Erster Theil.

Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erstes Capitel.

Von den verschiedenen Arten der Wahrscheinlichkeit und deren Bestimmung.

§. 1. Wahrscheinlichkeit ist überhaupt der Grad der Ueberzeugung, welcher dem Meinen entspricht, das eine gewisse Art des Fürwahrhaltens ist. Kann man nämlich die Wahrheit von einem Etwas nicht vollständig einsehen, jedoch mehr Gründe für dieses Etwas als dagegen aufstellen; so sagt man davon: dieses Etwas sei wahrscheinlich oder besitze Wahrscheinlichkeit (Probabilität). Sind mehr Gründe dawider als dafür, so findet Unwahrscheinlichkeit statt oder man sagt: es sei unwahrscheinlich. Sprechen alle möglichen Gründe für ein Etwas und kein einziger dagegen, so ist man über dieses Etwas in Gewißheit oder man sagt: dieses Etwas sei gewiß. Der höchste Grad von Gewißheit heißt anschauliche Gewißheit oder Evidenz, wo dann die Annahme der Wirklichkeit als eine zwingende Nothwendigkeit sich zeigt. Uebrigens unterscheidet man oft unmittelbare und mittelbare Gewißheit; jene steht allein für sich da, diese folgt erst aus andern unmittelbaren Gewißheiten mittelst Beweises. Das Gegentheil von Gewißheit ist Ungewißheit, aus welcher der Zweifel entsteht Sind nämlich für und gegen ein Etwas gleich viele und gleich werthvolle Gründe vorhanden; so sagt man: man sei über dieses Etwas im Zweifel, d. h. im geraden Gegentheile der Ueberzeugung oder Gewißheit. Wenn ein Etwas stattfindet, und die Ursache seines Stattfindens fast oder ganz unbekannt ist, so sagt man: das Stattfinden dieses Etwas sei ein Zufall, oder man sagt von diesem Etwas, es geschehe zufällig. Im gewöhnlichen Leben sagt man auch oft statt Zufall: ohne Absicht und statt zufällig: absichtslos.

§. 2. Wenn man die Wahrscheinlichkeit als einen Theil der Gewißheit betrachtet, und voraussetzt, daß die Gründe der Wahrscheinlichkeit gleichartig oder von gleichem Werthe seien, folglich nur gezählt zu werden brauchen; so heißt die auf diese Weise betrachtete Wahrscheinlichkeit die mathematische Wahrscheinlichkeit.

§. 3. Sieht man die Gewißheit als die Einheit an, setzt man also die Gewißheit $= 1$; so kann dem vorigen §. gemäß die Wahrscheinlichkeit als ein ächter Bruch angesehen und dann einer arithmetischen Behandlung unterworfen werden. Die Bestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit erscheint als etwas Mögliches, und wirklich ist in neuern Zeiten eine Wissenschaft von der Berechnung der mathematischen Wahrscheinlichkeit, d. h. die sogenannte Wahrscheinlichkeitsrechnung (**Ars conjectandi, Calcul des probabilités**) entstanden, mit der wir uns also hier in theoretischer und praktischer Hinsicht beschäftigen wollen.

§. 4. Die mathematische Wahrscheinlichkeit (Probabilität) stellt man als einen Bruch dar, dessen Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle eines Ereignisses, und dessen Zähler die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle, d. h. derjenigen Fälle, welche das Ereigniß wirklich herbeiführen) ausdrückt. Da aber ein Bruch immer ein Verhältniß bezeichnet, so kann man auch sagen: daß die mathematische Wahrscheinlichkeit bestimmt wird durch das Verhältniß der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle dieses Ereignisses. Bezeichnen wir daher jene Anzahl mit n, diese Anzahl mit N, und die mathematische Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses mit w; so haben wir

$$w = \frac{n}{N} \qquad 1)$$

immer, wie sich von selbst versteht, vorausgesetzt, daß alle Fälle gleich möglich sind. Betrachten wir in 1) den Bruch $\frac{n}{N}$, so ist er, und mithin auch w, desto größer, je größer n gegen N ist, d. h. mit Worten: je größer die Anzahl der günstigen Fälle gegen die Anzahl aller Fälle, desto größer dann die Wahrscheinlichkeit, es werde das in Rede stehende Ereigniß wirklich eintreffen.

Anmerkung. Dem, was man im gemeinen Leben Wahrscheinlichkeit nennt, liegt als bestimmtes Maaß die mathematische Wahrscheinlichkeit zum Grunde.

Beispiel. Man habe zwei Würfel **A** und **B**, so sind mit diesen offenbar nur folgende 36 verschiedene Würfe möglich:

A.B.	A.B.	A.B.	A.B.	A.B.	A.B.
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6.

Es ist also hier $N = 36$. Es sei nun das Ereigniß ein Pasch, so ersieht man sogleich aus der Tabelle, daß 1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5; 6, 6 die möglichen Päsche sind, folglich die Anzahl der einem Pasche günstigen Fälle $n = 6$ beträgt. Man hat also für die Wahrscheinlichkeit w, einen Pasch überhaupt zu werfen:

$$w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

d. h. wenn man 6 Mal hinter einander würfelt, ist es wahrscheinlich, wenigstens ein Mal einen Pasch zu werfen.

Sollen ferner die Augen der beiden Würfel **A** und **B** eine bestimmte Zahl zusammen betragen, z. B. 5; so hat man in der obigen Tabelle

$$1 + 4 = 5,\ 2 + 3 = 5,\ 3 + 2 = 5,\ 4 + 1 = 5;$$

folglich $w = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Endlich wird die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Pasch, z. B. 1 und 1, zu werfen, offenbar $\frac{1}{36}$ sein, indem dieser bestimmte Pasch nur ein Mal vorkommen kann.

§. 5. Aus dem vorigen §. können wir sogleich abnehmen, daß es in der ganzen Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst und hauptsächlich darauf ankommt, die Anzahl n (siehe Gleichung I)) aller einem Ereignisse günstigen Fälle und die Anzahl N aller möglichen bei diesem Ereignisse überhaupt eintreten könnenden Fälle genau zu bestimmen. Aber eben diese genaue Bestimmung ist oft sehr schwierig.

§. 6. Wenn sich die mehr erwähnten Größen n und N zugleich aus Gründen mittelst demonstrirter Sätze, d. h. also auf rein wissenschaftlichem Wege, erforschen lassen; so nennt man die daraus gefolgerte Wahrscheinlichkeit eine Wahrscheinlichkeit aus Gründen oder Wahrscheinlichkeit **a priori**. Müssen aber zur Erforschung der arithmetischen Werthe von n und N, wegen Mangel an sichern theoretischen Regeln, aus Beobachtungen gezogene Erfahrungen zu Hilfe genommen werden; so nennt man dann die daraus gefolgerte Wahrscheinlichkeit eine Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen oder Wahrscheinlichkeit **a posteriori**.

§. 7. Wir wollen in der Folge die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit **a priori** die theoretische, und die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit **a posteriori** die praktische Wahrscheinlichkeitsrechnung nennen, von welcher letztern wir behaupten können, daß sie desto sicherer sei, je größer die Anzahl der zum Grunde gelegten Beobachtungen ist, vorausgesetzt, daß alle Beobachtungen von möglichst größter Genauigkeit sind.

§. 8. Die Einheit muß das Symbol der Gewißheit sein. Denn nach dem, was in §. 4. über die Gl. I) gesagt worden ist, erhellet, daß, wenn in dieser Gleichung $n = N$ ist, $w = 1$ wird, man dann sagen kann: es sei Gewißheit vorhanden, weil nämlich das in Rede stehende Ereigniß nothwendig eintreffen muß, da $n = N$, d. h. die Anzahl der günstigen Fälle gleich der Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Ferner geht aus der Gleichung 1) in §. 4 hervor, daß, wenn

$$w = \frac{1}{2} \qquad 2),$$

das Ereigniß zweifelhaft, daß, wenn

$$w > \frac{1}{2} \qquad 3),$$

das Ereigniß wahrscheinlich, und daß, wenn

$$w < \frac{1}{2} \qquad 4),$$

das Ereigniß unwahrscheinlich genannt wird. Oder mit Worten:

1) Wenn die Anzahl der günstigen Fälle halb so groß als die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist; (also in Gl. 1) $n = \frac{1}{2} N$, woraus Gl. 2) entsteht) so ist es zweifelhaft, ob das Ereigniß eintrete oder nicht.

2) Wenn die Anzahl der günstigen Fälle die Anzahl aller gleich möglichen Fälle mehr als zur Hälfte übersteigt (also in Gl. 1) $n > \frac{1}{2} N$, woraus Gl. 3) entsteht) so ist es wahrscheinlicher, das Ereigniß trete ein als es trete nicht ein.

3) Wenn die Anzahl der günstigen Fälle geringer als die halbe Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist (also in Gl. 1) $n < \frac{1}{2} N$, woraus Gl. 4) entsteht); so ist es unwahrscheinlicher, das Ereigniß trete ein als es trete nicht ein, d. h. das Nichtstattfinden dieses Ereignisses ist wahrscheinlicher als dessen Stattfinden.

Beispiel. In einem Behältniß liegen 12 weiße und 12 schwarze Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit w, auf den ersten Griff eine weiße oder schwarze Kugel zu erhalten?

Hier hat man die Anzahl aller möglichen Fälle $N = 24$, die Anzahl aller günstigen Fälle für die weißen sowohl als für die schwarzen Kugeln $n = 12$, also, da $w = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ist, bleibt es zweifelhaft, gerade nur eine weiße oder eine schwarze Kugel auf den ersten Griff zu erhalten

Giebt es dagegen 30 weiße und 10 schwarze Kugeln, und fragt man nach der Probabilität, auf den ersten Griff eine weiße Kugel zu erhalten; so hat man

$$N = 30 + 10 = 40, \; n = 30,$$

also nach 1) $w = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$,

mithin ist es wahrscheinlich (s. 3)), auf den ersten Griff eine weiße Kugel zu bekommen, weil $w = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ ist.

Dagegen ist es, weil für die schwarzen Kugeln $n = 10$ ist, unwahrscheinlich (s. 4)), gleich auf den ersten Griff eine schwarze Kugel zu erhalten, da $w = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$, d. h. $w < \frac{1}{2}$ ist.

§. 9. Da das Unwahrscheinlich und das Wahrscheinlich zwei einander entgegengesetzte Begriffe sind, die sich in Bezug auf die Gewißheit einander ergänzen müssen; so folgt, daß das, was der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses noch fehlt, um zur Gewißheit zu werden, nothwendig die Unwahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses, d. h. die Wahrscheinlichkeit von dessen Nichteintreffen ausdrücken werde.

Mithin kann man nun sagen: die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens ist die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens zur Gewißheit; oder: die Summe der Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens und des Nichteintreffens ist die Gewißheit selbst. Drücken wir demnach durch w_1 die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Unwahrscheinlichkeit des Eintreffens oder die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens, aus; so werden wir die wichtige Bedingungsgleichung haben:

$$w + w_1 = 1 \qquad 5),$$

aus der wir sogleich ableiten

$$w = 1 - w_1 \text{ und } w_1 = 1 - w \qquad 6),$$

d. h. jede der beiden Arten von Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Unterschiede der andern von der Einheit.

Beispiele. Man soll die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten von den Probabilitäten aller Fälle des Beispiels in §. 4. bestimmen. Man hat sogleich nach der Gleichung 6) die Probabilität w_1, keinen Pasch überhaupt zu werfen:

$$w_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

also, weil $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, ist es viel wahrscheinlicher, einen Pasch überhaupt nicht zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln **A** und **B** die Zahl 5 nicht zu erhalten, ist

$$w_1 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

mithin diese Wahrscheinlichkeit viel größer als die, die Zahl 5 wirklich zu werfen.

Die Unwahrscheinlichkeit, einen bestimmten Pasch zu werfen, ist, da $w_1 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$, ebenfalls weit bedeutender, als die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Pasch zu werfen; oder man kann fast als gewiß behaupten, man werde einen bestimmten Pasch nicht werfen, weil unter 36 möglichen Würfen 35 Würfe den bestimmten Pasch wahrscheinlich nicht geben werden.

Eben so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher 30 weiße und 10 rothe Steine liegen, auf den ersten Zug einen weißen Stein zu bekommen, $w_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, d. h. die Unwahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist geringer als dessen Wahrscheinlichkeit; dagegen die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, auf den ersten Griff einen rothen Stein zu erhalten, $w'_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also größer als die Probabilität des Eintreffens.

Anmerkung. Die vorigen Beispiele betrafen die Bestimmung der Probabilität aus Gründen (Probabilität **a priori**). Hier soll nun noch durch die folgenden Beispiele die Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen (Wahrscheinlichkeit **a posteriori**) mehr erläutert werden.

Gesetzt, man habe gefunden, daß von 100 gleich gut gebauten, gleich gut ausgerüsteten und gleich gut dirigirten Schiffen, die in einer und derselben Jahreszeit, wenn auch in verschiedenen Jahren, von Triest nach Cadix segelten, 8 Schiffe verunglückt seien; so wäre dann, da hier $N = 100$ und $n = 8$ ist,

$$w = \frac{8}{100} = \frac{2}{25},$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit (**a posteriori**), daß ein Schiff derselben Art auf derselben Fahrt und zu derselben Jahreszeit verunglücken werde, ist $\frac{2}{25}$, was so viel sagen will als: von 25 Schiffen werden wahrscheinlich 2 verunglücken, oder auch: ein solches Schiff würde, wenn es 25 Mal die Fahrt anstellte, wahrscheinlich nur 2 Mal verunglücken. Es versteht sich übrigens hierbei, daß diese Probabilität **a posteriori** so lange nur als richtig beibehalten werden kann, bis neuere, zahlreichere und bessere Beobachtungen eine andere genauere und folglich sicherere Probabilität für diese Art Ereigniß bestimmen lassen.

Wenn gefunden worden ist, daß in einem bestimmten Orte an einer jährlich wiederkehrenden Krankheit von 1000 Menschen jedes Mal 558 erkrankten und von diesen jedes Mal 210 starben, also 442 gesund blieben; so ist für diesen Ort die Wahrscheinlichkeit, von der jährlich wiederkehrenden Krankheit befallen zu werden,

$$\frac{558}{1000} = \frac{279}{500}, \text{ d. h. weil } \frac{279}{500} > \frac{1}{2} \text{ ist,}$$

ist es nach 3) in §. 8. weit wahrscheinlicher, zu erkranken als gesund zu bleiben. Ferner hat man für die Wahrscheinlichkeit, als ein Kranker zu sterben

$$\frac{210}{558} = \frac{105}{279}, \text{ d. h. weil } \frac{105}{279} < \frac{1}{2} \text{ ist,}$$

ist es nach 4) in §. 8. weit unwahrscheinlicher, als ein Kranker zu sterben, als wieder gesund zu werden, oder: die Hoffnung wieder zu genesen ist größer, als die Furcht zu sterben. Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, gar nicht von der Krankheit befallen zu werden,

$$\frac{442}{1000} = \frac{221}{500}, \text{ d. h. weil } \frac{221}{500} < \tfrac{1}{2} \text{ ist,}$$

ist es unwahrscheinlicher, gar nicht krank zu werden, als zu erkranken, oder mit andern Worten: die Hoffnung gesund zu bleiben ist geringer, als die Furcht, von der Krankheit befallen zu werden. (Ganz dem obigen Resultat entsprechend.)

§. 10. Führen wir in Gl. 5) für w seinen Werth aus Gl. 1) ein, so erhalten wir

$$\frac{n}{N} + w_1 = 1,$$

und, wenn wir w_1 ebenfalls als einen Bruch darstellen wollen, dessen Nenner $= N$ ist, hieraus nach der zweiten der Gleichungen 6)

$$w_1 = 1 - \frac{n}{N},$$

d. h.

$$w_1 = \frac{N - n}{N} \qquad 7).$$

Hier ist offenbar $N - n$ die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen Fälle; denn N ist ja die Anzahl aller gleich möglichen und n die Anzahl der günstigen Fälle, folglich der Unterschied derselben, nämlich $N - n$, die Anzahl der ungünstigen Fälle. Es giebt mithin, in völliger Uebereinstimmung mit §. 9., die Gl. 7) die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Anmerkung. Oft ist die Bestimmung der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses leichter anzustellen, als die Wahrscheinlichkeit desselben unmittelbar zu erforschen. In diesem Falle sagt man: die Auflösung sei indirect leichter als die directe.

§. 11. Bis jetzt haben wir nur die absolute Wahrscheinlichkeit in Betracht gezogen. Man kann aber auch eine relative Probabilität, die von jener verschieden ist, berücksichtigen. Wenn nämlich unter allen N möglichen Fällen n' die Anzahl einer Art und n'' die Anzahl einer andern Art von Fällen bezeichnet, so heißen die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Falles der ersten und der andern Art, in Bezug auf einander, die relativen Wahrscheinlichkeiten. Nennen wir dieselben w' und w''; so ist — stets vorausgesetzt, daß nur die beiden Arten n' und n'' berücksichtigt werden — die relative Probabilität für das Eintreten eines von den n' Fällen

$$w' = \frac{n'}{n' + n''} \qquad 8),$$

und die relative Probabilität für das Eintreten eines von den n'' Fällen

$$w'' = \frac{n''}{n'' + n'} \qquad 9);$$

die absoluten Wahrscheinlichkeiten in Beziehung auf diese beiden Arten sind:

$$w_{,} = \frac{n'}{N} \qquad 10);$$

und

$$w_{,,} = \frac{n''}{N} \qquad 11).$$

Dividirt man jetzt in den Ausdrücken 8) und 9) die Zähler und Nenner Glied für Glied durch N, wodurch bekanntlich die Werthe von w' und w'' ungeändert bleiben; so erhält man:

$$w' = \frac{\frac{n'}{N}}{\frac{n'}{N} + \frac{n''}{N}} \text{ und } w'' = \frac{\frac{n'}{N}}{\frac{n'}{N} + \frac{n''}{N}},$$

und werden hier für $\frac{n'}{N}$ und $\frac{n''}{N}$ ihre Werthe aus 10) und 11) substituirt, dann:

$$w' = \frac{w_{,}}{w_{,} + w_{,,}} \text{ und } w'' = \frac{w_{,,}}{w_{,} + w_{,,}} \qquad 12).$$

Diese sehr wichtigen Formeln geben, in Worten ausgedrückt, folgenden Lehrsatz für die Bestimmung der relativen Wahrscheinlichkeiten: **die relative Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines (oder des andern) Falles ist gleich der absoluten Probabilität dieses (oder des andern) Falles, dividirt durch die Summe der absoluten Probabilitäten beider Fälle.**

Uebrigens folgt aus der Addition beider Gleichungen 8) und 9)

$$w' + w'' = \frac{n'}{n' + n''} + \frac{n''}{n' + n''} = \frac{n' + n''}{n' + n''}$$

oder

$$w' + w'' = 1 \qquad 13),$$

d. h. **die Summe der relativen Wahrscheinlichkeiten beider Arten von Fällen ist gleich der Einheit**, ein der Gl. 5) analoger Satz.

Beispiel I. Zwei Personen spielen mit 2 Würfeln unter der Bedingung, daß unter Nichtbeachtung aller übrigen Fälle die erste Person gewinnen soll, sobald sie mit einem Wurfe 7, und die andere Person, sobald sie mit einem Wurfe 4 wirft. Man hat, da $n' = 6$ und $n'' = 3$ ist, nach 8)

$$w' = \frac{6}{6+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$w'' = \frac{3}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

mithin verhalten sich ihre Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, zu einander wie

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{3} \text{ d. h. wie } 2 : 1.$$

Beispiel 2. In einem Beutel befinden sich 2 weiße, 5 rothe, 4 blaue und 11 grüne Marken. Die absolute Wahrscheinlichkeit nun,

eine weiße Marke zu ziehen ist nach 1) $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$
„ rothe „ „ „ „ 1) $\frac{5}{22} = \frac{5}{22}$
„ blaue „ „ „ „ 1) $\frac{4}{22} = \frac{2}{11}$
„ grüne „ „ „ „ 1) $\frac{11}{22} = \frac{1}{2}$,

Die relative Wahrscheinlichkeit also, daß man eher eine weiße als eine rothe Marke ziehen werde, ist $= \frac{2}{7}$, und eine rothe eher als eine weiße, $= \frac{5}{7}$; eine grüne eher als eine blaue, $= \frac{11}{15}$; eine blaue eher als eine weiße $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; u. s. w.

§. 12. Mehr noch als die relative Wahrscheinlichkeit ist der Unterschied zwischen einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit gehörig zu merken.

Die einfache Wahrscheinlichkeit nämlich ist die, wo nur ein Ereigniß in Betracht kommt, wie wir im §. 4. bereits gesehen haben. Dagegen wird von einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit die Rede sein müssen, sobald mehrere Ereignisse zu einander in Betracht kommen, und es sind dann folgende Aufgaben die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden.

1) Aufgabe. Es sei, wie immer, N die Anzahl aller möglichen Fälle; ferner seien n', n'', n''', n'''', u. s. w. die Mengen der den einzelnen Ereignissen günstigen Fälle, so wie w', w'', w''', w'''', u. s. w. deren einzelne (absolute) Probabilitäten: man soll die (zusammengesetzte) Wahrscheinlichkeit w bestimmen, daß irgend ein (beliebiges) unbestimmtes von mehrern (gegebenen) Ereignissen eintrete.

Auflösung. Man hat nach 1) (§. 4.)

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{n'}{N} \\ w'' &= \frac{n''}{N} \\ w''' &= \frac{n'''}{N} \\ w'''' &= \frac{n''''}{N} \end{aligned}\right\} \quad 14);$$

u. s. w.

ferner, wenn n die Anzahl aller, in Bezug auf die vorgelegte Aufgabe günstigen, Fälle bezeichnet,

$$n = n' + n'' + n''' + n'''' + \qquad 15).$$

Da nun $w = \frac{n}{N}$ sein muß; so kommt, hier für n seinen Werth aus 15) setzend,

$$w = \frac{n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots\ldots}{N} \qquad 15^*)$$

oder

$$w = \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} + \frac{n'''}{N} + \frac{n''''}{N} + \ldots\ldots,$$

also nach Gl. 14)

$$w = w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots\ldots 16);$$

d. h. die (zusammengesetzte) Wahrscheinlichkeit für den Eintritt irgend eines (beliebigen) unbestimmten von mehrern (gegebenen) Ereignissen ist gleich der Summe der (absoluten) Wahrscheinlichkeiten von diesen einzelnen Ereignissen.

So ist z. B. die absolute Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen, $= \frac{6}{36}$, und 8 zu werfen, $= \frac{5}{36}$. Mithin hat man

$$\left.\begin{aligned} n' &= 6 \\ n'' &= 5 \\ N &= 36 \end{aligned}\right\} \text{ nach 14)},$$

also erhält man nach 15*) die Wahrscheinlichkeit, 7 oder 8 zu werfen,

$$w = \frac{6+5}{36} = \frac{11}{36} = 0.305 \ldots\ldots$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, also die Wahrscheinlichkeit w, auf einen Wurf 7, 8 oder 9 zu erhalten, nach 15*)

$$w = \frac{6+5+4}{36} = \frac{15}{36} = 0{,}416 \ldots\ldots$$

2) Aufgabe. Es soll die, in der vorigen Aufgabe der Wahrscheinlichkeit w entgegengesetzte, Wahrscheinlichkeit w_1, d. h. also die Probabilität, daß keines der Ereignisse eintrete, bestimmt werden.

Auflösung. Es muß die Probabilität, es treffe eines oder keines der gegebenen Ereignisse ein, offenbar der Gewißheit selbst gleich sein, mithin

$$w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots\ldots + w_1$$

diese Probabilität bezeichnen. Aber nach 16) ist

$$w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots = w,$$

folglich

$$w + w_1 = 1 \qquad 17);$$

d. h. die Summe der zusammengesetzten Probabilitäten des Eintreffens und des Nichteintreffens ist die Gewißheit selbst. Aus Gl. 17) folgt nun augenblicklich

$$w_{,} = 1 - w \qquad 18).$$

Anmerkung. Man sieht sogleich aus Gl. 17), daß dieselbe eine Erweiterung des in §. 9. durch Gl. 5) ausgedrückten Princips von den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten enthält.

§. 13. 3) Aufgabe. Es sei, wie gewöhnlich, N' die Anzahl aller möglichen Fälle eines ersten Ereignisses und N'' die Anzahl aller möglichen Fälle eines zweiten Ereignisses; man sucht die Wahrscheinlichkeit w, daß beide Ereignisse zusammen eintreffen werden.

Auflösung. Es seien nach 1) in §. 4.

$$w' = \frac{n'}{N'} \text{ und } w'' = \frac{n''}{N''}$$

die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse. Da nun jeder der N' möglichen Fälle mit jedem der N'' möglichen Fälle zusammentreffen kann; so ist N'. N'' offenbar die Anzahl aller möglichen Fälle für das Zusammentreffen beider Ereignisse und n'. n'' die Anzahl aller möglichen günstigen Fälle für das Zusammentreffen beider Ereignisse, sobald nämlich n' die Anzahl der günstigen Fälle des ersten Ereignisses und n'' die Anzahl der günstigen Fälle des andern Ereignisses bezeichnen. Folglich hat man, der Gl. 5) analog,

$$w = \frac{n' . n''}{N' . N''}$$

als die Probabilität, daß beide Ereignisse zusammen eintreten. Aber

$$w = \frac{n' . n''}{N' . N''} = \frac{n'}{N'} \times \frac{n''}{N''},$$

d. h.

$$w = w' . w'' \qquad 19).$$

Wenn nun noch ein drittes Ereigniß hinzu kommt, dessen absolute Wahrscheinlichkeit w''' ist; so kann man das Zusammentreffen der beiden ersten Ereignisse als ein einziges Ereigniß ansehen. Dann ist die Probabilität w, daß alle drei Ereignisse zusammen eintreffen werden, zufolge 19)

$$w = (w' . w'')\, w''' = w' . w'' . w''' \qquad 20).$$

Wenn abermals noch ein viertes Ereigniß hinzukommt, dessen absolute Wahrscheinlichkeit w'''' ist, so kann man das Zusammentreffen der drei ersten Ereignisse als ein einziges Ereigniß ansehen. Dann ist die Probabilität w, daß alle vier Ereignisse zusammen eintreffen werden, zufolge 20)

$$w = (w' . w'' . w''')\, w'''' = w' . w'' . w''' . w'''' \qquad 21).$$

Geht man auf diese Art weiter, so wird man bald finden, daß, bei allgemeiner Auflösung unserer Aufgabe, der allgemeine Satz gilt: Wenn w', w'', w''', w'''', ... die Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Ereignisse bedeuten; so ist die Probabilität w, es werden sämmtliche in Rede stehenden Ereignisse zugleich eintreten:

$$w = w'.w''.w'''.w''''. \ldots, \quad 22),$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller in Rede stehenden Ereignisse ist gleich dem Producte der Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Ereignisse.

§. 14. Werfen, um nur ein Beispiel hierzu anzuführen, 3 Personen **A, B, C**, die beiden ersten mit 2 Würfeln, **C** aber mit einem Würfel, so ist die Probabilität **w**, daß **A** einen Pasch, **B** keinen Pasch und **C** 6 wirft, weil

$$\text{für A } w' = \frac{6}{36}$$

$$\text{für B } w'' = \frac{30}{36}$$

$$\text{für C } w''' = \frac{1}{6}$$

und $w = w'.w''.w'''$ ist, dann

$$w = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0{,}023 \ldots.$$

§. 15. Oft wird nach der Probabilität gefragt, daß eine Begebenheit, dessen Wahrscheinlichkeit, absolut genommen, man kennt, m Mal hinter (oder nach) einander eintrete. Dies betrifft also die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des wiederholten Eintreffens eines günstigen Falles.

Die Wahrscheinlichkeit w, daß ein Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{N}$ ist, m Mal hinter einander sich wirklich zutrage, ist

$$w = \left(\frac{n}{N}\right)^m \qquad 23).$$

Mit einem Würfel ein As zu werfen

$$\left.\begin{array}{l}\text{ein Mal}\\ \text{zwei Mal}\\ \text{drei Mal}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ist die}\\ \text{Wahrschein-}\\ \text{lichkeit}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{6} = 0.16666 \ldots.\\ \frac{1}{36} = 0.02777 \ldots.\\ \frac{1}{216} = 0.00462 \ldots.;\end{array}\right.$$

mit zwei Würfeln zwei Mal hinter einander einen Pasch zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{6}{36}\right)^2 = \frac{1}{36} = 0.02777 \ldots.;$$

die Wahrscheinlichkeit, 4 Mal nach einander ein rothes Blatt aus der deutschen Karte zu ziehen, ist

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} = 0{,}003 \ldots ;$$

eben so ist die Wahrscheinlichkeit, einen König oder irgend ein anderes Blatt aus der französischen Karte 2 Mal nach einander zu ziehen,

$$\left(\frac{1}{13}\right)^2 = \frac{1}{169} = 0{,}005 \ldots .$$

§. 16. Einen in seiner Anwendung sehr fruchtbaren, interessanten Abschnitt der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für wechselseitige Ereignisse.

Bezeichnen w, w' die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens zweier Ereignisse **A**, **B** und also $1-w$, $1-w'$ die Wahrscheinlichkeiten ihres Nichteintreffens; so ist (zufolge der Probabilität des Zusammentreffens mehrerer Fälle §. 13. 22))

$w \cdot w'$ die Wahrscheinl., daß **A** und **B** zugleich eintreffen,
$(1-w)\,w'$ die Wahrscheinl., daß **A** nicht, wohl aber **B** eintreffe,
$w\,(1-w')$ die Wahrscheinl., daß **A** wohl, jedoch nicht **B** eintreffe,
$(1-w)\,(1-w')$ die Wahrscheinl., daß weder **A** noch **B** eintreffe,
$1-(1-w)\,(1-w') = w + w' - ww'$ die Wahrscheinl., daß von **A** und **B** wenigstens eines eintreffe;

d. h. was den letzten Fall betrifft, die Wahrscheinlichkeit W_2, es werde entweder das erste Ereigniß eintreffen, oder, wenn dieß nicht der Fall sein sollte, wenigstens das zweite Ereigniß sich zutragen, ist der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich.

§. 17. Bezeichnen w, w', w'' die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens dreier Ereignisse **A**, **B**, **C**, also $1-w$, $1-w'$, $1-w''$ die Wahrscheinlichkeiten ihres Nichteintreffens; so ist (zufolge der Probabilität des Zusammentreffens mehrerer Fälle §. 13. 22))

$w \cdot w' w''$ die Wahrscheinlichkeit, **A**, **B** und **C** werden zugleich eintreffen,
$(1-w)\,w' \cdot w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß **B** und **C** wohl, nicht aber **A** eintreffe,
$w\,(1-w')\,w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß **A** und **C** wohl, nicht aber **B** eintreffe,
u. s. w.
$(1-w)\,(1-w')\,w''$ die Wahrscheinlichkeit, **A** und **B** werden nicht, dagegen aber **C** eintreffen,
u. s. w.
$(1-w)\,(1-w')\,(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß weder **A**, noch **B**, noch **C** eintreffen werde, und

$1-(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß A, oder wenn dieß nicht geschieht, daß B, oder wenn auch dieß nicht geschieht, daß dann wenigstens C eintreffe;

d. h. was den letzten Fall betrifft, die Wahrscheinlichkeit W_3, es werde von drei Ereignissen sich wenigstens eines zutragen, ist der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten aller drei Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich.

Man wird, wenn man auf diese Art weiter gehet, bald finden, daß für x Ereignisse die Wahrscheinlichkeit W_x, es werde von diesen x Ereignissen sich das 1ste, oder wenn dieß nicht geschieht, das 2te, oder wenn auch dieß nicht geschieht, das 3te, u. s. f. oder wenn selbst das $(x-1)$te Ereigniß nicht eintritt, dann wenigstens das xte eintreffen,

$$W_x = 1-(1-w)(1-w')(1-w'')\ldots.(1-w^{(x-2)})(1-w^{(x-1)})$$

sei.

§. 18. Um das Vorhergehende durch einige Beispiele zu erläutern, wollen wir zuerst nach der Wahrscheinlichkeit fragen, mit 2 Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, wenigstens auf den zweiten Wurf 9, zu treffen. Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, also

$$W_2 = 1-\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right) = 1-\left(1-\frac{1}{9}\right)^2 = 1-\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$= 1-\frac{64}{81} = \frac{17}{81} = 0{,}2099\ldots.$$

und, selbst wenn dieß nicht stattfinden sollte, doch wenigstens beim dritten Male 9 zu werfen,

$$W_3 = 1-\left(1-\frac{1}{9}\right)^3 = 1-\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{197}{729} = 0{,}2702\ldots.$$

Aus diesem Beispiele ersieht man, daß, wenn eine Begebenheit $m-1$ Mal nicht eingetroffen, dann wenigstens das mte Mal eintreffe, die Wahrscheinlichkeit hiervon

$$W_m = 1-(1-w)^m,$$

wo w die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit bedeutet, sein muß, was sich auch aus den obigen allgemeinen Ausdrücken ergiebt, wenn man in ihnen $w'=w''=w'''=\ldots.=w$ setzt.

Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln das erste Mal 7, oder wenn dieß nicht geschieht, das zweite Mal 7, oder sobald auch dieses nicht geschieht, dann wenigstens das dritte Mal 7 zu werfen, ist, da die absolute Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf 7 zu werfen, $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ist,

$$W_3 = 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1-\frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0.421\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus der deutschen Karte auf den ersten Zug eine bestimmte Karte, z. B. einen Ober, oder wenn dieß nicht geschieht, beim abermaligen Ziehen ein z. B. grünes Blatt zu erhalten, ist

$$w_2 = 1-\left(1-\frac{4}{32}\right)\left(1-\frac{8}{32}\right) = 1-\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}\right) = 1-\frac{21}{32} = \frac{11}{32} = 0{,}3437\ldots.$$

§. 19. Die Bestimmung der Probabilitäten für wechselseitige Ereignisse lassen sich z. B. direct auf die wahrscheinliche Dauer der Verbindung von zwei oder mehrern Personen, z. B. Eheleuten, Familien u. s. w. anwenden, was dann auch eine indirecte Anwendung bei der Begründung von Lebensversicherungsanstalten, Wittwenkassen u. s. w. findet.

§. 20. Sind nämlich w, w', w'',*) ..... resp. die Wahrscheinlichkeiten, daß eine a jährige Person **A**, eine b jährige Person **B**, eine c jährige Person **C**, ... noch p Jahre beisammen leben werden; so ist nach dem Vorhergehenden

- $w \cdot w'$ die Probabilität, daß **A** und **B** noch p Jahre beisammen leben werden;
- $1-w \cdot w'$ die Probabilität, daß von den beiden Personen **A** und **B** nach p Jahren eine schon todt ist;
- $w(1-w')$ die Probabilität, daß nach p Jahren **A** noch lebe und **B** schon todt ist;
- $w'(1-w)$ die Probabilität, daß nach p Jahren **A** schon todt ist, dagegen **B** noch lebe;
- $(1-w)(1-w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren Beide, **A** und **B**, schon todt sind;
- $1-(1-w)(1-w')$ die Probabilität, daß nach p Jahren noch nicht beide todt sind, sondern daß wenigstens eine Person, entweder **A** oder **B**, oder vielleicht beide noch leben;
- $ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß **A**, **B**, **C** nach p Jahren noch beisammen leben;
- $ww'(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren **A** und **B** noch beisammen leben, aber **C** schon todt ist;
- $(1-w)(1-w')w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß **A** und **B** nach p Jahren schon gestorben sind und nur **C** noch lebt;
- $1-ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine der drei Personen **A**, **B**, **C** nach p Jahren bereits gestorben ist;
- $1-(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht alle drei Personen todt sind, son-

*) Diese Werthe können aus den bekannten Mortalitätstafeln abgeleitet werden. Man sehe auch §. 119.

dern daß wenigstens eine, vielleicht auch zwei, vielleicht auch gar alle drei noch leben;

$(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß A, B, C nach p Jahren schon sämmtlich todt sind;

u. s. w.

§. 21. Beispiel. Seien $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{4}$ die respectiven Wahrscheinlichkeiten für A, B und C, noch 10 Jahre zu leben; so ist

1) $\frac{3.4.3}{8.5.4}=\frac{9}{40}=0.225$ die Wahrscheinlichkeit, daß A, B und C noch 10 Jahre beisammen leben;

2) $\frac{3.4.1}{8.5.4}=\frac{3}{40}=0.075$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach 10 Jahren A und B noch beisammen leben, C aber schon todt ist;

3) $\frac{5.1.3}{8.5.4}=\frac{3}{32}=0.09375$ die Wahrscheinlichkeit, daß A und B nach 10 Jahren schon gestorben sind und nur C noch lebt;

4) $\frac{31}{30}=0.775$ die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine der 3 Personen A, B, C nach 10 Jahren bereits gestorben ist;

5) $1-\frac{5.1.1}{8.5.4}=\frac{31}{32}=0.96875$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach 10 Jahren noch nicht alle 3 Personen todt sind, sondern daß wenigstens eine, vielleicht auch zwei, vielleicht auch gar alle drei noch leben;

6) $\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}=0.03125$ die Wahrscheinlichkeit, daß A, B und C nach 10 Jahren schon sämmtlich todt sind; u. s. w.

welche Wahrscheinlichkeiten nun ihren Werthen nach so auf einander folgen:

5) 0.96875
4) 0.77500
1) 0.22500
3) 0.09375
2) 0.07500
6) 0.03125;

demnach wird Nr. 5) als der günstigste und Nr. 6) als der ungünstigste Fall, Nr. 1) als der dem Mittel 0.36146 am nächsten kommende Fall anzusehen sein.

§. 22. Würfelt man mehrere Mal mit derselben Anzahl gleicher Würfel, oder zieht man aus einer Urne, die eine gewisse Anzahl verschiedenfarbiger Kugeln enthält, eine bestimmte Anzahl von Kugeln, thut sie jedoch nach jedem Zuge stets wieder in die Urne, um immer dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle jeder Art stattfinden zu lassen, oder zieht man aus einem Spiel Karten etliche Mal eine oder mehrere Karten u. s. w.; so nennt man solche Handlungen wiederholte Versuche, und die Bestimmung der Probabilität bei wiederholten Versuchen bildet einen sehr wichtigen Abschnitt der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 23. Eine der allgemeinsten Aufgaben ist die vorzüglich, die Wahrscheinlichkeit **W** zu bestimmen, daß bei mehrern Ereignissen **P**, **P'**, **P''**, **P'''**, ..., deren Probabilitäten resp. $p, p', p'', p''', \ldots$ sind, in $x+x'+x''+x'''+\ldots$ Versuchen das Ereigniß **P** x Mal

„	„	„	P'	x' „
„	„	„	P''	x'' „
„	„	„	P'''	x''' „
			u. s. w.	

eintreffe. Dieser Fall ist völlig gleichbedeutend mit dem, wo die Probabilität bestimmt werden soll, aus $x+x'+x''+x''+\ldots$ Urnen, welche resp.

p weiße, q schwarze, r rothe, s gelbe, u. s. w.

Kugeln enthalten, x weiße, x' schwarze, x'' rothe, x''' gelbe, u. s. w. Kugeln zu ziehen. Man hat nämlich

$$W = \frac{1.2.3.4\ldots(x+x'+x''+x'''\ldots)}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3,\ldots x''.1.2.3\ldots x'''\ldots} \times p^x p'^{x'} p''^{x''} p'''^{x'''}\ldots \quad 24)$$

wo immer $p+p'+p''+p'''+\ldots = 1$ ist.

§. 24. Für $x+x'$ Urnen, deren jede p weiße und q schwarze Kugeln enthält, die Wahrscheinlichkeit **W** zu bestimmen, daß, wenn aus jeder dieser $x+x'$ Urnen der Reihe nach eine Kugel gezogen wird, x weiße und x' schwarze Kugeln gezogen worden sind, ist der nämliche Fall, als wenn p und p' (nämlich $p+p'=1$) die Probabilitäten zweier einander entgegengesetzten Ereignisse sind, und man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, es werde in $x+x'$ das erste Ereigniß x Mal, das zweite Ereigniß x' Mal eintreffen. Man hat nach 24)

$$W = \frac{1.2.3.4\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'} \times p^x p'^{x'} \quad 25),$$

welche Gleichung gleichbedeutend mit der Gleichung

$$W = \left[\frac{x+x'}{x'}\right] p^{x+x'-x'} p'^{x'} \quad 26)$$

ist, welcher Ausdruck nun aber das $(x'+1)$te Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{x+x'}$ ist. Setzt man jetzt $x+x'=\alpha$, heißt das in Rede stehende erste Ereigniß **A** (dessen Probabilität $\frac{p}{p+q}$) und das ihm entgegengesetzte Ereigniß **B** (dessen Probabilität $\frac{q}{p+q}$); so ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in α Versuchen

$$\left.\begin{array}{llll} A\ \ \alpha\ \text{Mal}, & B\ 0\ \text{Mal eintreffe}, & & \mathfrak{p}^{\alpha} \\ (\alpha-1)\ „, & 1\ „ & -, & \frac{\alpha}{1}\mathfrak{p}^{\alpha-1}\mathfrak{p}' \\ (\alpha-2)\ „, & 2\ „ & -, & \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\mathfrak{p}^{\alpha-2}\mathfrak{p}'^{2} \\ (\alpha-3)\ „, & 3\ „ & -, & \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\mathfrak{p}^{\alpha-3}\mathfrak{p}'^{3} \\ & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.,} & \end{array}\right\} \quad 27)$$

wo immer $\mathfrak{p} = \frac{p}{p+q}$ und $\mathfrak{p}' = \frac{q}{p+q}$ ist.

Beispiele. Wenn man mit 2 Würfeln 5 Mal nach einander wirft; und ist A der Wurf 2, B der Wurf 7, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in 5 Würfen

$$\begin{array}{llll} A\ 5\ \text{Mal}, & B\ 0\ \text{Mal geworfen werde}, & & \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024} = 0.000976... \\ 4\ „, & 1\ „ & -\ -, & 5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{1024} = 0.014648... \\ 3\ „, & 2\ „ & -\ -, & 10\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{1024} = 0.087890... \\ 2\ „, & 3\ „ & -\ -, & 10\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = 0.243671... \\ 1\ „, & 4\ „ & -\ -, & 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024} = 0.395507... \\ 0\ „, & 5\ „ & -\ -, & \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} = 0.334960... \end{array}$$

Aus der deutschen Karte ein rothes Blatt zu ziehen, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, und die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Blatt, z. B. das grüne Daus zu ziehen, $= \frac{1}{32}$; folglich in 3 Versuchen die Wahrscheinlichkeit

ein rothes Blatt 3 Mal, das grüne Daus 0 Mal zu ziehen,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{512}{729} = 0.7023...;$$

ein rothes Blatt 2 Mal, das grüne Daus 1 Mal zu ziehen,

$$3\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{192}{729} = 0.2633...;$$

ein rothes Blatt 1 Mal, das grüne Daus 2 Mal zu ziehen,

$$3\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{24}{729} = 0.0329...;$$

ein rothes Blatt 0 Mal, das grüne Daus 3 Mal zu ziehen,

$$\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729} = 0.0013\ldots$$

§. 25. Soll nun das fragliche Ereigniß in α Versuchen wenigstens $(\alpha-\beta)$ Mal, wo natürlich $\beta \leq \alpha$ sein muß, eintreffen; so kann es α Mal, $(\alpha-1)$ Mal, $(\alpha-2)$ Mal, $(\alpha-3)$ Mal, u. s. w. $(\alpha-\beta+1)$ Mal, $(\alpha-\beta)$ Mal sich wirklich zutragen, und die Wahrscheinlichkeit w_β, daß dieses geschehen wird, ist

$$w_{\beta} = p^{\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{p'}{p}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\left(\frac{p'}{p}\right)^3 + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\ldots\beta}\left(\frac{p'}{p}\right)^{\beta}\right\} \qquad 28),$$

oder auch

$$w_{\alpha-\beta} = p^{\alpha-\beta}\left\{1 + \frac{(\alpha-\beta)}{1}p' + \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2}p'^2 + \frac{(\alpha-\beta+2)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.\ \ 2.\ \ 3}p'^3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\ldots\beta}p'^{\beta}\right\} \qquad 29),$$

oder endlich auch, wenn man $\alpha-\beta=\gamma$ setzt, und sich erinnert, daß $p+p'=1$ ist,

$$\left.\begin{aligned} w_\gamma = p^\gamma \Big\{ 1 &+ \frac{\gamma}{1}(1-p) \\ &+ \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}(1-p)^2 \\ &+ \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{1.2.3}(1-p)^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad 30),$$

wo also w_γ die Probabilität bedeutet, eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit p ist, werde in α Versuchen wenigstens γ Mal eintreten.

Nimmt man im erstern der beiden letzten Beispiele, wo $\alpha=5$ ist, $\gamma=3$; so hat man nach 30), weil für $A=$ Wurf 2, $p=\frac{1}{4}$,

$$w_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3\left\{1 + \frac{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{3.4}{1.2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{64}\left(1 + \frac{9}{4} + \frac{27}{8}\right) = \frac{1}{64} + \frac{9}{256} + \frac{27}{512} = \frac{53}{512} = 0.10351\ldots.$$

oder nach 28), da $p'=\frac{3}{4}$, also $\frac{p'}{p}=3$, und $\beta=\alpha-\gamma=2$ ist

$$w_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left\{1 + \frac{5}{1} . 3 + \frac{5.4}{1.2}\ 3^2\right\}$$

$$= \frac{1}{1024}(1 + 15 + 90) = \frac{106}{1024} = \frac{5}{512} = 0.10351\ldots,$$

welches Resultat identisch und übereinstimmend mit der Summe der ersten drei berechneten Decimalbrüche ist, welche im ersten der beiden letzten Beispiele vorkommen.

§. 26. Wenn eine Urne 2 weiße und 1 schwarze Kugel, eine andere Urne aber 4 weiße und 1 schwarze Kugel enthält; welches ist dann die Wahrscheinlichkeit w, daß man auf den ersten Zug aus einer dieser beiden Urnen eine weiße Kugel ziehen werde?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, die Hand an die erste Urne zu legen, ist $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, dann eine weiße Kugel zu ergreifen, $\frac{2}{3}$, mithin die Probabilität des Zusammentreffens beider Fälle $\frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Eben so hat man im Betreff der zweiten Urne für die Probabilität des Zusammentreffens beider Fälle $\frac{1}{2} . \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Da nun diese beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$ beide für dasselbe günstige Ereigniß stattfinden, so hat man nach 16) §. 12.

$$w = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} = 0.7333\ldots.$$

Dieses Beispiel gehört offenbar zu dem allgemeinen Fall, wo a Urnen, deren jede m weiße und n schwarze Kugeln hat, und a′ Urnen, deren jede m′ weiße und n′ schwarze Kugeln enthält, gegeben sind, indem für diesen allgemeinen Fall, auf den ersten Zug eine weiße Kugel zu ergreifen,

$$\text{die Probabilität } w = \left(\frac{a}{a + a'}\right)\left(\frac{m}{m + n}\right) + \left(\frac{a'}{a + a'}\right)\left(\frac{m'}{m' + n'}\right)$$

ist.

§. 27. Setzt man in 30) $\gamma = 1$, so erhält man

$$w_1 = p\ \{1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots\ldots + (1-p)^{\alpha-1}\}$$

$$\text{oder } w = p\left\{\frac{(1-p)^\alpha - 1}{(1-p) - 1}\right\}, \text{ d. h.}$$

$$w = 1 - (1-p)^\alpha, \text{ woraus } (1-p)^\alpha = 1 - w$$

und hieraus

$$\alpha = \frac{\log(1 - w)}{\log(1 - p)}.$$

Dieses α nun giebt die Anzahl von Versuchen, welche nöthig sind, damit ein Ereigniß, dessen Probabilität p ist, bei gegebener Wahrscheinlichkeit w wenigstens ein Mal eintreffe; diese Anzahl von Versuchen ist also gleich dem Logarithmus der der gegebenen Wahrscheinlichkeit entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit, dividirt durch den Logarithmus der der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Soll z. B. die Anzahl von Versuchen bestimmt werden, bei welcher es eben so wahrscheinlich ist, ein gewisses Ereigniß werde eintreten, als es werde nicht eintreten; so muß man $w = \frac{1}{2} = 0.5$ setzen. Dieß giebt dann, da, wenn man in obiger Formel

$$1 - w = \frac{m'}{n'}, \quad 1 - p = \frac{m}{n}$$

setzt,

$$\alpha = \frac{\log m' - \log n'}{\log m - \log n},$$

d. h.

$$\alpha = \frac{\log n' - \log m'}{\log n - \log m}$$

ist, für $m' = 1$, $n' = 2$

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log n - \log m}.$$

Für 2 Sechsen mit 2 Würfeln zu werfen ist $p = \frac{1}{36}$; also $1 - p = \frac{35}{36}$, $m = 35$, $n = 36$ und

$$\alpha = \frac{0.3010300}{0.0122345} = 24.6,$$

d. h. wirft man nur 24 Mal, so ist es wahrscheinlicher, nicht 2 Sechsen zu werfen; wirft man jedoch 25 Mal, so ist es wahrscheinlicher, 2 Sechsen zu werfen als nicht.

Ein Blatt von bestimmter Farbe aus der französischen Karte zu ziehen, ist die absolute Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, also $p = \frac{1}{4}$, $1 - p = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$, mithin $m = 3$, $n = 4$ und daher

$$\alpha = \frac{0.3010300}{\log 4 - \log 3} = \frac{0.3010300}{0.1249387}$$

oder

$$\alpha = 2.4,$$

d. h. zieht man nur 2 Mal, so ist es wahrscheinlicher, das bewußte Blatt nicht zu ziehen; zieht man jedoch 3 Mal, so ist es wahrscheinlicher, das verlangte Blatt zu ziehen als nicht.

§. 28. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln einen Pasch zu würfeln, ist $\frac{1}{6}$; also kann die Wahrscheinlichkeit, daß bei 6 Versuchen wenigstens ein Mal ein Pasch geworfen wird, aus der Gleichung

$$\log(1 - w) = \alpha \log(1 - p),$$

wo $\alpha = 6$, $p = \frac{1}{6}$ ist, bestimmt werden; d. h. man wird haben:

$$\log(1 - w) = 6 \log \frac{5}{6} = 0.5249122 - 1;$$

also

$$1-w = 0.3348978\ldots,$$

woraus

$$w = 0.66510022\ldots.$$

folgt; bei 10 Versuchen würde man haben

$$\log(1-w) = 10\log\frac{5}{6} = 0.2081870-1;$$

also

$$1-w = 0.161505,$$

woraus

$$w = 0.838495$$

folgt.

Fragt man jedoch nach der Wahrscheinlichkeit, bei 10 Versuchen werde dieser Pasch wenigstens 5 Mal geworfen werden; so ist nach (30)

$$w_5 = \left(\frac{1}{6}\right)^5\left\{1+\frac{5}{1}\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{5.6}{1.2}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5.6.7}{1.2.3}\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}\left(\frac{5}{6}\right)^5\right\} = 0.0153\ldots..$$

Zweites Capitel.

Von der mathematischen Hoffnung (Erwartung), dem physischen und moralischen Werthe einer Summe Geldes, dem erwarteten (gehofften) physischen und moralischen Vermögen, und der moralischen Hoffnung.

§. 29. Es ist klar, daß ein bei irgend Etwas zu erwartender (jedoch ungewisser) Gewinn desto größer sein, d. h. desto mehr Werth haben muß, je größer die Wahrscheinlichkeit ist, diesen Gewinn zu erhalten, und je bedeutender zugleich die zu gewinnende Snmme ist. Eben so ist klar, daß, wenn die Wahrscheinlichkeiten gleich sind, die zu erwartenden Gewinne im geraden Verhältnisse der zu gewinnenden Summen stehen, und daß, wenn die zu gewinnenden Summen gleich sind, die zu erwartenden Gewinne im geraden Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erhalten, stehen. Wenn wir nun für die drei zu gewinnenden Summen s, s', s respective durch w, w', w' die Wahrscheinlichkeiten der durch sie zu erwartenden Gewinne g, g', g'' bezeichnen; so werden wir demnach die zwei Proportionen haben:

$$g:g'' = w:w'$$
$$g'':g' = s:s',$$

aus denen wir dann durch Multiplication eines jeden Paares unter einander stehender Glieder

$$g \cdot g'' : g'' \cdot g' = w \cdot s : w' \cdot s',$$

d. h. die neue Proportion

$$g : g' = w \cdot s : w' \cdot s'$$

erhalten werden. Setzen wir hier für $s' = w = 1$ und $w' = 1$ auch $g' = 1$, so bekommen wir

$$g : 1 = w \cdot s : s$$

und hieraus

$$g = w \cdot s \quad 31);$$

d. h. wenn man (wegen $s' = 1$, $w' = 1$, $g' = 1$) den bei einer Summe $= 1$ mit der Gewißheit, sie zu erhalten, zu erwartenden Gewinn gleich der Einheit gesetzt hat; so ist die Größe g des zu erwartenden Gewinnes gleich dem Producte aus der zu gewinnenden Summe s in die Wahrscheinlichkeit w, diese gewinnende Summe s zu erhalten.

Nun erhellet leicht, warum man in der Gl. 31) die Größe g oder das ihr gleiche Produkt ws die mathematische Hoffnung oder die Erwartung (sors, **lucrum**) in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nennen kann.

Beispiel. Wenn in dem im §. 4. vorgekommenen Beispiele 144 die zu gewinnende Summe ist; so wird die Größe g des zu erwartenden Gewinnes, d. h. die mathematische Hoffnung für den Wurf eines Pasches überhaupt nach 31)

$$\frac{1}{6} \times 144 \text{ oder } 24,$$

und für die Bedingung, daß beide Würfel 5 geben sollen

$$\frac{1}{9} \times 144 \text{ oder } 16,$$

und endlich für den Wurf eines bestimmten Pasches

$$\frac{1}{36} \times 144 \text{ oder } 4$$

betragen; folglich verhalten sich für diese 3 Fälle die mathematischen Hoffnungen wie

$$24 : 16 : 4 = 6 : 4 : 1,$$

d. h. bei gleicher gewinnender Summe wie die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{9} : \frac{1}{36} = \frac{6}{36} : \frac{4}{36} : \frac{1}{36}$$

dieser 3 Fälle selbst. Man kann daher sagen: der zu erwartende Gewinn wird bei dem Wurfe von 5 viermal und bei dem Wurfe eines Pasches überhaupt sechsmal größer als der zu erwartende

Gewinn bei dem Wurfe eines bestimmten Pasches angenommen werden können.

§. 30. Wenn der zu erwartende Gewinn g oder die mathematische Hoffnung durch mehrere Ereignisse bedingt wird; so ist, wenn für diese einzelnen Ereignisse die einzelnen zu gewinnenden Summen durch s, s′, s″, s‴, s⁗, ... und die einzelnen Wahrscheinlichkeiten, dieselben zu erhalten, durch w, w′, w″, w‴, w⁗, ... resp. bezeichnet werden,

$$g = s.w + s'.w' + s''.w'' + s'''.w''' + s''''.w'''' + \ldots\ldots \qquad 32),$$

d. h. die mathematische Hoffnung ist gleich der Summe der Producte aus den einzelnen zu gewinnenden Summen in die resp. Wahrscheinlichkeiten, sie zu erhalten.

Kommen bei dieser Art von Berechnungen auch Verluste mit vor, so werden dieselben als negative Gewinne in die Rechnung eingeführt.

§. 31. Es ist bekannt, daß in der Arithmetik bei den Rechnungen mit benannten Zahlen der Werth einer jeden Summe Geldes nur ihrer absoluten Größe nach in Betracht kommt und kommen kann, wobei also die Person, welche jene Summe Geldes besitzt oder nicht besitzt, niemals berücksichtigt wird. In dieser Beziehung ist demnach stets nur von dem absoluten Werthe des Geldes und jeder Summe desselben die Rede.

Aber es ist klar, daß eine und dieselbe Summe Geldes für 2 Personen **A** und **B**, deren Vermögensumstände verschieden sind, zwar denselben absoluten Werth hat, jedoch für die Person **A**, in Bezug auf ihr Vermögen, nothwendig einen andern Werth als für die Person **B**, in Bezug auf deren Vermögen, besitzen muß.

Diese Behauptung bedarf keines Beweises; denn es wird gewiß von Niemanden bezweifelt werden, daß z. B. ein Gewinn (oder Verlust) einer Person **A**, die 10000 Thaler im Vermögen hat, unbedeutender vorkommen wird, als einer Person **B**, die nur 250 Thaler besitzt, weil der besagte Gewinn (oder Verlust) nicht in gleichem Verhältnisse zu beiderlei Vermögen steht.

§. 32. Man sieht nun leicht ein, daß der Werth einer Summe Geldes in Rücksicht auf das Vermögen einer Person ein relativer Werth, verschieden von dem absoluten Werthe, genannt werden muß. Wirklich ist der Begriff dieses Unterschiedes in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt worden, und man versteht demnach unter dem physischen Werthe einer Summe Geldes deren absoluten oder natürlichen Werth, und unter dem moralischen Werthe den absoluten Werth, verbunden mit dessen Verhältniß zum Vermögen der Person, welche die gedachte Summe Geldes besitzt.

§. 33. Nach den vorher gegangenen Bemerkungen und Erklärungen wird man ferner bald wahrnehmen, daß der moralische Werth einer Summe Geldes von zahlreichen Umständen mannigfaltiger Art abhängen kann, und daß mithin die Beurtheilung des moralischen Werthes sehr oft nicht wenig schwierig sein wird. Aus dieser Ursache lassen sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eigentlich gar keine allgemeinen Regeln zur Bestimmung des moralischen Werthes geben, zumal da schon die Interessen einzelner Personen so unendlich verschieden sein können.

§. 34. Demungeachtet hat man sich bemüht, einen Weg aufzufinden, den man nur sicher zu gehen braucht, um auf ihm in jedem Falle zur Kenntniß des moralischen Werthes zu gelangen. Von den mancherlei Wegen nun, die vorgeschlagen worden sind, ist keiner sicherer und geschwinder zum Ziele führend befunden worden, als der von Laplace, welcher auf eine Hypothese des Daniel Bernoulli gebaut ist, die der Erfahrung am besten zu entsprechen scheint und daher auch am besten gefallen hat, während viele andere Hypothesen über diesen wichtigen Gegenstand längst wieder vergessen sind.

Daniel Bernoulli sagt nämlich: „Der moralische Werth einer unendlich kleinen Summe verhält sich zu ihrem physischen Werthe direct, zu dem Vermögen der dabei interessirten Person aber umgekehrt."

Auf diesen Satz fußend hat Laplace durch eine nicht hierher gehörende Untersuchung den Ausdruck

$$g = k \log . \text{nat.}\, x + \log \text{nat}\, . h \qquad 33)$$

gefunden, in welchem y den moralischen und x den physischen Werth einer Summe Geldes bezeichnet, $\log \text{nat}\, . h$ aber eine willkürliche Constante (k ist ebenfalls eine constante Größe), die durch einen, einem gegebenen Werthe von x entsprechenden, Werth von y erst bestimmt werden muß. Die Gleichung 33) kann als der oben erwähnte Weg angesehen werden, und es erhellet sowohl aus der Gl. 33) in arithmetischer Hinsicht, als auch aus dem obigen Satze Bernoulli's in philosophischer Hinsicht, daß das physische und moralische Vermögen, also x und y, niemals Null oder negativ angenommen werden kann.

Daß bei wirklichen Rechnungen die Gl. 33) nicht unmittelbar angewandt werden, die Constante k hingegen verschwinden könne, werden wir bald sehen.

§. 35. Wenn p das physische Vermögen einer Person **P** bezeichnet *), und **P** erwartet, sein Vermögen p könne mit der

*) Man s. wegen dieses §. Klügel's mathem. Wörterb. Th. 5. Abth. 2. Art.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. S. 906 ff.

Zeit eine der Veränderungen $v, v', v'', v''', v'''', \ldots$ erfahren, und es bezeichnen $w, w', w'', w''', w'''', \ldots$ die Probabilitäten, daß diese Veränderungen, welche übrigens auch verschwinden oder negativ werden können, stattfinden; so kann, wegen 17) in §. 12. immer

$$w + w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots = 1$$

vorausgesetzt, das moralische Vermögen m der Person P (dem Ausdruck 33) gemäß) dann übergehen in

$$\begin{aligned}(e)m &= k \log nat. (p + v) + \log nat. h,\\ &= k \log nat. (p + v') + \log nat. h,\\ &= k \log nat. (p + v'') + \log nat. h,\end{aligned}$$

u. s. w.,

wo (e)m die Bezeichnung des neuen Werthes von m ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das moralische Vermögen

den Werth $k \log nat. (p + v) + \log nat. h$ erhält, ist w,

— — $k \log nat. (p + v') + \log nat. h$ — , — w'

— — $k \log nat. (p + v'') + \log nat. h$ — , — w''

u. s. w.

Das sogenannte erwartete moralische Vermögen (E)m ist dann:

$$\begin{aligned}(E)m = {} & k w \log nat. (p + v)\\ & + k w' \log nat. (p + v')\\ & + k w'' \log nat. (p + v'')\\ & + \ldots\ldots\ldots + \log nat. h,\end{aligned}$$

das sogenannte erwartete physische Vermögen (E)p aber:

$$\begin{aligned}(E)p = {} & (p + v)^{w} \times (p + v')^{w'}\\ & \times (p + v'')^{w''}\\ & \times (p + v''')^{w'''}\\ & \times \ldots\ldots \qquad 34).\end{aligned}$$

Dieses erwartete physische Vermögen ist stets dasjenige, welches dem physischen Vermögen p oder dem erwarteten moralischen Vermögen (E)m entspricht.

Ist endlich (E)p bekannt, so hat man für die sogenannte moralische Hoffnung G die Gleichung

$$G = (E)p - p \qquad 35),$$

d. h. die moralische Hoffnung ist gleich dem Unterschiede zwischen dem anfänglichen und dem erwarteten physischen Vermögen.

Anmerkung. Die moralische Hoffnung nähert sich daher der durch die Gleichung 32) ausgedrückten mathematischen Hoffnung desto mehr, je kleiner die Veränderungen v, v', v'', v''', v'''', ... sind, die das physische Vermögen p der Person P mit der Zeit erfahren kann.

Beispiel. Zwei Spieler haben jeder eine Baarschaft von 100 Thalern, von der jeder die Hälfte zum Spiel als Einsatz giebt. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sei für jeden Spieler dieselbe, und zwar $\frac{1}{2}$. Um nun die moralische Hoffnung für einen jeden der beiden Spieler zu erfahren, wird man nach §. 20. setzen müssen:

$$p = 100,$$
$$v = 50, \text{ also offenbar } v' = -50,$$
$$w = \tfrac{1}{2} \text{ und } w' = \tfrac{1}{2},$$
$$v'' = v''' = v'''' = \ldots\ldots = 0,$$
$$w'' = w''' = w'''' = \ldots\ldots = 0.$$

Nun wird nach Gl. 34) das erwartete physische Vermögen eines jeden Spielers sein:

$$\begin{aligned}(E)\,p = (100 + 50)^{\frac{1}{2}} &\times (100 - 50)^{\frac{1}{2}} \\ &\times (100 +)^{0} \\ &\times (100 + 0)^{0} \\ &\times (100 + 0)^{0} \\ &\times \ldots\ldots\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(E)\,p &= 150^{\frac{1}{2}} \times 50^{\frac{1}{2}} \times 100^{0} \times 100^{0} \times 100^{0} \times \ldots. \\ &= \sqrt{150} \times \sqrt{50} \times 1 \times 1 \times 1 \times \ldots. \\ &= \sqrt{7500} = 86.60254.\end{aligned}$$

Zieht man jetzt, der Gl. 35) gemäß, hiervon das physische Vermögen $p = 100$ Thaler eines Spielers ab; so erhält man endlich für die moralische Hoffnung beider Spieler:

$$G = 86{,}60254 \text{ Thlr.} - 100 \text{ Thlr.}$$

oder:

$$G = -13.39746 \text{ Thaler};$$

das heißt, weil eine negative Zahl gekommen, die moralische Hoffnung geht hier in eine moralische Befürchtung über, indem nämlich jeder der beiden Spieler befürchten muß, 13 Thlr. 9 Gr. $6\frac{1}{2}$ Pf. zu verlieren.

Drittes Capitel.

Von den verschiedenen Wetten.

§. 36. Wenn zwei Personen (oder Parteien) sich dahin vereinigen, daß sie beide eine gewisse Summe Geldes zu dem Zwecke bestimmen, daß diese Summe von der einen Person, welche behauptete, eine bestimmt mögliche Begebenheit werde eintreten, die nun aber nicht eingetreten ist, an die andere Person gezahlt wird, welche behauptete, eine andere bestimmt mögliche Begebenheit werde eintreten, die nun auch eingetreten ist; so heißt diese Vereinigung von zwei solchen Personen (oder Parteien) eine **Wette im Allgemeinen**, jene als Gewinnst bestimmte Summe Geldes (oder auch etwas derselben Aequivalentes) die **Mise** und die beiden Personen (oder Parteien) selbst die **Wettenden**.

§. 37. Am häufigsten wird eine Wette so veranstaltet, daß hinsichtlich einer und derselben Begebenheit die eine Partei das Geschehen derselben, die andere aber das Nichtgeschehen behauptet; eine solche Wette ist die **gemeine** oder eine **Wette im engern Sinne**.

§. 38. Bei einer Wette im Allgemeinen müssen sich die beiden Misen zu einander verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten derjenigen beiden Ereignisse, für welche die Misen bestimmt sind. Nur wenn dieses der Fall ist, kann die Wette als eine vernünftige und rechtmäßige angesehen werden. Es seien nun **A** und **B** die Wettenden, **A** stelle die Mise m, **B** die Mise m'; **A** behaupte, es werde das Ereigniß **E**, **B** aber, das Ereigniß **E'** eintreten, und es sei w die Wahrscheinlichkeit für **E**, w' die für **E'**. Es muß dann, dem Obigen zufolge, die Proportion

$$m : m' = w : w'$$

stattfinden, woraus sich ergiebt:

$$m w' = m' w \qquad 36)$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{m' w}{w'} \\ m' &= \frac{m w'}{w} \\ w &= \frac{m w'}{m'} \\ w' &= \frac{m' w}{m} \end{aligned}\right\} \qquad 37).$$

Weil nun **A** offenbar die Wahrscheinlichkeit w hat, von **B** dessen Mise m' zu gewinnen, **B** aber die Wahrscheinlichkeit w' hat, von **A** dessen Mise m zu gewinnen; so kann man, da jede der beiden Größen in 36) völlig mit dem Ausdruck 31) übereinstimmt, auch sagen: **Bei einer vernünftigen und rechtmäßigen Wette im Allgemeinen müssen die mathematischen Hoffnungen der beiden Wettenden, zu gewinnen, stets einander gleich sein.**

Beispiel. Bei einer allgemeinen Wette habe **A** die Wahrscheinlichkeit $w = \frac{1}{4}$ für sein Ereigniß **E**, **B** aber die Wahrscheinlichkeit $w' = \frac{1}{7}$ für sein Ereigniß **E'**, und **A** setze die Mise $m = 10$; welche Mise m' kann **B** sicher wagen?

Aus 37) folgt sogleich

$$m' = \frac{10 \times \frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} = \frac{10 \times 4}{7 \times 1} = \frac{40}{7} = 5\tfrac{5}{7},$$

mithin kleiner als die Mise des **A**, wie es auch sein muß, da **B** keine so große Wahrscheinlichkeit für sein Ereigniß als **A** für das seinige hat.

Da bei einer gewöhnlichen Wette (s. §. 37.) nur eine und dieselbe Begebenheit ihr Gegenstand in der Art ist, daß deren Eintritt von der einen Partei, der Nichteintritt dagegen von der andern Partei behauptet wird; so muß, wenn w die Wahrscheinlichkeit des Eintritts und w' die Wahrscheinlichkeit des Nichteintritts bezeichnet, nach §. 9. offenbar w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von w sein, d. h. nach 5)

$$w + w' = 1,$$

folglich

$$w' = 1 - w$$

Substituiren wir diesen Werth von w' in die Gleichung 36), so erhalten wir

$$m(1 - w) = m'w \qquad 38),$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{m'w}{1-w} \\ m' &= \frac{m(1-w)}{w} \\ w &= \frac{m}{m+m'} \end{aligned}\right\} \qquad 39).$$

Aus Gl. 30) folgt übrigens

$$m : m' = w : 1 - w.$$

Wenn endlich **M** die Anzahl der der ersten Partei günstigen Fälle, **M'** die Anzahl der der zweiten Partei günstigen Fälle bezeichnet; so hat man nach 8) und 9)

$$w = \frac{M}{M+M'},\ w' = 1 - w = \frac{M'}{M+M'},$$

und wenn diese Werthe von w und 1—w in die letzte Proportion gesetzt werden

$$m : m' = \frac{M}{M + M'} : \frac{M'}{M + M'}$$

oder

$$m : m' = M : M' \qquad 40),$$

d. h. bei einer gemeinen Wette müssen die beiden Misen sich zu einander wie die Anzahl der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle zu der Anzahl der dem Nichteintreffen dieses Ereignisses günstigen Fälle verhalten.

Beispiel. A wettet (s. erstes Beispiel im §. 9), auf den ersten Wurf einen Pasch zu erhalten, und setzt 1 Thaler ein; B wettet dagegen. Wie viel kann nun B für seine Wette sicher einsetzen?

$$1 \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.} = \frac{1}{6} : \frac{5}{6}, \text{ also } x = 5 \text{ Thlr.},$$

d. h. B kann 5 Thlr. für seine Wette sicher einsetzen.

§. 39. Wetten, die hinsichtlich solcher Ereignisse angestellt werden, deren Wahrscheinlichkeit weder a priori noch a posteriori zu bestimmen möglich sind, können, sollen sie gebilligt werden, nur dann angestellt werden, sobald beide Parteien nicht verschiedene Misen setzen, sondern eine gewisse Summe ansetzen, die derjenigen Partei dann zuerkannt wird, deren Behauptung sich nach eingegangener Wette realisirt hat. Auf diese Art geschieht es auch gewöhnlich bei den Wetten, die z. B. bei einem Pferderennen, besonders in England, dessen Bewohner bekanntlich die Wetten leidenschaftlich lieben, angestellt werden, wo es alsdann so viele wettende Parteien giebt, als Pferde zum Wettlauf zugelassen sind; ferner mit den Wetten, die bei Gelegenheit der bevorstehenden Bildung eines neuen Ministeriums u. dgl. aufzutauchen pflegen; u. s. w.

Viertes Capitel.

Von der Theilungsregel (einer gewissen Regel beim Spiel).

§. 40. Wenn zwei Spieler einen Einsatz unter der Bedingung zusammenlegen, daß dieser Einsatz demjenigen gehören solle, welcher zuerst eine im Voraus bestimmte Anzahl Partien gewonnen haben wird, diese beiden Spieler jedoch, ehe noch dieses statt gefunden hat, schon nach einigen Spielen entweder freiwillig aufhören oder sich trennen müssen; so entsteht dann natürlich die Frage, wie viel nun einem jeden der beiden Spieler Antheil an dem Einsatze gebühre.

§. 41. Es ist nicht schwer einzusehen, daß diese Frage im rechtmäßigsten und billigsten Sinne entschieden wird, sobald man bei Theilungen dieser Art annimmt: die Theile der einzelnen Spieler sollen sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, die bei Trennung des Spiels für jeden Spieler stattfinden, das Spiel zu gewinnen. Diese Annahme leidet keine Beschränkung, sondern findet auch ihre Erweiterung in allen andern Fällen, wo mehr als zwei Spieler gespielt haben; nur wird alsdann die Frage ganz durch die gewöhnliche Gesellschaftsrechnung beantwortet.

§. 42. **A** und **B** spielen unter der Bedingung, daß der Einsatz demjenigen gehören soll, der zuerst 3 Partien gewonnen haben wird, wobei die Wahrscheinlichkeit für **A** sowohl als **B**, eine Partie zu gewinnen, $\frac{1}{2}$ sein soll. Als **A** zwei und **B** eine Partie gewonnen hat, wollen sie aber schon aufhören und sich in den Einsatz theilen. Wie viel wird nun jeder bekommen müssen?

Angenommen, **A** und **B** hätten noch eine, nämlich eine vierte Partie gespielt, und **A** dieselbe gewonnen, so würde zufolge der Annahme ihm der ganze Einsatz zugefallen sein, wofür also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist. Hätte jedoch **B** dieses Mal gewonnen, dann hätte zufolge der Annahme **A** zwei und **B** zwei Partien gewonnen, das Spiel wäre mithin noch unentschieden geblieben, und also hätte müssen erst ein neues, nämlich das fünfte Spiel, die Entscheidung herbeiführen. Die Wahrscheinlichkeit für **A** nun, das vierte Spiel zu verlieren, ist $\frac{1}{2}$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, das fünfte Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{2}$, daher die Wahrscheinlichkeit, die vierte Partie nicht, wohl aber die fünfte und mit dieser also das ganze Spiel zu gewinnen, nach §. 13. 22) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mithin die ganze Probabilität für **A**, in beiden Fällen zu gewinnen, nach §. 12. 16) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Für **B** ist aber alles dieß umgekehrt der Fall; mithin die ganze Probabilität für **B**, in beiden Fällen zu gewinnen, die entgegengesetzte von der Probabilität für **A**, d. h. $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. **War nun z. B. der Einsatz = 2 Thlr. 12 Gr.,** so bekommt dann

$$A = \frac{3}{4} \text{ (2 Thlr. 12 Gr.)} = \text{1 Thlr. 21 Gr.}$$

$$B = \frac{1}{4} \text{ (2 Thlr. 12 Gr.)} = \text{— Thlr. 15 Gr.}$$

Wenn aber **A** und **B** mit einem gewöhnlichen Würfel so um einen gewissen Einsatz spielen, daß **A** gewonnen haben soll, sobald er zwei Mal nach einander eine und dieselbe bestimmte Anzahl Augen geworfen hat, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, also für **B** die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $\frac{35}{36}$ ist, **A** und **B** jedoch bereits nach dem ersten Wurfe aufhören zu spielen und sich nun in den Einsatz theilen wollen; wie viel wird dann demnach jeder bekommen müssen?

Hätte **A** auf's erste Mal die bestimmte Zahl nicht geworfen, so wäre das Spiel für ihn verloren, und **B** bekäme alsdann den Einsatz 36 Mal. Wäre aber **A** so glücklich gewesen, im ersten Wurfe die bestimmte Zahl zu erhalten, so ist seine Probabilität, auch noch im zweiten Wurfe dieselbe bestimmte Zahl zu werfen, $\frac{1}{6}$ = derjenigen Probabilität, das Spiel zu gewinnen, bevor noch **A** den zweiten Wurf thut; für **B** wäre diese Probabilität $\frac{5}{6}$. Mithin müßte, nachdem **A** und **B** sich nach dem ersten Wurfe bereits getrennt haben, **A** den sechsten Theil vom 36fachen Einsatze, d. h. den Einsatz 6 Mal, und **B** $\frac{5}{6}$ des 36fachen Einsatzes, d. h den Einsatz 30 Mal erhalten; oder auch es müßte **B** 5 mal mehr als **A** bekommen. Wäre z. B. dieser Einsatz = 3 Thlr. 18 Gr.; so würde

$$A = \frac{1}{6}\text{ (3 Thlr. 18 Gr.)} = \text{— Thlr. 15 Gr.}$$

$$B = \frac{5}{6}\text{ (3 Thlr. 18 Gr.)} = \text{3 — 3 —}$$

bekommen müssen.

Zweiter Theil.

Von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Abschnitt.

Von der Bestimmung der Probabilität aus Gründen.

(Wahrscheinlichkeitsrechnung a priori.)

Erstes Capitel.

Von dem Würfelspiel.

§. 1. Wir wollen zuerst das Würfelspiel vornehmen und hierbei stets sechsseitige Würfel, welche bei den meisten gewöhnlichen Spielen anzutreffen sind, voraussetzen.

Wenn n die Anzahl sämmtlicher sechsseitigen Würfel, deren jeder die Augen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 hat, bezeichnet und **A**, **B**, **C**, **D**,... **N** die n einzelnen Würfel sind; so können offenbar mit diesen n Würfeln 6^n Würfe gethan werden. Bezeichnen wir