Einige trigonometrische Sätze und Integralformeln welche in dieser Schrift vorkommen.

§. I.

Wenn φ einen gewissen Kreisbogen oder Winkel für den Halbmesser 1 bedeutet, und $\sin\varphi = m$, also $\cos\varphi = \sqrt{(1 - m^2)}$ ist, so bedeute in der Folge der Ausdruck Bog. sin m, oder auch schlechtweg B sin m allemahl so viel als der Bogen dessen Sinus = m ist. Noch deutlicher könnte man dies auch durch Bog sin (= m) oder B sin (= m) ausdrücken. Aber es ist gewöhnlich das = Zeichen wegzulassen, und durch B allemahl den Bogen zu verstehen, dem die hinter dem Worte sin stehende Grösse als Sinus zu kömmt. So sind auf eine ähnliche Art auch die Ausdrücke B cos m B tang m u. d. gl. zu verstehen, worunter man also die Bögen oder Winkel verstehet, deren Cosinus = m, oder Tangente = m seyn würde.

Die Ausdrücke Arc. ſin m, Arc coſ m u. ſ. w. ſind mit den angeführten von gleicher Bedeutung, von Arcus, Bogen.

§. II.

Iſt alſo $\sin\varphi = m$; $\cos\varphi = \sqrt{(1 - m^2)}$ ſo hat man umgekehrt

$$\varphi = \text{Bog} \sin m = \text{Bog} \cos \sqrt{(1 - m^2)}$$

§. III.

Iſt für einen andern Bogen ψ

$\sin\psi = n$ alſo $\cos\psi = \sqrt{(1 - n^2)}$

ſo hat man eben ſo

$$\psi = \text{Bog} \sin n = \text{Bog} \cos \sqrt{(1 - n^2)}$$

§. IV.

Weil $\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$

ſo hat man auch umgekehrt

$$\varphi = \text{Bog} \tang \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$$

Alſo

$$\varphi = \text{B} \sin m = \text{B} \cos \sqrt{(1 - m^2)}$$

$$= \text{B} \tang \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$$

welche Ausdrücke denn alle einerley bedeuten.

§. V.

Wegen

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi$$
$$= m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)} \text{ (II. III.)}$$

Würde man demnach auch umgekehrt sagen können

$$\varphi + \psi = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)}).$$

oder (§. II. III)

$$\mathfrak{B}\sin m + \mathfrak{B}\sin n = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)})$$

Und eben so

$$\text{Bog}\sin m - \mathfrak{B}\sin n = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} - n\sqrt{(1-m^2)})$$

Diese und mehr andere Ausdrücke sind in der Analysis oft von sehr erheblichen Nutzen.

§. VI.

Aufgabe. Das Integral von $du\sqrt{(1+u^2)}$ zu finden.

Aufl. 1. Um die Irrationalität wegzuschaffen, setze man $\sqrt{(1+u^2)} = z - u$; so wird, auf beyden Seiten quadrirt, $u = \frac{z^2-1}{2z}$; also $du = \frac{1}{2}\frac{(z^2+1)\,dz}{z^2}$, ferner $\sqrt{(1+u^2)}$ oder $z - u = z - \frac{z^2-1}{2z} = \frac{z^2+1}{2z}$; demnach

$$du\sqrt{(1+u^2)} = \frac{(z^2+1)^2}{4z^3}\,dz = \tfrac{1}{4}z\,dz + \tfrac{1}{2}\frac{dz}{z} + \tfrac{1}{4}\frac{dz}{z^3}$$

2. Also integrirt

$$\int du\sqrt{(1+u^2)} = \tfrac{1}{8}z^2 - \tfrac{1}{8}z^{-2} + \tfrac{1}{2}\log z$$
$$= \tfrac{1}{8}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \tfrac{1}{2}\log z$$
$$= \tfrac{1}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{z}\right) + \tfrac{1}{2}\log z$$

3. Nun ist aber $z = u + \sqrt{(1+u^2)}$;

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{u+\sqrt{(1+u^2)}} = u - \sqrt{(1+u^2)}$$

wenn man des Bruchs $\frac{1}{u+\sqrt{(1+u^2)}}$ Zähler und Nenner mit $u - \sqrt{(1+u^2)}$ multiplicirt.

4. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man $z + \frac{1}{z} = 2u$; $z - \frac{1}{z} = 2\sqrt{(1+u^2)}$ und folglich das verlangte Integral

$$\int du\sqrt{(1+u^2)} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{(1+u^2)} + \tfrac{1}{2}\log\left(u+\sqrt{(1+u^2)}\right)$$

wo unter dem Logarithmen der natürliche verstanden werden muß.

§. VII.

§. VII.

Aufgabe. Das Integral von $du\sqrt{(1-u^2)}$ zu finden.

Aufl. In Tab. VII. Fig. 85. sey des Kreises um C Halbmesser $=1$, und die Abscisse $CP=u$, so ist die Ordinate $y=PM$ $=\sqrt{(1-u^2)}$. Das Stück Fläche zwischen der Ordinate PM, und dem damit parallel gezogenen Halbmesser CE d. h. das Stück Fläche CPME nenne man S, so ist, wenn man pm unendlich nahe an PM zieht, $PMpm=ydu$ das Differenzial von S; demnach

$$dS=du\sqrt{(1-u^2)}$$

Also das Integral

$$\int du\sqrt{(1-u^2)}=S$$

2. Zieht man nun CM, so ist
$S=\Delta MPC+$ Kreisausschnitt CME

3. Aber
$\Delta MPC=\frac{1}{2}PM.CP=\frac{1}{2}u\sqrt{(1-u^2)}$ (1) und Kreisausschnitt CME $=$ dem halben Radius CM multiplicirt in den Bogen ME dessen Sinus $MQ=PC=u$ ist. Aber wegen $CM=1$, wird dieser Kreisausschnitt $=$ $\frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin u$.

4. Demnach das Integral
$\int du\sqrt{(1-u^2)}=\frac{1}{2}u\sqrt{(1-u^2)}+\frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin u$
wo also $\mathfrak{B}\sin u$ einen Bogen dessen Sinus $=u$ für den Halbmesser 1 bedeutet. (§. I.)

§. VIII.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ zu finden.

Aufl. Aus Trig. §. XVIII. im zweyten Theil meiner practischen Geometrie, ist

$$d \sin a = da \cos a$$

Also $\frac{d \sin a}{\cos a} = da$

Man setze $\sin a = u$, also $\cos a = \sqrt{(1-u^2)}$, so ist $a = \mathfrak{B} \sin u$. Demnach

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = d. \mathfrak{B} \sin u$$

Mithin $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \mathfrak{B} \sin u.$

§. IX.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}}$ zu finden.

Aufl. Man setze $\sqrt{(1-u^2)} = z$, so wird $udu = -zdz$, und

$$\int \frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}} = -z$$

d. h. $\int \frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}} = -\sqrt{(1-u^2)}$

wie auch aus der Differenziation erhellet.

§. X.

§. X.

Die (VI–IX.) gefundenen Integrale sind Fundamentalformeln, aus denen sich eine große Menge von andern, welche eine weit größere Allgemeinheit haben, durch eine leichte Substitution herleiten läßt. Zum Behuf der in diesem Buche vorkommenden Differenziale, deren Integrale verlangt werden, sollen folgende allgemeinere Formeln aus den gefundenen abgeleitet werden.

§. XI.

1. Man setze in das Integral (§. VI. 4.) $u = \frac{a + bx}{c}$ wo a, b, c beliebige unveränderliche Grössen bedeuten sollen, so wird $du = \frac{b}{c} dx$, und $\sqrt{(1 + u^2)} =$

$$\frac{\sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)}}{c}.$$

Substituirt man diese Werthe in das (§. VI. 4.) gefundene Integral, so wird

$$\int dx \sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)} = \frac{a + bx}{2b} \times$$

$$\sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)} + \frac{c^2}{2b} \times$$

$$\log \frac{a + bx + \sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)}}{c}$$

2. Nun

2. Nun setze man der Kürze halber $a^2 + c^2 = A$; $2ab = B$; $b^2 = C$, so wird $b = \sqrt{C}$; $a = \frac{B}{2\sqrt{C}}$; $c = \frac{\sqrt{(4AC - B^2)}}{2\sqrt{C}}$ demnach durch eine leichte Substitution in (1)

$$\int dx \sqrt{(A + Bx + Cx^2)} = \frac{2Cx + B}{4C} \sqrt{(A + Bx + Cx^2)}$$

$$+ \frac{4AC - B^2}{8C\sqrt{C}} \times$$

$$\log \frac{2Cx + B + 2\sqrt{C}\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}{\sqrt{(4AC - B^2)}}$$

Diese Integralformel kömmt in der Ausübung sehr häufig vor, und pflegt sonst wohl auf eine etwas weitläuftige Art bewiesen zu werden.

§. XII.

Bekanntlich muß zu einem jeden Integrale noch eine aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmende beständige Grösse, welche mit Const bezeichnet zu werden pflegt, hinzu addirt werden.

Soll z. B. das (XI.) gefundene Integral so bestimmt werden, daß es für $x = 0$, verschwinde, so muß die

$$\text{Const} = -\frac{B\sqrt{A}}{4C} - \frac{4AC - B^2}{8C\sqrt{C}} \log \frac{B + 2\sqrt{C}\sqrt{A}}{\sqrt{(4AC - B^2)}}$$

seyn, wie man leicht finden wird.

Man

Man addire also diese Const zu dem Integrale (§. XI.) so wird

$$\int dx \sqrt{(A + Bx + Cx^2)} =$$
$$= \frac{-B\sqrt{A} + (2Cx + B)\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}{4C}$$
$$+ \frac{4AC - B^2}{8C\sqrt{C}} \times$$
$$\log \frac{2Cx + B + 2\sqrt{C}\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}{B + 2\sqrt{C}\sqrt{A}}$$

dieses Integral verschwindet also offenbar für $x = o$.

§. XIII.

Anwendungen dieser Formel findet man in gegenwärtigen Buche.

1) In (§. 41. 2.) wo sich die (XII.) gefundene Formel in das dortige Integral $\int dx \sqrt{(ax + x^2)}$ verwandelt, wenn man in (XII.) $A = o$; $B = a$; $C = 1$ setzt.

2) In (§. 56. 2.) erhält man das Integral $\int dy \sqrt{(b^2 + 4y^2)}$ wenn man in (XII.) $x = y$; $A = b^2$; $B = o$; $C = 4$ setzt.

3) In (§. 71. 2.) das dortige Integral $\int dx \sqrt{\left(1 + \frac{e^2}{c^2} \cdot x^2\right)}$ wenn man in (XII.) $A = 1$; $B = o$; $C = \frac{e^2}{c^2}$ setzt.

Und (§. 71. 15.) wenn man $x = v$; $A = 0$; $B = \alpha$; $C = 4$ setzt.

4) In (§. 114. 9.) das dortige Integral $\int dy \sqrt{(by + 4y^2)}$ wenn man $x = y$; $A = 0$; $B = b$; $C = 4$ setzt.

5) Für das Integral (§. 115. 13.) setzt man $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{4a^2e^2}{c^4}$.

6) Für das Integral (§. 116. 5.) wird $A = c^2$; $B = 4a^2e^2$; $C = 4e^2$.

7) Für das in (§. 116. 6.) ist $A = c^2$; $B = 0$; $C = 4$.

8) Für das in (§. 116. 10) hat man $A = c^4$; $B = 0$; $C = 4(a^2 + c^2)$.

§. XIV.

Man setze in das Integral (§. VII) wie in (XI.) $u = \frac{a + bx}{c}$, so wird

$$\sqrt{(1 - u^2)} = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)}}{c}$$

und $\int du \sqrt{(1 - u^2)}$ nach gehöriger Substitution

$$\int dx \sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)} =$$
$$= \frac{a + bx}{2b} \sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)} +$$

+

$$+ \frac{c^2}{2b} \text{ Bog sin } \frac{a+bx}{c}$$

Jetzt setze man der Kürze halber $c^2 - a^2 = A$; $-2ab = B$; $b^2 = C$, so erhält man

$$b = \sqrt{C};\ a = -\frac{B}{2\sqrt{C}};\ c = \frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{2\sqrt{C}}$$

und folglich

$$\int dx \sqrt{(A + Bx - Cx^2)} =$$

$$= \frac{2Cx - B}{4C} \sqrt{(A + Bx - Cx^2)} +$$

$$+ \frac{B^2 + 4AC}{8C\sqrt{C}} \text{ B sin } \frac{2Cx - B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}.$$

In dieser Allgemeinheit eine ebenfalls sehr nützliche Integralformel.

§. XV.

1. Soll dieß Integral für $x = 0$ verschwinden, so muß die beständige Grösse

$$\text{Const} = \frac{B\sqrt{A}}{4C} + \frac{B^2+4AC}{8C\sqrt{C}} \text{ B sin } \frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

seyn.

2. Da nun diese zu dem (XIV.) gefundenen Integrale hinzu addirt werden muß, so müssen hier die zwey Bögen

$$\text{Bog sin } \frac{2Cx - B}{\sqrt{(B^2+4AC)}} \text{ und B sin } \frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

zusammen gerechnet werden.

Man

Man nenne also

$$\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=m;\quad \frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=n$$

so hat man (V.)

$$\mathfrak{B}\sin m+\mathfrak{B}\sin n=\mathfrak{B}\sin\,(m\sqrt{(1-n^2)}$$
$$+n\sqrt{(1-m^2)})$$

Nun ist $\sqrt{(1-n^2)}=\frac{2\sqrt{C}\sqrt{A}}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$

$$\sqrt{(1-m^2)}=\frac{2\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

Also diese Werthe substituirt

$$\mathfrak{B}\sin\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}+\mathfrak{B}\sin\frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=$$

$$\mathfrak{B}\sin\frac{2(2Cx-B)\sqrt{AC}+2B\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{B^2+4AC}$$

Mithin das Integral $\int dx\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}=$

$$\frac{B\sqrt{A}+(2Cx-B)\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{4C}+$$

$$+\frac{B^2+4AC}{8C\sqrt{C}}\times$$

$$\mathfrak{B}\sin\frac{(2Cx-B)2\sqrt{AC}+2B\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{B^2+4AC}$$

wenn es für $x=0$ verschwinden soll.

§. XVI.

Anwendungen dieser allgemeinen Formel auf spezielle Fälle findet man in folgenden §§en dieses Buches.

1) In (§. 33. XII.) setzt man um das dortige Integral $\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$ zu finden in die Formel (XV.) $A = r^2$; $B = 0$; $C = 1$; so wird das Integral $= \frac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{2} r^2 \mathfrak{B} \sin \frac{x}{r}$.

2) Für das Integral $\int dx \sqrt{(ax - x^2)}$ in §. 40. 1. setzt man in die allgemeine Formel $A = 0$; $B = a$; $C = 1$;

3) Für das Integral §. 47. 1. ist $A = \frac{1}{4} a^2$; $B = 0$; $C = 1$

4) Für das Integral §. 71. 9. ist. $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{e^2}{a^2}$

5) Für das Integral §. 115. 8. ist $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{4e^2}{a^2}$

6) Für das Integral §. 115. 23. ist $x = w$; $A = c^2$; $B = 4e^2 a$; $C = 4e^2$

7) Für das Integral §. 117. 4. ist $A = a^2$; $B = 0$; $C = 4$.

8) Für das Integral §. 126. 9. ist $A = a^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \alpha^2$; $B = 0$; $C = 1$

9) Für

9) Für das Integral §. 127. 3. ist
$A = r^2$; $B = 0$; $C = 1$

10) Für das Integral §. 127. 9. ist
$A = r^2$; $B = 0$; $C = \sin \frac{1}{2}\alpha^2$

11) Für das Integral §. 130. 17. ist
$A = 0$; $B = 2\alpha$; $C = 1$ und $x = t$

12) Für das Integral §. 131. 7. ist
$x = \tau$; $A = 0$; $B = 2y$; $C = 1$

Das allgemeine Integral (§. XV.) verwandelt sich alsdann durch diese Substitutionen allemahl in die speciellen wie sie in den angeführten §§en angegeben sind.

§. XVII.

Die Integralformel (§. XV.) hätte zwar auch aus der (§. XI.) abgeleitet werden können, wenn man in (§. XI.) nur C als eine negative Grösse betrachtet. Da aber in diesem Falle die $\sqrt{C}$ in der Formel (§. XI.) eine imaginäre Grösse werden würde, wodurch sowohl die logarithmische Grösse als auch der vor ihr stehende Coefficient imaginär werden, so hätte ich noch andere Sätze vorausschicken müssen, um zu zeigen, wie ein solcher imaginärer logarithmischer Ausdruck, sich auf einen reellen Kreisbogen wie (§ XV.) würde reduciren lassen. Um diese Weitläuftigkeit zu vermeiden, habe ich das Integral (§. XV.) lieber aus der besondern Betrachtung (§. VII.) abgeleitet.

§. XVIII.

Wenn bey den Integralen (§. XI. und §. XIV.) die beständige Grösse so bestimmt wird, daß diese Integrale für $x = 0$ verschwinden, so erhalten die Integrale unter gewissen Umständen unmögliche Werthe. Z. B. in (§. XV.) wird das Glied $B\sqrt{A}$ in dem Integrale unmöglich, so bald A negativ ist. Also würde das ganze Integral einen unmöglichen Werth erhalten. Dieß zeigt, daß nach der Natur der Aufgabe, wobey ein solches Integral vorkömmt, die beständige Grösse nicht auf die angezeigte Art, sondern nach einer anderen Bedingung hätte bestimmt werden müssen. Die in dem Buche vorkommenden Integrale sind alle von der Art, daß A positiv ist, und daher die angeführte Betrachtung keiner weitern Erörterung bedarf.

§. XIX.

Aufgabe. Das Integral von $xdx\sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 34. IV. 4.) zu finden.

Aufl. Das Integral von $ydy\sqrt{(r^2 - y^2)}$ ist wie man leicht findet $= -\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$

Nun

Nun setze man $y = x - r$, so verwandelt sich $y dy \sqrt{(r^2 - y^2)}$ in $(x - r) dx \sqrt{(2rx - x^2)}$. Also

$$\int (x - r) dx \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Mithin

$$\int x dx \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} + r \int dx \sqrt{(2rx - x^2)}$$

Aber $\int dx \sqrt{(2rx - x^2)}$ erhält man aus §. XV., wenn man dorten $A = 0$; $B = 2r$, und $C = 1$ setzt, nemlich

$$\int dx \sqrt{(2rx - x^2)} = -\frac{(r-x)}{2} \sqrt{(2rx - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^2 \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$

Demnach

$$\int x dx \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx - x^2) \sqrt{(2rx - x^2)} - \tfrac{1}{2} r (r - x) \sqrt{(2rx - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^3 \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$

Man könnte aus diesem Integrale leicht noch ein allgemeineres z. B. $\int x dx \sqrt{(A + Bx - Cx^2)}$ durch ein Verfahren, wie oben, ableiten. Da aber in gegenwärtigen Buche kein anderer specieller Fall als der (§. 34. IV. 4.) vorkömmt, so will ich es bey diesem bewenden lassen. Das gefundene verschwindet für $x = 0$, wie es die Aufgabe mit sich bringt, bey der es vorkömmt.

§. XX.

§. XX.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ (§. 71. 19.) zu finden.

Auflösung. 1. Es ist $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = -\sqrt{(r^2 - y^2)}$; Nun setze man $y = r - x$, so ist $dy = -dx$; und $\sqrt{(r^2 - y^2)} = \sqrt{(2rx - x^2)}$. Mithin, diese Werthe substituirt $\int \frac{(r - x)\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \sqrt{(2rx - x^2)}$

2. Folglich

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = -\sqrt{(2rx - x^2)} + r\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

3. Die Integration des vorgegebenen Differenzials hängt also von der Integration der Formel $\frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ ab, welche aus der Formel §. VIII. auf folgende Art erhalten wird.

4. Man setze in die dortige Formel $u = \frac{x}{r} - 1$ so wird $du = \frac{dx}{r}$ und

$$\sqrt{(1 - u^2)} = \sqrt{\left(\frac{2x}{r} - \frac{x^2}{r^2}\right)}$$

5. Demnach $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

folglich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)}} = \mathfrak{B} \sin u$$

und wegen $u = \frac{x - r}{r}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \mathfrak{B} \sin \frac{x - r}{r} = - \mathfrak{B} \sin \frac{r - x}{r}$$

Soll dieß Integral für $x = 0$ verschwinden, so ist die beständige Grösse $= \mathfrak{B} \sin \frac{r}{r} = \mathfrak{B} \sin 1 = 90^\circ$; demnach

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = 90^\circ - \mathfrak{B} \sin \frac{r - x}{r} = \mathfrak{B} \cos \frac{r - x}{r}$$

$$= \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$

6. Hieraus wird also

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = - \sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$+ r\,\mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$

§. XXI.

Aus (§. XX. 6.) hat man also auch das Integral der Formel (§. 130. 17.). Wenn man $x = t$; und $r = \alpha$ setzt.

§. XXII.

§. XXII.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (§. 121. 4.) zu finden.

Aufl. Man setze in die Formel (§. VIII.) $u = \frac{y}{a}$ so ist $du = \frac{dy}{a}$; und $\sqrt{(1 - u^2)}$ $= \frac{\sqrt{(a^2 - y^2)}}{a}$; Also

$$\frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}; \text{ Und}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)}} = \mathfrak{B} \sin u \text{ d. h.}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \mathfrak{B} \sin \frac{y}{a}.$$

Soll dieß Integral für $y = 0$ verschwinden, so ist weiter keine Const. hinzu zu addiren.

2. Setzt man $y = x$, und $a = r$, so erhält man das Integral §. 130. XII.

§. XXIII.

Aufg. Das Integral $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (§. 121. 4.) zu finden.

Aufl. Man setze $a^2 - y^2 = z^2$, so wird $y^2 = a^2 - z^2$; $y^3\,dy = -(a^2 - z^2)\,z\,dz$; und

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = -\int (a^2-z^2)\,dz = -a^2 z + \tfrac{1}{3} z^3$$

Oder wenn man den Werth von y herstellet

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = -a^2\sqrt{(a^2-y^2)}$$
$$+ \tfrac{1}{3}(a^2-y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$$
$$= -\frac{2a^2+y^2}{3}\sqrt{(a^2-y^2)}.$$

§. XXIV.

Aufgabe. Das Differenzial $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ zu integriren.

Aufl. Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$\frac{x^2}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-x^2)}} - \sqrt{(r^2-x^2)}$$

Also auf beyden Seiten mit dx multiplicirt und integrirt

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} - \int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$$

$$= r^2\,\mathfrak{B}\sin\frac{x}{r} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{(r^2-x^2)} - \tfrac{1}{2}r^2\,\mathfrak{B}\sin\frac{x}{r}$$

§. XXII. 2. und §. XVI. 1.

d. h.

d. h.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{(r^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\,\mathfrak{B}\sin\frac{x}{r}$$

Soll dieß Integral für $x = 0$ verschwinden, so ist keine Const weiter hinzu zu setzen.

§. XXV.

Aufgabe. Den Ausdruck $du(a^2-u^2)\sqrt{(a^2-u^2)}$ oder $du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}$ zu integriren.

Aufl. 1. Es ist

$$d[(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u] = du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} - 3u^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du$$

2. Man addire auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $0 = 3a^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du - 3a^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du$ hinzu, so wird

$$\begin{aligned} d[(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u] &= du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + 3(a^2-u^2)(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du \\ &\quad - 3a^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du \end{aligned}$$

$$= du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} + 3du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} - 3a^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du$$

d. h.

$$d[(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u] = 4du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} - 3a^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}du$$

demnach integrirt

$$\int du(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u}{4} + \tfrac{3}{4}a^2\int du\sqrt{(a^2-u^2)}$$

 =

$$= \frac{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u}{4} + \tfrac{3}{8}a^2u\sqrt{(a^2-u^2)}$$

$$+ \tfrac{3}{8}a^4 \mathfrak{B} \sin \frac{u}{a}$$

(§. XVI, 1.) das dortige $r = a$ und $x = u$ gesetzt. Soll dieß Integral für $u = 0$ verschwinden, so ist weiter keine Const hinzu zu setzen.

Für $u = a$, wird der Werth des Integrals $= \frac{3}{8}a^4 \mathfrak{B} \sin 1 = \frac{3}{8}a^4 . \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{16}a^4 . \pi$. wenn wie immer π die Ludolphische Zahl $= 3,141592\ldots$ bezeichnet.

§. XXVI.

Aufgabe. Das Differenzial $d\varphi \sin \varphi^m$ zu integriren, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet.

Aufl. 1. Nach den ersten Gründen der Differenzialrechnung ist

$$d(xy) = ydx + xdy$$

wenn x und y nach Gefallen ein paar veränderliche Grössen bezeichnen.

2. Folglich $xy = \int ydx + \int xdy$ oder
$$\int ydx = yx - \int xdy$$

3. Nun läßt sich das vorgegebene Differenzial $d\varphi \sin \varphi^m$ auch so ausdrücken
$$d\varphi \sin \varphi . \sin \varphi^{m-1},$$

Man

Man setze demnach der Kürze halber

$$\sin \varphi^{m-1} = y$$
$$d\varphi \sin \varphi = dx$$

so ist $x = \int d\varphi \sin \varphi = - \cos \varphi$ wie ebenfalls aus den ersten Elementen der Differenzialrechnung bekannt ist.

Ferner hat man auch

$$dy = (m-1) \sin \varphi^{m-2} d \sin \varphi$$
$$= (m-1) \sin \varphi^{m-2} d\varphi \cos \varphi$$

weil $d \sin \varphi = d\varphi \cos \varphi$

4. Substituirt man diese Werthe in die Integralformel (2), so erhält man $\int y dx$ oder

$$\int d\varphi \sin \varphi^m = - \sin \varphi^{m-1} \cos \varphi + (m-1) \int d\varphi \cos \varphi^2 \sin \varphi^{m-2}$$

5. Man setze in das letzte Glied des Ausdrucks rechter Hand des Gleichheitszeichens $1 - \sin \varphi^2$ statt $\cos \varphi^2$ so wird erstlich

$$\int d\varphi \cos \varphi^2 \sin \varphi^{m-2} = \int d\varphi \sin \varphi^{m-2} - \int d\varphi \sin \varphi^m$$

und dann (4)

$$\int d\varphi \sin \varphi^m = - \sin \varphi^{m-1} \cos \varphi + (m-1) \int d\varphi \sin \varphi^{m-2} - (m-1) \int d\varphi \sin \varphi^m$$

Woraus denn leicht durch Herüberschaffung des letzten Gliedes rechter Hand des Gleichheitzeichens auf die linke Seite, folgt

$$\int d\varphi \sin\varphi^m = -\frac{\sin\varphi^{m-1}\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int d\varphi \sin\varphi^{m-2}$$

6. Aus dieser Formel erhellet denn, daß wenn das Integral von $d\varphi \sin\varphi^{m-2}$ bekannt ist, auch dasjenige von $d\varphi \sin\varphi^m$ gefunden ist.

7. Ex. Für $m = 2$ ist

$$\int d\varphi \sin\varphi^2 = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\int d\varphi \sin\varphi^0$$
$$= -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\int d\varphi$$
$$= -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\varphi$$

8. Für $m = 4$ wird

$$\int d\varphi \sin\varphi^4 = -\frac{\sin\varphi^3\cos\varphi}{4} + \tfrac{3}{4}\int d\varphi \sin\varphi^2$$

Substituirt man in diesen Ausdruck statt $\int d\varphi \sin\varphi^2$ den bereits (7) gefundenen Werth, so erhält man

$$\int d\varphi \sin\varphi^4 = -\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3\cos\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi$$

9. Man setze $\varphi = 6$ so wird

$$\int d\varphi \sin\varphi^6 = -\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5\cos\varphi + \tfrac{5}{6}\int d\varphi\sin\varphi^4$$

Und wenn man statt $\int d\varphi \sin\varphi^4$ den (8) gefundenen Werth substituirt

$$\int d\varphi \sin\varphi^6 = -\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5\cos\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi^3\cos\varphi$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$$

Dieß sind die Integrale von denen §. 57. 3. die Anwendung vorkömmt. Das Gesetz, nach welchem die einzeln Integraltheile fortgehen, läßt sich aus dem angeführten leicht ableiten. Es ist überflüssig, solches hier in einer allgemeinen Formel darzustellen.