Anhang.

Das
für die Wahrscheinlichkeitsrechnung Nothwendigste
aus der
Combinationslehre.

§. 179. Die Combinationslehre untersucht alle möglichen Arten, wie eine Menge von, Elemente genannten, Größen in verschiedene, Complexionen genannte Zusammenstellungen verbunden, d. h. combinirt werden können. Eine solche Complexion wird jedoch nie als eine Zahlgröße angesehen.

Die Elemente, deren man höhere und niedere unterscheidet, werden durch Buchstaben bezeichnet; daher man von lexikalisch geordneten Complexionen spricht.

§. 180. Es giebt drei Arten von Complexionen: Combinationen, Permutationen und Variationen.

Combinationen sind Zusammenstellungen von 1, 2, 3, 4 u. s. w. m gegebenen Elementen. Also giebt es Combinationen der ersten, zweiten, dritten, vierten, u. s. w. Klasse, d. h. Unionen (a), Binionen (ab), Ternionen (abc), Quatrionen (abcd), u. s. w.

Permutationen sind alle möglichen unter einander stattfindende Versetzungen einer Combination von beliebiger Klasse. Man spricht daher von permutirten Binionen (ab, ba), permutirten Ternionen (abc, acb, bac, bca, cab, cba), u. s. w.

Variationen sind alle möglich vorzunehmenden Permutationen aller aus den, durch m Elemente gebildeten, Complexionen möglich entstehenden Combinationen jeder Klasse. So giebt es z. B. Variationen aus drei Elementen (a, b, c; ab, ba, ac, ca, bc, cb; abc, acb, bac, bca, cab, cba), u. s. w.

§. 181. Da es bei der Bildung dieser verschiedenen Complexionen möglich ist, entweder jedes Element bloß ein Mal, oder auch eines, oder einige oder alle mehrere Mal zu setzen; so unterscheidet man hiernach wieder Combinationen, Permutationen und Variationen ohne und mit Wiederholung.

§. 182. Die Combinationslehre nun stellt sich zwei Hauptaufgaben: Die erste ist die, alle diese verschiedenen Complexionen schriftlich anzugeben; die zweite ist die, durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

allgemeine Formeln die Anzahl aller möglichen Complexionen für m gegebene Elemente zu bestimmen.

§. 183. a) Um alle Combinationen jeder Klasse ohne Wiederholung, die m Elemente zulassen, schriftlich angeben zu können, schreibe man erstlich die m Elemente einzeln hin (wodurch die Unionen entstehen) und setze dann jedes Element vor alle diejenigen Combinationen der nächstvorhergehenden Klasse, welche mit einem höhern Elemente beginnen, z. B. a vor b, c,....; b vor c, d, ... Dieß gilt für jede der auf die erste folgenden Klassen.

Beispiel für 6 Elemente.

1ste Klasse:	a,	b,	c,	d,	e, f.
2te Klasse:	ab,	ac,	ad,	ae,	af
		bc	bd	be	bf
			cd	ce	cf
				de	df
					ef
3te Klasse:	abc,	abd,	abe,	abf	
		acd	ace	acf	
		bcd	ade	adf	
			bce	aef	
			bde	bcf	
			cde	bdf	
				bef	
				cdf	
				cef	
				def	
4te Klasse:	abcd,	abce,	abcf		
		abde	abdf		
		acde	abef		
		bcde	acdf		
			acef		
			adef		
			bcdf		
			bcef		
			bdef		
			cdef		
5te Klasse:	abcde,	abcdf			
		abcef			
		abdef			
		aedef			
		bcdef			
6te Klasse:	abcdef				

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Wenn von m Elementen alle Combinationen jeder Klasse mit größter Wiederholung aufgezeichnet werden sollen, so wird wie vorher verfahren und außerdem jedes Element noch vorgesetzt.

Beispiel für 4 Elemente.

1ste Klasse:	a,	b,	c,	d
2te Klasse:	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
			cc	cd
				dd
3te Klasse:	aaa,	aab,	aac,	aad
		abb	abc	abd
		bbb	acc	acd
			bbc	add
			bcc	bbd
			ccc	bcd
				bdd
				ccd
				cdd
				ddd
4te Klasse:	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad
		aabb	aabc	aabd
		abbb	aacc	aacd
		bbbb	abbc	aadd
			abcc	abbd
			accc	abcd
			bbbc	abdd
			bbcc	accd
			bccc	acdd
			cccc	addd
				bbbd
				bbcd
				bbdd
				bccd
				bcdd
				bddd
				cccd
				ccdd
				cddd
				dddd

c) Alle Permutationen ohne Wiederholung der Combination einer beliebigen Klasse schriftlich darstellen zu können, merke man sich Folgendes: 1) Zwei Elemente a, b geben nur zwei Permutationen ab, ba. — 2) Bei 3 Elementen a, b, c (Ternion) wird, um die drei Anfangscomplexionen zu erhalten, jedes Element ein Mal an die erste Stelle gesetzt, also **abc**, **bac** und **cab**; hierauf werden in jedem Falle die beiden übrigen nach 1) permutirt. — 3) Für vier Elemente a, b, c, d (Quaternion) bilde man vier Anfangscomplexionen **abcd**, **bacd**, **cabd**, **dabc**, und permutire dann in jeder derselben die drei letzten Elemente nach 2). — 4) Für fünf Elemente a, b, c, d, e (Quinton) werden fünf Anfangscomplexionen gebildet, dann nach 3), u. s. w.

Man wird also erhalten

Für 1 Element: a

Für 2 Elemente: ab
ba

Für 3 Elemente: a|bc
a|cb
bac
bca
cab
cba

Für 4 Elemente: a|b|cd
a|b|dc
a|c bd
a|c db
ɐ|d bc
a|d cb
bacd
badc
bcad
bcda
bdac
bdca
cabd
cadb
cbad
cbda
cdab
cdba
dabc
dacb
dbac
dbca
dcab
dcba

u. s. w.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Sollte die zu permutirende Combination mehrere gleiche Elemente enthalten, so bleibt zwar obiges Verfahren dasselbe, jedoch wird hierdurch die Anzahl der Permutationen geringer.

d) Wie Permutationen mit Wiederholung der Combination einer beliebigen Klasse aufzuzeichnen sind, wird aus nachstehendem Schema zur Genüge hervorgehen.

2 Elemente	aa			
3 Elemente	aab	aaa		
	aba			
	baa			
4 Elemente	aabc	aabb	aaab	aaaa
	aacb	abab	aaba	
	abac	abba	abaa	
	abca	baab	baaa	
	acab	baba		
	acba	bbaa		
	baac			
	baca			
	bcaa			
	caab			
	caba			
	cbaa			

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5 Elemente	aabcd	bcaad
	aabdc	bcada
	aacbd	bcdaa
	aacdb	bdaac
	aadbc	bdaca
	aadcb	bdcaa
	abacd	caabd
	abadc	caadb
	abcad	cabad
	abcda	cabda
	abdac	cadab
	abdca	cadba
	acabd	cbaad
	acadb	cbada
	acbad	cbdaa
	acbda	cdaab
	acdab	cdaba
	acdba	cdbaa
	adabc	daabc
	adacb	daacb
	adbac	dabac
	adbca	dabca
	adcab	dacab
	adcba	dacba
	baacd	dbaac
	baadc	dbaca
	bacad	dbcaa
	bacda	dcaab
	badac	dcaba
	badca	dcbaa;

u. s. w.

e) Um für m Elemente alle Variationen ohne Wiederholung darstellen zu können, verfahre man wie in a), setze dabei jedoch jedes Element vor oder hinter jede Complexion, in der dieses Element nicht schon befindlich ist. Also:

1ste Klasse: a, b, c, d;

2te Klasse:
ab, ac, ad
ba bc bd
ca cd
cb da
db
dc;

3te Klasse:		
	abc,	abd
	acb	acd
	bac	adb
	bca	adc
	aab	bad
	cba	bcd
		bda
		bdc
		cad
		cda
		cbd
		cdb
		dab
		dba
		dac
		dca
		dcb u. s. w.

f) Aus m Elementen alle Variationen mit größter Wiederholung zu bilden, ist auf gleiche Weise wie in e) zu verfahren, hierbei aber jedes Element vor oder hinter jede Complexion der nächst niedrigern Klasse zu setzen.

Schema für vier Elemente.

a	b	c	d	Erste Klasse.
aa	ab	ca	ad	Zweite Klasse.
ba	bb	bc	bd	
ca	cb	cc	cd	
da	db	dc	dd	
aaa	aab	aac	aad	Dritte Klasse.
aba	abb	abc	abd	
aca	acb	acc	acd	
ada	adb	adc	add	
baa	bab	bac	bad	
bba	bbb	bbc	bbd	
bca	bcb	bcc	bcd	
bda	bdb	bdc	bdd	
caa	cab	cac	cad	
cba	cbb	cbc	cbd	
cca	ccb	ccc	ccd	
cda	cdb	cdc	cdd	
daa	dab	dac	dad	
dba	dbb	dbc	dbd	
dca	dcb	dcc	dcd	
dda	ddb	ddc	ddd	
aaaa	aaab	aaac	aaad	
	u. s. f.		u. s. f.	in's Unendliche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 184. α) Die Formel für die Anzahl Z aller permutirten Combinationen der $n$ten Klasse aus m Elementen ohne Wiederholung ist

$$Z = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots (m-n+1).$$

Sei $m = 4$, $n = 1$, so ist

$$Z = 4;$$

$$n = 2 \text{ giebt } Z = 4.3. = 12$$
$$n = 3 \quad " \quad Z = 4.3.2 = 24.$$

β) Der allgemeine Ausdruck für die Anzahl Z aller Permutationen einer Combination der $n$ten Klasse ist

$$Z = 1.2.3.4.5 \ldots\ldots n.$$

Für $n = 6$ hat man

$$Z = 1.2.3.4.5.6 = 720.$$

γ) Die Formel für die Anzahl Z der nicht permutirten Combinationen der $n$ten Klasse aus m Elementen ohne Wiederholung ist gleich dem Ausdruck des $n$ten Binomialcoefficienten für die $m$te Potenz:

$$Z = \frac{m(m-1)(m-2)m-3) \ldots\ldots (m-n+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \ldots\ldots n}.$$

Darnach ist folgende Tafel gebildet worden:

Elemente.	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te	10te	11te	12te Kl.
1											
2	1										
3	3	1									
4	6	4	1								
5	10	10	5	1							
6	15	20	15	6	1						
7	21	35	36	21	7	1					
8	28	56	70	56	28	8	1				
9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

u. s. w. u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

δ) $Z = m^n$ giebt die Anzahl Z aller permutirten Combinationen der $n$ten Klasse von m Elementen.

Sei $m = 3$, $n = 4$; so ist

$$Z = 3^4 = 81.$$

ε) Die Anzahl Z aller Variationen von m Elementen ohne Wiederholung ist nach α) für jede Klasse einzeln und dann summirend zu bestimmen.

Sei z. B. $m = 4$, so hat man, n nach und nach $= 1, 2, 3$ setzend:

$$Z = 4 + 4.3 + 4.3.2 = 4 + 12 + 24 = 40.$$

Dagegen ist die Anzahl Z aller Variationen von m Elementen mit Wiederholung für die $n$te Klasse

$$Z = \frac{m^{n+1} - m}{m - 1}.$$

ζ) Die Anzahl Z der Permutationen einer Combination der $n$ten Klasse, in der erst p, dann q, dann wieder s andere Elemente einander gleich sind, wird — vorausgesetzt, daß stets $p + q + s \leqq n$ sei — durch die Gleichung

$$Z = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,\ldots\ldots\, (n-1)\, n}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots\ldots q.1.2.3\ldots\ldots s}$$

bestimmt.

Sei $aabbbcccc$ gegeben; so ist

$$p = 2,\ q = 3,\ s = 4;$$

sei $n = 8$. Es kommt nun

$$Z = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.3.1.2.3.4} = 140.$$

η) Für die Anzahl Z aller nicht permutirten Combinationen der $n$ten Klasse für m Elemente mit größter Wiederholung ist die Gleichung

$$Z = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,\ldots\ldots\, (n-1)\, n}$$

anzuwenden.

Sei $m = 10$, $n = 5$, so ist

$$Z = \frac{10.11.12.13.14}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 2002.$$

§. 185. Um Variationen, die sich auf mehrere Elementenreihen p, q, r, s ..., welche selbst rücksichtlich der Anzahl der

Elemente verschieden sein können, beziehen sollen, zu entwickeln; werden sie wie gewöhnlich entworfen. Jedoch werden in die letzte Stelle als die erste Elemente aus der Reihe p, in die zweite Stelle Elemente aus der Reihe q, in die dritte Stelle Elemente aus der Reihe r, in die vierte Stelle Elemente aus der Reihe s, u. s. w. so gesetzt, daß dabei auch die Anzahl der Klassen begrenzt, d. h. der gegebenen Anzahl der Elementenreihen gleich ist. So wird z. B. für die 3 Elementenreihen

a, b, c, d

A, B

α, β, γ

erhalten die Aufstellung der 3 Klassen:

a	b	c	d	1ste Klasse.
Aa Ba	Ab Bb	Ac Bc	Ad Bd	2te Klasse.
αAa αBa βAa βBa γAa γBa	αAb αBb βAb βBb γAb γBb	αAc αBc βAc βBc γAc γBc	αAd αBd βAd βBd γAd γBd.	3te Klasse.

§. 186. Soll dagegen irgend eine Klasse einer Variation außer der Ordnung schriftlich entworfen werden; so werden, wenn Wiederholungen verstattet sind, alle Elemente unter einander und a allen vorgesetzt, dieses vorgesetzte a mit b, dieses vorgesetzte b mit c, dieses vorgesetzte c mit d, u. s. w. bis zum letzten Element vertauscht, dann allen Complexionen wieder a vorgesetzt, übrigens wie vorher verfahren und das ganze Geschäft so lange fortgesetzt, bis die gewünschte Klasse erschienen ist. Soll aber die nte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen entwickelt werden, so werden die Elemente vom nten an unter einander geschrieben, allen das $(n-1)$te Element vorgesetzt, hierauf überall das $(n-1)$te und nte, nte und $(n+1)$te, $(n+1)$te und $(n+2)$te, u. s. w. Element gegen einander vertauscht, dann allen Complexionen das $(n-2)$te Element vorgesetzt und nun ganz auf gleiche Weise fortgefahren. Endlich ist mit dem Vorsetzen des ersten Elements die gewünschte Klasse erschienen. Folgendes Schema der dritten Klasse für vier Elemente wird dieses Verfahren veranschaulichen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a a a
a a b
a a c
a a d
a b a
a b b
a b c
a b d
a c a
a c b
a c c
a c d
a d a
a d b
a d c
a d d
b a a
b a b
b a c
b a d
b b a
b b b
b b c
b b d
b c a
b c b
b c c
b c d
b d a
b d b
b d c
b d d
c a a
c a b
c a c
c a d
c b a
c b b
c b c
c b d
c c a
c c b
c c c
c c d
c d a
c d b
c d c
c d d

d a a
d a b
d a c
d a d
d b a
d b b
d b c
d b d
d c a
d c b
d c c
d c d
d d a
d d b
d d c
d d d

a b c
a b d
a c b
a c d
a d b
a d c
b a c
b a d
b c a
b c d
b d a
b d c
c a b
c a d
c b a
c b d
c d a
c d b
d a b
d a c
d b a
d b c
d c a
d c b

§. 187. Die vorhin aufgestellten Regeln lassen sich auf das Schreiben der Zahlen nach einem gegebenen Zahlensystem anwenden. So erhält man z. B. für das Zahlensystem, dessen Grundzahl 3 ist, folgendes Schema, in welchem die eingeklammerten Zahlen die entsprechenden dekadischen Zahlenausdrücke sind.

0	0	0	0	(0)
0	0	0	1	(1)
0	0	0	2	(2)
0	0	1	0	(3)
0	0	1	1	(4)
0	0	1	2	(5)
0	0	2	0	(6)
0	0	2	1	(7)
0	0	2	2	(8)
0	1	0	0	(9)
0	1	0	1	(10)
0	1	0	2	(11)
0	1	1	0	(12)
—	—	—	—	—
0	1	2	2	(17)
0	2	0	0	(18)
0	2	0	1	(19)
0	2	0	2	(20)
—	—	—	—	—
0	2	2	2	(26)
1	0	0	0	(27)
1	1	1	1	(28)

u. s. w.

§. 188. Es giebt auch Variationen zu bestimmten Summen. Bei ihnen werden entweder Klassen, oder Summen aus Summen abgeleitet. Klassen aus Klassen abzuleiten, schreibe man die gegebene Summe s als Union in die erste Klasse, construire die Binionen durch Zerlegung von s in zwei Theile auf alle mögliche Arten, aus den Binionen entwickele man die Ternionen, indem man das letzte Element auf ähnliche Art in zwei Theile zerlegt, wobei die übrigen ungeändert gelassen werden, und eben so entwickele man die Ternionen u. s. w. Summen aus Summen abzuleiten, findet man aus den Variationen zur Summe s — 1 die Variationen zur Summe s, wenn jenen zuerst 1 oder a, und dann in allen Variationen zur Summe s — 1 das erste Element auch mit dem nächst höhern, indem hierbei die übrigen ungeändert bleiben, vertauscht wird. Für die Summe 6 erhält man so folgende Darstellung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6	111111
15	11112
24	11121
33	1113
42	1211
51	1122
114	1131
123	114
132	12111
141	1212
213	1221
222	123
231	1311
312	132
321	141
411	15
1113	21111
1122	2112
1131	2121
1212	213
1221	2211
1311	222
2112	231
2121	24
2211	3111
3111	312
11112	321
11121	33
11211	411
12111	42
21111	51
111111	6

Hieraus kann auch ohne Weiteres abgenommen werden, wie man bei Buchstabenelementen zu operiren hat.

§. 189. Soll endlich bei Variationen zu bestimmten Summen eine gewisse Klasse, z. B. die mte, der Variationen zur Summe s außer der Ordnung schriftlich notirt werden; so wird zunächst das höchste Element x gesucht, das in der mten Klasse vorkommen kann. Weil nun, wie leicht erhellet, $m - 1$ Elemente $= 1$ sind, $m - 1 + x = s$ sein muß, so ist stets $x = s - m + 1$, welchem Elemente x die 1 vorzusetzen, hierauf stets das vorgesetzte Element mit dem nächst höheren zu vertauschen und endlich das letzte Element mit dem nächstniedrigern zu vertauschen ist, bis dieses $= 1$ wird. Man setze nachher allen erhaltenen Binionen 1 vor, vertausche auch wieder stets das vor-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

gesetzte Element mit dem nächsthöhern, das letzte Element mit dem nächstniedrigern, und setze dieses alles so lange fort, als m Einheiten enthält. Nur muß man sich merken, daß bei diesem Vertauschen der Elemente alle diejenigen Complexionen übergangen werden, deren letztes Element = 1 ist.

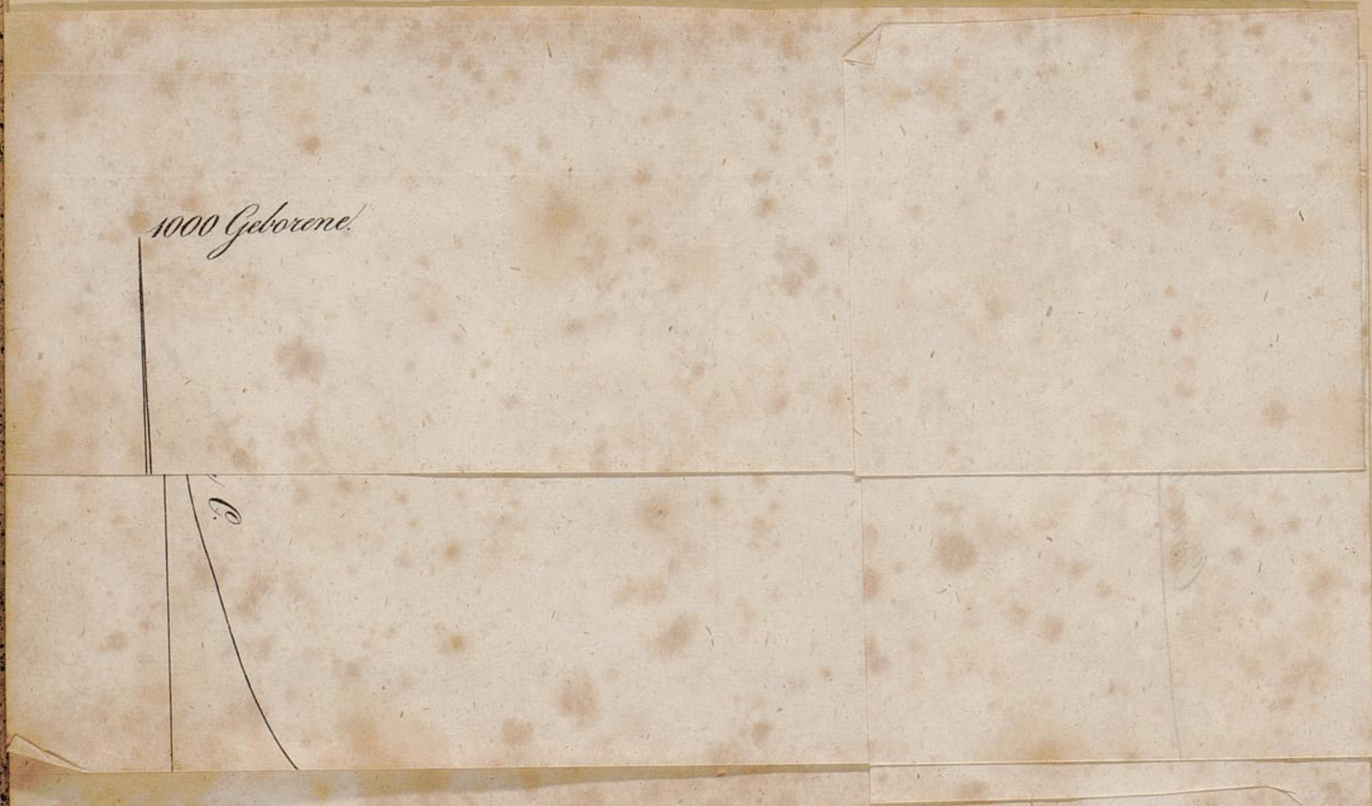
Darnach folgt z. B. für m = 4, s = 7:

1114
1123
1132
1141
1213
1222
1231
1312
1321
1411
2113
2122
2131
2212
2221
2311
3112
3121
3211
4111

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf