_1 - 2\sin 72^0\, q_3$$

$$p_4 = \frac{(D-E)(1+\cos 36^0) - (D-C)(1-\cos 72^0)}{2\{(1+\cos 36^0)^2 - (1-\cos 72^0)^2\}}$$

$$p_2 = \frac{(D-C)(1+\cos 36^0) - (D-E)(1-\cos 72^0)}{2\{(1+\cos 36^0) - (1-\cos 72^0)^2\}}$$

$$u_0 = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3) - \sin 72^0\, q_1 + \cos 36^0\, p_2 + \sin 36^0\, q_3 - \cos 72^0 p_4$$
$$F = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_3) - \cos 72^0\, p_1 + \cos 36^0\, p_3$$
$$G = \tfrac{1}{2}(y_4 - y_6) - \sin 36^0\, q_1 - \sin 72^0\, q_3$$
$$q_4 = -\tfrac{4}{5}(F \sin 72^0 + G \sin 36^0)$$
$$q_2 = \tfrac{4}{5}(F \sin 36^0 - G \sin 72^0).$$

II. Für $n=12$ hat man

$$y_x = u_0 + u_1 x + u_2 \sin(U_2 + 30^0 x) + u_3 \sin(U_3 + 60^0 x) - u_4 \sin(U_4 + 90^0 x) + u_5 \sin(U_5 + 120^0 x) + u_6 \sin(U_6 + 150^0 x)$$

und

$$A = y_1 + y_5 + y_7 + y_{11}$$
$$B = y_2 + y_4 + y_8 + y_{10}$$
$$C = 2(y_0 + y_6)$$
$$D = 2(y_3 + y_9)$$

$$p_3 = \tfrac{1}{4}(C - A + B - D)$$
$$p_5 = \tfrac{1}{12}(C - A - B + D)$$
$$u_1 = \tfrac{1}{12}(B - A + 4p_3)$$
$$u_0 = \tfrac{1}{12}(y_0 + y_1 + .. + y_{10} + y_{11}) - \tfrac{11}{2}.u_1$$

$$q_2 = \frac{\tfrac{1}{8}(y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11}) + \tfrac{3}{2}u_1}{\sin 60^0}$$

$$q_5 = \frac{\tfrac{1}{8}(y_1 - y_2 + y_4 - y_5 + y_7 - y_8 + y_{10} - y_{11}) + \tfrac{1}{2}u_3}{\sin 60^0}$$

$$q_6 = -\frac{\tfrac{1}{4}(y_1 - y_{11} + y_5 - y_7 - y_3 + 2y_9)\sin 60^0 + \tfrac{1}{8}(y_2 - y_{10} + y_4 - y_8) + \tfrac{3}{2}u_1}{\sin 60^0}$$

$$q_2 = \frac{\tfrac{3}{2}u_1 + \tfrac{1}{8}(y_2 - y_{10} + y_4 - y_8) - \tfrac{1}{4}(y_1 - y_{11} + y_5 - y_7 - 2y_3 + 2y_9)\sin 60^0}{\sin 60^0}$$

$$q_4 = \tfrac{1}{2}(y_9 - y_3) - 3u_1 + q_2 + q_6$$
$$p_4 = \tfrac{1}{3}(y_0 + u_0) - \tfrac{2}{3}(p_5 + p_3 + y_2) + \tfrac{4}{3}u_1 - \tfrac{2}{3}(q_5 + q_6 - q_2 - q_3)\sin 60^0$$
$$p_2 = p_4 + \tfrac{1}{4}(y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)\,\mathrm{tg}\,30^0 + \tfrac{1}{4}(y_2 + y_{10} - y_4 - y_8)$$
$$p_6 = p_4 - \tfrac{1}{4}(y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)\,\mathrm{tg}\,30^0 + \tfrac{1}{4}(y_2 + y_{10} - y_4 - y_8).$$

§. 98. Ein Paar Zahlenbeispiele können zur Uebung des Anwendens vorstehender Formeln dienen.

1) Nach: „J. P. Süßmilch, die göttliche Ordnung u. s. w." (IIter Bd.) stirbt jährlich eine Person von

4	Personen	die	1	Jahr	alt	sind
132	=	=	12	=	=	=
96	=	=	23	=	=	=
70	=	=	34	=	=	=
49	=	=	45	=	=	=
28	=	=	56	=	=	=
15	=	=	67	=	=	=
9	=	=	78	=	=	=
5	=	=	89	=	=	=.

Hier ist $n = 9$, $z = 36^0$ und

$$y_0 = 4$$
$$y_1 = 132$$
$$y_2 = 96$$
$$y_3 = 70$$
$$y_4 = 49$$
$$y_5 = 28$$
$$y_6 = 15$$
$$y_7 = 9$$
$$y_8 = 5,$$

und mit diesen Werthen von y nach den Formeln des §. 97. für den Fall $n = 9$ erhält man nach und nach

$$\begin{aligned}
p_3 &= - \ 8.2361 \\
p_1 &= - \ 3.7639 \\
A &= + 59 \\
B &= + 38 \\
q_3 &= + 27.0228 \\
q_1 &= + 56.6576 \\
C &= + 89.8619 \\
D &= + 32 \\
E &= + 32.9906 \\
p_4 &= - \ 2.8764 \\
p_2 &= - 14.8940 \\
u_0 &= + 33.8419 \\
F &= + \ 7.4956 \\
G &= - 42.1000 \\
q_4 &= + 14.0978 \\
q_2 &= + 35.5497
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log u_1 &= 1.75423 & U_1 &= 356^\circ 11' 58'' \\
\log u_2 &= 1.58596 & U_2 &= 337 \ 16 \ \ 6 \\
\log u_3 &= 1.45102 & U_3 &= 343 \ \ 2 \ 59 \\
\log u_4 &= 1.15802 & U_4 &= 348 \ 28 \ \ 6 \, ;
\end{aligned}$$

daher endlich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
y_x = + 33.842 &+ \overline{1.75423} \sin (356^\circ 12' + 36^\circ x) \\
&+ \overline{1.58596} \sin (337^\circ 16' + 72^\circ x) \\
&+ \overline{1.45102} \sin (343^\circ \ 3' + 108^\circ x) \\
&+ \overline{1.15802} \sin (348^\circ 28' + 144^\circ x).
\end{aligned}$$

2) Aus 10jährigen Beobachtungen sind folgende Mitteltemperaturen (in Reaumurscher Scale) für die 12 Monate des Jahres abgeleitet worden:

$$\begin{aligned}
y_0 &= - 3^\circ.8 & y_6 &= + 13^\circ.0 \\
y_1 &= + 0.7 & y_7 &= + 13.3 \\
y_2 &= + 2.6 & y_8 &= + 11.2 \\
y_3 &= + 6.7 & y_9 &= + \ 7.0 \\
y_4 &= + 10.3 & y_{10} &= + \ 2.4 \\
y_5 &= + 12.7 & y_{11} &= - \ 3.3.
\end{aligned}$$

Man wird nun, da hier $n = 12$, also $z = 30^0$ ist, nach den Formeln des §. 97. für den Fall $n = 12$ successive finden:

$$\begin{array}{ll}
A = +\ 23.4 & \\
B = +\ 26.5 & \\
C = +\ 18.4 & \log u_2 = 0.93403 \\
D = +\ 27.4 & U_2 = 259^0\,55'; \\
p_3 = -\ 1.475 & \log u_3 = 0.18566 \\
p_5 = -\ 0.342 & U_3 = 285^0\,52'; \\
u_1 = -\ 0.233 & \log u_4 = 0.06779 \\
u_0 = +\ 7.348 & U_4 = 190^0\,5'; \\
q_3 = +\ 0.4192 & \log u_5 = 9.70274 \\
q_5 = +\ 0.3704 & U_5 = 317^0\,18'; \\
q_6 = -\ 0.4954 & \log u_6 = 9.72820 \\
q_2 = -\ 1.5046 & U_6 = 202^0\,7'; \\
q_4 = -\ 0.2046 & \\
p_4 = -\ 8.4578 & \\
p_2 = -\ 0.2014 & \\
p_6 = -\ 1.1510, &
\end{array}$$

und mit diesen Werthen endlich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
y_x = +\ 7.348 - 0.233\,x &+ \overline{0.93403}\sin(259^0\,55' + 30^0 x) \\
&+ \overline{0.18566}\sin(285^0\,52' + 60^0 x) \\
&+ \overline{0.06779}\sin(190^0\,5' + 90^0 x) \\
&+ \overline{9.70274}\sin(317^0\,18' + 120^0 x) \\
&+ \overline{9.72820}\sin(202^0\,7' + 150^0 x).
\end{aligned}$$

§. 99. Statt des vorhergehenden Verfahrens kann man auch einen, der gewöhnlichen Interpolationsformel ähnlichen, Ausdruck anwenden, der keine trigonometrischen oder sonstigen Functionen, sondern nur x enthält und die gegebenen Größen viel schärfer finden läßt, obschon die Bestimmung der Constanten, da sie successive geschieht, weit bequemer als bei dem vorigen Verfahren ist. — Wenn nämlich für $x_{-n} \ldots.\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_{+1},\ x_{+2},\ x_{+3} \ldots.\ x_{+n}$ die $2n+1$ Werthe $y_{-n}, \ldots.\ y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y, y_{+1}, y_{+2}, y_{+3}, \ldots.\ y_{+n}$ von y gegeben sind, so ist der erwähnte Ausdruck dieser:

$$\begin{aligned}
y_x = y_0 + x(xu_1 + U_1) + x(x^2-1)(xu_2 + U_2) + x(x^2-1)(x^2-4)(xu_3 + U_3) \\
+ x(x^2-1))(x^2-4)(x^2-9)(xu_4 + U_4) + \ldots \quad 71);
\end{aligned}$$

setzt man nun hier nach und nach

$$
\begin{array}{rcl}
x = -1 & \text{und} & +1 \\
-2 & ,, & +2 \\
-3 & ,, & +3 \\
-4 & ,, & +4 \quad \text{u. s. w.,}
\end{array}
$$

so kann man die Werthe von u_1, U_1; u_2, U_2; u_3, U_3; u. s. w. sehr bequem successive berechnen; man hat nämlich:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}(y_{+1} + y_{-1}) - y_0 \\
U_1 &= \frac{1}{2}(y_{+1} - y_{-1}) \\
u_2 &= \frac{1}{24}(y_{+2} + y_{-1}) - \frac{1}{12} y_0 - \frac{1}{3} u_1 \\
U_2 &= \frac{1}{12}(y_{+2} - y_{-2}) - \frac{1}{3} U_1 \\
u_3 &= \frac{1}{720}(y_{+3} + y_{-3}) - \frac{1}{360} y_0 - \frac{1}{40} u_1 - \frac{1}{5} u_2 \\
U_3 &= \frac{1}{240}(y_{+3} - y_{-3}) - \frac{1}{40} U_1 - \frac{1}{5} U_2 \\
u_4 &= \frac{1}{40320}(y_{+4} + y_{-4}) - \frac{1}{20160} y_0 \quad \frac{1}{1260} u_1 - \frac{1}{84} u_2 - \frac{1}{7} u_3 \\
U_4 &= \frac{1}{10080}(y^{+4} - y_{-4}) - \frac{1}{1260} U_1 - \frac{1}{84} U_2 - \frac{1}{7} U_3 \\
&\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
\right\} \quad 72)
$$

Das Gesetz des Fortschreitens läßt sich bald auffinden. Es ist hinsichtlich der Zahlencoefficienten leicht zu entdecken, daß die Nenner

für					
u_1	$1.2.1 = 2$	$1.1.1 = 1$			
u_2	$2.4.3 = 24$	$1.4.3 = 12$	$\frac{12}{4} = 3$		
u_3	$24.6.5 = 720$	$12\ 6.5 = 360$	$\frac{360}{9} = 40$	$\frac{40}{9-1} = 5$	
u_4	$720.8.7 = 40320$	$360.8.7 = 20160$	$\frac{20160}{16} = 1260$	$\frac{1260}{16-1} = 84$	$\frac{84}{16-4} = 7$
u_5	$40320.10.9 = 3628800$	$20160.10.9 = 1814400$	$\frac{1814400}{25} = 72576$	$\frac{72576}{25-1} = 3204$	$\frac{3024}{25-4} = 144$

u. s. w.

und die Nenner

für U_1 | $\frac{2}{1} = 2$

U_2 | $\frac{24}{2} = 12$

U_3 | $\frac{720}{3} = 240$

U^4 | $\frac{40320}{4} = 10080$

U_5 | $\frac{3628800}{5} = 725760$ u. s. w.

sind; die übrigen Nenner von U_1, U_2, U_3, ... sind denen von u_1, u_2, u_3, ... respective ganz gleich.

§. 100. Ein Beispiel, numerisch ausgeführt, wird das ganze Verfahren erläutern.

Sei gegeben

$$\begin{aligned}
y_{-4} &= 1.0000 = \sqrt{1} \\
y_{-3} &= 1.4142 = \sqrt{2} \\
y_{-2} &= 1.7321 = \sqrt{3} \\
y_{-1} &= 2.0000 = \sqrt{4} \\
y_{0} &= 2.2361 = \sqrt{5} \\
y_{+1} &= 2.4495 = \sqrt{6} \\
y_{+2} &= 2.6458 = \sqrt{7} \\
y_{+3} &= 2.8284 = \sqrt{8} \\
y_{+4} &= 3.0000 = \sqrt{9}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Zahlenwerthen folgt sodann:

$$u_1 = \frac{4.4495}{2} - 2.2361 = -\,0.011350$$

$$U_1 = \frac{0.4495}{2} = +\,0.224750$$

$$u_2 = \frac{4.3779}{24} - \frac{2.2361}{12} + \frac{0.011350}{3} = -\,0.000147$$

$$U_2 = \frac{0.9137}{12} - \frac{0.224750}{3} = +\,0.001225$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= -\,0.000006 \\
U_3 &= +\,0.000028 \\
u_4 &= \,0.000000 \\
U_4 &= +\,0.000001
\end{aligned}$$

und mit diesen Werthen die gesuchte Formel:

$$\begin{aligned}
y = 2.236100 &+ x\,(0.224750 - 0.011350x) \\
&+ x(x^2-1)\,(0.001225 - 0.000147x) \\
&+ x(x^2-1)(x^2-4)\,(0.000028 - 0.000006x) \\
&+ x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)\,(0.000000x + 0.000001),
\end{aligned}$$

welche die oben gegebenen 9 Werthe genau darstellt. Es kommt nämlich für $x = \mp 1$

$$y_{\mp 1} = 2.236100 \mp (0.224750 \pm 0.011350)$$

$$y_{-1} = 2.000000, \quad y_{+1} = 2.449500;$$

für $x = \mp 2$

$$y_{\mp 2} = 2.236100 \mp 2(0.224750 \pm 0.022700)$$
$$\mp 6(0.001225 \pm 0.000294)$$
$$y_{-2} = 1.732086, \qquad y_{+2} = 2.645786;$$

für $x = \mp 3$

$$y_{\mp 3} = 2.236100 \mp 3(0.224750 \pm 0.034050)$$
$$\mp 24(0.001225 \pm 0.000441)$$
$$\mp 120(0.000028 \pm 0.000018)$$
$$= 2.236100 \mp 3 \begin{Bmatrix} 0.258800 \\ 0.190700 \end{Bmatrix} \mp 24 \begin{Bmatrix} 0.001666 \\ 0.000784 \end{Bmatrix} \mp 120 \begin{Bmatrix} 0.000046 \\ 0.000010 \end{Bmatrix}$$

oder

$$y_{\mp 3} = 2.236100 \mp \begin{matrix} 0.776400 \\ 0.572100 \end{matrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 0.039984 \\ 0.018816 \end{matrix} \mp \begin{matrix} 0.005520 \\ 0.001200 \end{matrix}$$
$$y_{-3} = 1.414096 \quad , \quad y_{+3} = 2.828216;$$

endlich

für $x = \mp 4$

$$y_{\mp 4} = 2.236100 \mp 4(0.224750 \pm 0.005400)$$
$$\mp 60(0.001225 \pm 0.000588)$$
$$\mp 720(0.000028 \pm 0.000024)$$
$$\mp 5040(\mp 000000 + 0.000001)$$
$$= 2.236100 \mp 4 \begin{Bmatrix} 0.270150 \\ 0.179350 \end{Bmatrix} \mp 60 \begin{Bmatrix} 0.001813 \\ 0.000637 \end{Bmatrix} \mp 720 \begin{Bmatrix} 0.000052 \\ 0.000004 \end{Bmatrix}$$
$$\mp 5040 \begin{Bmatrix} + 0.000001 \\ + 0.000001 \end{Bmatrix}$$

oder

$$y_{\mp 4} = 2.236100 \begin{matrix} - 1.080600 - 0.108780 - 0.037440 - 0.005040 \\ + 0.717400 + 0.038220 + 0.002800 + 0.005040 \end{matrix}$$
$$y_{-4} = 1.00424 \quad , \quad y_{+4} = 2.999640.$$

Daher folgende Zusammenstellung:

gegebenes y	berechnetes y	Fehler
$y_{-4} = 1.0000$	1.0042	+ 0.0042
$y_{-3} = 1.4142$	1.4141	— 0.0001
$y_{-2} = 1.7321$	1.7321	0.0000
$y_{-1} = 2.0000$	2.0000	0.0000
$y_{0} = 2.2361$	2.2361	0.0000
$y_{+1} = 2.4495$	2.4495	0.0000
$y_{+2} = 2.6458$	2.6458	0.0000
$y_{+3} = 2.8284$	2.8282	— 0.0002
$y_{+4} = 3.0000$	2.9996	— 0.0004,

wo die größten Fehler an den beiden Grenzen, d. h. für y_{-4} und y_{+4} verschwunden sein würden, hätte man bis auf 7 Decimalstellen, statt nur bis auf 6, die Rechnung geführt.

Für $x = +\frac{1}{2}$ z. B. würde man erhalten:

$$2.236100 + 0.109538 - 0.000422 + 0.000030 - 0.000012 = 2.345234;$$

der wahre Werth von $y_{+\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{55}$ ist

$$= 2.345208,$$

also der Fehler nur

$$+ 0.000026.$$

§. 101. Früher, und auch noch jetzt sehr oft, gebrauchte man eine Methode, bei welcher man die Werthe von y durch eine Gleichung von der Form

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx_3 + ex^4 + \ldots$$

berechnete, in der die Coefficienten a, b, c, d, e, ... zwar auch nach der Methode der kleinsten Quadrate, jedoch durch Ausdrücke bestimmt werden müssen, in denen die höhern Potenzen von x vorkommen, die also die numerischen Entwickelungen desto weitläufiger und beschwerlicher machen, je größer die Werthe von x selbst werden.

§. 102. Weit bequemer ist es, statt der Gleichung

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots. \qquad 73)$$

den Ausdruck

$$y_x = \frac{A + xB + x(x-1)C + x(x-1)(x-2)D \ldots.}{1 + xb + x(x-1)c + x(x-1)(x-2)d \ldots.} \qquad 74)$$

zu gebrauchen, man mag nun eben so viele Constanten, als Werthe von y gegeben sind, einführen und bestimmen oder nicht so viele Constanten gebrauchen, und sie mittelst der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Oder man kann auch den mit 74) völlig identischen Ausdruck

$$y_x = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots}{1 + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots} \qquad 74^*)$$

in Anwendung bringen. Man sieht übrigens sogleich, daß bei gleicher Anzahl von Constanten in den Ausdrücken 74) und 74*) die höchste Potenz von x nur halb so groß als die in 73) vorkommende höchste Potenz ist, was für die Bequemlichkeit der Rechnungen von gewiß nicht geringem Vortheil ist.

Will man nun in 74*) die Constanten bestimmen, so schaffe man zuerst den Nenner weg, nämlich:

$$+ xy_x\, b + x^2 y_x\, c + x^3 y_x\, d + \ldots = A + xB + x^2 C + x^3 D + \ldots.$$

oder auch

$$y_x - A - xB - x^2 C - x^3 D - \ldots + xy_x . b + x^2 y_x . c + x^3 . y_x d + \ldots = 0;$$

dann kann man so viele Gleichungen von dieser Form numerisch bilden, als Werthe von y gegeben sind, und nun die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, um die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten **A, B, C, D, ...; b, c, d, ...** zu bestimmen.

Elftes Capitel.

Geburt, Tod und Lebensdauer.

§. 103. Geburt ist der Actus, durch den ein Mensch ein selbstständiges Leben zu führen beginnt; Tod der Actus, durch den ein Mensch aufhört zu leben; Lebensdauer der Zeitraum, der zwischen dem Augenblick der Geburt und dem Augenblick des Todes verfließt.

§. 104. Fruchtbarkeit, der die Befruchtung vorausgeht, nennt man die Fähigkeit des Menschen weiblichen Geschlechts, Keime abzusetzen, die dann wieder durch innere organische Kraft sich zu Menschen entwickeln. Unter Fruchtbarkeit eines Ehepaars versteht man gewöhnlich den Grad seiner Fähigkeit, Kinder zu zeugen. Im Allgemeinen äußert das Klima den ersten und hauptsächlichsten Einfluß auf die Fruchtbarkeit, indem diese in heißern Gegenden einen höhern Grad, in kältern Gegenden einen geringern Grad zeigt, und in den kältesten Ländern am schwächsten ist. Bei sehr fruchtbaren Regenerationen ist berechnet worden, daß nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Ehepaar in der 2ten Generation 1056 Enkel, in der 3ten 16896 Urenkel, und in der 6ten nach 200 Jahren schon 69206016 Nachkommen hinterlassen könnte.

§. 105. Was nun die Lebensdauer betrifft, d. h. den Zeitraum, der zwischen dem Augenblick der Geburt und dem Augenblick des Todes verstreicht; so ist klar, daß die Lebensdauer, weil der Eintritt des Todes von dem Menschen niemals willkürlich hinaus verschoben werden kann, sich durchaus nicht vergrößern läßt. Wohl aber kann sie verringert werden, sobald man geflissentlich oder unwissentlich das Maaß von Lebenskraft, welches dem Menschen von der Natur zuertheilt ist, nicht sparsam verwendet, sondern vielmehr verschwenderisch damit umgehet. Freilich kann man sich ein höchstes Lebensalter des Menschen denken, welches ein vollkommen organisirter, mit allen zum längsten Leben erforderlichen Eigenschaften ausgestatteter Mensch erlangen könnte, und diese möglich höchste Lebensdauer eines vollkommenen Organismus möchte wahrscheinlich auf 150 Jahre anzusetzen sein, obgleich nur 100 Jahre in der Regel als das im menschlichen Leben oft vorkommende höchste Alter betrachtet werden. Allein, da das Maaß der Dauer eines Einzellebens von dem Grade der zugemessenen Lebenskraft, einer gesunden Organisation, der regelmäßigen Zusammenwirkung aller Theile des Körpers abhängt, so ist, da dieß selten vollkommen stattfindet, klar, daß auch die meisten Menschen, weil die Lebenskraft sich durch allzu große geistige und körperliche Anstrengungen, durch Einflüsse von Außen, wie z. B. des Klima's, der Witterung, der Krankheiten, u. s. w. verzehrt, nicht einmal 100, sondern nur 60 bis 70 Jahre alt werden.

§. 106. Die Sterblichkeit (Mortalität), welche allen Menschen beschieden ist, besteht in einem gewissen Verhältnisse zu der Lebensdauer des einzelnen Menschen und zu der Lebensdauer einer bestimmten Anzahl Menschen; mithin giebt die Sterblichkeit auch den Grad der Furcht zu sterben für einen einzelnen Menschen oder für eine bestimmte Anzahl Menschen.

§. 107. Die Sterblichkeit der Menschen zu berechnen ist für die Staatswirthschaft und allgemeine Heilkunde, weil durch solche Rechnungen für diese beiden Branchen fruchtbare Resultate gewonnen werden, ungemein wichtig. Es zeigt sich nämlich, daß im Allgemeinen von 100 Menschen nach 33 Jahren die Hälfte schon gestorben ist, woraus folgt, daß auf ein Jahrhundert 3 Generationen zu rechnen sind; daß im Besondern jedoch Boden, Klima, Nahrungsmittel, Gewerbe und die übrigen Lebensverhältnisse von diesem allgemeinen Gesetze mancherlei Abweichungen verursachen. Daher kommt es auch, daß das Verhältniß der Gestorbenen zu den Geborenen oder auch zu den Lebenden an verschiedenen Orten verschieden sich gestaltet, daß dieses Verhältniß wieder für die verschiedenen Altersstufen sich besonders modificirt, und daß alles dieß bei dem weiblichen Geschlechte sich anders als beim männlichen Geschlechte herausstellt.

§. 108. Diese Wahrnehmungen ergeben sich aus einer umsichtigen Betrachtung der sogenannten Sterbelisten, sobald dieselben eine große Reihe von Jahren hindurch für viele Orte möglichst sorgfältig gehalten und recht genau specificirt worden sind; weshalb der Besitz zuverlässiger Sterbelisten sehr wünschenswerth sein muß, weil auch hier so manche Institutionen, wie z. B. Lebensversicherungsgesellschaften, Tontinen, Sterbecassen, Leibrenten, u. s. w. nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet werden. Hierbei kommt es, wie wir in der Folge sehen werden, vorzüglich auf eine genaue Bestimmung der mittlern und wahrscheinlichen Dauer des Lebens an, die zwar für jedes der beiden Geschlechter verschieden sein müssen, aber, da dieser Unterschied an und für sich nie sehr bedeutend sein und auch nicht zuverlässig genug bestimmt werden kann, für beide Geschlechter, zumal bei einer großen Masse von Personen, gewöhnlich gleich angenommen werden.

§. 109. In der nachstehenden Tabelle sind fünf Zahlenreihen. In der ersten Columne **A** sind die Lebensalter von 1 bis 97 Jahr, in der Columne **B** aber diejenigen Zahlen anzutreffen, welche angeben, wie viel von 10000 im 0ten Jahre Geborenen in jedem darauf folgenden Jahre bis zum 96sten inclusive wegsterben. In der 3ten Columne **C** stehen die Zahlen, welche anzeigen, wie viel von den im 0ten Jahre 10000 Geborenen in jedem Jahre noch übrig sind und leben, so wie in der Columne **D** die Summe aller Lebenden in jedem Jahre sammt denen, die darunter sind, anzutreffen ist. Aus der letzten Columne **E** kann man ersehen, von wie viel gleich alten Personen in jedem Alter jährlich 10 sterben. Wegen der letzten Columne **e** wird man weiter unten das Nähere erwähnt finden.

Tabelle, nach §. 109 folgend.

A.	B.	C.	D.	E.	e.	A.	B.	C.	D.	E.	e.
1	2500	10000	10000	40	0.250	49	75	3159	232213	421	0.024
2	900	7500	17500	83	0.120	50	77	3084	235297	401	0.025
3	450	6600	24100	147	0.068	51	79	3007	238304	381	0.026
4	246	6150	30250	250	0.040	52	81	2928	241232	361	0.028
5	140	5904	36154	422	0.024	53	83	2847	244079	343	0.029
6	125	5764	41918	461	0.022	54	85	2764	246843	325	0.031
7	111	5639	47557	508	0.020	55	88	2679	249522	304	0.033
8	97	5528	53085	570	0.017	56	90	2591	252113	288	0.035
9	82	5431	58516	662	0.015	57	92	2501	254614	272	0.037
10	68	5349	63865	787	0.013	58	95	2409	257023	254	0.039
11	54	5281	69146	978	0.011	59	96	2314	259337	241	0.041
12	40	5227	74373	1307	0.010	60	8	2218	261555	226	0.044
13	41	5187	79560	1265	0.008	61	100	2120	263675	212	0.047
14	42	5146	84706	1226	0.008	62	100	2020	265695	202	0.049
15	43	5104	89810	1187	0.009	63	101	1920	267615	190	0.053
16	44	5061	94871	1150	0.009	64	101	1819	269434	180	0.056
17	44	5017	99888	1140	0.009	65	101	1718	271152	170	0.059
18	45	4973	104861	1105	0.009	66	100	1617	272769	162	0.062
19	46	4928	109789	1071	0.009	67	99	1517	274286	153	0.065
20	47	4882	114671	1039	0.010	68	97	1418	275704	146	0.068
21	48	4835	119506	1007	0.010	69	95	1321	277025	139	0.071
22	49	4787	124293	977	0.010	70	92	1226	278251	133	0.073
23	50	4738	129031	948	0.011	71	90	1134	279385	126	0.079
24	51	4688	133719	919	0.011	72	86	1044	280429	121	0.082
25	51	4637	138356	909	0.011	73	82	958	281387	117	0.086
26	52	4586	142942	882	0.011	74	79	876	282263	111	0.090
27	53	4534	147476	856	0.012	75	76	797	283060	105	0.095
28	54	4481	151957	830	0.012	76	70	721	283781	103	0.097
29	55	4427	156384	805	0.012	77	66	651	284432	99	0.101
30	56	4372	160756	781	0.013	78	61	585	285017	96	0.104
31	57	4316	165072	757	0.013	79	57	524	285541	92	0.109
32	58	4259	169331	734	0.014	80	53	467	286008	88	0.113
33	58	4201	173532	724	0.014	81	49	414	286422	84	0.118
34	59	4143	177675	702	0.014	82	45	365	286787	81	0.123
35	60	4084	181759	681	0.015	83	41	320	287107	78	0.128
36	61	4024	185783	660	0.015	84	37	279	287386	75	0.133
37	62	3963	189746	639	0.016	85	34	242	287628	71	0.140
38	63	3901	193647	619	0 016	86	30	208	287836	69	0.144
39	64	3838	197485	600	0.017	87	28	178	288014	64	0.157
40	65	3774	201259	581	0.018	88	25	150	288164	60	8 167
41	65	3709	204968	571	0.018	89	22	125	288289	57	0.176
42	66	3644	208612	552	0.018	90	20	103	288392	51	0.194
43	67	3578	212190	534	0.019	91	18	83	288475	46	0.217
44	68	3511	215701	516	0.019	92	16	65	288540	41	0.246
45	69	3443	219144	499	0.020	93	15	49	288589	33	0.306
46	70	3374	222518	482	0.021	94	13	34	288623	26	0.382
47	72	3304	225822	459	0.022	95	11	21	288644	19	0.524
48	73	3232	229054	443	0.023	96	10	10	288654	10	1.000
49	75	3159	232213	421	0.024	97	0	0			

§. 110. Diese Tabelle, welche im Grunde auf derjenigen beruhet, die im zweiten Theile S. 319 u. ff. des Werkes „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts u. s. w. von Joh. Peter Süßmilch; 4te Ausg. Berlin 1775'' befindlich ist und sich auf ein Mittelverhältniß der Gestorbenen in großen und kleinen Städten, wie auch in Dörfern gründet, ist (genauer als diese) nach dem in §. 98. S. 134. II. gezeigten Verfahren berechnet, und hierzu nur 12 Werthe aus der Columne B der Süßmilch'schen Tabelle gewählt worden; die bis auf Zehntheile gefundenen Werthe sind hierauf durch die Multiplication mit 10 auf Ganze gebracht und hierdurch die Zahl der anfänglich Geborenen von 1000 auf 10000 erhöhet worden, was, wie man offenbar sieht, wegen Erreichung größerer Genauigkeit geschehen ist.

Nur die ersten 8 bis 12 Jahre des menschlichen Alters werden wohl nie feststehende Resultate erwarten lassen, da die desfallsigen Erfahrungen zu großen Schwankungen unterworfen sind, welche höchst wahrscheinlich von den vielen Kinderkrankheiten und von den Einflüssen der ersten physischen Erziehung herrühren. Auch muß man wohl bedenken, daß statistische Verzeichnisse, welche auf Geburts= nnd Sterbefälle vor mehr als einem halben Jahrhundert beruhen, sich nicht mit jetzigen Listen vergleichen lassen können, indem die Kuhpockenimpfung und die Abhaltung der asiatischen Pest durch die neuern Quarantainenanstalten die Sterblichkeit so sehr vermindert haben, daß nach Duvillard die mittlere Lebensdauer sich im Allgemeinen fast um $3\frac{1}{2}$ Jahre verlängert haben soll.

§. 111. Was die Columne B übrigens betrifft, so kann man auch sagen, daß sie die Staffel der Sterblichkeit vorstellt. Sei nun, um zu zeigen, wie die Tafel berechnet worden, für irgend ein Jahr i der zugehörige Werth von $B = B_i$ und der gesuchte Werth von $C = C_i$; so ist

$$C_i = 10000 - (B_1 + B_2 + B_3 + .. + B_{i-1}),$$

d. h. also

$$C_i = C_{i-1} - B_{i-1}.$$

Dagegen, wenn für das Jahr i die zugehörigen Werthe von D und E durch D_i und E_i bezeichnet werden, findet sich

$$D_i = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i,$$

d. h. also

$$D_i = D_{i-1} + C_i;$$

ferner hat man

$$E_i = \frac{C_i}{B_i}.$$

Die in der Tabelle befindlichen Werthe von E sind, um größere Genauigkeit beizubehalten, die nach der Formel

$$E_i = \frac{C_i}{B_i}$$

bis auf Zehntheile berechneten und dann mit 10 multiplicirten Werthe, so daß man folglich, um zu erfahren, von wie viel gleich alten Personen in jedem Alter jährlich Eine stirbt, nur nöthig hat, den zehnten Theil der Zahlen in der Columne E zu nehmen.

§. 112. Man kann ferner nach dem, was in §. 109. von den Columnen C, D und E gesagt worden ist,

1) die in der Columne C stehenden Zahlen als solche betrachten, welche anzeigen, wie viel von den nämlichen 10000 Geborenen 1, 2, 3, 4, u. s. w. 95, 96 Jahr alt werden;
2) die in der Columne D befindlichen Zahlen als diejenigen ansehen, welche angeben die Menge aller derjenigen von jedem bestimmten Alter, die an einem Orte leben, wo jährlich 10000 geboren werden und wieder eben so viel, nämlich 10000, sterben. (Ohnedieß ist bei Entwerfung der Tabelle vorausgesetzt worden, daß die Mengen der Geborenen und Gestorbenen zu gleicher Zeit gleich groß sind, eine Voraussetzung, die nur nahe wahr ist, und bloß in wenigen Orten durch die Erfahrung bestätigt werden möchte.)
3) Die in der Columne E stehenden Zahlen zeigen, wenn man ihren 10ten Theil nimmt, an, die wie vielste Person in jedem Jahre des Alters dem Tode anheim fallen muß; so stirbt z. B. von denen, die alle 3 Jahr alt sind, die 14te bis 15te, von denen aber, die alle 12 Jahr alt sind, nur die 130ste bis 131ste.

Das allgemeine Verhältniß anbelangend, so verhält sich die Summe der in einem Jahre Sterbenden zu der Summe der in dem nämlichen Jahre Lebenden

in großen Städten wie 1 : 24,
in kleinen Städten wie 1 : 32,
auf dem Lande wie 1 : 40,

welches Verhältniß 1 : s man das allgemeine Maaß der Sterblichkeit nennt.

Anmerkung. Die Zahlen der Columne e finden sich durch die Division der 10 durch die in der Columne E stehenden Zahlen, geben also an, wie viel von 1000 Personen desselben Alters jährlich sterben; es ist daher gewissermaaßen die Columne e bloß die umschriebene Columne E.

§. 113. Aus dem Vorhergehenden nun ergiebt sich der directe Gebrauch der Tabelle von selbst. Indessen gewährt diese wichtige Tabelle noch mehrere interessante Resultate.

a) Um erstlich zu bestimmen, der wie vielste Theil von 10000 Geborenen nach i Jahren noch am Leben ist, berechne man die Größe $\frac{10000}{c_i}$. So wird man z. B. finden, daß nach ein wenig mehr als 17 Jahren bereits nur die Hälfte, etwas vor Ablauf von 47 Jahren nur noch der dritte Theil, nach 57 Jahren gar noch der vierte Theil, nach $72\frac{1}{2}$ Jahren nur noch der zehnte Theil, u. s. w. am Leben ist. Da nun nach ein wenig mehr als 17 Jahren bereits die Hälfte aller Geborenen schon todt ist, so geht also hieraus hervor, daß die übrig gebliebene Hälfte der Geborenen dann noch immer 79 Jahre Zeit zum Absterben braucht, folglich ungefähr $\frac{79}{17}$ oder $4\frac{1}{2}$ Mal länger Zeit zubringt, nach und nach ganz aus dem Leben zu verschwinden.

b) Um ferner zu erfahren, wie groß die Anzahl der Lebenden in jeder Abtheilung des menschlichen Alters ist, braucht man nur, wenn diese Abtheilung von n zu n Jahren fortschreitet, die Differenzen $D_n - D_0$, $D_{2n} - D_n$, $D_{3n} - D_{2n}$, ... zu berechnen. So wird man z. B. finden die Anzahl der Lebenden

in dem Alter		Zeitraum 5jährig.	10jährig.	20jährig.
von 1 bis 5 Jahren	=	37154	63865	114671
„ 5 „ 10 „	=	27711		
„ 10 „ 15 „	=	25945	50806	
„ 15 „ 20 „	=	24861		
„ 20 „ 25 „	=	23685	46085	86588
„ 25 „ 30 „	=	22400		
„ 30 „ 35 „	=	21003	40503	
„ 35 „ 40 „	=	19500		
„ 40 „ 45 „	=	17885	34038	60296
„ 45 „ 50 „	=	16153		
„ 50 „ 55 „	=	14225	26258	
„ 55 „ 60 „	=	12033		
„ 60 „ 65 „	=	9597	16696	24453
„ 65 „ 70 „	=	7099		
„ 70 „ 75 „	=	4809	7757	
„ 75 „ 80 „	=	2948		
„ 80 „ 85 „	=	1620	2384	2646
„ 85 „ 90 „	=	764		
„ 90 „ 100 „	=	262	262	
Summe	=	288654	288654	288654.

c) Will man wissen, das wie vielste Lebensjahr die ganze Summe aller Lebenden in zwei gleiche Theile abtheilt, so halbire man $D_{96} = 288654$, also $\frac{1}{2} D_{96} = 144327$ und suche diese Zahl in der Columne D auf, so fällt sie nahe auf $A = 26\frac{1}{2}$; mithin ist das $26(\frac{1}{2})$te Jahr das gesuchte. Wie viel Menschen unter den 288654, so über n Jahr alt sind, leben, erfährt man durch die Differenz

$$288654 - D_n .$$

Demnach leben z. B. unter 288654 Personen

Personen,	so alt sind über
252500	5 Jahr
224789	10 ,,
198844	15 ,,
173983	20 ,,
150298	25 ,,
127898	30 ,,
106895	35 ,,
87395	40 ,,
69510	45 ,,
53357	50 ,,
39132	55 ,,
27099	60 ,,
17502	65 ,,
10403	70 ,,
5594	75 ,,
2646	80 ,,
1026	85 ,,
262	90 ,,
10	95 ,, .

d) Eine sehr wichtige Bestimmung ist die der Ehen in einem Lande und der Kinder, die aus diesen Ehen durchschnittlich entspringen müssen. Die Zahl der Heirathsfähigen kann man etwa $= D_{45} - D_{25}$, d. h. gleich derjenigen Anzahl Personen setzen, die zwischen dem 25sten nnd 40sten Jahre leben. Wir haben nun nach unserer Tabelle

$$D_{45} - D_{25} = 219144 - 138356 = 80788.$$

Diese 80788 in zwei gleiche Theile getheilt, geben 40394 Ehepaare, aus welchen 40394 Ehen nach unserer Hypothese 10000 Kinder, der Anzahl der Sterbenden gleich gesetzt, geboren werden müssen. Mithin werden auf jede dieser 40394 Ehen 4,04 Kinder oder auf 100 Ehen 404 Kinder kommen. Man könnte auch sagen, daß eine Ehe in $4\frac{4}{100} = 4$ Jahren und $\frac{1}{2}$ Monaten ein Kind zeugt.

Den bisherigen Erfahrungen zufolge soll sich die Anzahl der Ehen zu der Zahl der jährlichen Geburten wie 100 : 22 verhalten, d. h. 50 Ehen jährlich nur 11 Kinder geben. Die Anzahl der Ehen zu der Zahl der Einwohner soll in großen und kleinen

Städten resp. 1 : 133 und 1 : 103, auf dem Lande aber 1 : 115 sein. Die Summe der jährlichen Geburten soll sich verhalten zu der Summe der Lebenden

in großen Städten wie 1 : 30,
in kleinen Städten wie 1 : $24\frac{1}{2}$,
auf dem Lande wie 1 : $22\frac{1}{2}$,

welches allgemeine Verhältniß 1 : f das Maaß der Fruchtbarkeit genannt wird. Kennt man dieses und das allgemeine Maaß der Sterblichkeit, so hat man dann auch das allgemeine Verhältniß f : s der Todesfälle zu den Geburten; es ist mithin

für große Städte $\frac{30}{24} = 1.25$,

für kleine Städte $\frac{24.5}{32.0} = 0.77$,

für das Land $\frac{22.5}{40.0} = 0.56$,

d. h. auf 100 Geburten kommen in großen Städten 125, in kleinen Städten 77 und auf dem Lande nur 56 Sterbefälle.

e) Der Quotient $\frac{10000}{c_i}$ giebt die Anzahl Personen, von denen nur eine das Alter von i Jahren erreicht. So wird man z. B. finden, daß von

Personen	Eine alt wird	Verhältniß.
1.9	10 Jahr,	19 : 10
2.0	20	2 : 1
2.3	30	23 : 10
2.7	40	27 : 10
3.2	50	16 : 5
4.5	60	9 : 2
5.8	65	29 : 5
8.2	70	41 : 5
12.5	75	25 : 2
21.4	80	107 : 5
41.3	85	415 : 10
97.1	90	971 : 10
1000.0	96	1000 : 1 .

f) Wenn man annimmt, daß alle zwischen 20 und 50 Jahren lebende Mannspersonen streitfähig sein oder die Kriegsmacht eines Landes bilden können; so findet man diese Anzahl von Männern, wenn man die Größe $\frac{1}{2}(D_{50} - D_{20})$ berechnet. Nach unserer Tabelle wird man finden

$$\frac{1}{2}(D_{50} - D_{20}) = 60313.$$

Diese Zahl nun verhält sich zur Summe aller Lebenden wie

$$\tfrac{1}{2}(D_{50} - D_{20}) : 288654, \quad \text{d. h.}$$

wie

$$60313 : 288654, \text{ oder}$$

wie

$$1 : 4{,}78,$$

d. h. nahe 1 zu $4\tfrac{3}{4}$.

Für die Wirklichkeit kann dieses Verhältniß natürlich nur als ein approximirtes angesehen werden, und es möchte für die meisten europäischen Staaten kaum der fünfte, vielmehr nur der 7te bis 8te Theil der Bevölkerung eines Landes wirklich zum Militär auszuheben sein.

g) Die letzte Columne E, welche auch angiebt (s. §. 112. 3)), die wie vielste Person in jedem Jahre des Alters sterben muß, läßt folglich auch die beiden Jahre des Alters alsbald entdecken, wo dieß in einem gegebenen Verhältniß stattfindet. So muß z. B.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{im} & \text{1sten} & \text{und} & \text{92sten} \\ ,, & \text{2ten} & ,, & 81\ ,, \\ ,, & \text{3ten} & ,, & 68\ ,, \\ ,, & \text{5ten} & ,, & 49\ ,, \\ ,, & \text{8ten} & ,, & 41\ ,, \\ ,, & \text{11ten} & ,, & 22\ ,, \end{array}\right\}\ \text{Jahre}$$

die gleich vielste Person aus der Zahl der Lebenden fort, d. h. die Sterblichkeit ist in je zwei solchen Lebensjahren gleich groß.

Dagegen ist im

14ten Lebensjahre die Sterblichkeit ungefähr nur halb so groß als im 38sten, im 88sten dagegen 2 Mal größer als im 72sten Lebensjahre, im 11ten wieder 3 Mal geringer als im 54sten; im 77sten Lebensjahre beträgt die Sterblichkeit nur den 10ten Theil von der im 96sten Lebensjahre, u. s. f.

h) Aus der Columne E ersieht man sogleich, daß im 12ten Lebensjahre die wenigsten Menschen sterben, also auch in diesem Alter die Lebenskraft am größten ist. Setzt man daher für das 12te Jahr die Lebenskraft = 1; so hat man, um für das Alter A die Lebenskraft L_A zu finden, die Proportion

$$1307 : 1 = E_A : L_A,$$

also

$$L_A = \frac{E_A}{1307}.$$

So ist z. B. für

A	die Lebenskraft
2	0.064
4	0.192
6	0.355
8	0.439
10	0.605
12	1.000
15	0.914
20	0.800
25	0.700
30	0.601
35	0.524
40	0.451
45	0.383
50	0.313
55	0.233
60	0.173
65	0.130
70	0.102
75	0.080
80	0.067
85	0.054
90	0.039
95	0.014.

Anmerkung. Die diesem Werke angehängte Zeichnung enthält die in obiger Tabelle stehenden Zahlenwerthe von **B**, **C**, **D** und **E** graphisch aufgetragen, und zwar versinnlichen die Curven **B** und **C** das allmälige Abnehmen der in den Columnen **B** und **C** stehenden Zahlenwerthe, die Curve **D** das allmälige Wachsen der in der Columne **D** befindlichen Zahlen, und die Curve **E** das allmälige Wachsen und Wiederabnehmen der Zahlen der Columne **E**. Mithin kann auch die Linie **B** die Curve der jährlich Sterbenden und die Curve **E** die Curve genannt werden, welche den Grad der Furcht zu sterben für jedes Lebensjahr bildlich fortlaufend ausdrückt.

§. 114. Die obenstehende, mehrerwähnte Tabelle ist es nun auch, welche als Grundlage zur Bestimmung der wahrscheinlichen und mittlern Dauer des Lebens in jedem Jahre des Alters dienen kann. Diese Bestimmung ist vorzüglich darum von großer Wichtigkeit, weil auf ihr die ganze Feststellung der Leibrenten beruht.

Nach Halley ist die Lebensprobabilität diejenige Anzahl Jahre, bis zu welchen die Hoffnung noch zu leben und die Furcht schon zu sterben gleich groß sind, also sich wie **1** zu **1** verhalten. Um dieses Verhältniß aber für ein gewisses Alter A_i zu finden, suche man $\frac{1}{2}C_i$ in der Columne **C** auf, so ist das daneben in der Columne A stehende Jahr dasjenige, wo dieses Verhältniß statt findet. So wird man z. B. finden, daß im 39sten Jahre noch 3838 Personen leben. Hier ist $A_i = 39$ und $C_i = 3838$; also $\frac{1}{2} C_i = 1919$. Diese Zahl 1919 in der Columne C aufgesucht, kommt der Zahl 1920 am nächsten, welche neben dem Jahre 63 stehet; mithin ist das $(63 - 39)$ste oder 24ste Jahr dasjenige, in welchem es zwar möglich ist, bereits gestorben zu sein, es kann aber auch sein, dann noch zu leben; d. h. mit andern Worten: wenn man in dem Alter von 39 Jahren steht, ist binnen der nächsten 24 Jahre, welche als die wahrscheinliche Dauer des Lebens für das Alter von 30 Jahren angesehen werden, die Hoffnung zu leben größer als die Furcht zu sterben, dann aber im 24sten Jahre selbst, d. i. in dem Alter von 63 Jahren, findet das Verhältniß der Hoffnung zur Furcht wie 1 : 1 statt, und endlich über diese Zeit hinaus überwiegt die Furcht schon zu sterben die Hoffnung noch zu leben immer mehr.

§. 115. Die nachstehende Tabelle giebt für jedes Jahr des Alters in der zweiten Columne unter der Rubrik „Wahrscheinliche Lebensdauer" die Anzahl Jahre, welche man wahrscheinlich noch zu leben hat; addirt man nun diese zum gegenwärtigen Alter, so erhält man das in der dritten Columne unter der Rubrik „Vermuthliches Lebensalter" stehende Lebensalter, das man wahrscheinlich erreichen kann. Die vierte Columne giebt an, um wie viel Jahre das in der dritten Columne stehende vermuthliche Lebensalter kleiner oder größer als das von Süßmilch*) angegebene ist.

*) Süßmilch, II. Theil. S. 342 u. 343.

Tabelle der wahrscheinlichen Lebensdauer und des menschlichen Lebensalters.

Jahre des Alters.	Wahrschein-liche Le-bensdauer.	Vermuth-liches Lebensalter.	Differenz mit Süßmilch's Tabelle.	Jahre des Alters.	Wahrschein-liche Le-bensdauer.	Vermuth-liches Lebensalter.	Differenz mit Süßmilch's Tabelle.
1	16.4	17.4	— 1.	51	16.1	67.1	+ 0.1
2	38.4	40.4	— 0.	52	15.5	67.5	0.0
3	44.1	47.1	+ 0.1	53	14.9	67.9	— 0.1
4	46.1	50.1	+ 0.1	54	14.4	68.4	— 0.1
5	46.7	51.7	+ 0.2	55	13.8	68.8	— 0.2
6	46.6	52.6	+ 0.6	56	13.3	69.3	— 0.2
7	46.3	53.3	+ 0.3	57	12.7	69.7	— 0.3
8	46.0	54.0	+ 0.5	58	12.2	70.2	— 0.3
9	45.6	54.6	+ 0.6	59	11.7	70.7	— 0.3
10	45.1	55.1	+ 0.6	60	11.3	71.3	— 0 2
11	44.4	55.4	+ 0.4	61	10.8	71.8	— 0.2
12	43.7	55.7	+ 0.7	62	10.4	72.4	— 0.1
13	43.0	56.0	+ 1.0	63	10.0	73.0	0.0
14	42.2	56.2	+ 0.7	64	9.6	73.6	+ 0.1
15	41.4	56.4	+ 0.9	65	9.2	74.2	+ 0.2
16	40.7	56.7	+ 0.7	66	8.9	74.9	+ 0.4
17	39.9	56.9	+ 0.9	67	8.5	75.5	+ 0.5
18	39.2	57.2	+ 0.7	68	8.2	76.2	+ 0.2
19	38.4	57.4	+ 0.9	69	7.9	76.9	+ 0.4
20	37.7	57.7	+ 0.7	70	7.6	77.6	+ 0.6
21	36.9	57.9	+ 0.9	71	7.3	78.3	+ 0.3
22	36.2	58.2	+ 0.7	72	7.0	79.0	+ 0.5
23	35.7	58.7	+ 1.2	73	6.8	79.8	+ 0.3
24	34.7	58.7	+ 0.7	74	6.5	80.5	+ 0.5
25	34.0	59.0	+ 1.0	75	6.3	81.3	+ 0.3
26	33.2	59.2	+ 0.7	76	6.1	82.1	+ 0.6
27	32.5	59.5	+ 1.0	77	5.9	82.9	+ 0.9
28	31.8	59.8	+ 0.8	78	5.7	83.7	+ 0.7
29	31.0	60.0	+ 1.0	79	5.5	84.5	+ 0.5
30	30.3	60.3	+ 0.8	80	5.3	85.3	+ 0.8
31	29.7	60.7	+ 0.7	81	5.0	86.0	+ 0.5
32	28.9	60.9	+ 0.9	82	4.9	86.9	+ 0.4
33	28.2	61.2	+ 0.7	83	4.6	87.6	+ 0.6
34	27.5	61.5	+ 0.5	84	4.4	88.4	+ 0.4
35	26.8	61.8	+ 0.8	85	4.2	89.2	+ 0.2
36	26.1	62.1	+ 0.6	86	4.0	90.0	+ 0.2
37	25.4	62.4	+ 0.4	87	3.7	90.7	+ 0.2
38	24.7	62.7	+ 0.2	88	3.4	91.4	+ 0.4
39	24.0	63.0	0.0	89	3.2	92.2	+ 0.2
40	23.3	63.3	+ 0.3	90	3.0	93.0	0.0
41	22.6	63.6	+ 0.1	91	2.5	93.5	— 0.5
42	22.0	64.0	0.0	92	2.2	94.2	— 0.3
43	21.3	64.3	+ 0.3	93	1.8	94.8	— 0.2
44	20.6	64.6	+ 0.1	94	1.4	95.4	— 0.1
45	20.0	65.0	0.0	95	1.0	96.0	0.0
46	19.3	65.3	+ 0.3	96	0.5	96.5	+ 0.5
47	18.6	65.6	+ 0.1	97	0.0	97.0	+ 1.0
48	18.0	66.0	0.0				
49	17.4	66.4	+ 0.1				
50	16.7	66.7	+ 0.3				

§. 116. Die mittlere Dauer des Lebens wird im Allgemeinen der Quotient einer gewissen Anzahl Personen in die Summe der erreichten Lebensalter eben dieser Personen genannt. Wenn z. B. 4 Personen a, b, c und d Jahre alt geworden wären, so würde dann $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$ als die mittlere Lebensdauer einer jeden dieser 4 Personen angesehen werden können.

§. 117.[a] Insbesondere versteht man aber unter der mittleren Lebensdauer im $i$ten Jahre des Alters, sobald von n Personen, die jetzt alle i Jahre alt sind, dann die

1ste	Person	noch	a_1	Jahre
2te	„	„	a_2	„
3te	„	„	a_3	„
4te	„	„	a_4	„
.				
.				
.				
.				
$n-$ste	„	„	a_{n-1}	„
$n$te	„	„	a_n	„

bis zu ihrem eintretenden Tode gelebt hat, den Quotienten

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n} \qquad 75).$$

Gesetzt z. B. 7 Personen sind jetzt jede 20 Jahr alt. Nun lebt aber A_1, noch 35, A_2 noch 35.4, A_3 noch 40.1, A_4 noch 39.8, A_5 noch 38.2, A_6 noch 37.5 und A_7 noch 36.1 Jahre, so daß also beim Tode der Person A_3 alle 7 Personen bereits verstorben sind.

Welches wird demnach die mittlere Lebensdauer für das Alter von 20 Jahren sein?

Man hat erstlich $n=7$ und

$a_1=35.0, a_2=35.4, a_3=40.1, a_4=39.8, a_5=38.2, a_6=37.5, a_7=36.1,$

mithin zweitens

$$\frac{35.0+35.4+40.1+39.8+38.2+37.5+36.1}{7}=\frac{260.1}{7} \quad \text{oder}$$

37.16 Jahre als die mittlere Dauer des Lebens für das jetzige Alter von 20 Jahren.

§. 117.[b] Könnte man auf diese Weise, die allerdings genaue und zuverlässige Angaben erfordert, aus einer sehr großen Menge solcher Angaben für jedes Alter des Lebens dessen mittlere Lebensdauer bestimmen, so würde diese freilich etwas mühsame Untersuchung sich doch dadurch sehr belohnen, daß man dann auf die gewonnenen Resultate bei Bestimmung von Renten, Versicherungssummen des Lebens, o. dgl. wenigstens weit sicherer vertrauen könnte, als es bisher der Fall gewesen ist, wo man zu Tabellen, wie die beiden vorhergehenden nach einer durch die Erfahrung nicht ganz sich bestätigenden Voraussetzung (s. §. 112. 2)) berechneten sind, seine Zuflucht nehmen mußte. — Leider steht aber einer solchen sorgfältigen Berechnung der mittleren Dauer des Lebens die große Schwierigkeit entgegen, daß die Ausmittelung von Personen gleichen Alters zu einerlei Zeit und die Kenntnißnahme der Anzahl Jahre, welche jede dieser Personen dann noch bis zu ihrem Tode gelebt hat, schwerlich immer und zuverlässig zu erreichen ist.

§. 118. Es wird demnach die mittlere Lebensdauer gewöhnlich auf folgende Weise, und zwar mit Hilfe der Tabelle bestimmt. — Von M jetzt m jährigen Personen leben am Ende

des 1sten	Jahres	$M \, . \, C_{m+1} : C_m$
= 2ten	=	$M \, . \, C_{m+2} : C_m$
= 3ten	=	$M \, . \, C_{m+3} : C_m$
= 4ten	=	$M \, . \, C_{m+4} : C_m$

u. s. w.

Man setze diese Reihe fort bis zu Ende, addire alle diese Glieder und dividire die gefundene Summe durch die Anzahl M der Personen, so ist der erhaltene Quotient **die mittlere Lebensdauer** F_m einer **m jährigen Person**, d. h. die Zahl, welche angiebt, wie viel Jahre jede dieser M Personen, die jetzt m Jahr alt sind, noch leben würden, sobald sie alle gleich alt werden sollten. Man hat daher

$$F_m = \frac{C_{m+1} + C_{m+2} + C_{m+3} + C_{m+4} + \ldots}{C_m} \qquad 76).$$

Sterben jedoch — und dieß ist der Natur der Sache gemäßer — alle M Personen während des Laufes des Jahres gleichförmig ab, d. h. nimmt man an, daß sie im Allgemeinen alle noch die Mitte des Jahres erreichen, so hat man noch etwas richtiger

$$F_m = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{C_m} (C_{m+1} + C_{m+2} \, C_{m+3} + \ldots) \quad 77).$$

So ist z. B. die mittlere Lebensdauer

im 1sten	Lebensjahre		29.37	Jahre
= 10ten	=	=	43.53	=
= 20sten	=	=	37.14	=
= 30 =	=	=	30.75	=
= 40 =	=	=	24.66	=
= 50 =	=	=	18.80	=
= 60 =	=	=	13.73	=
= 70 =	=	=	.99	=
= 80 =	=	=	.16	=
= 90 =	=	=	4.04	=
= 96 =	=	=	1.50	=

§. 119.[a] Die Berechnungen der wahrscheinlichen Lebensdauer der Menschen zeigen offenbar, daß die gänzliche Unbestimmtheit der Lebensdauer, welche man bei einer nur geringen Anzahl von Menschen wahrnimmt, sich bei einer sehr großen Volksmenge in eine gewisse regelmäßige Bestimmtheit umwandelt. Denn hier wird die Summe aller derjenigen, die länger als der Annahme zufolge leben, wieder fast ganz vollständig von der Summe aller derjenigen aufgewogen, die früher als der Annahme zufolge sterben. Daher kann man auch behaupten, wie groß im Durchschnitt betrachtet die Lebensdauer z. B. einer Million in einem Jahre geborener Menschen sein müsse, während man nicht im Stande ist anzugeben, wie lange ein bestimmtes Individuum noch leben werde. Darauf läßt sich mit einem schon ziemlich hohen Grad von Sicherheit die Berechnung gründen, daß ein in einem bestimmten Lebensalter stehendes Individuum nur noch eine ebenfalls bestimmte Reihe von Jahren zu leben habe, welche Bestimmungen der Gegenstand der vorigen Paragraphe gewesen sind. Wahrscheinlich lebt nun ein solches Individuum nicht so lange oder länger noch; dafür wird dann aber ein anderes mit ihm gleich gestandenes Individuum wahrscheinlich respective länger oder nicht so lange leben. Man hat hier überdieß alles das zu berücksichtigen, was über diese Verschiedenheit der Mortalität im §. 107 angeführt worden ist. Aus Allem aber ergiebt sich das ungemein wichtige Resultat, daß das Mortalitätsgesetz zwar ein noch unerklärtes, jedoch ein völlig constatirtes und sicheres Gesetz der Natur sei. Und auf diesem merkwürdigen Naturgesetz beruhen, wie auch bereits öfter erwähnt, die Lebensversicherungsanstalten, die eine ausreichende Garantie in der Regelmäßigkeit der allgemeinen Mortalität besitzen, und welche folglich nur in der Art bestehen können, daß sie von Personen, die in einem Lebensalter in die Versicherungsanstalt eintreten, welches eine bestimmte längere Dauer verspricht, eine genau berechnete geringere Einlage (Prämie) als von den Personen fordern, welchen eine kürzere Lebenszeit übrig bleibt.

§. 119.[b] Nach §. 118. leben von M Personen, deren jede jetzt m Jahre a[illegible] ist, nach p Jahren noch $\frac{M.C_{m+p}}{C_m}$ Personen. Mithin ist die [illegible]hrscheinlichkeit w, daß von diesen M Personen eine das (m + [illegible]e Jahr erreichen werde, nach 1) S. 2, wenn man dort $\frac{M.C}{C_m}$ [illegible] statt n, und M statt N setzt,

$$w = \frac{C_{m+p}}{C_m} \qquad 78)$$

und also nach 6) S. 5., die Wahrscheinlichkeit w_1, daß er nach p Jahren noch leben werde,

$$w_1 = \frac{C_m - C_{m+p}}{C_m} \quad 78^*).$$

Beispiel. Eine jetzt 20 Jahr alte Person will wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit w ist, daß sie nach 30 Jahren, d. h. also im 50sten Jahre ihres Alters noch lebe.

Hier ist $m = 20$, $p = 30$, also $m + p = 50$ und daher aus der Tafel

$$C_{m+p} = 3084 \text{ und } C_m = 4882,$$

folglich

$$w = \frac{3084}{4882} = 0.63, \quad w_1 = \frac{1798}{4882} = 0.37,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine zwanzigjährige Person das 50ste Jahr erreiche, ist nur der $\frac{63}{100}$ste Theil der Gewißheit, und da $w = \frac{63}{100} > \frac{1}{2}$, so ist es auch wahrscheinlicher, daß sie dieses Alter erreichen werde, anstatt dann bereits gestorben zu sein.

§. 119.[c] Da wir im vorigen §. gezeigt haben, wie die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden kann, daß ein m jähriger Mensch noch p Jahre leben werde, so wollen wir noch einige Beispiele vortragen, durch welche die allgemeinen Formeln, die im §. 20. S. 15 gegeben sind, erläutert werden.

1) Es lebe eine 34jährige Person **A** mit einer 33jährigen Person **B** zusammen; so ist, wenn $p = 20$ angenommen worden,

$$w = \frac{2764}{4201} = 0.66715$$

die Wahrscheinlichkeit, daß **A** nach 20 Jahren noch leben wird, und

$$1 - w = \frac{1379}{4143} = 0.33285$$

die Wahrscheinlichkeit, daß **A** nach 20 Jahren nicht mehr am Leben sein wird; ferner ist

$$w^1 = \frac{2847}{4201} = 0.67770$$

die Wahrscheinlichkeit, daß **B** nach 20 Jahren noch leben wird, und

$$1 - w^1 = \frac{1354}{4201} = 0.32230$$

die Wahrscheinlichkeit, daß **B** nach 20 Jahren nicht mehr am Leben sein wird.

Man wird nun (nach §. 20. S. 15) haben

$$w.w^1 = \frac{2764 \;.\; 2847}{4143 \;.\; 4201} = 0.45212$$

als die Probabilität, daß **A** und **B** noch 20 Jahre beisammen leben werden;

$$1 - w.w^1 = \frac{4143.4201 - 2764.2847}{4143.4201} = 0.14788$$

als die Probabilität, daß von den beiden Personen **A** und **B** nach 20 Jahren eine oder vielleicht auch beide gestorben sind;

$$w(1-w') = \frac{2764 . 1354}{4143 . 4201} = 0.21502$$

als die Probabilität, daß nach 20 Jahren **A** noch lebe und **B** schon todt ist;

$$w'(1-w) = \frac{2847 . 1379}{4201 . 4143} = 0.22557$$

als die Probabilität, daß nach 20 Jahren **A** schon todt ist, dagegen **B** noch lebe;

$$(1-w)(1-w') = \frac{1379 . 1354}{4143 . 4201} = 0.10728$$

als die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren Beide, **A** und **B** schon todt sind;

$$1-(1-w)(1-w') = \frac{4143 . 4201 - 1379 . 1354}{4143 . 4201} = 0.89272$$

als die Probabilität, daß nach 20 Jahren noch nicht Beide todt sind, sondern daß wenigstens eine Person, entweder **A** oder **B**, oder vielleicht Beide noch leben.

2) Will man aber wissen, wie viel von z. B. 1000 solcher Paare nach 20 Jahren noch leben, u. s. w.; so muß man die im §. 20. S. 15 stehenden Ausdrücke noch mit 1000 multipliciren.

Beispiel. Von 1000 Ehepaaren seien jetzt die Männer 30, die Weiber 20 Jahre alt, so wird man nach 10 Jahren haben, da $m = 30$, $n = 20$, $p = 10$ ist:

Noch lebende Paare	$1000 \times \frac{3774}{4372} \times \frac{4372}{4882}$	$= 773$
Wittwer	$1000 \times \frac{4372}{4882} \times \frac{598}{4372}$	$= 123$
Wittwen	$1000 \times \frac{3774}{4372} \times \frac{510}{4882}$	$= 90$
Ausgestorbene Paare	$1000 \times \frac{598}{4372} \times \frac{510}{4882}$	$= 14$
Summe aller Ehepaare:		1000.

3) Man sucht die Dauer der Ehe eines Paares, d. h. die

Zeit, während welcher ein Ehepaar noch beisammen lebt, bis eines von ihnen stirbt.

Es seien M Ehepaare gegeben, von welchen jetzt jeder Mann m und jede Frau n Jahre alt ist. Von diesen M Ehepaaren leben noch zusammen (nach §. 118) im folgenden

erſten Jahre $(M . C_{m+1} . C_{n+1}) : (C_m . C_n)$
zweiten „ $(M . C_{m+2} . C_{n+2}) : (C_m . C_n)$
dritten „ $(M . C_{m+3} . C_{n+3}) : (C_m . C_n)$
vierten „ $(M . C_{m+4} . C_{n+4}) : (C_m . C_n)$ u. s. w.

und diese Reihe wird so weit fortgesetzt, bis irgend ein Glied gleich Null wird. Man addire nun alle diese Glieder zusammen und dividire die gefundene Summe durch M; so erhält man die mittlere Dauer E_n^m eines Ehepaars, von dem der Mann jetzt m und die Frau n Jahre alt ist. Nämlich:

$$E_n^m = \frac{C_{m+1} . C_{n+1} + C_{m+2} . C_{n+2} + C \quad . C_{n+3} + \ldots\ldots}{C_m \times C_n} \quad 79).$$

Bezeichnet im §. 20. S. 15. **A** den Mann, **B** die Frau; so ist die mittlere Dauer des Ueberlebens der Frau, d. h. die mittlere Dauer W_m^n des Wittwenstandes

$$W_m^n = \frac{C_{n+1}(C_m - C_{m+1}) + C_{n+2}(C_m - C_{m+2}) + C_{m+3}(C_m - C_{m+3}) \ldots +}{C_n \times C_m} \quad 80),$$

die Mitglieder im Zähler ebenfalls so weit genommen, bis eines derselben verschwindet, und für die mittlere Dauer W_n^m des Wittwerstandes

$$W_n^m = \frac{C_{m+1}(C_n - C_{n+1}) + C_{m+2}(C_n - C_{n+2}) + C_{m+3}(C_n - C_{n+3}) + \ldots}{C_m \times C_n} \quad 81),$$

wo gleichfalls im Zähler die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht.

Sei z. B. m = 90 Jahr das Alter des Mannes,
n = 80 Jahr das Alter der Frau;

so ist

$$C_{91} \times C_{81} = 83 \times 414 = 34362$$
$$C_{92} \times C_{82} = 65 \times 365 = 23725$$
$$C_{93} \times C_{83} = 49 \times 320 = 15680$$
$$C_{94} \times C_{84} = 34 \times 279 = 9486$$
$$C_{95} \times C_{85} = 21 \times 242 = 5082$$
$$C_{96} \times C_{86} = 10 \times 208 = 2080$$

Summe: 90415

$$C_{90} \times C_{80} = 103 \times 467 = 48101,$$

also $$E^m_n = \frac{90415}{48101} = 1.88 \text{ Jahre};$$

ferner

$$\begin{aligned}
C_{81}(C_{90}-C_{91}) &= 414 \times 20 = 8280\\
C_{82}(C_{90}-C_{92}) &= 365 \times 38 = 13870\\
C_{83}(C_{90}-C_{93}) &= 320 \times 54 = 17280\\
C_{84}(C_{90}-C_{94}) &= 279 \times 69 = 19251\\
C_{85}(C_{90}-C_{95}) &= 242 \times 82 = 19844\\
C_{86}(C_{90}-C_{96}) &= 208 \times 93 = 19344\\
C_{87}(C_{90}-C_{97}) &= 178 \times 103 = 18334\\
\hline
\text{Summe:} &\quad 116203
\end{aligned}$$

$$C_{90} \times C_{80} = 103 \times 467 = 48101,$$

also $$W^n_m = \frac{116203}{48101} = 2.42 \text{ Jahre};$$

endlich

$$\begin{aligned}
C_{91}(C_{80}-C_{81}) &= 83 \times 53 = 4399\\
C_{92}(C_{80}-C_{82}) &= 65 \times 102 = 6630\\
C_{93}(C_{80}-C_{83}) &= 49 \times 147 = 7203\\
C_{94}(C_{80}-C_{84}) &= 34 \times 188 = 6392\\
C_{95}(C_{80}-C_{85}) &= 21 \times 225 = 4725\\
C_{96}(C_{80}-C_{86}) &= 10 \times 259 = 2590\\
\hline
\text{Summe:} &\quad 31939
\end{aligned}$$

$$C_{90} \times C_{80} = 103 \times 467 = 48101$$

also $$W^m_n = \frac{31939}{48101} = 0.66 \text{ Jahre}.$$

Die Werthe von E^m_n, W^n_m und W^m_n müssen, weil alle Trennungen der Paare nicht im Anfange des Jahres, sondern im Laufe des ganzen Jahres vor sich gehen, um $\frac{1}{2} = 0.5$ Jahre vergrößert werden. Daher wird eigentlich sein für ein Ehepaar, wo der Mann jetzt 90 Jahre und die Frau 80 Jahre alt ist,

$$\left.\begin{aligned}
&\text{die mittlere Ehedauer } E^m_n = 2.38\\
&\text{die mittlere Dauer des Wittwenstandes } W^n_m = 2.92\\
&\text{die mittlere Dauer des Wittwerstandes } W^m_n = 1.16
\end{aligned}\right\}\text{Jahre.}$$

Zwölftes Capitel.

Von den Lebensversicherungs- und andern Versorgungs-Anstalten (Actien- und Rentengesellschaften).

§. 120. Alle Versicherungs- oder Assecuranzanstalten sind im Allgemeinen von zweierlei Art: Actien- und Rentengesellschaften.

Wenn eine gewisse Summe, die beabsichtigte Versorgung, zu einer bestimmten Zeit nur ein einziges Mal oder eine gewisse Anzahl von Jahren hindurch von der Kasse der Gesellschaft jährlich entrichtet wird, so heißt diese Summe eine Actie, hingegen eine Rente, sobald diese Summe von einer gegebenen Zeit an bis an den Tod einer bestimmten Person an diese jährlich bezahlt wird. *) — Der Verein derjeniger Personen, welche zum Zweck der Versicherung zusammengetreten sind, heißt im ersten Falle ein Actienverein, im zweiten eine Rentengesellschaft. Beide bilden eine sogenannte Versicherungsanstalt.

Wir wollen annehmen, eine Person zahle bei ihrem Eintritte in irgend eine Versicherungsgesellschaft das Antrittsgeld M, und hierauf am Anfange jedes folgenden Jahres den jährlichen Beitrag B; so heißt dieser ein lebenslänglicher Beitrag, sobald er von der gedachten Person bis an ihren Tod als Mitglied der Gesellschaft entrichtet wird, hingegen ein i jähriger Beitrag, wenn derselbe vom gedachten Mitgliede bloß die ersten i Jahre hindurch nach seinem Eintritte bezahlt wird. Die dafür dem Mitgliede von der Kasse auszuzahlende Summe U heißt, nur einmal als Kapital gleichsam ausgezahlt, eine Actie, hingegen, durch mehrere z. B. J Jahre jährlich ausgezahlt, eine J jährige Actie. Wird jedoch U entweder dem Mitgliede selbst bis an seinen Tod oder einer andern bestimmten Person bis an deren Tod entrichtet, so heißt U eine Rente. — Die Summe U nun heißt eine Lebensactie oder Lebensrente, sobald U dem Mitgliede selbst einmal zu einer gewissen Zeit oder bis an seinen Tod jährlich verabfolgt wird. Beide, Lebensactie und Lebensrente, heißen zusammen eine Lebensversicherung.

---

*) In diesem Sinne spricht man resp. von einer Lebensactie und von einer Lebensrente; wird jedoch obgedachte Summe von der Kasse an andere von dem Mitgliede bezeichnete Personen nach erfolgtem Tode des Mitgliedes entrichtet; so heißt dann die Summe resp. eine Erbactie und eine Erbrente, welche letztere eine Wittwen- oder Waisenrente genannt wird, sobald die Wittwe oder die hinterlassenen Kinder gedachten Mitgliedes bei dessen Tode diese Rente erhalten sollen.

A) Von den Lebensversicherungs-Gesellschaften.

§. 121. Im Allgemeinen wird Lebensversicherung derjenige Vertrag genannt, durch welchen eine Person gegen eine gewisse bestimmte Vergeltung die Gefahr, welche jene Person aus dem frühzeitigen Tode einer andern Person treffen kann, übernimmt; gedachte Vergeltung heißt Prämie und ist entweder eine dem Alter und der Gesundheit der versicherten Person angemessene Summe, oder besteht in jährlichen Beiträgen. Was dagegen die versicherte Person erhält, ist entweder ein bestimmtes Kapital, Versicherungssumme genannt, oder eine bis an ihren Tod auszuzahlende Rente; beides, Versicherungssumme und Rente heißt auch sehr oft Lebensactie und Lebensrente.

Die Lebensversicherung beabsichtigt, dasjenige, was durch den Todesfall einer Person der sie überlebenden Person in pecuniärer Beziehung ungewiß wird, sicher zu stellen; die Lebensversicherung muß also natürlich auf den Grundsätzen der Lebensprobabilität beruhen. Statt einer die Gefahr übernehmenden Person tritt gewöhnlich ein Verein mehrerer die Gefahr übernehmenden Personen, Lebensversicherungs-Gesellschaft genannt, zusammen, da zu diesem Zwecke schon ein bedeutendes von allen einzelnen Mitgliedern derselben zusammengeschossenes Kapital nöthig ist.

§. 122. Eine Lebensversicherungs-Gesellschaft hat also den Zweck, gegen die Einzahlung gewisser Beiträge, die jährlich zu entrichten sind, ein im Voraus festgesetztes Kapital, die Versicherungssumme, dann zu gewähren, sobald diejenige Person gestorben, welche ihr Leben durch die Entrichtung jener Beiträge versichert hatte. In diesem einfachsten Falle, wo eine Person ihr Leben zu Gunsten ihrer Erben versichert, liegt der Vortheil 1) in der Möglichkeit, daß bei einem frühzeitigern Tode das von der Anstalt zu gewährende Kapital die Summe der nach und nach eingezahlten Beiträge bedeutend übersteigt, und 2) bei einem erst viel später erfolgenden Tode in der Vererbung einer größern Summe, die an die Stelle der kleinen Beiträge getreten ist, welche letzteren ohne diese Bestimmung wahrscheinlich zu momentanen Bedürfnissen oder zur Befriedigung überflüssiger Wünsche verwendet, oder auch vielleicht gar durch Betrug und Unglücksfälle mancherlei Art entrissen worden wären. Der Versicherte hat demnach die Gewißheit, seinen Erben in der durch jährliche kleine Ersparnisse erkauften Versicherungssumme ein verhältnißmäßig beträchtliches Kapital zu hinterlassen, wobei sich ganz nach seinen Verhältnissen einzurichten erlaubt ist, der Reichere also ein größeres Kapital durch höhere Beiträge, der Aermere ein kleineres Kapital durch niedrigere Beiträge erwerben kann.

Man kann jedoch die Versicherung auch nur für eine bestimmte Zeit machen, indem man nur während einer kürzern Reihe von Jahren die Beiträge entrichtet, dafür aber auch keine Versicherungssumme von der Anstalt ausgezahlt erhält, wenn man nach Ablauf dieser bestimmten Zeit noch am Leben ist.

Diese Art Versicherung wird gewöhnlich unternommen, wenn man nach Ablauf dieser Zeit eine bedeutende Verbesserung seiner Glücksumstände wahrscheinlich voraussehen darf, und nur die Angehörigen für den Fall decken will, daß die gehoffte Verbesserung der Glücksumstände durch den zu frühen Tod des Versicherten vereitelt würde.

Die Lebensversicherung kann ferner auch zwei Personen zugleich, z. B. ein Ehepaar, in der Art betreffen, daß, wenn Eines von dem Ehepaare gestorben, dann die Versicherungssumme dem andern noch Lebenden ausgezahlt wird.

Selbst das Leben einer dritten Person kann versichert werden, in welchem Falle man nämlich die Zahlung der Beiträge übernimmt, dafür aber auch das versicherte Kapital nach dem Tode der versicherten Person bezieht. Dieß geschieht entweder aus Speculation oder aus einem besondern Interesse an dem Leben der versicherten Person. So versichert z. B. ein wohlhabender Schwiegervater das Leben seines arm oder leichtsinnig gewordenen Schwiegersohns, der Gläubiger das Leben seines Schuldners, u. s. w. Obschon etwas Widriges in dem Gedanken liegt, daß auf diese Weise das Leben und das Sterben der Menschen zu einem Gegenstande der Speculation gemacht wird; so tröstet doch dafür wieder der Gedanke an die, dem von dem Leben scheidenden Familienvater daraus hervorgehende, Beruhigung. Da übrigens bei allen bis jetzt bestehenden Lebensversicherungs-Anstalten eine nicht stets pünktlich erfolgende Einzahlung der Beiträge den Verlust der Versicherungssumme ohne Weiteres nach sich zieht, so liegt in diesen Anstalten zugleich ein Antrieb zur Ordnung und Sparsamkeit. Daraus geht denn aber auch hervor, daß alle diejenigen, deren Einkünfte unsicher und unregelmäßig sind, oder die wenigstens nicht dafür stehen können, daß sie stets im Stande sein werden, diese Beiträge zu entrichten, der Vorsicht halber und zur Vermeidung von Schaden sich des Beitritts zur Gesellschaft enthalten werden.

§. 123. Alle Lebensversicherungs-Anstalten gründen sich auf die durchschnittlichen Mortalitätsverhältnisse, indem sie nach einer mehrjährigen Durchschnittssumme die Probabilität festsetzen, daß von einer bestimmten Anzahl Menschen (man vergl. die §§. 114. ff.) binnen einer gewissen Zeit eine bestimmte Zahl bereits gestorben sei, weshalb sie denn auch nicht die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen, sondern die Durchschnittssumme der Lebensdauer in dieser Gesammtheit als den Divisor des einzelnen Jahresbeitrag betrachten und wählen.

§. 124. Weil also den Lebensversicherungs-Anstalten *) die Resultate genau geführter Berechnungen der Geburten, Trauungen und Sterbefälle eines Landes, einer Provinz oder Stadt, u. s. w. während einer möglichst großen Reihe von Jahren zum Grunde liegen, und diese Resultate nachher Schlüsse auf wahrwahrscheinliche und mittlere Lebensdauer desto sicherer zulassen, je zahlreichere und richtigere Data bei den Berechnungen selbst benutzt worden sind; — so müssen, soll anders eine Versicherungs-Anstalt der Art solid und sicher für sich selbst, als auch für die Theilnehmer an derselben befürchtungslos und vortheilhaft fortbestehen, mehrere wichtige Rücksichten genommen werden, die von selbst entgegentreten, sobald man bedenkt, daß solche Institute ihre ganze Basis in dem Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben: „Je zahlreicher die Fälle einer gewissen Erscheinung, die immer periodisch wiederkehrt, sich vorfinden, desto zuverlässiger wird das periodische Gesetz eben dieser Erscheinungen ermittelt werden können, weil in der Gesammtmasse aller Fälle die verschiedenen in mehrerem oder wenigerem Grade stattfindenden Abweichungen der einzelnen Fälle von der Regelmäßigkeit sich desto wahrscheinlicher gegenseitig aufheben werden, je größer die Menge dieser Fälle selbst ist."

Hieraus geht, in Verbindung mit dem Vorigen, offenbar zugleich hervor, daß eine Lebensversicherungs-Gesellschaft eigentlich nichts anderes als Speculationen mit dem Leben und Tode ihrer Mitglieder, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vornimmt.

§. 125. Die wichtigsten Rücksichten nun, welche bei Begründung einer Lebensversicherungs-Anstalt nothwendig zu nehmen sind, folgen größtentheils aus der Natur der Sache selbst. Wegen der größern, unregelmäßiger als gewöhnlich erfolgenden, Sterblichkeit in den ersten und letzten Jahren des Lebens, d. h. im Kindes- und Greisesalter, kann keine Person vom 0ten bis zum mten Lebensjahre in der Jugend und vom nten bis zum

*) Die ältesten Institute dieser Art existiren in England, wo schon 1706 die allerdings nur mangelhaft organisirte amicable society entstand. Früher glichen sie mehr den Actienunternehmungen. Es trat nämlich eine Anzahl Actionäre zusammen, garantirte ein bestimmtes Anlagecapital und lud bloß zur Versicherung ein, wobei, weil man mehr auf den Gewinn sah, die Summe der zu zahlenden Prämien offenbar zum Nachtheil der Versicherten zu hoch bestimmt ward. Doch bildete sich bereits 1762 die Londoner equitable society, die ohne Actiencapital auf Gegenseitigkeit begründet war und einen glänzenden Erfolg hatte. Nach ähnlichen, jedoch nun sehr vervollkommneten Grundsätzen sind die auf Oeffentlichkeit und Gegenseitigkeit gegründeten deutschen Lebensversicherungs-Anstalten zu Gotha 1829, Lübeck 1829, Leipzig 1830 und Hannover 1831.

100sten Lebensjahre im Alter als in die Anstalt aufnahmsfähig betrachtet werden, sondern nur diejenigen Personen, welche im mten bis zum nten Lebensjahre stehen, werden zum Beitritt zugelassen und von diesen wieder bloß diejenigen, deren körperliche Constitution, Gewerbe oder Lebenswandel das erhebliche Bedenken, es werde ihr dereinstiger Tod als ein unregelmäßiger Fall zu betrachten sein, im Voraus schon nicht veranlassen. In dieser Hinsicht ist das Directorium einer solchen Anstalt schuldig und verbunden, eine jede Person, welche den Eintritt in die Anstalt wünscht, persönlich sowohl, als auch wegen ihres Alters, ihrer Körperconstitution, ihres Gewerbes und Lebenswandels möglichst genau kennen zu lernen, weshalb das Directorium die Beibringung einiger glaubwürdigen Papiere durchaus verlangen muß, z. B. den Taufschein und ein ärztliches Zeugniß, letzteres von einem approbirten wirklichen Arzte, der die sich zur Versicherung gemeldete Person in Krankheitsfällen behandelt und übrigens die genaueste Kenntniß ihres körperlichen Zustandes hat. Das Zeugniß des Arztes muß, um ganz sicher zu gehen, bisweilen sogar gerichtlich anerkannt und beglaubigt worden sein, und überdieß durch ein neues ersetzt werden, sobald eine neue oder veränderte Versicherung eintritt. Hierbei ist noch zu erwähnen, daß Personen natürlich nicht versichert werden können, welche entweder die Blattern, Masern, das Scharlachfieber, u. s. w. noch nicht überstanden haben, oder mit organischen gefährlichen Körpergebrechen, Epilepsie, Wahnsinn u. s. w. behaftet sind, oder irgend ein mit unerwarteter Lebensgefahr verbundenes Gewerbe treiben, z. B. beim Militär- oder Seedienst, Dachdecker, Maurer, u. s. w. oder auch einen das Leben verkürzenden Lebenswandel z. B. als Spieler oder Säufer führen.

§. 126. Eben so ist, wie bei der Aufnahme, keine Rede von Auszahlung der versicherten Summe bei einem eingetretenen Todesfalle, sobald dieser als kein natürlicher angesehen werden kann. Dahin gehören die Fälle des Selbstmordes und Duells; ferner, wenn der Versicherte durch richterlichen Ausspruch, im Kriege oder in einem sonstigen gefährlichen Berufe, endlich auch wenn er durch eine ausschweifende Lebensweise, durch muthwillige und gefahrvolle Handlungen seinen Tod sich zugezogen hat. Doch sind manche Anstalten in der Art billig, daß, wenn ein Versicherter erst in spätern Jahren auf eine der so eben angeführten Weisen gestorben war, namentlich wenn er sich einem gefährlichen Berufe gewidmet hatte, sie von dem für das laufende Jahr voraus bezahlten Beitrag die auf den übrigen Theil des Jahres zu rechnende Rate zurückzahlen. Ausgenommen hiervon ist aber der Fall, wenn die versicherte Person eine Land- oder Seereise nach irgend einer Gegend, in welcher gerade Krieg geführt wird oder epidemische Krankheiten grassiren, unternimmt und daselbst sein Leben einbüßt; denn dann fallen alle aus der Versicherung zuständig gewesenen Ansprüche natürlich aus dem Grunde weg, weil solche Todesfälle außer dem Bereiche einer wahrscheinlichen Regelmäßigkeit hinsichtlich des Eintreffens liegen.

§. 127. Außerdem geht das durch die Aufnahme begründete Recht nebst allen und jeden Ansprüchen an die Anstalt, so wie auch der Betrag der bereits eingezahlten Summen, unbedingt verloren, sobald die versicherte Person entweder freiwillig austritt oder die Zahlung ihrer Beiträge nicht in den durch die Statuten angesetzten Terminen richtig leistet, oder auch wenn Betrug bei Anzeige des Todesfalls stattgefunden hat. Denn der Eintritt desjenigen Falles, von dem die Zahlung der versicherten Summe abhängt, ist allemal von dem, welchem die Summe zukommt, dem Directorium mit den erforderlichen Bescheinigungen glaubhaft belegt sofort anzuzeigen, wobei gedachte nothwendige Bescheinigung vorzüglich darin besteht, daß ein amtlicher Todtenschein der versichert gewesenen Person, so wie ein gerichtlich anerkanntes und beglaubigtes Zeugniß des Arztes über die Veranlassung des Todes und den Gang der letzten Krankheit vorgezeigt werden muß. Nur erst, wenn dieses, den Statuten gemäß, vorausgegangen und alles richtig befunden worden ist, geschieht nach Ablauf einer gewissen Zeit, vom Todestage an gerechnet, die Auszahlung der Versicherungssumme.

§. 128. Was nun die Versicherungssumme *) selbst betrifft, so ist sie zwar ganz willkürlich, wird aber gewöhnlich, um das Geschäftswesen der Anstalt möglichst einfach zu halten, nicht unter 100 und nicht über 10000 angenommen, und überhaupt nur als ein Vielfaches von Hundert, um die Rechnungen leichter anstellen zu können. Denn da die Höhen der an die Gesellschaft zu zahlenden jährlichen Beiträge sich außer nach dem Alter, auch nach der Zahl 100 ein für allemal richten und berechnet in kleine Tabellen gebracht sind, so muß schon dieser doppelten Beziehung wegen die Versicherungssumme als ein ganzes Vielfaches von 100 angenommen werden, damit dann jedermann im Stande ist, mit Hilfe jener Tabellen selbst leicht die Größe der jährlichen Beiträge für ein gewisses Versicherungskapital zu berechnen. Was hierbei das Alter der Person, die sich versichern lassen will, anbelangt, so werden die ersten sechs Monate eines angetretenen Lebensjahres gewöhnlich auf das vergangene, die andern sechs Monate aber auf das angetretene Lebensjahr gerechnet. Uebrigens sind die Beiträge selbst in der Regel auf einmal und zwar pränumerando jährlich zu leisten; manche Anstalten

---

*) Der von der Anstalt über diese Versicherungssumme ausgestellte Schein, welcher die Police heißt, kann von dem Besitzer desselben bei der Anstalt verpfändet werden, um von dieser augenblicklich auf diesen Schein ein Darlehn an Geld vorgestreckt zu erhalten.

gestatten auch halbjährige Vorauszahlung und bisweilen sogar mehrjährige Pränumerando-Zahlung gegen ein zu bestimmendes billiges Disconto.

§. 129. Sämmtliche Gelder, die der Anstalt zugehen und zugehörig sind, kommen in eine Casse, die nie mehr als höchstens die in den Statuten bestimmte Summe Geldes enthalten darf. Der nun entstehende Ueberschuß, der mit der Zeit bedeutend anwächst, wird zu einem Theile zur Bestreitung der Versicherungskapitale, zum andern Theile zur Bestreitung der ordentlichen und außerordentlichen Verwaltungskosten der Anstalt, z. B. der Gehalte, des Miethzinses des Geschäftslocales, u. s. w., verwandt.

§. 130. Beruht die ganze Anstalt hinsichtlich ihrer Einrichtung und Verwaltung auf richtigen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, verbunden mit der Berücksichtigung der Erfahrungen anderer Institute gleicher Art; so wird, der Wahrscheinlichkeit gemäß, jener Ueberschuß nach Ablauf eines jeden Rechnungsjahres niemals ganz in Verwendung gekommen, sondern als eine immer noch ziemlich bedeutende Summe der Gesellschaft verblieben sein. Mit diesem Reste nun verfahren fast alle Lebensversicherungs-Anstalten in der Art, daß sie denselben während der ersten p Jahre ansammeln, und mit Anfang des $p+1$sten Jahres alljährlich denjenigen Theil dieses bis dahin jährlich gesammelten Restes, welchen sie für entbehrlich erachten, als eine Ersparniß der Anstalt unter diejenigen Mitglieder nach Verhältniß ihrer Beiträge vertheilen, welche lebenslänglich versichert und zu dem zu vertheilenden Reste selbst beigetragen, auch den Eintritt des Vertheilungstermins erlebt haben. Bei dieser Vertheilung wird gewöhnlich nach dem $p$ten Jahre der entbehrliche Rest des ersten, nach dem $(p+1)$ten der des zweiten Jahres u. s. f. ausgezahlt. Diese Theilungsbeträge werden den Empfängern, sobald dieselbe es wollen, auch nicht gezahlt, sondern ihnen auf die, von ihnen für das nächste Jahr zu entrichtenden, Einschußgelder zu gute gerechnet.

§. 131. Das im vorigen §. erwähnte Verfahren wird als ein Mittel betrachtet, der Anstalt mehr und mehr Theilnehmer zu gewinnen; denn ein solcher auf ein Mitglied fallender Theilungsbetrag, der bekanntlich Dividende genannt wird, kann als eine Art Zinsen für die von dem Mitgliede alljährlich zu leistenden Beiträge angesehen werden, damit eine sich versichernde Person doch auch schon während ihres Lebens einen kleinen Nutzen von ihrem der Anstalt überlassenen Gelde genießen kann, wenn gleich der eigentliche und Hauptnutzen der Bestimmung der Anstalt gemäß natürlich erst nach ihrem Tode eintritt, also nicht der versicherten Person selbst, sondern deren Hinterlassenen anheim fällt. Es ist zu erinnern, daß die Größe der Dividende immer vorsichtig bestimmt werden müsse, weil sonst leicht das solide Bestehen der ganzen Anstalt sehr stark gefährdet werden dürfte. Immer wird es folglich gut sein, nicht den ganzen ersparten Rest zur Dividende zu verwenden, sondern noch eine gewisse Summe im Depositum zurück zu behalten, welche auf eine vortheilhafte und sichere Weise verliehen werden kann, wo dann die Zinsen davon dem Gesellschaftsvereine in Einnahme gestellt werden.

§. 132. Bei manchen Lebensversicherungs-Gesellschaften findet außer Versicherungen auf Lebenszeit auch Versicherung auf nur i Jahre und sogar blos auf 1 Jahr statt. Hier sind dann andere Beiträge als bei Versicherung auf Lebenszeit zu entrichten. Als ein Beispiel sollen nun die beiden Tabellen (der Beiträge), welche in den „Statuten der unter Allerhöchster Genehmigung in Leipzig errichteten Lebensversicherungs-Gesellschaft, 1830" stehen und zur Norm für die zu leistenden jährlichen Beiträge dienen, hier etwas erweitert mitgetheilt werden, wobei nur noch erinnert wird, daß die Zahlungen im Preuß. Courant, den Thlr. zu 24 Groschen und den Groschen zu 12 Pfennigen, zu verstehen sind.

I. Versicherung auf Lebenszeit.

Jährliche Beiträge,

um beim Tode einer Person zu erhalten.

Alter.	100 Thlr.			200 Thlr.			500 Thlr.			1000 Thlr.			2000 Thlr.			5000 Thlr.		
Jahre.	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰
15	1	20	5	3	16	10	9	6	1	18	12	2	37	—	4	91	12	10
16	1	21	6	3	19	—	9	11	6	18	23	—	37	22	—	94	19	—
17	1	22	10	3	21	8	9	18	2	19	12	4	39	—	8	97	13	8
18	2	—	—	4	—	—	10	—	—	20	—	—	40	—	—	100	—	—
19	2	1	1	4	2	2	10	5	5	20	10	10	40	21	8	102	6	2
20	2	2	4	4	4	8	10	11	8	20	23	4	41	22	8	104	20	8
21	2	3	6	4	7	—	10	17	6	21	11	—	42	22	—	107	7	—
22	2	4	10	4	9	8	11	—	2	22	—	4	44	—	8	110	1	8
23	2	6	—	4	12	—	11	6	—	22	12	—	45	—	—	112	12	—
24	2	7	2	4	14	4	11	11	10	22	23	8	45	23	4	114	22	4
25	2	8	6	4	17	—	11	18	6	23	13	—	47	2	—	117	17	—
26	2	9	10	4	19	8	12	1	2	24	2	4	48	4	8	120	11	8
27	2	11	1	4	22	2	12	7	5	24	14	10	49	5	8	123	2	2
28	2	12	5	5	—	10	12	14	1	25	4	2	50	8	4	125	20	10
29	2	13	9	5	3	6	12	20	9	25	17	6	51	11	—	124	15	6
30	2	15	2	5	6	4	13	3	10	26	7	8	52	15	4	131	14	4
31	2	16	9	5	9	6	13	11	9	26	23	4	53	23	—	134	21	6
32	2	18	4	5	12	8	13	19	8	27	15	4	55	6	8	138	4	8
33	2	19	11	5	15	10	14	3	7	28	7	2	56	14	4	141	11	10
34	2	21	6	5	19	—	14	11	6	28	23	—	57	22	—	144	19	—
35	2	23	3	5	22	6	14	20	3	29	16	6	59	9	—	148	10	6
36	3	1	1	6	2	2	15	5	5	30	10	10	60	21	8	152	6	2
37	3	2	11	6	5	10	15	14	7	31	5	2	62	10	4	156	1	10
38	3	4	11	6	9	10	16	—	7	32	1	2	64	2	4	160	5	10
39	3	7	—	6	14	—	16	11	—	32	22	—	65	20	—	164	14	—
40	3	9	3	6	18	6	16	22	3	33	20	6	67	17	—	169	6	6
41	3	11	8	6	23	4	17	10	4	34	20	8	69	17	4	174	7	4
42	3	14	3	7	4	6	17	23	3	35	22	6	71	21	—	179	15	6
43	3	17	—	7	10	—	18	13	—	37	2	—	74	4	—	185	10	—
44	3	19	10	7	15	8	19	3	2	38	6	4	76	12	8	191	7	8
45	3	23	1	7	22	2	19	19	5	39	14	10	79	5	8	198	2	2
46	4	2	5	8	4	10	20	12	1	41	—	2	82	—	4	205	—	10
47	4	5	11	8	11	10	21	5	7	42	11	2	84	22	4	212	7	10
48	4	9	7	8	19	2	21	23	11	43	23	10	87	23	8	219	23	2
49	4	13	6	9	3	—	22	19	6	45	15	—	91	6	—	228	3	—
50	4	17	7	9	11	2	23	15	11	47	7	10	94	15	8	236	15	2
51	4	21	9	9	19	6	24	12	9	49	1	6	98	3	—	245	7	6
52	5	2	4	10	4	8	25	11	8	50	23	4	101	22	8	254	20	8
53	5	7	2	10	14	4	26	11	10	52	23	8	105	23	4	264	22	4
54	5	12	4	11	—	5	27	13	8	55	3	4	110	6	8	275	16	8
55	5	17	10	11	11	8	28	17	2	57	11	4	114	22	8	287	8	8
56	5	23	7	11	23	2	29	21	11	59	19	10	11	15	8	299	3	2
57	6	5	10	12	11	8	31	5	2	62	10	4	124	20	8	312	3	8
58	6	12	7	13	1	2	32	14	11	65	5	10	130	11	8	326	5	2
59	6	19	11	13	15	8	35	19	2	71	14	4	143	4	8	357	23	8
60	6	3	10	14	7	8												

II. Versicherung auf 5 Jahre.

Jährliche Beiträge,

um beim Tode einer Person zu erhalten.

Alter.	100 Thlr.			200 Thlr.			500 Thlr.			1000 Thlr.			5000 Thlr.		
Jahre.	ℛ	gl	₰	ℛ	gl	₰	ℛ	gl	₰	ℛ	gl	₰	ℛ	gl	₰
15	—	20	9	1	17	6	4	7	9	8	15	6	43	5	6
16	—	21	4	1	18	10	4	11	1	8	22	2	44	14	10
17	—	22	1	1	20	2	4	14	5	9	4	—	46	—	2
18	—	22	10	1	21	8	4	18	2	9	12	4	47	13	8
19	—	23	8	1	23	4	4	22	4	9	20	8	49	7	4
20	1	—	8	2	1	4	5	3	4	10	6	8	51	9	4
21	1	1	9	2	3	6	5	8	9	10	17	6	53	15	6
22	1	3	—	2	6	—	5	15	—	11	6	—	56	6	—
23	1	4	2	2	8	4	5	20	10	11	17	8	50	16	4
24	1	5	4	2	10	8	6	2	8	12	5	4	61	2	8
25	1	6	5	2	12	10	6	8	1	12	16	2	63	8	10
26	1	7	4	2	14	8	6	12	8	13	1	4	65	6	8
27	1	8	2	2	16	4	6	16	10	13	9	8	67	—	4
28	1	8	10	2	17	8	6	20	2	13	16	4	68	9	8
29	1	9	9	2	19	6	7	—	9	14	1	6	70	7	6
30	1	10	9	2	21	6	7	5	9	14	11	6	72	9	6
31	1	11	9	2	23	6	7	10	9	14	21	6	74	11	6
32	1	14	10	3	1	8	7	16	2	15	8	4	76	17	8
33	1	13	10	3	2	4	7	21	2	15	18	4	78	19	8
34	1	14	8	1	5	4	8	1	4	16	2	8	80	13	4
35	1	15	4	3	6	8	8	4	8	16	9	4	81	22	8
36	1	15	10	3	7	8	8	7	2	16	14	4	82	23	8
37	1	16	3	3	8	6	8	9	3	16	18	6	83	20	6
38	1	16	6	3	9	—	8	10	6	16	21	—	84	9	—
39	1	16	10	3	9	8	8	12	2	17	—	4	85	1	8
40	1	17	2	3	10	4	8	13	10	17	3	8	85	18	4
41	1	17	10	3	11	8	8	17	2	17	10	4	87	3	8
42	1	18	10	3	13	8	8	22	2	17	20	4	89	5	3
43	1	20	2	3	16	4	9	4	10	18	9	8	92	—	4
44	1	22	2	3	20	4	9	14	10	18	5	8	96	4	4
45	2	—	6	4	1	—	10	2	6	20	5	—	101	1	—
46	2	3	4	4	6	8	10	16	8	21	9	4	106	22	8
47	2	6	1	4	12	2	11	6	5	22	12	10	112	16	2
48	2	9	—	4	18	—	11	21	—	23	18	—	118	18	—
49	2	12	—	5	—	—	12	12	—	25	—	—	125	—	—
50	2	14	11	5	5	10	13	2	7	26	5	2	131	1	10
51	2	18	—	5	12	—	13	18	—	27	12	—	137	12	—
52	2	21	5	5	18	10	14	11	1	28	22	2	144	14	10
53	3	—	10	6	1	8	15	4	2	30	8	4	151	17	8
54	3	4	6	6	9	—	15	22	6	31	21	—	159	9	—
55	3	8	6	6	17	—	16	18	6	33	13	—	167	17	—
56	3	12	4	7	—	8	17	13	8	35	3	4	175	16	8
57	3	16	5	7	8	10	18	10	1	36	20	2	184	4	10
58	3	21	1	7	18	2	19	9	5	38	18	10	193	22	2
59	4	2	1	8	4	2	20	10	5	40	20	10	204	8	2
60	4	7	7	8	15	2	21	13	11	43	3	10	215	19	2

III. Versicherung auf 1 Jahr.

Jährliche Beiträge,

um beim Tode einer Person zu erhalten.

Alter.	100 Thlr.			200 Thlr.			500 Thlr.			1000 Thlr.			5000 Thlr.		
Jahre.	Rß	gℓ	₰	Rß	gℓ	₰	Rß	gℓ	₰	Rß	gℓ	₰	Rß	gℓ	₰
15	—	19	5	1	14	10	4	1	1	8	2	2	40	10	10
16	—	20	2	1	16	4	4	4	10	8	9	8	42	—	4
17	—	20	10	1	17	8	4	8	2	8	16	4	43	9	8
18	—	21	6	1	19	—	4	11	6	8	23	—	44	19	—
19	—	22	1	1	20	2	4	14	5	9	4	10	46	—	2
20	—	22	9	1	21	6	4	17	9	9	11	6	47	9	6
21	—	23	4	1	22	8	4	20	8	9	17	4	48	14	8
22	1	—	7	2	1	2	5	2	11	10	5	10	51	5	2
23	1	1	10	2	3	8	5	9	2	10	18	4	53	19	4
24	1	3	—	2	6	—	5	15	—	11	6	—	56	6	—
25	1	4	3	2	8	6	5	21	3	11	18	6	58	20	6
26	1	5	6	2	11	—	6	3	6	12	7	—	61	11	—
27	1	6	10	2	13	8	6	8	6	12	17	—	63	13	—
28	1	7	6	2	15	—	6	13	6	13	3	—	65	15	—
29	1	8	2	2	16	4	6	16	10	13	9	8	67	—	4
30	1	8	10	2	17	8	6	20	2	13	16	4	68	9	8
31	1	9	8	2	19	4	7	—	4	14	—	8	70	3	4
32	1	10	5	2	20	10	7	4	1	14	8	2	71	16	10
33	1	11	10	2	23	8	7	11	2	14	22	4	74	15	8
34	1	13	2	3	2	4	7	17	10	15	11	8	77	11	4
35	1	14	—	3	4	—	7	22	—	15	20	—	79	4	—
36	1	14	10	3	5	8	8	2	2	16	4	4	80	21	8
37	1	15	9	3	7	6	8	6	9	16	13	6	82	18	6
38	1	16	—	3	8	—	8	8	—	16	16	—	83	8	—
39	1	16	3	3	8	6	8	9	3	16	18	6	83	20	6
40	1	16	6	3	9	—	8	10	6	16	21	—	84	9	—
41	1	16	10	3	9	8	8	12	2	17	—	4	85	1	8
42	1	17	2	3	10	4	8	13	10	17	3	8	85	18	4
43	1	17	5	3	10	10	8	15	1	17	6	2	86	6	10
44	1	18	5	3	12	10	8	20	1	17	16	2	88	8	10
45	1	19	6	3	15	—	9	1	6	18	3	—	90	15	—
46	1	21	11	3	19	10	9	13	7	19	3	2	95	15	10
47	2	—	5	4	—	10	10	2	1	20	4	2	100	20	10
48	2	3	1	4	6	2	10	15	5	21	6	10	106	10	2
49	2	6	6	4	13	—	11	8	6	22	17	—	113	13	—
50	2	9	5	4	18	10	11	23	1	23	22	2	119	14	10
51	2	11	9	4	23	6	12	10	9	24	21	6	124	11	6
52	2	14	11	5	5	10	13	2	7	26	5	2	131	1	10
53	2	18	3	5	12	6	13	19	3	27	14	6	138	—	6
54	2	21	1	5	18	2	14	9	5	28	18	10	143	22	2
55	3	—	10	6	1	8	15	4	2	30	8	4	151	17	8
56	3	4	10	6	9	8	16	—	2	32	—	4	160	1	8
57	3	8	3	6	16	6	16	17	3	33	10	6	167	4	6
58	3	12	8	7	1	4	17	16	4	35	8	8	176	19	4
59	3	16	10	7	9	8	18	12	2	37	—	4	185	1	8
60	3	20	3	7	16	6	19	5	3	38	10	6	192	4	6

IV. Jährliche Beiträge,

um, wenn von zwei Personen eine mit Tode abgehet, 100 Thaler zu erhalten.

Alter der beiden Personen. Jahre. A	B	Thlr.	Gr.	Pf.	Differenz für 1 Jahr. Thlr.	Gr.	Pf.
15	15	3	3	3			
	20	3	8	5	—	1	0.4
	25	3	13	10	—	1	0.4
	30	3	20	3	—	1	3.4
	35	4	3	3	—	1	4.8
	40	4	11	8	—	1	8.2
	45	5	1	6	—	2	9.2
	50	5	19	6	—	3	7.2
	55	6	19	6	—	4	9.6
	60	8	5	6	—	6	9.6
20	20	3	13	10			
	25	3	19	—	—	1	0.4
	30	4	1	6	—	1	3.6
	35	4	8	2	—	1	4.0
	40	4	16	7	—	1	8.2
	45	5	6	6	—	2	9.4
	50	6	—	6	—	3	7.2
	55	7	1	—	—	4	10.8
	60	8	11	3	—	6	10.2
25	25	3	22	8			
	30	4	5	1	—	1	3.4
	35	4	11	8	—	1	3.8
	40	4	20	—	—	1	8.8
	45	5	9	10	—	2	9.2
	50	6	3	8	—	3	6.8
	55	7	4	—	—	4	10.4
	60	8	14	3	—	6	10.2
30	30	4	9	11			
	35	4	16	3	—	1	3.2
	40	5	—	5	—	1	7.6
	45	5	14	—	—	2	8.6
	50	6	7	9	—	3	6.6
	55	7	8	—	—	4	10.7
	60	8	17	7	—	6	8.6
35	35	4	22	3			
	40	5	6	—	—	1	6.6
	45	5	19	4	—	2	8.0
	50	6	12	9	—	3	5.8
	55	7	12	11	—	4	10.0
	60	8	22	3	—	6	8.0
40	40	5	13	6			
	45	6	2	3	—	2	6.6
	50	6	19	9	—	3	6.0
	55	7	19	3	—	4	8.4
	60	9	4	6	—	6	7.8
45	45	6	11	5			
	50	7	4	8	—	3	7.8
	55	8	3	10	—	4	7.6
	60	9	13	—	—	6	7.6
50	50	7	21	—			
	55	9	4	—	—	6	2.4
	60	10	10	—	—	6	0.0
55	55	9	21	—			
	60	11	4	—	—	6	2.4
60	60	12	12	—			

§. 133. Beim Gebrauch der Tafel **IV**. können drei Fälle vorkommen, entweder 1) das Alter beider Personen findet sich genau in der Tafel, oder 2) nur das Alter der einen Person steht unmittelbar, oder 3) das Alter beider Personen steht nicht selbst in der Tafel. — Kommt der erste Fall, so läßt sich diese Tafel direct gebrauchen; so wird man z. B. für 2 Personen **A** und **B**, wenn sie auf 400 Thlr. versichern, $4 \times$(5 Thlr. 14 Gr.) $=$ 22 Thlr. 8 Gr. jährlich zahlen müssen, wenn **A** 30 Jahr und **B** 45 Jahr alt ist. — Kommt der zweite Fall vor, so geht man in die Tafel mit Zuziehung der Columne, welche die Differenzen für 1 Jahr enthält, noch immer direct ein; z. B. **A** sei

20 Jahr, B 57 Jahr alt und beide wählen das Versicherungskapital 1200 Thlr.; so ist der jährlich zu entrichtende Beitrag

$$\{(7\ \text{Rth}\ 1\ \text{gr} - \text{pf}) + 2\ (-\ \text{Rth}\ 6\ \text{gr}\ 10.2\ \text{pf})\}\ 12 =$$
$$(7\ \text{Rth}\ 1\ \text{gr}\ 0\ \text{pf} + 0\ \text{Rth}\ 13\ \text{gr}\ 8.4\ \text{pf}) \times 12$$
$$(7\ \text{Rth}\ 14\ \text{gr}\ 8\tfrac{2}{5}\ \text{pf}) \times 12 = 91\ \text{Rth}\ 8\ \text{gr}\ 4\tfrac{4}{5}\ \text{pf}.$$

Kommt der **dritte** Fall vor, wäre z. B. **A** 36 und **B 44** Jahr alt, so muß man erst die Rechnung wie im zweiten Falle führen, nämlich für

$$A = 35,\ B = 44$$

und für

$$A = 40,\ B = 44$$

den jährlichen Beitrag b uud b' aus der Tafel bestimmen, und endlich den eigentlich gesuchten Beitrag β aus der Proportion

$$5 : b' - b = 36 - 35 : \beta$$

entwickeln, wo sich also findet

$$\beta = b + \frac{(b' - b)(\quad - 35)}{5}.$$

Die Rechnung steht daher so:

$$A = 35,\ B = 44$$

giebt

$$5\ \text{Rth}\ 6\ \text{gr}\ 0\ \text{pf} + 4\ (2\ \text{gr}\ 8\ \text{pf}) = 5\ \text{Rth}\ 6\ \text{gr}\ 0\ \text{pf} + 10\ \text{gr}\ 8\ \text{pf}$$

d. h.

$$b = 5\ \text{Rth}\ 16\ \text{gr}\ 8\ \text{pf};$$

$$A = 40,\ B = 44$$

giebt

$$5\ \text{Rth}\ 13\ \text{gr}\ 6\ \text{pf} + 4\ (2\ \text{gr}\ 6.6\ \text{pf}) = 5\ \text{Rth}\ 13\ \text{gr}\ 6\ \text{pf} + 10\ \text{gr}\ 2\tfrac{2}{5}\ \text{pf}$$

d. h.

$$b' = 5\ \text{Rth}\ 23\ \text{gr}\ 8\tfrac{2}{5}\ \text{pf};$$

also weil

$$b' - b = 0\ \text{Rth}\ 7\ \text{gr}\ 0\tfrac{2}{5}\ \text{pf}$$

und

$$36 - 35 = 1 \qquad \text{ist,}$$

so ist der wahre jährliche Beitrag für **A = 36** und **B = 44** Jahr dann

$$\beta = 5\ \text{Rth}\ 16\ \text{gr}\ 8\ \text{pf} + \frac{0\ \text{Rth}\ 7\ \text{gr}\ 0\tfrac{2}{5}\ \text{pf}}{5}$$
$$= 5\ \text{Rth}\ 16\ \text{gr}\ 8\ \text{pf} + 0\ \text{Rth}\ 1\ \text{gr}\ 4.88\ \text{pf},$$

d. h.

$$\beta = 5\ \text{Rth}\ 18\ \text{gr} - \tfrac{22}{25}\ \text{pf}.$$

Anmerkung 1) Streng genommen, ist diese Differenzenrechnung von der Art, daß sie nicht ganz die eigentlich wahren Resultate giebt. Allein der Unterschied ist so unbedeutend, daß man ihn, sobald man erwägt, daß vorstehende Tafel **IV.** Zahlen enthält, die selbst wieder nur durch die Erfahrung angepaßte, also blos genäherte sind, füglich außer Acht lassen kann, indem die ganz genaue Rechnung mit ersten und zweiten Differenzen in Bezug auf die Sache nur überflüssig und doch beschwerlicher sein würde.

§. 134. Die allgemeine analytische Darstellung der Rechnungen, welche der Begründung und Einrichtung jeder Lebensversicherungs-Gesellschaft, als hierzu durchaus nothwendig, jederzeit vorausgegangen sein müssen, soll nun zum Schluß, als dem Zwecke dieses Werkes entsprechend, hier noch kurz mitgetheilt werden.

Wir wollen annehmen, daß eine n jährige Person bei ihrem Eintritt in irgend eine Lebensversicherungs-Gesellschaft sogleich die Summe A und hierauf d Jahre hindurch jährlich die Prämie P entrichte, daß dagegen die Kasse dieser Anstalt sich anheischig mache, nach dem Tode des gedachten Assecuraten seinen Erben die Versicherungssumme V zu zahlen, unter der Voraussetzung jedoch, daß diese Zahlung V nur dann geschehe, sobald gedachte n jährige Person innerhalb der $b+c$ ersten Jahre, vom Eintritte an gerechnet, mit Tode abgehet, hingegen nicht geschehe, sobald dieser Todesfall vor dem vollendeten b ten Jahre (dem Probejahre, wie es bei manchen Anstalten eingeführt ist) oder erst nach vollendetem $(b+c)$ ten Jahre eintritt.

Wir wollen ferner annehmen, daß unter diesen Bedingungen a_n n jährige Personen in die Gesellschaft eintreten, welche den Zinsfuß $q = \frac{100+p}{100}$, wo p die Anzahl der Procente bezeichnet, gewählt hat; so wird der jetzige baare Werth der von a_n n jährigen Personen zu entrichteten Einlagen sein

$$= a_n . A + P\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_{n+d}}{q}\right)$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_{n+d}}{q^d} = X$$

gesetzt wird,

$$= a_n A + P . X. \qquad 82).$$

Dagegen wird der jetzige baare Werth aller an die a_n n jährigen Personen von der Kasse zu entrichtenden Versicherungen sein

$$V = \left\{(a_{n+b} - a_{n+b+1})\left(\frac{1}{q}\right)^{n+b+1} + \ldots + (a_{n+b+c-1} - a_{n+b+c})\left(\frac{1}{q}\right)^{n+b+c}\right\}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$a_{n+b}\left(\frac{1}{q}\right)+a_{n+b+1}\left(\frac{1}{q}\right)^2+\ldots a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c=Z$$

setzt,

$$=\frac{VZ}{q^{n+b}}\left\{\frac{q-1}{q}+a_{n+b}-a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c\right\} \quad 83).$$

Hier wird indeß stets vorausgesetzt, daß alle Todesfälle und mithin auch alle Auszahlungen von Seiten der Anstalt erst zu Ende des Jahres erfolgen, oder daß wenigstens jede vor Ende des Jahres erfolgende Zahlung nur mit Abzug des Disconto geleistet werde.

Da nun der Theorie zufolge die Kasse jeder Versicherungsanstalt eigentlich weder Gewinn noch Verlust haben darf, so hat man die Ausgabe der Einnahme, d. h. den Werth in 83) der Erstern dem Werthe in 82) der Letztern gleich zu setzen. Dieß giebt dann, wie man leicht finden wird,

$$a_n.A+P.X=\frac{VZ}{q^{n+b}}\left\{\frac{q-1}{q}+a_{n+b}-a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c\right\},$$

oder auch

$$\left(a_n.A+P.X\right)q^{n+b}=V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z+a_{n+b}-a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c\right\} \quad 84).$$

In der Wirklichkeit, d. h. in der Praxis, würde jedoch, der Verwaltungskosten und einiger andern Umstände wegen, entweder die Größe **A** oder die Größe **P** um etwas noch zu vermehren sein.

Die Gleichung 84) nun ist die Fundamentalformel aller bei Lebensversicherungsanstalten vorkommenden Fälle und Berechnungen, aus der sich die besondern Ausdrücke für specielle Fälle leicht ableiten lassen.

a) Setzt man in 84) $b=o$, $n+b+c$ aber dem höchsten in der gewählten Mortalitätstafel vorkommenden Lebensalter gleich, das hier durch h bezeichnet sein mag; so wird, weil

$$Z=a^n\left(\frac{1}{q}\right)+a_{n+1}\left(\frac{1}{q}\right)^2+\ldots\ldots+a_{h-1}\left(\frac{1}{q}\right)^{h-n},$$

$$\left(a_n.A+P.X\right)q^n=V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z+a_n\right\} \quad 85).$$

Diese Gleichung gilt für den gewöhnlichsten Fall, d. h. da, wo keine Probejahre stattfinden und wo jede sich versichernde Person nicht nur sogleich, sondern auch während der ganzen Dauer ihres Lebens vollen Anspruch auf die Versicherung **V** erlangen kann.

b) Soll die sich versichernde Person eine lebenslängliche Prämie erlegen, so gilt hierfür die Gleichung 85), sobald man in ihr

$$X = a_{n+1}\left(\frac{1}{q}\right) + \ldots + a_{h-1}\left(\frac{1}{q}\right)^{h-n-1}$$

annimmt und berechnet.

c) Soll nur ein Eintrittsgeld, aber keine Prämie erlegt werden; so hat man offenbar in 84) und 85) $P=0$ zu substituiren, welche Substitution geben wird resp.

$$a_n . A . q^{n+b} = V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z + a_{n+b} - a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c\right\} \quad 84^*),$$

$$a_n . A . q^n = V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z + a_n\right\} \quad 85^*).$$

d) Wird kein Eintrittsgeld, sondern nur eine Prämie entrichtet, so hat man offenbar in 84) und 85) $A=0$ zu substituiren, welche Substitution geben wird resp.

$$P . X . q^{n+b} = V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z + a_{n+b} - a_{n+b+c}\left(\frac{1}{q}\right)^c\right\} \quad 84^{**})$$

$$P . X . q^n = V\left\{\left(\frac{q-1}{q}\right)Z + a_n\right\} \quad 85^{**}),$$

und letztere Gleichung gilt auch für den Fall b), wenn man nur, wie dort, so auch in 85**)

$$X = a_{n+1}\left(\frac{1}{q}\right) + \ldots a_{h-1}\left(\frac{1}{q}\right)^{h-n-1}$$

annimmt.

§. 135. Endlich gehören hierher die sogenannten Versicherungen auf Zeit, wo der allgemeinste Fall der ist, daß eine njährige Person, die sich versichern will, sogleich das Antrittsgeld **A** zahlt und dann d Jahre hindurch am Ende jedes dieser d Jahre eine gewisse Prämie **P** entrichtet. Dafür erhält dieser Assecurat vom (b+1)sten Jahre an, von dem Eintritte an gerechnet, dann c Jahre hindurch jährlich die Actie **R**.

Es wird nun der jetzige Werth der Einnahmen und Antrittsgelder, von a_n Mitglieder in den ersten d Jahren entrichtet, sein:

$$a_n . A + P . X \quad 86),$$

wo der Kürze wegen

$$\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_{n+d}}{q^d} = X$$

gesetzt worden ist.

Es wird ferner der jetzige Werth der, von der Anstalt vom (b+1)sten bis zum (b+c)ten Jahre c Jahre hindurch an die a_n Mitglieder zu entrichtenden, Zahlungen sein:

$$\frac{R}{q^{n+b}}.Y \qquad 87),$$

wo der Kürze wegen

$$\frac{a_{n+b+1}}{q}+\frac{a_{n+b+2}}{q^2}+\ldots+\frac{a_{n+b+c}}{q^c}=Y$$

gesetzt worden ist.

Weil nun die Kasse der Anstalt weder Gewinn noch Verlust haben darf, so muß der Ausdruck 86) dem von 87) gleich gesetzt werden; dieß giebt die allgemeine Gleichung:

$$a_n.A+P.X=\frac{R}{q^{n+b}}.Y$$

oder

$$(a_n.A+P.X)\,q^{n+b}=RY \qquad 88),$$

aus welcher Gleichung übrigens noch folgt:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{(a_n.A+P.X)\,q^{n+b}}{Y} \\ Y &= \frac{(a_n.A+P.X)\,q^{n+b}}{R} \\ X &= \left(\frac{RY}{q^{n+b}}-a_n.A\right):P \\ P &= \left(\frac{RY}{q^{n+b}}-a_n.A\right):X \\ A &= \left(\frac{RY}{q^{n+b}}-PX\right):a_n \end{aligned}\right\} \qquad 88^*).$$

Werden die Prämien zu Anfange jedes Jahres geleistet, so hat man statt 88) die allgemeine Gleichung:

$$(a_n.A+qPX)\,q^{n+b}=RY \qquad 89),$$

wenn dagegen die Actien zu Anfange des Jahres ausgezahlt werden, die allgemeine Gleichung:

$$(a_n.A+PX)\,q^{n+b+1}=RY \qquad 90).$$

Die Gleichung 88) beantwortet mehrere besondere Fragen.

a) Es wird keine Prämie, sondern bloß Antrittsgeld bezahlt. — Hier muß $P=0$ gesetzt werden und man wird erhalten:

$$a_n \cdot A \cdot q^{n+b} = RY \qquad 91).$$

b) Es werden bloß Prämien, aber kein Antrittsgeld entrichtet. — Hier muß $A = 0$ sein, welche Annahme geben wird:

$$PXq^{n+b} = RY \qquad 92).$$

c) Die Actienzahlung soll in demselben Jahre anfangen, in welchem die Leistung der Prämien aufhört. — Offenbar muß hier $d = b$ gesetzt werden, so daß man dann erhält:

$$(a_n \cdot A + PX)q^{n+b} = RY \qquad 93),$$

wo

$$X = \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots + \frac{a_{n+b}}{q^b} \text{ ist.}$$

d) Soll die Summe nur einmal und zwar am Ende des bten Jahres ausgezahlt werden, so giebt die Substitution von $c = 1$:

$$Y = \frac{a_{n+b+1}}{q},$$

mithin

$$(a_n \cdot A + PX)q^{n+b+1} = R \cdot a_{n+b+1} \qquad 94).$$

e) Es werde die Prämie bis zum Eintritt des Todes der sich versicherten Person von dieser geleistet. — Hier muß in 88) statt $n + d$ das höchste Alter h der Mortalitätstafel substituirt werden, welche Substitution dann giebt:

$$X = \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+n}}{q^3} + \cdots \frac{a_n}{q^{h-n}},$$

$$(a_n \cdot A + PX)q^{n+b} = RY \qquad 95),$$

welche Gleichung namentlich bei Sparkassen eine directe Anwendung findet.

f) Wenn verlangt wird, daß die Actie sich in eine Leibrente verwandele, so muß statt

$$Y = \frac{a_{n+b+1}}{q} + \frac{a_{n+b+2}}{q^2} + \cdots + \frac{a_{n+b+c}}{q^c}$$

gesetzt werden:

$$Y = \frac{a_{n+b+1}}{q} + \frac{a_{n+b+2}}{q^2} + \cdots + \frac{a_h}{q^{h+n+b}},$$

und dann ist:

$$(a_n \cdot A + PX)q^{n+b} = RY \qquad 96)$$

diejenige Gleichung, die unter andern auch bei Sterbe- und Wittwenkassen sich anwenden lassen wird.

Anmerkung 1. Die Mise der Wittwenpension, welche eine mit einem $m$jährigen Manne verbundene $n$jährige Frau erhalten soll, ist gleich der Mise für die Leibrente der $n$jährigen Frau weniger der Mise der Verbindungsrente einer m und $n$jährigen Person, d. h. also, wenn keine jährlichen Beiträge entrichtet werden, das Einkaufsgeld in die Wittwenkasse oder der jetzige baare Werth aller künftig zu leistenden Zahlungen.

Anmerkung 2. In Bezug auf die vier Tabellen, welche den Statuten der Leipziger Lebensversicherungsgesellschaft angehängt sind, und welche die Größen der für jedes Alter jährlich zu leistenden Beiträge enthalten, muß erwähnt werden, daß diese Tafeln zwar mittelst der nachstehenden Formeln für $q = 1.03$ berechnet, aber wegen der Verwaltungskosten etwas vergrößerte Resultate enthalten.

Die Taf. I. beantwortet die Frage, welchen jährlichen Beitrag ein m Jahr altes Mitglied lebenslang zu entrichten hat, wenn bei seinem Tode die totale Erbactie von 100 Thalern seinen Erben ausgezahlt werden soll, vorausgesetzt, daß kein Antrittsgeld entrichtet worden, Probejahre nicht stattfinden und die ältern Mitglieder nicht ausgeschlossen werden.

Es ist, wenn man zuerst

$$X_{m+1} = \frac{C_{m+1}}{q^{m+1}} + \frac{C_{m+2}}{q^{m+2}} + \frac{C_{m+3}}{q^{m+3}} \cdots\cdots \qquad 97)$$

so weit fort berechnet hat, bis endlich ein Glied $= 0$ wird, dann die Größe G_m der jährlichen Beiträge:

$$G_m = \frac{100 \left\{ C_m - q^m (q^m - 1) X_{m+1} \right\}}{q C_m + q^{m+1} \cdot X_{m+1}} \qquad 97^*).$$

Für die Leipziger Lebensversicherungsgesellschaft ist $q = 1.03$; also

$$G_m = \frac{100 \left\{ C_m - 1.03^m (1.03^m - 1) X_{m+1} \right\}}{1.03\, C_m + 1.03^{m+1} X_{m+1}} \qquad 97^{**}).$$

Die Tafel II. beantwortet die Frage, welchen jährlichen Beitrag ein bei seinem Eintritte m Jahre altes Mitglied a Jahre lang zu entrichten hat, wenn nach Ablauf dieser a Jahre die partielle Erbactie von 100 Thalern seinen Erben ausgezahlt werden soll, vorausgesetzt, daß kein Antrittsgeld entrichtet worden und Probejahre nicht stattfinden.

Es ist, wenn man zuerst

$$\left.\begin{aligned}X_m &= \frac{C_m}{q} + \frac{C_{m+1}}{q^2} + \frac{C_{m+2}}{q^3} + \cdots\cdots + \frac{C_{m+a-1}}{q^2}\\ &\text{und}\\ X_{m+1} &= \frac{C_{m+1}}{q^m} + \frac{C_{m+2}}{q^{m+1}} + \frac{C_{m+3}}{q^{m+2}} + \cdots + \frac{C_{m+a}}{q^{m+a-1}}\end{aligned}\right\} \quad 98)$$

berechnet hat, dann die Größe G_m der jährlichen Beiträge:

$$G_m = \frac{100\,\{X_m - q^{m-1} \cdot X_{m+1}\}}{q \cdot X_m} \quad 98^*).$$

Für die Leipziger Lebensversicherungsgesellschaft hat man $q = 1.03$, also:

$$G_m = \frac{100\,\{X_m - 1.03^{m-1} X_{m+1}\}}{1.03\,X_m} \quad 98^{**}).$$

In Bezug auf Tafel **II.** nun muß man in den Gleichungen für X_m und X_{m+1} für a den Werth 5, in Bezug auf Tafel **III.** aber für a den Werth **1** substituiren; dieß giebt:

für Tafel **II.**

$$\left.\begin{aligned}X_m \quad & \frac{C_m}{q} + \frac{C_{m+1}}{q^2} + \frac{C_{m+2}}{q^3} + \cdots + \frac{C_{m+4}}{q^5}\\ X_{m+1} &= \frac{C_{m+1}}{q^m} + \frac{C_{m+2}}{q^{m+1}} + \frac{C_{m+3}}{q^{m+2}} + \cdots + \frac{C_{m+5}}{q^{m+4}}\end{aligned}\right\} \quad 99)$$

und für Tafel **III.**

$$\left.\begin{aligned}X_m &= \left(\frac{C_m}{q} + \frac{C_{m+1}}{q^2} + \frac{C_{m+2}}{q^3} + \cdots\right) + \frac{C_m}{q} = \frac{C_m}{q}\\ X_{m+1} &= \left(\frac{C_{m+1}}{q^m} + \frac{C_{m+2}}{q^{m+1}} + \frac{C_{m+3}}{q^{m+2}} + \cdots\right) + \frac{C_{m+1}}{q^m} = \frac{C_{m+1}}{q^m}\end{aligned}\right\} \quad 99^*).$$

Dann ist für beide Tafeln, wie schon erwähnt:

$$G_m = \frac{100\,\{X_m - 1.03^{m-1} \cdot X_{m+1}\}}{1.03\,X_m}.$$

Die Tafel **IV.** beantwortet die Frage, *welchen* jährlichen Beitrag ein jetzt m Jahre altes Mitglied lebenslang zu entrichten hat, wenn bei seinem Tode die *gegenseitige Erbactie* von **100** Thalern einer bestimmten n jährigen Person ausgezahlt werden soll, vorausgesetzt, daß kein Antrittsgeld entrichtet wird und Probejahre nicht stattfinden.

Es ist, wenn man zuerst

$$\left.\begin{aligned}
X_n^m &= \frac{1}{C_m \,.\, C_n}\left\{\frac{C_{m+1}\,.\,C_{n+1}}{q}+\frac{C_{m+2}\,.\,C_{n+2}}{q^2}+\frac{C_{m+3}\,.\,C_{n+3}}{q^3}+\ldots\ldots\right\}\\
X_n^{m-1} &= \frac{1}{C_{m-1}\,.\,C_n}\left\{\frac{C_m\,.\,C_{n+1}}{q}+\frac{C_{m+1}\,.\,C_{n+2}}{q^2}+\frac{C_{m+2}\,.\,C_{n+3}}{q^3}+\ldots\right\}\\
X_m^{n-1} &= \frac{q}{C_{n-1}\,.\,C_m}\left\{\frac{C_n\,.\,C_{m+1}}{q}+\frac{C_{n+1}\,.\,C_{m+2}}{q^2}+\frac{C_{n+2}\,.\,C_{m+3}}{q^3}+\ldots\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 100).$$

so weit fort berechnet hat, bis endlich ein Glied = 0 wird, dann die Größe G_n^m der jährlichen Beiträge:

$$G_n^m = \frac{100}{X_n^m}\left\{\frac{C_{m-1}\,.\,X_n^{m-1}}{C_m}+\frac{C_{n-1}\,.\,X_m^{n-1}}{C_n}-2\,.\,X_n^m\right\} \quad 100\,*).$$

Für die Leipziger Lebensversicherungsgesellschaft ist $q = 1.03$.

B) Von den Renten.

§. 136. Eine *Rente* ist, allgemein genommen, dasjenige, was sich als Nutzen einer Sache ergiebt, auf die man eine bestimmte Zeit hindurch eine gewisse Summe Geldes und möglichsten Fleißes verwendet hat; folglich heißt die Redensart: „die Sache oder das Geschäft *rentirt*,“ so viel als: das Geschäft lohnt den für dasselbe gemachten Aufwand. Man kann daher unter Rente besonders auch Nutzungen von gewissen Einkünften, Ausbeuten, Kapitalzinsen, Gefällen, u. s. w. verstehen, und die Person, welche eine Rente bezieht, den *Rentenirer*, *Rentner* oder *Rentirer* nennen.

§. 137. Im engern Sinne versteht man unter Renten bloß die eigentlichen *Zeitrenten*, als *Jahrrenten* oder *Annuitäten*, *Lebensrenten* (*Leibrenten*, *Tontinen*, *stehende* oder *immerwährende* Renten, u. s. w.), die in Frankreich seit 1789 existirenden *ewigen Renten*, die gewöhnlichen Kapitalzinsen auf Darlehne oder Staatsschuldscheine, u. s. w.

§. 138. Beim Anlegen eines Kapitals zu einer Rente findet zwischen einem Gläubiger und seinem Schuldner in *der* Art ein Contract statt, daß der Schuldner sich verbindlich macht, dem Gläubiger — von welchem er das Kapital als freies Eigenthum überlassen erhält — jährlich eine bestimmte Summe, die *Rente*, zu zahlen, wobei sich also von selbst versteht, daß diese Jahresrente sich höher als die Interessen, die das Kapital abwirft, belaufen müsse, weshalb die Rente als aus diesen Interessen selbst und dem zum Theil bereits abgetragenen Kapitale bestehend anzusehen ist. Weil jedoch auf diese Weise das Kapital jährlich kleiner wird, mithin immer weniger Zinsen abwirft, so muß dafür umgekehrt der abgetragene Theil des Kapitals jährlich größer werden, sobald der *Rentirer* (d. i. derjenige, welcher die Rente bezieht) jährlich eine gleiche Summe erhalten soll.

Es kommt daher bei den Rentenberechnungen darauf an, zu ermitteln, wie das ursprüngliche Kapital, die jährlich davon zu beziehende Rente, der Zinsfuß und die Zeit, auf wie lange diese Rente bezogen werden soll, von einander abhängen, eine Ausmittelung, die, wie man nun deutlich sieht, vornämlich sich auf die zusammengesetzte Zinsen- oder auf die Zinses-Zinsrechnung gründet.

Sei **K** das Kapital, welches auf n Jahre zu p Procent auf Zins von Zinsen ausgeliehen werden soll, und bezeichne K_n das nach Ablauf des nten Jahres durch die Zinseszinsen angewachsene Kapital; so hat man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{100 + p}{100} = q$$

gesetzt worden, bekanntlich

$$K_n = Kq^n \qquad 101).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich irgend eine Größe bestimmen, sobald die übrigen gegeben sind; nämlich

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{K_n}{q^n} \\ &= \frac{\log K_n - \log K}{\log q} \\ q &= \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} \end{aligned}\right\} \qquad 102).$$

Hat man q, so ist dann $p = 100\,(q - 1)$ der Zinsfuß und $K_n - K$ der Betrag aller binnen n Jahren aufgelaufenen Zinsen von Zinsen.

Anmerkung. Ist in vorstehenden Formeln n eine schon etwas bedeutende Zahl, so müssen, um die Resultate so genau als möglich erhalten zu können, wenigstens siebenstellige Logarithmentafeln angewandt werden. Für diejenigen, die den Gebrauch der Logarithmen nicht kennen, hat man Tafeln entworfen, durch die man K_n mittelst Multiplication und **K** mittelst Division leicht bestimmen kann. Dergleichen Tafeln findet man z. B. sehr genau und ziemlich ausgedehnt berechnet in Löhmann's juridischem Handbuche. Nur die Größe n kann, wie man aus der für sie oben gegebenen Gleichung augenblicklich ersiehet, durch keine derartigen Tafeln, sondern nur mit Hilfe der Logarithmen bestimmt werden.

§. 139. Um den gegenwärtigen Werth künftiger Zahlungen bestimmen zu können, dient die Gleichung

$$W = W_1\left(\frac{1}{q^{n_1}}\right) + W_2\left(\frac{1}{q^{n_2}}\right) + W_3\left(\frac{1}{q^{n_3}}\right) + \ldots + W_r\left(\frac{1}{q^{n_r}}\right) \quad 103),$$

in welcher Gleichung W den gegenwärtigen Werth der nach $n_1, n_2, n_3, \ldots . n_r$ Jahren zu bewerkstelligenden Zahlungen $W_1, W_2, W_3, \ldots . W_r$ bezeichnet. Durch diese Gleichung kann man folglich nicht nur den Kaufpreis von Grundstücken, die erst nach einer gewissen Anzahl von Jahren eine Einnahme versprechen, so wie den Actienwerth bei Unternehmungen, welche erst später von einem wahrscheinlichen Gewinne begleitet sind, sondern auch die Abrechnung bei mancherlei gegenseitig zu erfüllenden und erfüllten Zahlungen bestimmen.

I) Zeitrenten.

§. 140. Sind in dem obigen Ausdrucke 103) die Zahlungen $W_1, W_2, W_3, \ldots . W_r$ einander gleich, oder stehen sie in dem Verhältnisse einer arithmetischen oder geometrischen Reihe; so heißt die Reihe

$$W_1, W_2, W_3, \ldots . W_{r-1}, W_r$$

eine Rente, W deren Mise, d. h. die Summe, welche Jemand, der sich eine Rente kauft, dafür dem Rentengeber (Unternehmer) zahlt, und $n_r - n_1$ die Dauer der Rente, welche folglich auch eine Zeitrente heißen kann. Hierbei wird jedoch stets vorausgesetzt, daß die Zeitintervalle $n_2 - n_1$, $n_3 - n_2, \ldots . n_r - n_{r-1}$ alle unter sich gleich sind. Die Rente selbst wird eine unveränderliche genannt, sobald $W_1 = W_2 = W_3 = \ldots . = W_{r-1} = W_r$ ist; sonst aber eine veränderliche, nämlich entweder steigende oder fallende, welches Steigen oder Fallen der Zahlungen $W_1, W_2, W_3, \ldots . W_r$, wie vorhin erwähnt, entweder nach einem arithmetischen oder geometrischen Verhältnisse stattfinden kann.

§. 141. Beträgt jedes der Zeitintervalle ein Jahr; so nennt man die Rente eine Jahrrente oder Annuität. Eine Jahrrente ist also diejenige jährliche Rente, welche nur auf eine gewisse Anzahl Jahre bestimmt ist. — Annuitäten (d. h. eigentlich auf das jährlich Wiederkehrende berechnete Dinge), heißen auch die jährlichen Zinsen von sogenannten eisernen Kapitalien, so wie von den Renten, deren Hauptstamm beim Tode des Genußherrn dem Rentgeber wieder zufällt; ingleichen nennt man diejenigen Jahresrenten Annuitäten, die man von der englischen Bank für die bei ihr deponirten Gelder erhält, und zwar so, daß man das Depositum als gewisser Maaßen feststehendes Kapital betrachtet, dessen Annuitäten aber zu jeder beliebigen Zeit durch Verkauf ihren Besitzer ändern können, ein für England deshalb wichtigerer Umstand als für den Continent, weil in England nur sehr selten stehende Darlehen in irgend eine Handlung gegen Zinsen gegeben werden.

§. 142. Wenn die Zeitintervalle $n_2 - n_1$, $n_3 - n_2$, ... $n_1 - n_{r-1}$ zwar alle einander gleich, jedoch jedes nur ein halbes oder ein Viertel-, oder ein mtel Jahr ausmacht; so nennt man die Rente dann resp. eine halbjährliche, vierteljährliche oder mteljährliche Rente.

§. 143. Sobald $n_1 > 1$ ist, fängt jede Rente erst nach $n_1 - 1$ Jahren an zu laufen und heißt dann $(n_1 - 1)$ Jahre aufgeschoben, oder sie ist eine $(n - 1)$ Jahre aufgeschobene Rente.

Für die gewöhnlichen Renten, die alle Mal von jetzt an laufen, ist $n_1 = 1$; nur wenn die Rente nicht zu Ende des Jahres, sondern zu Anfange desselben bezahlt wird, also $n_1 = 0$ ist, heißt sie eine vorschüssige.

Endlich muß, wenn von immerwährenden Renten die Rede ist, $n_r = \infty$ gesetzt werden. Bisweilen pflegt man solche Renten Perpetuitäten zu nennen.

§. 144[a]. Bezeichnet man durch U den Betrag der unveränderlichen Zeitrente, welche m Jahre ruhet, dann aber n Jahre läuft, und jetzt die Mise M hat; so ist

$$U = \frac{M(q-1)q^{n+m}}{q^n - 1} \qquad 104).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich irgend eine Größe bestimmen, sobald die übrigen gegeben sind. Man findet nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
M &= \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \cdot \frac{U}{q^{m+n}} \\
m &= \frac{\log\left[(q^n - 1)U\right] - \log\left[M(q^{n+1} - q^n)\right]}{\log q} \\
n &= \frac{\log U - \log\left[U - M(q^{m+1} - q^m)\right]}{\log q} \\
q^{m+n+1} &- q^{m+n} - \left(\frac{U}{M}\right) q^m + \left(\frac{U}{M}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad 105),$$

aus welcher letzten Gleichung q durch Versuche zu bestimmen ist.

Man kann hier auch sagen, daß M den gegenwärtigen Werth einer Jahrrente U bedeutet, welche die nächsten m Jahre noch nicht in Wirksamkeit tritt, sondern zum ersten Male am Ende des $(m+1)$sten Jahres, und dann n Jahre hinter einander gezahlt wird, den Zinsfuß $= q$ angenommen. Bedeutet nun μ

den Werth, den die ganze Rente am Ende des mten oder zu Anfange des (m+1)sten Jahres hat; so ist offenbar

$$\mu = U \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^n};$$

aber nach 104) zugleich auch

$$M = \frac{\mu}{q^m}.$$

Folglich nach Substitution des Werthes von μ:

$$M = U \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^{m+n}},$$

wie oben in 105).

Wenn M_ν die Mise einer vorschüssigen Rente bezeichnet, so hat man

$$M_\nu = M : q,$$

also

$$M_\nu = \left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) \cdot \frac{U}{q^{m+n-1}} \qquad 106).$$

Anmerkung. Es können hier beiläufig zwei häufig vorkommende Fälle erwähnt werden. Entweder:

1) es wird eine unveränderliche Jahrrente U' auf den gegebenen Zeitraum von n' Jahren gesucht, die an baarem Werthe einer andern unveränderlichen Jahrrente U auf n Jahre gleich ist, wenn beide Renten zum Zinsfuße q gerechnet werden. Man hat

$$U' = \frac{(q^n - 1)\,q^{n'-n}.U}{q^{n'} - 1}; \quad \text{oder}$$

2) es wird diese Jahrrente U' gesucht, sobald sie m Jahre aufgeschoben und dann n' Jahre hindurch gezahlt werden soll. Man hat

$$U' = \frac{(q^n - 1)\,q^{n'-n+m}.U}{q^{n'} - 1}.$$

§. 144 b). Für eine nicht aufgeschobene, d. h. für eine sogleich laufende Rente muß natürlich $m = 0$ sein, folglich, um die Formeln 105) für sogleich laufende Renten zu erhalten, in 104) und 105) $m = 0$ substituirt werden, wo dann kommt:

$$U = \frac{M_1 (q-1) q^n}{q^n - 1}$$

$$M_1 = \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \cdot \frac{U}{q^n}$$

wo M_1 die Mise der sogleich laufenden Rente bezeichnet; 107).

$$n = \frac{\log U - \log [U - M_1 (q-1)]}{\log q}$$

$$q^{n+1} - \left(\frac{M_1 + U}{M_1}\right) q^n + \left(\frac{U}{M_1}\right) = 0$$

Man kann hier auch sagen, daß M_1 den baaren Werth oder die Mise einer Jahrrente U bezeichnet, welche n Jahre lang (am Ende jedes Jahres) gezahlt wird, den Zinsfuß q angenommen. Man kann übrigens zu dem Werthe von M_1 auch direct gelangen, sobald man bedenkt, daß M_1 offenbar eine solche Summe sein muß, daß dieselbe als Kapital n Jahre lang auf Zinseszinsen zum jährlichen Zinsfuß q ausgeliehen zu der nämlichen Größe anwächst, als welche Jemand von einer andern Person, der er am Ende jedes Jahres die auf die nämliche Weise zu verzinsende Summe U übergiebt, nach Verlauf von n Jahren zu fordern hat.

Anmerkung. Sollte durch eine Rente absichtlich nicht nach n Jahren das ganze Kapital getilgt, sondern verlangt werden, daß dieses Kapital oder die Mise M_1 nach n Jahren noch den Werth m_1 habe, so würde die Größe m_1 sich bestimmen lassen durch die Gleichung:

$$m_1 = \frac{U - \{U - (q-1) M_1\} q^n}{q - 1},$$

aus der leicht folgt

$$U = \frac{(q-1)(M_1 q^n - m_1)}{b^n - 1}$$

$$M_1 = \frac{m_1 (q-1) + U (q^n - 1)}{(q-1) q^n}$$

$$n = \frac{\log \{U - (q-1) m_1\} - \log \{U - (q-1) M_1\}}{\log q}$$

welche 5 Formeln für $m_1 = 0$ in die einfachern 107) wieder übergehen.

§. 145. Ist die sogleich laufende Rente vorschüssig, so erhält man deren Mise M_{sv}, wenn man in 107) M_1 durch q dividirt, also

$$M_{sv} = \frac{U(q^n - 1)}{(q-1)\,q^{n-1}} \qquad 108).$$

Dagegen ist der Werth der sogleich laufenden Rente nach r Jahren gleich der Mise M_g für die dann noch zahlbare gleichlaufende, welche n — r Jahre dauert; also

$$M_g = M_1 \times q^r, \text{ d. h.}$$

$$M = \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \cdot \frac{U}{q^{n-r}} \qquad 109).$$

Um endlich auch die Mise M_i einer immerwährenden Rente zu erhalten, muß in 107) in dem Ausdrucke für M_1 dann $n = \infty$ gesetzt werden, nachdem man jenen Ausdruck auf die Form

$$M_i = \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \cdot U$$

gebracht hat; es kommt also dann:

$$M_i = \frac{U}{q-1} \qquad 110), \text{ d. h.}$$

die Mise einer immerwährenden Rente ist gleich einem Kapitale, dessen Interessen so groß sind als die Rentenzahlungen. — (Bisweilen versteht man unter immerwährenden oder stehenden Renten auch Renten von sogenannten eisernen Kapitalien, von Lehnstämmen u. dgl.)

§. 146. Ein wichtiger, in seinen Anwendungen recht fruchtbarer, Satz ist folgender:

Bei gleicher Zeitdauer und bei gleichem Zinsfuße verhalten sich zwei verschiedene Renten R, R′ zu einander, wie die ihnen zukommenden Misen M, M′. Es gilt demnach die Proportion

$$R : R' = M : M' \qquad 111),$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{R'M}{M'} \\ R' &= \frac{RM'}{M} \\ M &= \frac{RM'}{R'} \\ M' &= \frac{R'M}{R} \end{aligned}\right\} \quad 112)$$

folgt.

§. 147. Wenn eine m Jahre aufgeschobene Zeitrente veränderlich ist und beim Steigen eine geometrische Reihe mit dem Quotienten Q dergestalt bildet, daß die Zahlungen R_z, QR_z, Q^2R_z, ... sind; so ist für eine n jährige Dauer der jetzige Werth der Rente, d. h. ihre Mise M_z,

$$M_z = \frac{R_z(q^n - Q^n)}{q^{m+n+1} - Qq^{m+n}} \quad 113).$$

Wird hier $Q = 1$ gesetzt; so erhält man

$$M_z = \frac{R_z(q^n - 1)}{q^{m+n+1} - q^{m+n}},$$

welcher Ausdruck mit dem für M in §. 144a) identisch ist.

Soll aber die veränderliche Zeitrente R_z keine aufgeschobene sein, so muß in 113) m natürlich gleich Null gesetzt werden, und man erhält dann

$$M_z = \frac{R_z(q^n - Q^n)}{q^{n+1} - Qq^n}, \quad 114)$$

und ist hier $Q = q$, so wird

$$M_z = R_z \frac{0}{0},$$

welcher unbestimmt scheinende Werth, mittelst Differentialrechnung behandelt, den wirklichen Werth

$$M_z = nR_z \cdot \frac{1}{q} \quad 115)$$

hat. Setzt man aber in 113) $Q = q$, so erhält man den unbestimmt scheinenden Werth

$$M_z = R_z \cdot \frac{0}{0}, \text{ d. h.}$$

mit Hilfe der Differentialrechnung den wahren Werth

$$M_z = nR_z \times \frac{1}{q^{m+1}} \qquad 116).$$

Die Gleichung 114) betreffend, kann man auch sagen, daß sie den gegenwärtigen Werth M_z einer veränderlichen n Jahre währenden Rente bestimmt, die am Ende des ersten Jahres $= R_z$, im jeden nächsten Jahre aber Q größer als im nächst vorhergehenden Jahre ist. Denn die nach und nach zu zahlenden Summen bilden hier eine geometrische Progression von n Gliedern, in welcher Reihe das erste Glied $= R_z$ der Quotient Q, das unbestimmte Glied hingegen $R_z . Q^{\nu-1}$ ist und die am Ende des νten Jahres zahlbare Summe bezeichnet. Dieser Summe gegenwärtiger Werth wird also $R_z . Q^{\nu-1} : q^\nu$ sein, und setzt man nun hier statt ν nach und nach alle Zahlen von 1 bis n und addirt die Resultate; so ist dann die gefundene Summe $= M_z$. Nämlich man hat:

$$M_z = \frac{R_z}{q} + \frac{R_z.Q}{q^2} + \frac{R_z.Q^2}{q^3} + \ldots + \frac{R_z.Q^{\nu-1}}{q^\nu} + \ldots + \frac{R_z.Q^{n-1}}{q^n}$$

$$= \frac{R_z}{q}\left\{1 + \left(\frac{Q}{q}\right) + \left(\frac{Q}{q}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{Q}{q}\right)^{\nu-1} + \ldots + \left(\frac{Q}{q}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{R_z}{q}\left\{\frac{\left(\frac{Q}{q}\right)^n - 1}{\left(\frac{Q}{q}\right) - 1}\right\} \text{ oder } M_z = \frac{R_z}{q^n}\left\{\frac{Q^n - q^n}{Q - q}\right\},$$

welcher Ausdruck identisch mit dem für M_z in 114) gegebenen ist. Man findet übrigens leicht noch:

$$\left.\begin{aligned} R_z &= \frac{M_z\,(Q-q)\,q^n}{Q^n - q^n} \\ Q^n - \left(\frac{M_z \cdot q^n}{R_z}\right) Q + \left(\frac{M_z \cdot q^{n+1} - R_z q^n}{R_z}\right) &= 0 \\ q^{n+1} - \left(\frac{R_z + Q . M_z}{M_z}\right) q^n + \left(\frac{R_z . Q^n}{M_z}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} 114^*).$$

§. 148. Um den gegenwärtigen Werth W einer Jahrrente zu bestimmen, welche am Ende des ersten Jahres $= r$ ist, mit jedem folgenden Jahre aber immer um die nämliche Summe d vermehrt, und überhaupt n Jahre hinter einander gezahlt wird (den Zinsfuß, wie immer, gleich q angenommen); bedenke man, daß die nach und nach am Ende eines jeden Jahres gezahlten Summen offenbar eine arithmetische Reihe von n Gliedern bilden müssen, welche Reihe als erstes Glied die Größe r, als Differenz die Größe d hat; ferner, daß der gesuchte gegenwärtige Werth W der ganzen Rente der nämliche sein müsse als die Summe der gegenwärtigen Werthe folgender unveränderlichen Renten:

1) eine n jährige Rente $= r$;

2) eine $(n-1)$ jährige Rente $= d$, welche auf ein Jahr aufgeschoben ist;

3) eine $(n-2)$ jährige Rente $= d$, welche auf zwei Jahre aufgeschoben ist; u. s. w.

Also ist jede Rente $= d$, aber jede folgende ein Jahr länger aufgeschoben, und dauert ein Jahr weniger als die nächst vorhergehende, und dieß ist so weit fortzusetzen, bis man, die erste Rente r mitgerechnet, n unveränderliche Renten hat. Man wird also demnach setzen müssen:

$$W = \frac{(q^n - 1) r}{q^{n+1} - q^n} + \frac{(q^{n-1} - 1) d}{q^{n+1} - q^n} + \frac{(q^{n-2} - 1) d}{q^{n+1} - q^n} + \ldots + \frac{(q^{n-l} - 1) d}{q^{n+1} - q^n} + \ldots\ldots$$

wo $\frac{(q^{n-l} - 1) d}{q^{n+1} - q^n}$ das allgemeine Glied dieser Reihe bezeichnen mag, die nun auch so angesetzt werden kann:

$$W = r . \frac{q\ -1}{(q-1) q} + \frac{d}{(q-1) q^n} \left\{ (q^{n-1} - 1) + (q^{n-2} - 1) + (q^{n-3} - 1) + \ldots + (q^{n-l} - 1) + \ldots\ldots \right\},$$

d. h.

$$W = r . \frac{q^n - 1}{(q-1) q^n} + \frac{d}{(q-1) q^n} \left\{ \frac{q^n - 1}{q - 1} - n \right\}, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{(q-1) q^n} \left\{ r (q^n - 1) + d \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n \right) \right\} \\ &\text{und hieraus folgt:} \\ r &= \frac{W (q-1) q^n - d \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n \right)}{q^n - 1} \\ d &= \frac{(q-1) \{ W (q-1) q^n - r (q^n - 1) \}}{(q^n - 1) - n (q - 1)} \\ q^{n+2} &- \left(\frac{r+2}{W} \right) q^{n+1} + \left(\frac{r-d+1}{W} \right) q^n + \left(\frac{r+nd}{W} \right) q - \left(\frac{r+nd-d}{W} \right) = 0 \end{aligned}\right\} 117.$$

Soll die Summe, welche man jährlich hinzuthut, eben so groß als die Jahrrente selbst sein, so hat man im Ausdruck 117) $d = r$ zu setzen, und es kommen für diesen besondern Fall dann die einfachern Formeln:

$$\left.\begin{aligned} W &= \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{n}{q}\right) \cdot \frac{r}{(q-1)\,q^{n-1}} \\ r &= \frac{W\,(q-1)^2\,q^n}{q\,(q^n - 1) - n\,(q-1)} \\ q^{n+2} - \left(\frac{r+2}{W}\right)q^{n+1} &+ \left(\frac{1}{W}\right)q^n + \frac{r\,(n+1)}{W}\cdot q - \frac{n\,r}{W} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 118).$$

Anmerkung. Bezeichnet man durch β den baaren Werth (oder die Mise) der Jahrrente r auf n Jahre, welche sich stets gleich bleibt, so kann der Werth von **W** etwas kürzer, als es durch die erste der Gleichungen 117) geschieht, ausgedrückt werden, nämlich:

$$W = \frac{1}{q-1}\left(q\beta - \frac{n\,r}{q}\right).$$

II. Lebensrenten.

§. 149. Eine **Lebensrente** ist eine solche Zeitrente, deren Dauer von der Lebensdauer einer oder mehrerer Personen abhängt. Mithin müssen für Lebensrenten die Größe n_r, welche in 103), so wie die Größe, welche in 105) vorkommt, ebenfalls, sobald n_r und n bestimmt werden sollen, von der Lebensdauer einer oder mehrerer Personen abhängen. Es giebt verschiedene Arten von Lebensrenten: a) **Leibrenten**, b) **Verbindungsrenten** und c) **Gesellschaftsrenten** oder **Tontinen**.

a) Die Leibrente (franz. rente viagère, engl. life-rente).

§. 150. Die Leibrente ist eine solche Lebensrente, wo die Anzahl n von Jahren gleich ist der Lebensdauer einer Person, oder wo die Rente so lange ausgezahlt wird, als eine Person (der Rentirer oder Empfänger) lebt. Sie ist also eine jährliche bloß auf Lebenszeit berechnete Rente, welche mit dem Tode des Besitzers derselben erlischt. Uebrigens wird die Leibrente eben so wie die Jahrrente meistentheils durch das Einlegen einer gewissen Kapitalsumme erkauft, oder auch bei einem Verkaufe vom Verkäufer durch das Einstehenlassen der Kaufgelder beim Abkäufer bedungen; dann heißt der Inhaber der Einnahme der **Rentirer** und der Inhaber der erkauften Leibrente der **Käufer**. Im letztern Falle besteht die Leibrente in einer bestimmten, jährlich zu leistenden Abgabe auf Lebenszeit an den Käufer, so daß er, je kürzer wahrscheinlich die Zeit ist, welche der Käufer noch zu leben hat, eine desto größere Leibrente für sein Kapital wird bekommen können. Mithin ist die Zahlung der Leibrente diejenige Form der Rückzahlung eines Kapitals, in welcher sie in einer die gewöhnlichen Zinsen übersteigenden Rente erfolgt, nur daß diese Rente mit dem Tode des Darleihers erlischt.

§. 151. Die Berechnung von Leibrenten ist, theoretisch betrachtet, die einer Zeitrente, welche entweder m oder w Jahre dauert, je nachdem m oder w größer ist, und wo nämlich m und w die mittlere und wahrscheinlichste Lebensdauer eines i jährigen bezeichnen. Allein im Praktischen verfährt man auf diese Weise nicht, indem jede Leibrentenanstalt zur größtmöglichen Sicherheit ihres Bestehens diejenige Sterblichkeitstabelle zur Benutzung zu wählen pflegt, welche hinreichend geprüft worden ist.

§. 152. Eine Leibrente ist eine aufgeschobene, sobald mit dem Eintritt eines bestimmten Alters zum ersten Male gezahlt wird, eine aufhörende hingegen, sobald die Zahlung mit dem Eintritt eines bestimmten Alters aufhört, wie dieß z. B. mit den Renten für Waisen der Fall ist. Ruhet nach Vorausbestimmung oder nach dem Willen des Empfängers eine Leibrente während einer gewissen Anzahl von Jahren, so nennt man eine solche Rente eine aufgesparte Leibrente. Dann wird entweder die aufgesparte Summe auf ein Mal ausgezahlt, oder es werden, sobald die Rente durch Ruhe gewachsen genannt werden soll, die spätern Zahlungen vergrößert. Endlich ist jede einfache, ununterbrochen fortdauernde Leibrente eine unveränderliche.

§. 153. Wir wollen nun annehmen, es kaufen sich a_n Personen, deren jede n Jahre alt ist, dadurch in die Kasse einer Leibrentenanstalt ein, daß jede dieser Personen die Mise L_u zahlt, so wie auch, daß man diese Einnahme dem jetzigen Werthe aller von der Kasse zu leistenden Zahlungen vollkommen gleich setzt. Durch diese beiden Annahmen findet sich dann der jetzige Werth L_u der unveränderlichen Leibrente $\mathfrak{L}_u$ einer n jährigen Person durch die Gleichung

$$L_u = \frac{\mathfrak{L}_u\left[\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_h}{q^{h-n}}\right]}{a_n} \qquad 119),$$

wo h das in der zu gebrauchenden Sterblichkeitstabelle vorkommende höchste noch zu erreichende Alter bezeichnet. Ist L_a der jetzige Werth der m Jahre aufgeschobenen Leibrente eines n jährigen Menschen; so erhält man L_a, wenn man die m ersten Zahlungen gleich Null setzt, also analog der Gleichung 119)

$$L_a = \frac{\mathfrak{L}\left(\frac{a_{n+m+1}}{q^{m+1}} + \frac{a_{n+m+2}}{q^{m+2}} + \frac{a_{n+m+3}}{q^{m+3}} + \ldots + \frac{a_h}{q^{h-1}}\right)}{a_n} \qquad 120),$$

wo L_a die m Jahre aufgeschobene Leibrente bezeichnet.

Sobald alle Zahlungen von der (m+1)sten an aufhören, d. h. gleich Null werden; so ergiebt sich der jetzige Werth L_e einer nach m Jahren sich endigenden, d. h. aufhörenden Leibrente $_e$ einer n jährigen Person mittelst der Formel

$$L_e = \frac{\mathfrak{L}_e\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_{n+m}}{q}\right)}{a_n} \qquad 121).$$

Hierbei ist noch zu erinnern, daß die Summe der Misen für eine m Jahre aufgeschobene und eine nach m Jahren aufhörende Leibrente einer n jährigen Person gleich ist der Mise der Leibrente einer n jährigen Person; also

$$L_u = L_a + L_e \,.$$

§. 154. Wird die Leibrente einer n jährigen Person m Jahre lang aufgespart; so ist die dadurch nach m Jahren zahlbar gewordene Summe S eben so groß als der Werth, den eine nach m Jahren aufhörende Leibrente eines n jährigen Menschen nach m Jahren hat; also:

$$S = L^e \times q^m,$$

d. h. wenn man hier statt L_e seinen Werth aus 121) setzt;

$$S = \frac{\mathfrak{L}_e\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_{n+m}}{q^m}\right) q^m}{a_n}$$

oder

$$S = \frac{\mathfrak{L}_e}{a_n}\left(a_{n+1} \cdot q^{m-1} + a_{n+2} \cdot q^{m-2} + \ldots + a_{n+m-1} \cdot q + a_{n+m}\right) \qquad 122).$$

§. 155. Es bezeichne jetzt $\mathfrak{L}_u$ wie früher die ursprüngliche und $\mathfrak{L}_r$ die durch Ruhe gewachsene Leibrente, L_u und L_a aber nach 119) und 120) die baaren Werthe der unveränderlichen Leibrente $\mathfrak{L}_u$ und $\mathfrak{L}_a$ der m Jahre aufgeschobenen Leibrente. Es wird dann die Proportion statthaben:

$$L_u : L_a = \mathfrak{L}_r : \mathfrak{L}_u,$$

aus welcher man die durch Ruhe gewachsene Leibrente

$$\mathfrak{L}_r = \frac{L_u \times \mathfrak{L}_u}{L_a}$$

findet. Substituirt man hier für L_u und L_a ihre respectiven Werthe aus 119) und 120), so erhält man dann:

$$\mathfrak{L}_r = \frac{\mathfrak{L}_u \times \frac{\mathfrak{L}_u}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots + \frac{a_h}{q^{h-n}}\right)}{\frac{\mathfrak{L}_a}{a}\left(\frac{a_{n+m+1}}{q^{m+1}} + \frac{a_{n+m+2}}{q^{m+2}} + \frac{a_{n+m+3}}{q^{m+3}} + \ldots + \frac{a_h}{q^{h-1}}\right)},$$

oder da, was offenbar verstattet ist, $\mathfrak{L}_a = \mathfrak{L}_u$ gesetzt werden kann, kürzer:

$$\mathfrak{L}_r = \mathfrak{L}_u \left\{ \frac{a_{n+1}\left(\frac{1}{q}\right) + a_{n+2}\left(\frac{1}{q}\right)^2 + a_{n+3}\left(\frac{1}{q}\right)^3 + \ldots + a_h\left(\frac{1}{q}\right)^{h-n}}{a_{n+m+1}\left(\frac{1}{q}\right)^{m+1} + a_{n+m+2}\left(\frac{1}{q}\right)^{m+2} + a_{n+m+3}\left(\frac{1}{q}\right)^{m+3} + \ldots + a_h\left(\frac{1}{q}\right)^{h-1}} \right\} \quad 123).$$

b) Die Verbindungsrente.

§. 156. Die Verbindungsrente ist eine solche Lebensrente, wo die Anzahl n von Jahren gleich ist der wahrscheinlichen Anzahl von Jahren, welche zwei, drei oder mehrere Personen noch mit einander zu leben hoffen können, wo also n mit Hilfe der Sterblichkeitstabelle nach der Formel 105) S. 186 zu bestimmen ist, wodurch sich dann auch die Berechnung der Verbindungsrente in die einer Zeitrente verwandelt. Die einfachsten und am gewöhnlichsten vorkommenden Verbindungsrenten sind diejenigen, welche auf die Dauer des Beisammenlebens zweier Personen, z. B. von Eheleuten (daher auch Eherenten) begründet werden.

c) Die Gesellschaftsrente (Tontine).

§. 157. Die Tontinen (vom Italiener Tonti) sind eine besondere Art von Leibrenten, zu deren Ankauf sich eine ganze Gesellschaft bildet, wobei bedingt wird, daß dieser Gesellschaft die Rente bis zum eintretenden Tode des allerletzten Mitgliedes (dieser Gesellschaft) jährlich unverkürzt gezahlt werde. Es wird mithin der baare Werth der Tontinen gleich sein dem baaren Werthe einer Zeitrente auf die Dauer des am längsten Lebenden dieser Gesellschaft, welche Dauer durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt werden muß. Hierbei ist es ganz natürlich, daß, je mehr Mitglieder sterben, desto größer die Dividende oder der Antheil an der Rente eines jeden der noch lebenden Mitglieder ausfallen muß. Doch nimmt die Gesellschaft gewöhnlich keine gleiche Dividende im gewöhnlichen Sinne, sondern zu einer gerechtern Vertheilung unter sich ein gewisses Theilungsverhältniß an, nach welchem die ältern Mitglieder mehr, die jüngern weniger bei der jährlichen Vertheilung der Rente zu bekommen haben. Bloß die von dieser ganzen Gesellschaft zuletzt nur noch leben gebliebene Person bezieht bis an ihren Tod die jährliche Rente ganz und unverkürzt.

§. 158. Diese Tontinen haben vor andern Renten viel Vorzügliches und sind leicht zu berechnen. Es ist zwar mit ihnen auch ein Hazard verbunden für den, welcher bald stirbt, doch überwiegt die Hoffnung des Gewinnstes den Verlust ungemein.

Es bestehe nämlich eine Gesellschaft aus **M** Mitgliedern, und das Einkaufsgeld (Actie) jedes dieser Mitglieder betrage **E** Thlr., so ist das zusammen geschossene Kapital

$$K = M . E \text{ Thlr.}$$

und **K** wird, zu p Procent ausgeliehen, jährlich $\frac{pK}{100}$ Thlr. Zinsen tragen. Diese $\frac{pK}{100}$ Thaler müssen nun jährlich an die Mitglieder der Gesellschaft, nebst einem Theile des Kapitals **K**, gezahlt werden. Dabei sei festgesetzt worden, die Gesellschaft solle nur n Jahre bestehen, so muß, wenn in n Jahren Kapital und Zinsen abgetragen sein sollen, nach der Formel für **U** in **107)** §. **144.** gesetzt werden:

$$U = \frac{K(q-1)\,q^n}{q^n - 1},$$

oder auch

$$U = \frac{(q-1)\,ME}{1 - \frac{1}{q^n}}, \text{ d. h.}$$

es müssen jährlich nicht $\frac{pK}{100}$, sondern **U** Thlr. an die Mitglieder der Gesellschaft vertheilt werden. Daher wird, wenn nach **1**, **2**, **3**, **4**, ... Jahren m', m'', m''', m'''', ... Mitglieder gestorben, jedes der noch lebenden

$$M - m', \; M - (m' + m''), \; M - (m' + m'' + m'''),$$

$M - (m' + m'' + m''' + m'''')$, ... Mitglieder am Ende des **1.**, **2.**, **3.**, **4.**; ... Jahres resp. $\frac{U}{M-m'}$ Thlr., $\frac{U}{M-(m'+m'')}$ Thlr., $\frac{U}{M-(m'+m''+m''')}$ Thlr., $\frac{U}{M-(m'+m''+m'''+m'''')}$ Thlr., ... bekommen. Und diese Dividenden müssen, da der Zähler stets derselbe bleibt, die Nenner aber nach und nach kleiner werden, offenbar nach und nach größer ausfallen, bis endlich, wenn alle Mitglieder bis auf eines, d. h. also **M — 1** Mitglieder gestorben sind, der letzte Nenner $= M - (M-1)$, d. h. $= 1$ wird, folglich das letzte Mitglied, welches alle übrigen überlebt hat, $\frac{U}{1}$ Thlr., d. h. **U** Thlr. selbst und unverkürzt erhalten wird. Nur das oder die Mitglieder, welche gleich im ersten Jahre stürben, würden

E Thlr. verlieren, welche Summe aber auch der größte Verlust nur sein könnte, den ein Tontinist erleiden würde. Dagegen kann und muß der Gewinn meistens weit größer sein als dieses Maximum des Verlustes.

§. 159. Man sieht aus dem vorhergehenden §., daß die Tontinen wirklich vielen Vortheil und Reiz gewähren, und daß die Bestimmung derselben nicht so viele Rechnung nöthig hat als die der Leibrenten. — Nur würde es sehr ungerecht sein und zu vielen Inconvenienzen führen, wollte man alle M Mitglieder, die von verschiedenem Alter sind, mit einander vermischen; denn dann würden nur die jüngern Personen dabei gewinnen, hingegen die ältern verlieren. Dieser Ungerechtigkeit würde schon in etwas abgeholfen, wenn man die M Mitglieder in 10 oder 20 Klassen abtheilte von 10 oder 5 Jahren. Gesetzt, man hätte 10 Klassen, so daß in der ersten alle diejenigen sich befänden, welche 0—10 Jahr alt sind, in der zweiten, die 10—20 Jahr alt sind, u. s. w., in der letzten oder zehnten Klasse aber alle diejenigen, welche 90—100 Jahre alt sind; so würden z. B. in der zweiten Klasse diejenigen von 10 und 11 Jahren mehr Hoffnung lange zu leben haben als die von 19 und 20 Jahren. Also auch 10 Klassen à 10 Jahre würden die mehrerwähnte Ungerechtigkeit und Ungleichheit noch nicht genug aufheben; daher man noch mehr als 10 Klassen, gewöhnlich 20 Klassen à 5 Jahre, für alle Mitglieder anzunehmen pflegt, wie folgt:

Klasse.	Alter.	Mittleres Alter.	Abtragszeit.
1.	0 — 5	$2\frac{1}{2}$	$92\frac{1}{2}$
2.	5 — 10	$7\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{2}$
3.	10 — 15	$12\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$
4.	15 — 20	$17\frac{1}{2}$	$77\frac{1}{2}$
5.	20 — 25	$22\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{2}$
6.	25 — 30	$27\frac{1}{2}$	$67\frac{1}{2}$
7.	30 — 35	$32\frac{1}{2}$	$62\frac{1}{2}$
8.	35 — 40	$37\frac{1}{2}$	$57\frac{1}{2}$
9.	40 — 45	$42\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{2}$
10.	45 — 50	$47\frac{1}{2}$	$47\frac{1}{2}$
11.	50 — 55	$52\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$
12.	55 — 60	$57\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$
13.	60 — 65	$62\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$
14.	65 — 70	$67\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
15.	70 — 75	$72\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
16.	75 — 80	$77\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
17.	80 — 85	$82\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$
18.	85 — 90	$87\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$
19.	90 — 95	$92\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
20.	95 — 100	$97\frac{1}{2}$	—

und wo das mittlere Alter irgend einer Klasse jedem Mitgliede (bei Bestimmung der Tontine) statt des wirklichen Alters beigelegt wird, so daß also z. B. in der vierten Klasse jedes Mitglied, das 15, 16, 17, 18, 19, 20 Jahre alt ist, durchschnittlich für $17\frac{1}{2}$ Jahre alt angesehen wird.

Die Zahlen der letzten Columne findet man, wenn man das mittlere Alter von 95 Jahren (als die längste Dauer des menschlichen Lebens in der Regel angenommen) abziehet. Diese Abtragszeit nun ist der Zeitraum von Jahren, in welchem Kapital und Zinsen, in Bezug auf die Mitglieder der dieser Abtragszeit respectiven Klasse, wieder abgetragen sein müssen.

§. 160. Freilich würde man am genauesten und gerechtesten verfahren, wenn man für jedes Mitglied dessen Abtragszeit bestimmte, und zwar nicht etwa durch die Subtraction seines Alters von 95 Jahren, sondern vielmehr die für seine Abtragszeit des Mitgliedes noch wahrscheinliche Lebensdauer setzte und für n in der Formel

$$U = \frac{K(q-1)q^n}{q^n - 1} \qquad 124)$$

substituirte, was freilich auch die Rechnung etwas umständlicher und mühsamer machen würde.

Anmerkung. Man hat auch zusammengesetzte Tontinen, die jedoch nicht so beliebt sind, denn der Verkäufer profitirt mit ihnen eben so wenig als mit einzelnen Renten; auch wird die Bequemlichkeit in der Bezahlung nicht größer; sämmtliche Mitglieder bekommen zwar etwas mehr, aber die Hoffnung zum Gewinn wird dafür hinsichtlich der zuletzt übrig bleibenden Mitglieder sehr verringert. — Man s. hierüber: „J. P. Süßmilch, Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts. 4te Ausg. Berlin 1775. Zweiter Theil. Seite 380 ff.

§. 161. Ohne Zweifel haben die einfachen Renten und Tontinen vor allen andern den Vorzug, namentlich die Tontinen. Denn bei letztern gehet man am sichersten, weil die Ordnung der Sterblichkeit hier keinen besondern Nachtheil bei wirklich vorfallenden Ausnahmen erzeugen kann, und weil alle Erfahrungen darin übereinstimmen, daß von 200 Personen keine das 95ste Jahr höchst wahrscheinlich übersteigt. Sind nun in einer Tontinengesellschaft viel mäßige Klassen, so ersetzt die eine den Schaden der andern, wenn ja jemand in dieser das 95ste Jahr überleben sollte. Ferner reizen die Tontinen dadurch mehr zum Beitritt, daß sie jährlich durch das Absterben einiger Mitglieder sich vergrößern. Zwar ist eine Leibrente etwas größer als eine Tontine, was von der verschiedenen Dauer herrührt, doch hat das Wachsthum der Tontine mehr für sich als der constant bleibende

Werth der Leibrente. Auch ist die Summe der jährlichen Zahlung bei der Tontine gewiß, und endlich läßt sich von dem Leben des letzten oder der beiden letzten noch lebenden Glieder einer Klasse in einer Tontinengesellschaft leichter Gewißheit einziehen, als von sehr vielen Mitgliedern bei bloßen Leibrenten, zumal wenn sie sich in auswärtigen Ländern aufhalten.

C) Von den Sparkassen.

§. 162. Es ist nicht schwer einzusehen, daß der Grund der immer mehr sich ausbreitenden Verarmung der niedern Stände, besonders der sogenannten arbeitenden Klassen, vorzüglich darin besteht, daß, während die Kapitalisten ihre Gelder durch die Ausführung mancherlei Spekulationen vermehren, jene stets nichts zurücklegen können und also mittelbar gegen die betriebsamen Kapitalisten zurückkommen müssen.

§. 163. Dieses mit der Zeit wachsende Uebel könnte jedoch desto mehr beseitigt werden, je mehr der ärmern Volksklasse sichere Gelegenheit gegeben würde, mit ihrem ephemeren Verdienste auf eine ähnliche Weise vortheilhaft verfahren zu können, wie es die Kapitalisten hinsichtlich des Anlegens oder Unterbringens ihres Vermögens auf Zinsen zu thun im Stande sind. Man hat nun geglaubt, daß dem in §. 162. erwähnten Uebelstande vorzüglich dadurch vortheilhaft entgegengewirkt werden könne, wenn man Sparkassen errichte, d. h. solche, gewöhnlich von der Regierung, Obrigkeit oder andern vorgesetzten Behörden garantirte Kassen, in die auch der Unbemittelte eine geringe Summe Geldes gegen einen bestimmten zwar niedrigen Zinsfuß einlegen, aber dafür nicht nur sich ein kleines Kapital leicht ansammeln, sondern dieses auch, weil Zinsen von Zinsen gewährt werden, durch Hinzufügung der Zinsen und temporärer Geldbeiträge vermehren könne, wodurch der anfangs Unbemittelte späterhin ebenfalls an dem allgemeinen Bestreben nach Erhöhung des Wohlstandes einen verhältnißmäßigen Antheil zu nehmen im Stande sei.

§. 164. Die Begründung solcher Anstalten ist seit dem Jahre 1786 vor sich und zwar zuerst von Oldenburg ausgegangen, und die meisten der seitdem bestehenden Sparkassen haben die von ihnen gehegten Erwartungen durch ihre größtentheils vortheilhaft ausgefallenen Resultate fast vollkommen bestätigt. Deshalb, und um der Erleichterung willen, hat man auch jetzt 1) für die Kündigung eine sehr kurze Frist (Minimum: 8 Tage) gestattet und 2) das Verfahren angenommen, die in Form von Interessenbüchern ausgegebenen Schuldbekenntnisse, d. h. die Sparkassenbücher unter fortlaufenden Nummern auf die Inhaber dieser Sparkassenbücher zu stellen.

§. 165. Da jede Sparkasse ihre Eigenthümlichkeiten besitzt, so kann man deren Einrichtung und Verwaltung am besten durch die, den von ihr auszugebenden Sparkassenbüchern vorgedruckten, Statuten kennen lernen. Indeß stimmt die ziemlich einfache Einrichtung und Verwaltung der Hauptsache nach bei allen Sparkassen überein, so daß es wohl hier genügen dürfte, als Beispiel die Leipziger vom Rath dieser Stadt garantirte Sparkasse in ihren Hauptpunkten zu erläutern.

§. 166. Die Sparkasse der Stadt Leipzig nimmt Einlagen von 8 Groschen bis zu 50 Thalern Conv.-Geld an; das preuß. Courant wird mit einem Groschen Agio auf den Thaler berechnet. Nur ist es eine Ungerechtigkeit, die der Besitzer eines Sparkassenbuches erleidet, daß er nach §. 3. der Statuten nicht bestimmen kann, in welcher Geldsorte, ob in Conventionsgeld oder preuß. Courant, die Rückzahlung ihm geleistet werden soll, sondern in den Zustand der Kasse und in die Entscheidung des Kassirers sich zu fügen hat. — Was ferner die Verzinsung anbelangt, so werden nach §. 5 der Statuten die einzelnen Einlagen verzinst, sobald dieselben einen ganzen Thaler betragen, oder bis zu einem vollen Thaler angewachsen sind; der Zinsfuß ist hierbei $2\frac{7}{9}$ Procent jährlich oder von einem jeden Thaler Acht Pfennige binnen einem Jahre. Aber damit die Anstalt nicht zu großes Risico zu bestehen habe, geschieht gedachte Verzinsung erst mit Anfang des nächsten Monats nach stattgefundener Einlage oder Erfüllung eines vollen Thalers. Hierbei wird, wegen möglichster Erleichterung des Rechnungswesens, das Jahr in 8 gleiche Zeiträume à 45 Tage eingetheilt angenommen und immer nur ein solcher Zeitraum von 45 Tagen mit einem Pfennige vom Thaler vergütet, wodurch Bruchpfennige vermieden werden; jedoch zahlt die Leipziger Sparkasse für Einlagen, die vor Ablauf der ersten drei Monate nach der Einlegung zurückgefordert werden, keine Zinsen, sondern diese können nur jährlich, vom 15. Januar an, an den Expeditionstagen unter Vorzeigung des erhaltenen Buches, abverlangt werden. Geschieht dieß jedoch nicht, so schlägt die Sparkasse solche am Schlusse des Jahres fällig gewesenen aber unerhoben gebliebenen Zinsen als eine neue Einlage zum Kapital und verzinst das dadurch angewachsene Kapital auch ferner fort.

Nach §. 7. der Statuten kann man das Kapital ganz oder theilweise, jedoch in letzterm Falle nicht in Posten unter 3 Thalern, auf eine 8 Tage vorher geschehene Kündigung, an jedem Expeditionstage unter Vorweisung des Buches zurück empfangen. Wird das Kapital ganz zurückgenommen, so bekommt man außerdem noch die verfallenen Zinsen desselben, wofür die Anstalt die gänzliche Zurücknahme des Buches als Quittung gelten läßt.

§. 167. Die den Statuten der Leipziger Sparkasse beigegebenen zwei Tabellen, die hier ebenfalls Platz finden mögen, sind hauptsächlich deshalb berechnet, weil offenbar nur sehr wenige Besitzer von Sparkassenbüchern im Stande sein werden, diese Angaben selbst zu berechnen, weil diese Berechnungen in die zusammengesetzte Zinsrechnung, also in das Gebiet der höhern Mathematik gehören. Doch sieht man bei einem einzigen Blicke auf beide Tabellen, daß sie nicht sehr scharf berechnet und nicht ausführlich genug entworfen sind. Genauer und schärfer sowohl, als auch uneingeschränkter kann man für jeden Zeitraum von vollen Jahren und für jedes beliebige Kapital das angewachsene Kapital mittelst folgender kleinen Tafel bestimmen. Man braucht nämlich das gegebene Kapital nur mit dem Multiplicator zu multipliciren, welcher in der Tafel neben der gegebenen Anzahl Jahre steht.

Anzahl Jahre.	Multiplicator.
1	1.027778
2	1.056327
3	1.085644
4	1 115827
5	1.146822
6	1.178678
7	1.211419
8	1.245070
9	1.279655
10	1.315201
11	1.351734
12	1.389282
13	1.427873
14	1.467536
15	1.508301
16	1.550198
17	1.593260
18	1.637516
19	1.683003
20	1.729752
21	1.777801
22	1 827185
23	1.877939
24	1.930104
25	1.983718
26	2.038821
27	2.095455
28	2.153662
29	2.213486
30	2.274972

Beispiel 1). Ein Kapital von 10 Thalern giebt nach 3, 12 und 28 Jahren respect. ein angewachsenes Kapital von

10.85644 Thlr.
=10 Thlr. 20 Gr. 6.7 Pf.
13.89282 =
=13 = 21 = 5.1 =
21.53662 =
=21 = 12 = 10.5 =;

also sind in der Tabelle I. resp.

— Thlr. — Gr. 6.7 Pf.
— = 3 = 5.1 =
— = 12 = 2.5 =

zu wenig angesetzt.

Beispiel 2). Ein Kapital von 5 Thlr. 18 Gr. giebt nach 25 Jahren

$5\frac{3}{4} \times 1.983718$ Thlr.
= 1.983718×5.75 =
= 11.406379 Thlr.
= 11 Thlr. 9 Gr. 9 Pf.

Der Gebrauch der folgenden Tafel ist ganz so wie die Anwendung der vorigen, und ist schärfer und ausgedehnter als die Anwendung der Tabelle **II**.

Anzahl Jahre.	Multiplicator.
1	2.027796
2	3.083184
3	4.169772
4	5.285592
5	6.432408
6	7.611084
7	8.822520
8	10.067580
9	11.347236
10	12.662424
11	14.014152
12	15.403428
13	16.831296
14	18.418836
15	19.807128
16	21.357360
17	22.950576
18	24.588108
19	26.271072
20	28.000836
21	29.778660
22	31.605804
23	33.483744
24	35.413848
25	37.397556

Beispiel. Wenn man jährlich 3 Thaler als eine Ersparniß auf Zins von Zinsen giebt, so hat man nach 10 Jahren

12.662424 X 3 Thlr.

= 37.987272 Thlr.
= 37 Thlr. 23 Gr. 8.3 Pf.;

also sind in der Tabelle **II**. 3 Thlr. 3 Gr. 0.2 Pf. zu wenig angesetzt.

Giebt man aber 10 Thaler 20 Jahre hindurch, so wird das angewachsene Kapital endlich

28.000836 X 10 Thlr.

= 280.00836 Thlr.
= 280 Thlr. — Gr. 1.4 Pf.;

also sind in der Tabelle **II**. 10 Thlr. 7 Gr. 6.4 Pf. zu wenig angesetzt.

I. Uebersicht

wie sich die kleinen Kapitalien ohne Zuzahlungen bei der Sparkasse durch die statutenmäßigen Zinsen erhöhen und binnen 28 Jahren mehr als verdoppeln.

Ein Kapital von Thalern	vermehrt sich durch 8 Pfennige vom Thaler jährlicher Zinsen, und Zins von Zinsen in:																	
	3 Jahren			5 Jahren			7 Jahren			9 Jahren			10 Jahren			12 Jahren		
	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰
5	5	10	—	5	16	8	5	23	4	6	6	8	6	10	8	6	18	8
6	6	12	—	6	20	—	7	4	8	7	14	—	7	18	8	8	4	—
7	7	14	—	7	23	4	8	9	4	8	20	—	9	1	4	9	13	4
8	8	16	—	9	2	8	9	14		10	2	8	10	9	4	10	22	8
9	9	18	—	10	6	8	10	20	—	11	10	—	11	17	4	12	8	8
10	10	20	—	11	10	—	12	-	8	12	16	8	13	—	8	13	18	—
11	11	22	—	12	13	4	13	5	4	13	22	8	14	7	4	15	2	—
12	13	—	—	13	17	4	14	11	4	15	6	—	15	16	—	16	12	8
13	14	2	—	14	20	8	15	16	—	16	12	8	16	23	4	17	21	4
14	15	4	—	16	—	—	16	21	4	17	19	4	18	6	8	19	6	8
15	16	6	—	17	3	4	18	2	—	19	2	—	19	14	8	20	16	8
16	17	8	—	18	6	8	19	6	8	20	8	—	20	21	4	22	—	8
17	18	10	—	19	10	—	20	11	4	21	14	8	22	4	8	23	10	—
18	19	12	8	20	14	8	21	18	—	22	22	8	23	13	4	24	20	8
19	20	14	8	21	18	—	22	22	8	24	4	8	24	20	8	26	5	4
20	21	16	8	22	21	4	24	3	4	25	11	4	26	4	—	27	14	8

Ein Kapital von Thalern	vermehrt sich durch 8 Pfennige vom Thaler jährlicher Zinsen, und Zins von Zinsen in:																				
	14 Jahren			16 Jahren			18 Jahren			20 Jahren			22 Jahren			25 Jahren			28 Jahren		
	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰	rß	gl	₰
5	7	2	8	7	12	—	7	21	4	8	7	4	8	18	—	9	10	8	10	4	8
6	8	14	8	9	1	4	9	13	4	10	1	4	10	14	8	11	11	4	12	10	—
7	10	1	4	10	14	8	11	4	—	11	18	8	12	10	—	13	10	8	11	13	4
8	11	12	8	12	3	4	12	19	4	13	12	—	14	5	4	15	10	—	16	16	8
9	13	—	8	13	18	—	14	12	—	15	6	8	16	2	8	17	11	4	18	22	—
10	14	12	—	15	6	8	16	2	8	17	—	—	17	22	8	19	10	—	21	—	8
11	15	22	—	16	18	8	17	16	8	18	16	-	19	16	8	21	8	-	23	2	8
12	17	10	—	18	8	8	19	8	8	20	10	—	21	12	8	23	8	—	25	6	8
13	18	20	8	19	21	4	20	23	4	22	2	8	23	8	—	25	6	8	27	9	4
14	20	8	—	21	10	8	22	15	4	23	21	4	25	4	8	27	7	4	29	14	8
15	21	20	—	23	—	8	24	7	4	25	15	4	27	1	4	29	8	—	31	19	4
16	23	6	—	24	12	8	25	21	4	27	7	4	28	20		31	6	—	33	22	—
17	24	17	4	26	2	—	27	12	8	29	1	4	30	16	—	33	6	—	36	2	—
18	26	5	4	27	16	—	29	4	8	30	20	—	32	12	8	35	6	8	38	6	8
19	27	16	—	29	4	8	30	20	—	32	12	8	34	8	—	37	6	—	40	10	—
20	29	3	4	30	18	—	32	10	8	34	6	—	36	4	—	39	6	—	42	14	—

II. Uebersicht

wie sich nach verschiedenen Zeiträumen die Kapitalien bei der Leipziger Sparkasse vermehren, sobald jährlich eine bestimmte Ersparniß eingezahlt, und Zins von Zinsen hinzu gerechnet wird.

Man erlangt durch Zins von Zinsen laut §. 5 der Statuten bei einer jährlichen Einzahlung von:

Zeitraum.	2 Thalern			3 Thalern			4 Thalern			5 Thalern			6 Thalern		
	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.
in 5 Jahren	10	20	—	16	6	—	21	16	8	27	2	8	32	13	4
= 10 =	23	5	4	34	20	8	46	13	4	58	5	4	69	20	—
= 15 =	37	10	—	56	4	8	75	1	4	93	20	8	112	14	—
= 20 =	53	16	8	80	16	—	107	18	—	134	17	4	161	15	4
= 25 =	72	8	8	108	17	4	145	5	4	181	14	—	217	22	—

Zeitraum.	7 Thalern			8 Thalern			9 Thalern			10 Thalern		
	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.	Thlr.	Gr.	Pf.
in 5 Jahren	37	23	4	43	10	—	48	20	—	54	6	—
= 10 =	81	12	—	93	4	—	104	20	—	116	12	—
= 15 =	131	9	4	150	6	—	169	—	8	187	20	8
= 20 =	188	15	4	215	16	8	242	16	8	269	16	8
= 25 =	254	6	8	290	17	4	327	3	4	363	12	8

§. 168. Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir einige Fälle behandeln, wo eine Rente und ein Sparkassenbuch in Verbindung mit einander vorkommen.

Es legt jemand n Jahre lang zu Anfang eines jeden Jahres eine Summe K in die Sparkasse, die c Procent Zinsen giebt und bei der die Interessen jährlich zu dem Kapitale geschlagen werden, und erspart hierdurch so viel, daß er von dem Ersparten dann p Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres eine Rente P beziehen kann. Es ist nun die Frage, in welcher Beziehung stehen alle diese Größen zu einander?

Die Ersparung, welche in n Jahren bewerkstelligt wird, möge durch S ausgedrückt, und $\frac{100+c}{100} = q$ gesetzt werden; so wird man durch eine kleine Rechnung finden:

$$S = \frac{q(q^n - 1)K}{q - 1}.$$

Soll nun diese Summe S auf p Jahre eine am Ende eines jeden Jahres zu beziehende Rente P sichern, so muß (nach §. 144. zweite der Gleichungen) sein

$$S = \frac{(q^p - 1)P}{(q-1)q^p}.$$

Will man daher wissen, in welcher Beziehung alle obigen Größen zu einander stehen, so darf man nur jetzt die beiden Werthe von S einander gleich setzen; also:

$$\frac{q(q^n-1)K}{q-1} = \frac{(q^p-1)P}{(q-1)q^p}$$

oder kürzer

$$(q^n - 1)K.q^{p+1} = (q^p - 1)P \qquad 125),$$

aus welcher allgemeinen Gleichung folgt:

$$\left.\begin{aligned}
K &= \frac{(q^p - 1)P}{(q^n - 1)q^{p+1}} \\
P &= \frac{(q^n - 1)Kq^{p+1}}{q^p - 1} \\
n &= \frac{\log\left[Kq^{p+1} + (q^p - 1)P\right] - \log\left[K.q^{p+1}\right]}{\log q} \\
q^{p+1} &- \frac{P}{(q^n-1)K}.q^p + \frac{P}{(q^n-1)K} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad 126),$$

aus welcher letzten Gleichung p durch Versuche bestimmt und gefunden werden kann. q zu finden, muß dieß durch Versuche aus der allgemeinen Gleichung 125) geschehen.

§. 169. Will man nach n Jahren p Jahre lang eine, der früher jährlich in die Sparkasse gezahlten Summe gleiche, Rente beziehen; so hat man in 125) P=K zu setzen, und es kommt nun:

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{\log(q^{p+1} + q^p - 1) - (q+1)\log q}{\log q} \\ q^{p+1} - \dfrac{1}{q^n - 1} . q^p + \dfrac{1}{q^n - 1} = 0 \\ \text{woraus } p \text{, und} \\ (q^n - 1)\, q^{p+1} - q^p + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad 127).$$

woraus q durch Versuche zu bestimmen ist.

§. 170. Soll aber die Rente **P** eben so lange bezogen werden, als die Summe **K** jährlich in die Sparkasse gethan worden ist, so muß man p = n setzen, und die Formeln 129) werden dann übergehen in die einfachern:

$$\left.\begin{array}{r} K = \dfrac{P}{q^{n+1}} \\ P = K . q^{n+1} \\ n = \dfrac{\log P - \log K}{\log q} - 1 \\ \log q = \dfrac{\log P - \log K}{n+1} \end{array}\right\} \quad 128).$$

D) Von den Leihbanken oder Leihhäusern.

§. 171. Eine Leihbank oder ein Leihhaus (franz. lombard*) wird diejenige öffentliche Anstalt genannt, bei welcher man auf irgend ein Pfand, und zwar nur auf dieses und ohne alle weitere persönliche Verpflichtung, Geld geliehen erhalten kann, und welche Anstalt, da sie von der Regierung oder Obrigkeit keit confirmirt ist, besonders die unbemitteltern Individuen, welche Geld brauchen, gegen den oft enormen Zinswucher der Privat-Pfänderverleiher zu sichern den Zweck hat. Der Vorschuß, den man auf das Pfand erhält, richtet sich nach dem Werthe dieses

*) Derartige Anstalten scheinen zuerst während des Kampfes der Welfen mit den Gibellinen durch die ausgewanderten lombardischen Kaufleute verbreitet worden zu sein.

letzteren, und beträgt über dieß, um das Institut gegen Gefahr zu sichern, stets etwas weniger als der Werth des Pfandes, und dieser Vorschuß muß nach Ablauf einer bedungenen gewissen Zeit zurück erstattet werden, sobald das Pfand wieder eingelöst werden soll, wobei es sich übrigens von selbst versteht, daß die, ihr Pfand eingelöste, Person außer der Restituirung des Vorschusses auch noch die nach einem bestimmten, aber mäßigen Zinsfuße und die nach der Verpfändungszeit sich richtenden Interessen von diesem als Kapital betrachtet gewesenen Vorschusse an das Leihaus zu leisten hat. Wenn aber das an das Leihhaus abgegebene Pfand nach Ablauf der bedungenen Zeit nicht wieder eingelöst worden ist; so wird es auf Risico verkauft, welches sich hierdurch wegen des verloren gegangenen Kapitals und der eingebüßten Zinsen bezahlt macht.

§. 172. Da, wie oben erwähnt, der Empfänger wegen des Vorschusses für ein hingegebenes Pfand niemals weiter, als so weit der Werth des Pfandes ausreicht, verpflichtet wird; so ist des Empfängers Namen zu wissen gar nicht nöthig, sondern das Leihhaus verabfolgt unter fortlaufender Nummer einen über das empfangene Pfand gestellten Schein, der auf den Inhaber lautet, eine Beschreibung seines Pfandes und die Angabe des darauf geleisteten Vorschusses enthält. Der Besitzer dieses Scheines kann nun entweder dieses Pfand noch vor oder zu dem Termine wieder einlösen, oder im stattgefundenen Unterlassungsfalle das aus dem nachherigen Verkaufe des Pfandes etwa sich ergebene Ueberschußgeld, gegen Rückgabe des Scheines, in Empfang nehmen. Das Letztere findet jedoch nur bei sehr wenigen Leihbanken statt.

§. 173. Man verbindet jetzt mit einem Leihhause gewöhnlich eine Sparkassenanstalt, indem dann die in letztere eingelegten Geldsummen gegen höhere Zinsen, als die bei der Sparkasse gewährt werden, wiederum in der Absicht ausgeliehen werden, die bei dem Leihhause und der Sparkassenanstalt erforderlichen Verwaltungskosten möglichst zu decken. Doch dürfen diese erwähnten höhern Zinsen das gesetzliche Maaß nur bei einem gesetzlich gewährten Privilegium überschreiten; dann wird aber ein solches Privilegium gewöhnlich zugleich auch mit auf das Verbot der Vindication der verpfändeten Sache von Seiten eines Dritten gerichtet, denn ohne diese Maaßregel würde wohl schwerlich der Zweck einer Leihbank erreicht werden können.

Anmerkung. Die Bestimmung dieses Werkes schließt eine weitere und ausführlichere Darstellung des Wesens und der verschiedenen Einrichtungen der Leihbanken hier völlig aus. Wer hierüber sowohl als über Sparkassen vollständige Belehrung zu erhalten wünscht, wird sie finden in:

G. F. Krause (k. pr. Staatsr.), über die Gemeinnützigkeit der Lebensversicherungs=Anstalten. Eine Beleuchtung aller ihrer Verhältnisse, worin zugleich u. s. w. Nebst einfacher Darstellung der Hauptgesichtspunkte, welche bei Errichtung von Sparkassen zu beobachten sind. gr. 4. ⅔ Rthlr. Weimar, im Verlag von B. Fr. Voigt.

E) Von den Pensions= und Wittwenkassen.

§. 174. Pension ist im Allgemeinen der Gehalt, der dem in den Ruhestand versetzten Staatsdienern so wie dem Militär, als auch nach dessen Ableben seinen Hinterlassenen (gewöhnlich der Wittwe) vom Staate ausgesetzt wird. Je mehr in einem Staate die Humanität ihre Herrschaft ausgebreitet hat, desto mehr wird ein solcher Staat darauf bedacht sein, seinen Dienern, sobald sie ihre besten Kräfte ihm geopfert haben, die Aussicht auf ein ruhiges Alter und auf Versorgung ihrer Hinterlassenen zu verschaffen. Man hat daher mancherlei Einnahmen benutzt, um einen Pensionsfond zu errichten, aus welchem die Pensionen verabreicht werden, und zwar nach vorausgesetzten Verhältnissen, nach denen die jährliche Pension nach der Zahl der Dienstzeit (beim Krieger auch nach den empfangenen Wunden) abgemessen wird. — Die Pension unterscheidet sich übrigens vom Wartegelde oder der Stellung auf halbem Sold darin, daß man im letztern Falle den Staatsdiener nur der für seine jetzigen Kräfte zu beschwerlichen Stelle überhebt, mit dem Vorbehalte, ihn baldigst auf einem andern Platze wieder zu beschäftigen. Bei den Geistlichen insbesondere aber sind die Versorgungen Alters wegen meistens local und führen andere Namen, wie man denn auch den Versorgungsfond für die Hinterlassenen den Wittwenfiscus zu nennen pflegt. — Ein Pensionirter ist derjenige, welcher eine Pension bezieht.

§. 175. Wittwenkassen bezeichnen im Allgemeinen solche Fonds, aus welchen die Wittwengelder (Wittwengehalt) bestritten werden; sie sind folglich auch Pensionsfonds; im Besondern aber alle Anstalten, deren Zweck es ist, für den Unterhalt der Wittwen und ihrer unerzogenen Kindern zu sorgen. Als solche sieht man Sterbekassen, Leibrenten, Lebensversicherungs=Anstalten, u. s. w. an, weil sie sehr geeignete Mittel zur Unterstützung und Versorgung der Wittwen abgeben können. Am häufigsten werden Wittwenkassen wegen Versorgung der Staatsdienerwittwen begründet, denen mit dem Ableben des Mannes dann auch die Versorgung ganz abgeschnitten ist, indessen die Hinterlassenen der Privaten wenigstens das Gewerbe des Mannes fortsetzen können. In manchen Staaten wird ein gewisser Theil der Staatseinkünfte als Beitrag zu den Wittwenkassen festgesetzt, und zwar nach Verhältnissen, die freilich oft sehr verschieden sind.

§. 176. Es genüge, hier zwei Hauptarten von Wittwenpensionen anzuführen. Die eine Art besteht in Leibrenten, die andere dagegen in Versicherungen von Kapitalien, welche den Wittwen beim Tode ihrer Männer ausgezahlt werden.

177. Was die Leibrenten betrifft, so ist schon in der Anmerkung I. des §. 135. S. 181. erwähnt worden, daß man den Werth einer Leibrente, die einer Person zufällt, sobald eine andere stirbt, findet, wenn man von dem Werthe einer Leibrente für die Person, der sie zufällt, den Werth einer Leibrente für die Verbindung beider Personen abzieht. Eine so bestimmte Leibrente für die überlebende Person ist eine Art von rückfälligen Leibrenten, die, wenn ihr Werth in jährlichen während des Zusammenlebens beider Personen zahlbaren Prämien zu bestimmen wäre, alsdann gefunden würde, sobald man den Gesammtwerth der Leibrente als Dividendus, die Summe der Einheit und der Gesammtwerth einer Leibrente für die Verbindung der beiden gedachten Personen als Divisor, und nun den Quotient hieraus als den Werth der gesuchten jährlichen Prämie ansähe.

Ist aber der Werth einer Leibrente zu bestimmen, die der Wittwe **W** nach dem Tode ihrer beiden Männer **M** und **M'** zufällt, so wird die Summe der Werthe der Leibrenten für **W** und für die Verbindung **WMM'** aller drei Personen als Minuendus und die Summe der Werthe der Leibrenten für die zwei Verbindungen (Ehen) **WM** und **WM'** als Subtrahendus betrachtet, da alsdann der Rest eben der gesuchte Werth der Leibrente für **W** sein wird.

Das so eben Gesagte läßt sich allgemein auch so ausdrücken. Wenn der baare Werth einer aufgeschobenen (oder nicht aufgeschobenen) anwartschaftlichen Leibrente (Wittwenpension) von jährlich Einem Thaler mit dem Betrag der Jahresrente jeder andern gegebenen aufgeschobenen (oder nicht aufgeschobenen) rückfälligen Leibrente multiplicirt wird; so ist das gefundene Product der baare Werth eben dieser letztern rückfälligen Leibrente, welcher baare Werth dann auch bestimmen läßt, wie groß die anwartschaftliche Leibrente (Wittwenpension) sein muß, sobald jetzt ein bestimmtes Kapital ganz gezahlt wird, oder auch nur zum Theil und den Rest in jährlichen Prämien bis zum Tode des Ehemannes (Versicherten).

Anmerkung. Das in diesem §. 177. Erwähnte findet völlig gleiche Anwendung bei der Erneuerung lebenslänglicher Pachtungen, indem der Werth derjenigen Summe, welche jedesmal bezahlt werden soll, sobald ein neuer Pächter an die Stelle des verstorbenen tritt, gleich dem Unterschiede zwischen dem Werthe einer bis zum Aussterben aller Personen — den Nachfolger mit eingerechnet — zahlbaren Leibrente und dem Werthe einer bis zum Aussterben der Besitzer zu zahlenden Leibrente ist.

§. 178. Was die Versicherung eines Kapitals anbelangt, das der Wittwe beim Tode des Mannes auszuzahlen ist, so ist die Bestimmung des Werthes einer beliebigen versicherten Summe, die beim Tode des Ehemannes an die Wittwe bezahlt werden soll, etwas umständlicher, als die im vorigen §. angeführten Fälle sie erforderten. Diese Bestimmung geschieht nämlich auf folgende Weise. Man bezeichne durch M_{+1} eine Person, die um ein Jahr älter ist als der Ehemann, durch M_{-1} aber eine um ein Jahr jüngere Person, nehme den um die Einheit vermehrten Werth einer Leibrente für die Verbindung $M_{+1}W$ (wo W die Wittwe bedeutet) als Multiplicandus, die Zahl der Lebenden von dem Alter der Person M_{+1} aber als Multiplicator, und dividire das Product durch den Werth eines Kapitals = 1 Thaler nach einem Jahre. Ferner multiplicire man den Werth einer Leibrente für die Verbindung $M_{-1}W$ mit der Zahl der Lebenden von dem Alter der Person M_{-1}, ziehe das Product von dem vorhin gefundenen Quotienten ab und dividire den Rest durch die Zahl der Lebenden von dem Alter der Person des Ehemannes. Hierauf ziehe man diesen neuen Quotienten von dem baaren Werthe eines Thalers, der bei der Trennung der Ehe zahlbar ist, ab, und multiplicire den gefundenen Rest mit der Hälfte der versicherten Summe, so hat man endlich den gesuchten Werth eben dieser versicherten Summe.

Ist auf diese, freilich ziemlich umständliche, Weise der baare Werth der gegebenen Summe, die beim Tode des Ehemannes bezahlt wird, sobald die Wittwe noch lebt, bestimmt worden; so läßt sich dann auch der baare Werth derselben Summe, die beim Tode der Wittwe zahlbar ist, sobald der Wittwer noch lebt, sehr leicht bestimmen, indem er gleich ist dem Unterschied zwischen dem oben gefundenen Werthe und dem baaren Werthe derjenigen Summe, die bei der durch Tod erfolgten Trennung der Ehe auszuzahlen ist.

Schlußbemerkung. Alle Pensions- und Wittwenkassen, die bis jetzt begründet wurden (von der 1761 Laudable society of London an bis zu den neuesten deutschen Wittwenkassen, der Prager, Wiener, u. s. w.), waren oder sind so angelegt, daß es nicht befremden darf, sie entweder bald wieder eingegangen oder doch bald eingehen zu sehen, sobald man ihre Grundlagen und die zum Behuf derselben angestellten Untersuchungen und Rechnungen kennt. Price sagt in seinen observ. on revers. paym. „daß es in England (und dieß gilt völlig auch von den deutschen Anstalten dieser Art) viele auf eine gefährliche Basis constituirte Wittwenkassen gäbe, weil bei ihnen die Werthe der Wittwenrenten oder Wittwenactien nicht nach allein richtigen Principien, sondern meistens nur nach sonderbaren und vagen

Einfällen bestimmt sind. Die Absichten der Gründer solcher Anstalten könnten immerhin lobenswerth sein, allein sie hätten zuverlässigere Untersuchungen anstellen sollen. Je länger daher solche Institute dauern, desto größer ist das Unglück, das sie herbeiführen. Es ist unsinnig, eine derartige Anstalt in der Hoffnung zu begründen, es werde sich ihr Ausgang durch die Erfahrung zu erkennen geben u. s. w." Man sieht hieraus, daß es hohe Zeit ist, die bereits bestehenden Institute, die auf Mortalitätstafeln beruhen, einer genauen Revision und Umgestaltung zu unterwerfen, und dagegen bei neu zu errichtenden Instituten das genau und vollständig zu berücksichtigen, was Littrow in seinem Werke: „Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten. Wien 1832." S. 23 ff. sagt: „Die möglichst vollkommene Sicherheit eines solchen Instituts zu erreichen, muß man gleich bei der ersten Organisation solche Einrichtungen treffen, daß zu den Begründern und Vorstehern des Instituts nur einsichtsvolle Männer von bewährter Redlichkeit gewählt werden können. Es ist aber nicht genug, nur kenntnißreiche Leute überhaupt, etwa große Juristen oder bedeutende Gelehrte, zu nehmen, sondern solche müssen gewählt werden, die von dem Gegenstande, um den es sich hier handelt, die nöthigen Einsichten haben, welche die innere Einrichtung solcher Institute kennen und mit dem Geschäftsgange derselben vertraut sind. Denn nur von solchen Männern können große Vortheile für das Institut erwartet werden; nur sie können das Vertrauen des Publicums erhalten und bewahren, und dadurch die Anstalt selbst ihrem Zwecke immer näher führen. Es würde selbst gut sein, die Vorsteher solcher Gesellschaften, da ihnen so große und so heilige Summen, wie Wittwen- und Waisengelder sind, anvertraut werden, in gewisser Beziehung für die Erfüllung ihrer Pflichten verantwortlich zu machen, wodurch man wenigstens die Zudringlichkeit vieler unberufener Gründer und Projectmacher entfernen könnte, die ohne Kenntniß der Sache und nur auf's Gerадewohl ihre Experimente machen wollen, u. s. w."

Endlich muß man auch nie, wie es doch bisher allgemein der Fall gewesen ist, glauben, eine sehr große Anzahl von Mitgliedern sei allein hinreichend, den Fortgang eines Instituts vortheilhaft zu sichern. Zwar ist eine große Anzahl von Mitgliedern wünschenswerth und nothwendig, da sowohl die Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch die Mortalitätstabellen (s. §. 124. S. 166) sich nur auf eine größere Menge von Menschen mit Sicherheit anwenden lassen, weshalb es auch nachtheilig ist, solche Institute bloß auf einzelne Städte, kleine Provinzen, oder gar auf einen einzelnen Stand zu beschränken. Allein wo die innere Organisation einer Anstalt mit sammt ihren Berechnungen fehlerhaft ist, kann unmöglich ein langes Leben einer solchen Anstalt bloß aus der großen Menge ihrer Mitglieder entstehen.

In der ersten Zeit wird wohl die starke Frequenz der Mitglieder das Deficit der Kasse zu decken scheinen, aber auch bloß scheinen; aber diese angenehme Täuschung mit dem unvermeidlichen Untergange der Gesellschaft schrecklich enden! Man braucht, des Beweises halber, sich nur beispielsweise an mehrere, namentlich in Sachsen (Leipzig), kürzer oder länger bestandene sogenannte Sterbekassen (Leichenbücher) zu erinnern!