Anfangsgründe

der

gesammten Mathematik.

Von

J. J. v. Littrow.

Mit fünf Kupfertafeln.

WIEN.
Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.
1838.

V o r r e d e.

Die gegenwärtige Schrift erscheint nahe zu gleicher Zeit mit der »*kurzen Anleitung zur gesammten Mathematik*,« welche letzte von jener, in der That früher vollendeten, gleichsam als ein Auszug betrachtet werden kann, obschon in beyden Schriften Ordnung und Beweisart häufig ganz verschieden ist.

Schon in dem Vorworte zu dieser Anleitung habe ich mich über das Sichten und Verwerfen des früher Gesammelten, und über die Hindernisse erklärt, die sich diesem Geschäfte, recht ausgeführt, entgegen setzen. Mir wenigstens wurden diese Hindernisse erst dann recht fühlbar, als ich mich nur mit Widerstreben von immer mehreren Gegenständen losreiſsen muſste, die doch, ihrer Schönheit und ihres Nutzens wegen, der Aufnahme so würdig schienen. Allein vielen meiner Freunde, die ich bey der Ausführung vorzüglich zu beachten suchte, schien im Gegentheile meine Entsagung noch immer nicht weit genug gegangen zu seyn, und auf diesen ihren Rath ist der erwähnte Auszug entstanden. — Meiner Besorgniſs, in demselben gar zu mangelhaft zu erscheinen, suchten

**

sie dadurch zu begegnen, dafs man, neben dieser kürzeren, auch jene erste, oder die gegenwärtige viel weiter gehende Schrift, bestehen lassen sollte, und dafs, da ja doch beyde immer nur als eine erste Anleitung dargeboten werden, die Folge bald entscheiden werde, welche von ihnen die Leser mehr anspricht. Auch könnte, wie sie dafür hielten, das eine für die erste, das andere für die weiter gehende Selbstbildung, oder jenes für die unteren, dieses für die höheren Classen des öffentlichen Unterrichts angemessen gefunden, und so beyden Absichten, wie es wohl wünschenswerth wäre, entsprochen werden.

Diese Vorschläge schienen lockend genug, aber sie sind nicht ganz eben so leicht ausführbar. Der gute Wille und die Absicht, etwas recht Nützliches zu thun, mag immerhin sehr lobenswerth seyn. Aber damit ist noch lange nicht alles gethan. Denn Zeit und Lust und Kraft fordern auch ihre Rechte, und diese hängen nicht immer, wie jene, von uns ab.

Wie es aber auch damit beschaffen seyn mag: guter Rath, sagt man, kömmt über Nacht, und was nicht *a priori* als das Beste erkannt werden kann, wird sich vielleicht desto sicherer durch den Erfolg erkennen lassen. Auf ihn wollen wir daher die Hoffnung, und nach ihm das künftig zu beobachtende Verfahren zu richten suchen. — Wenn nämlich einer von jenen beyden Versuchen des Beyfalls der Leser und einer anderen Auflage sich erfreuen sollte, so würde es mir am gerathensten erscheinen, den minder begünstigten seinem Schicksale zu überlassen, und dafür jener ersten Schrift eine andere, gleichsam einen zweyten Theil, folgen zu lassen, und denselben, ohne weitere Wiederholung der ersten Elemente, auf jenem ersten, als auf einer Basis zu erbauen, so dafs das eine da beginnt, wo das andere geendet hat, und dafs, in ununterbrochener Folge, durch den ersten, für sich als selbstständig zu betrachtenden Theil, der Anfänger oder der blofse Freund der Wissenschaft, durch den anderen aber auch derjenige zufrieden gestellt würde, der eine nähere Bekanntschaft mit dem Gegenstande einzugehen wünscht. Auf diese Weise könnte auch jener Doppelzweck der oben erwähnten niederen und höheren Unterrichtsanstalten erreicht, und ein noch immer gedrängtes, nur auf das beyden Zwecken Nothwendige sich beschränkendes, und doch *allen* Classen von Lesern angemessenes Lehrgebäude der Wissenschaft aufgestellt werden.

Bis dahin aber habe ich es vorgezogen, mehr dem Beyrath meiner Freunde, als meiner eigenen, so eben ausgesprochenen Ansicht zu folgen. Mögen sie meinen aufrichtigen Dank für den Antheil, den sie der Sache schenkten, annehmen, und wenn ich hinter ihren Wünschen zurückblieb, freundliche Nachsicht hegen. Auch hätte ich, *meinen* Wunsch nur hörend, mich dem Unternehmen lieber ganz entziehen, und die Ausführung desselben, sie wissen, mit welchem innigen Vertrauen, einem von ihnen selbst überlassen mögen. Indeſs, nachdem ich lange genug widerstanden und sattsam angeführt hatte: *cur excusatus abirem* — konnte ich ihrem wiederholten Drängen nicht weiter widerstehen, und übergebe mich daher hiermit sammt allem, was ich habe, der freundlichen Gunst der Leser.

Wien, den 4. November 1837.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Arithmetik, oder Rechnung mit bestimmten Zahlen.

Erstes Capitel.

Rechnung mit ganzen Zahlen.

Zweytes Capitel.

Rechnung mit Decimalbrüchen.

Drittes Capitel.

Gewöhnliche Brüche.

Erste Abtheilung.

Algebra, oder Rechnung mit unbestimmten Gröfsen.

Viertes Capitel.

Einfache Rechnungen mit allgemeinen Zahlzeichen.

Fünftes Capitel.

Rechnung mit Potenzen.

Sechstes Capitel.

Irrationale und imaginäre Gröfsen.

Siebentes Capitel.

Umformung der Gleichungen.

Achtes Capitel.

Proportionen.

Neuntes Capitel.

Logarithmen.

Zehntes Capitel.

Änderungen der Functionen oder Principien der Differentialrechnung.

Eilftes Capitel.

Entwicklung der Functionen.

Zwölftes Capitel.

Auflösung der Gleichungen.

Dreyzehntes Capitel.

Reihen.

Zweyte Abtheilung.

Geometrie.

Vierzehntes Capitel.

Erste Grundsätze der Geometrie.

Fünfzehntes Capitel.

Eigenschaften der Dreyecke und weitere Entwicklung der trigonometrischen Functionen.

Sechzehntes Capitel.

Numerische Bestimmung der Peripherie des Kreises und der trigonometrischen Functionen für jeden gegebenen Bogen.

Siebzehntes Capitel.

Das geradlinige Dreyeck, oder ebene Trigonometrie.

Achtzehntes Capitel.

Parallelogramme und regelmäſsige Polygone.

Neunzehntes Capitel.

Practische Geometrie.

Zwanzigstes Capitel.

Linien im Raume und Ebenen.

Einfachste Körper.

Ein und zwanzigstes Capitel.

Das Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel, oder sphärische Trigonometrie.

Zwey und zwanzigstes Capitel.

Gleichungen der geraden Linie.

A. Gerade Linie in einer gegebenen Ebene.

B. Gerade Linie im Raume.

Drey und zwanzigstes Capitel.

Gleichung der Ebene.

Vier und zwanzigstes Capitel.

Krumme Linien des zweyten Grades.

Fünf und zwanzigstes Capitel.

Andere krumme Linien.

Sechs und zwanzigstes Capitel.

Berührungen der Curven.

Ein und dreyſsigstes Capitel.
Complanation der Flächen.

Zwey und dreyſsigstes Capitel.
Cubatur der Körper.

Drey und dreyſsigstes Capitel.
Statische Bestimmung der Oberfläche und des Volums der Rotationskörper.

Einleitung.

Arithmetik,

oder

Rechnung mit bestimmten Zahlen.

Erstes Capitel.

Rechnung mit ganzen Zahlen.

§. 1. (Numeration.) Die neun ersten ganzen Zahlen drücken wir bekanntlich durch folgende Zeichen oder Ziffern aus:

1 . . . eins,	4 . . . vier,	7 . . . sieben,
2 . . . zwey,	5 . . . fünf,	8 . . . acht,
3 . . . drey,	6 . . . sechs,	9 . . . neun.

Dieselben neun Ziffern können aber auch alle folgenden gröſseren Zahlen bezeichnen, indem man ihnen einen doppelten Werth beylegt, einen *absoluten*, nämlich den eben angezeigten, und einen *relativen*, der von dem Orte oder von der *Stellung* jeder Ziffer gegen die anderen abhängt. Diese Stellung auszudrücken, braucht man das Zeichen 0 (oder *Null*), das an sich selbst keinen Werth hat, sondern nur die leeren Stellen, wenn es deren gibt, bezeichnet.

So drückt das Zeichen 1, allein genommen, die Einheit aus, und dieſs ist sein absoluter Werth. Allein in der zweyten Stelle (von der Rechten zur Linken) oder so ausgedrückt:

10,

bezeichnet es die Einheiten der zweyten Ordnung oder die *Zehner*. In der dritten Stelle

100

gibt es die Einheiten der dritten Ordnung oder die *Hunderte*, in der vierten Stelle die *Tausende*, in der fünften die *Zehntausende*, in der sechsten die *Hunderttausende*, und in der siebenten endlich die *Millionen* oder die Tausendmaltausende.

Demnach bezeichnet also die Zahl

32

2 Einheiten und 3 Zehner, oder wie man sich auszudrücken pflegt, zwey und dreyſsig Einheiten; die Zahl

4638

beträgt 8 Einheiten, 3 Zehner, 6 Hunderte und 4 Tausende, oder: viertausend sechshundert acht und dreyſsig Einheiten; und eben so beträgt die Zahl

5720406

6 Einheiten, 4 Hunderte, 2 Zehntausende, 7 Hunderttausende und 5 Millionen, oder: fünf Millionen, siebenhundert und zwanzig Tausend, vierhundert und sechs Einheiten.

So wie aber die siebente Stelle die Einheiten der Millionen enthält, so enthält wieder

die achte Stelle die Zehner der Millionen
» neunte » » Hunderte » »
» zehnte » » Tausende » »

und so fort, so daſs die dreyzehnte Stelle die Einheiten der Millionen von den Millionen oder die sogenannten *Billionen*, die neunzehnte Stelle die *Trillionen* u. s. w. enthält.

Um daher eine gegebene Zahl auszusprechen, theilt man sie, von der Rechten zur Linken, in Classen von sechs zu sechs Ziffern, und drückt jede Classe auf die angezeigte Weise durch Worte aus. So ist z. B. die Zahl

45 839407 860534

gleich 45 *Biliionen*,
839 Tausend, 4 Hundert und 7 *Millionen*,
860 Tausend, 5 Hundert und 34 *Einheiten*.

Numeration ist die Lehre, eine gegebene Zahl, den vorhergehenden Vorschriften gemäſs, zu schreiben oder auszusprechen.

§. 2. (Addition.) Zwey oder mehrere Zahlen *addiren* heiſst: sie zusammen zählen oder ihre Summe suchen.

Zu diesem Zwecke könnte man ganz einfach zuerst die Einheiten, dann die Zehner, dann die Hunderte u. f. dieser Zahlen, *jede für sich*, addiren, die so erhaltenen Partialsummen, nach dem relativen Range jeder Ziffer, unter einander stellen, und dann die gemeinschaftliche Summe dieser Partialsummen nehmen, wie folgendes Beyspiel zeigt:

$$\begin{array}{rcr}
8452 & \text{oder} & 6974 \\
\underline{7385} & & \underline{5389} \\
7 & & 13 \\
13 & & 15 \\
7 & & 12 \\
\underline{15} & & \underline{11} \\
\text{Summe . . } 15837 & & 12363.
\end{array}$$

Man bemerkt aber sofort, dafs es kürzer ist, so oft eine dieser Partialsummen mehr als eine Ziffer hat, nur die Ziffer des niedrigeren Ranges zu schreiben, und dafür die andern *sogleich* zu den Ziffern des nächst höheren Ranges hinüber zu nehmen. Dadurch erhält das zweyte Beyspiel die Form:

$$\begin{array}{rl}
6974 & \\
\underline{5389} & \\
12363 & \text{wie zuvor.}
\end{array}$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\begin{array}{rcrl}
835 & \text{oder kürzer} & 835 & \\
247 & & 247 & \\
302 & & 302 & \\
\underline{468} & & \underline{468} & \\
22 & & 1852 & \text{wie zuvor.} \\
13 & & & \\
\underline{17} & & & \\
\text{Summe . . } 1852 & & &
\end{array}$$

§. 3. (Subtraction.) Zwey Zahlen subtrahiren heifst, ihren Unterschied oder ihre Differenz finden.

Man schreibt die kleinere Zahl unter die gröfsere so, dafs in beyden die Ziffern desselben Ranges unter einander stehen. Dann zieht man, von der Rechten anzufangen, die untere Ziffer von der oberen ab, und wenn diefs nicht angeht, vermehrt man die obere Ziffer um *zehn*, indem man, um diefs wieder gut zu machen, die nächstfolgende obere Ziffer um eine *ihrer* Einheiten vermindert, welche Verminderung man, um Irrungen zu vermeiden, durch einen oberen Punct anzeigen kann.

So hat man

$$\begin{array}{r}
8{\cdot}42{\cdot}06{\cdot}39 \\
\underline{3614257} \\
\text{Differenz . . } 4806382.
\end{array}$$

Die *Probe* der richtig geführten Subtraction besteht in der Addition der zwey untersten Reihen, deren Summe der oberen Reihe gleich seyn muſs. So ist in unserem Beyspiele

$$\begin{array}{rr} & 3614257 \\ & 4806382 \\ \hline \text{Summe} \ldots & 8420639 \end{array}$$ wie zuvor.

§. 4. (Multiplication.) Zwey Zahlen multipliciren heiſst, die eine dieser Zahlen so oft nehmen, als die andere Einheiten hat.

Die beyden gegebenen Zahlen nennt man *Factoren*, und die gesuchte Zahl heiſst das *Product*.

Wenn der eine dieser Factoren nur aus einer einzigen Ziffer besteht, so kann man sein Product mit jeder einzelnen Ziffer des anderen Factors nehmen, diese Producte, nach dem Range ihrer Ziffern, unter einander schreiben, und dann ihre Summe (nach §. 2.) suchen, wie folgendes Beyspiel zeigt, wo 3 und 675 die beyden Factoren sind:

$$\begin{array}{rr} & 675 \\ & 3 \\ \hline & 15 \\ & 21 \\ & 18 \\ \hline \text{Product} \ldots & 2025. \end{array}$$

I. Allein man sieht auch hier sogleich, daſs es kürzer ist, nur die erste Ziffer dieser Partialproducte zu schreiben, und dafür die zweyte *sogleich* zu dem nächst höheren Producte zu addiren. Dadurch erhält unser Beyspiel die folgende einfachere Gestalt:

$$\begin{array}{r} 675 \\ 3 \\ \hline 2025 \end{array}$$ wie zuvor.

II. Ganz eben so wird man auch verfahren, wenn jeder Factor mehr als eine Ziffer hat, wenn man nur das aus jeder höheren Ziffer (nach I.) entstandene ganze Partialproduct um eine Stelle weiter links setzt, und dann die Summe aller dieser Partialproducte nimmt. So hat man, wenn 675 und 353 die beyden Factoren sind:

	675	oder auch	353
	353		675
	2025		1765
	3375		2471
	2025		2118
Product . .	238275		238275 wie zuvor.

III. Hat man mehr als zwey Zahlen mit einander zu multipliciren, so sucht man zuerst von zweyen derselben das Product nach II., und dann wieder von diesem Producte mit der dritten Zahl das neue Product u. f.

Hätte man z. B. das Product der drey Factoren

25, 47 und 68

zu suchen, so ist das Product

von 25 in 47 gleich 1175,
und von 1175 in 68 gleich 79900,

wo die Ordnung, in welcher man die einzelnen Factoren wählt, willkürlich ist.

§. 5. (Division.) Zwey Zahlen dividiren heifst suchen, wie oft die kleinere derselben in der gröfseren enthalten ist. Die kleinere Zahl wird *Divisor*, die gröfsere *Dividend*, und die gesuchte Zahl wird *Quotient* genannt.

Es sey z. B. die Zahl 14952 durch 28 zu dividiren. Sucht man den Quotienten zuerst nur in den ganzen Hunderten, so hat man

28|14952|500
14000
Rest . . . 952,

wo 14000 das Product von 28 in 500 ist. Diefs zeigt daher, dafs der Divisor 28 in dem gegebenen Dividend 500 mal enthalten ist.

Allein das Product der beyden Zahlen 28 und 500 ist nicht 14952, sondern nur 14000, und die Differenz der beyden letzten Zahlen oder der *Rest dieser ersten Division* ist 952, der sich selbst wieder durch 28 dividiren läfst.

Sucht man daher neuerdings den Quotienten von 952 und 28, und zwar nur in den ganzen Zehnern, so findet man, wie zuvor:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 952|30 \\ & \underline{840} \\ \text{Rest} \ldots & 112, \end{array}$$

und da der Rest 112 dieser zweyten Division sich ebenfalls wieder durch den alten Divisor 28, und zwar ohne weiteren Rest, dividiren läfst, so hat man

$$\begin{array}{r|l} 28 & 112|4 \\ & \underline{112} \\ \text{Rest} \ldots & = 0. \end{array}$$

Demnach enthält der gesuchte Quotient

5 Hunderte,

3 Zehner, und

4 Einheiten,

oder der gesuchte Quotient unserer Division ist

534.

I. Eine geringe Aufmerksamkeit wird auch hier sogleich bemerken, dafs man diese drey Divisionen abkürzend in eine einzige zusammenziehen kann, so dafs man also, ohne die angezeigten Operationen wesentlich zu ändern, diese Division unter folgender Form darstellen wird:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 14952|534 \\ & \underline{140..} \\ & = 95. \\ & \underline{84.} \\ & 112 \\ & \underline{112} \\ \text{Rest} \ldots & = 0. \end{array}$$

Eben so findet man z. B. dafs die Zahl 3622704, durch 426 dividirt, den Quotienten 8504 gibt.

II. Die Probe der Division ist die Multiplication. Das Product des Divisors in den Quotienten mufs nämlich den Dividend wieder geben. So ist in dem ersten Beyspiele:

$$\begin{array}{lr} & 534 \\ & \underline{28} \\ & 4272 \\ & \underline{1068} \\ \text{Product} \ldots & 14952 \end{array}$$ wie zuvor.

III. Man sieht von selbst, daſs die Multiplication eine abgekürzte oder wiederholte Addition, und daſs die Division eine wiederholte Subtraction ist.

IV. Um die Multiplication und Division mit gröſseren Zahlen zu erleichtern, muſs man die Producte der einzelnen Ziffern dem Gedächtniſs einprägen. Dazu dient das sogenannte Einmaleins oder die folgende Tafel, aus der man z. B. sogleich sieht, daſs 4 mal 6 gleich 24, oder daſs 5 mal 7 gleich 35 u. f. ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 6. (Zeichen der vorhergehenden Operationen.) Um auszudrücken, daſs man zwischen zwey oder mehreren Zahlen eine der vier vorhergehenden Operationen vornehmen soll, hat man folgende Zeichen gewählt:

$+$ ist das Zeichen der Addition,
$-$ » » » » Subtraction,
$\times$ » » » » Multiplication,
$:$ » » » » Division.

Überdieſs ist noch $=$ das Zeichen der Gleichheit derjenigen Gröſsen, zwischen welchen es steht. So hat man z. B.

$$7 + 3 = 10 \quad \text{und} \quad 7 - 3 = 4,$$
$$4 \times 6 = 24 \quad \text{und} \quad 24 : 6 = 4.$$

Endlich drückt noch das Symbol $a > b$ aus, daſs a gröſser als b ist. So hat man $5 > 3$ oder $4 < 7$.

I. Wenn man eine dieser Operationen mit mehreren Zahlen vornehmen soll, so pflegt man diese letzteren in Klammern einzuschlieſsen, um sie dadurch als ein zusammengehörendes Ganze darzustellen.

So heiſst z. B.

$$(5+3) \times (7-2),$$

daſs man die Zahl $5+3$ oder 8 durch $7-2$ oder 5 multipliciren soll, so daſs man demnach hat

$$(5+3) \times (7-2) = 40.$$

II. Bemerken wir noch, daſs die Division auch durch einen horizontalen Strich angezeigt wird, über welchem der Dividend, und unter welchem der Divisor steht, und endlich, daſs die Multiplication in solchen Fällen, wo keine Zweydeutigkeit daraus entsteht, durch einen einfachen Punct zwischen beyden Factoren, oder auch durch ein bloſses Nebeneinanderstellen dieser Factoren ausgedrückt wird. So hat man in den vorhergehenden Beyspielen

für die Division

$$\frac{24}{6} = 4,$$

und für die Multiplication

$$(5+3) \cdot (7-2) = 40,$$

oder auch ganz einfach

$$(5+3)(7-2) = 40.$$

Zweytes Capitel.

Rechnung mit Decimalbrüchen.

§. 7. (Erklärung.) Nach dem Vorhergehenden (§. 1.) geht man, bey unserer Art zu zählen, von der Linken zur Rechten immer zu zehnmal kleineren Gröſsen herab, so daſs z. B. die 3te Stelle die Hunderte, die 2te die Zehner, und die 1ste die Einheiten enthält.

Allein nichts hindert, nach denselben Gesetzen auch noch weiter abwärts fortzuschreiten, und daher die Ziffer der 1sten, 2ten, 3ten, . . . Stelle, rechts von den Einheiten, in derselben Ordnung 10, 100, 1000 Mal . . . kleiner, als diese Einheit, anzunehmen.

Diese neuen Gröſsen werden also nicht mehr, wie zuvor, *Vielfache* der Einheit, sondern sie werden nur *Theile* dieser Einheit, oder sie werden *Brüche* seyn, und da diese Brüche, nach den Stellen ihrer Ziffern, immer zehnmal kleiner werden, so werden sie *zehntheilige Brüche* oder *Decimalbrüche* genannt.

I. Um die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen zu unterscheiden, werden sie von den letzten durch einen unten angesetzten Punct getrennt. Auf diese Weise bezeichnet die Zahl

472.328

472 Ganze, 3 Zehntel, 2 Hundertel und 8 Tausendtel, oder was dasselbe ist:

472 Einheiten und 328 Tausendtel der Einheit.

§. 8. (Rechnung mit Decimalbrüchen.) Da das Gesetz, nach welchem die Ziffern der Decimalbrüche fortgehen, dasselbe mit dem der ganzen Zahlen ist, so wird man auch auf sie die oben (§. 2.—5.) angezeigten Operationen ohne wesentliche Änderung anwenden.

Sonach wird es hinreichen, dieses Verfahren hier bloſs durch einige Beyspiele zu zeigen.

I. *Addition.*

```
  5.723
  8.054
  0.023
  6.307
 ------
 20.107.
```

II. *Subtraction.*

```
 54.3208
 23.14254
 --------
 31.17826,
```

wo man, um in beyden Zahlen gleich viel Decimalstellen zu haben, statt 54.3208 auch 54.32080 schreiben kann, da in Decimalbrüchen die Null rechts, so wie bey ganzen Zahlen die Null links, keinen Werth hat.

III. *Multiplication.*

```
   13.604          0.0032
     2.53          0.00054
   ------        ------------
    40812               128
   68020               160
  27208          ------------
  --------       0.000001728.
  34.41812,
```

Um in dem Producte den Punct, der die Ganzen von den Brüchen trennt, an die gehörige Stelle zu setzen, wird man bemerken, daſs das Product eben so viele Decimalstellen haben muſs, als beyde Factoren zusammen genommen.

IV. *Division.*

```
23.5|2052.161|87.326  und  0.27|0.014148|0.0524
    1880...                     135..
    -----                       ----
     1721..                       64.
     1645..                       54.
     ------                       ---
       766.                       108
       705.                       108
       ----                       ---
        611                         0
        470
        ----
        1410
        1410
        ----
           0
```

Um in dem Quotienten den Punct an seine Stelle zu setzen, gibt man den beyden zu dividirenden Zahlen, durch rechts angehängte Nullen, *dieselbe* Anzahl Decimalstellen, und dividirt dann (nach §. 5.) wie in ganzen Zahlen. So hat man in dem letzten Beyspiele

$$\frac{0.014148}{0.27} = \frac{0.014148}{0.270000} = \frac{14148}{270000},$$

so daſs daher ist

$$\begin{array}{r|l|l} 270000 & 1414800 & 0.0524 \text{ wie zuvor.} \\ & \underline{1350000} & \\ & 648000 & \\ & \underline{540000} & \\ & 1080000 & \\ & \underline{1080000} & \\ & 0 & \end{array}$$

Auch kann man, da hier ebenfalls (wie §. 5.) die Multiplication die Probe der Division ist, den Quotienten durch den Divisor multipliciren, und zwar bloſs in den ersten Ziffern, wenn man sich nur versichern will, daſs der Punct des Quotienten an seiner Stelle ist.

So hat man in demselben letzten Beyspiele

$$\begin{array}{ll} \text{Divisor} \;.\;\;. & 0.27 \\ \text{Quotient} \;.\;\;. & \underline{0.05} \\ & 0.0135, \end{array}$$

also das Product 0.0135 sehr nahe gleich dem vorhergehenden Quotienten 0.014148. Nimmt man bey dieser Multiplication den Quotienten 0.0524 vollständig, so findet man auch den Quotienten 0.014148 vollständig wieder.

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\frac{60.564}{7.35} = 8.24,$$

$$\frac{0.060564}{0.0735} = 0.824,$$

$$\frac{0.60564}{73.5} = 0.00824 \text{ u. f.}$$

Drittes Capitel.

Gewöhnliche Brüche.

§. 9. (Erklärung.) In den bisher betrachteten Decimalbrüchen wird die Einheit, wie wir gesehen haben, immer nur in 10 oder 100 oder 1000 . . . gleiche Theile getheilt. Sie kann aber auch in jede andere Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile, d. h. in Viertel, getheilt werden. Wird dann von diesen 4 Theilen eine bestimmte Anzahl, z. B. 3 genommen, so erhält man *drey Viertheile* oder *drey Viertel* der Einheit.

In diesem Beyspiele wird also die Einheit in 4 gleiche Theile getheilt, d. h. sie wird durch 4 dividirt, und von diesen Theilen werden 3 genommen, so daſs daher »*drey Viertheile der Einheit nehmen*« so viel heiſst, als »*die Zahl* 3 *durch* 4 *dividiren.*«

Aus diesem Grunde drückt man auch diesen Bruch, analog mit der oben (§. 6.) eingeführten Bezeichnung der Division, durch die Gröſse

$$\frac{3}{4}$$

aus, und nennt überdieſs die Zahl 4, *unter* dem Striche, den *Nenner*, und die Zahl 3, *über* dem Striche, den *Zähler* dieses Bruches $\frac{3}{4}$, so daſs daher der Nenner eines Bruches anzeigt, in wie viel Theile man das Ganze oder die Einheit getheilt hat, und der Zähler, wie viel dieser Theile man genommen hat.

I. Ist der Zähler eines Bruches gröſser als sein Nenner, so ist der Werth des Bruches auch gröſser als die Einheit, und er wird dann ein *uneigentlicher Bruch* genannt. Ein solcher ist z. B.

$$\frac{7}{5}$$

oder sieben Fünftheile der Einheit, die also gleich der Einheit und noch zwey Fünftheilen derselben sind, so daſs man hat

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5},$$

wofür man auch der Kürze wegen $1\frac{2}{5}$ zu schreiben pflegt.

II. Man kömmt auf diese uneigentlichen Brüche durch die Division zweyer ganzen Zahlen (nach §. 5.), wenn der Rest der

Division nicht Null wird, d. h. wenn der Dividend kein ganzes Vielfaches des Divisors ist.

Soll z. B. die Zahl 50 durch 3 dividirt werden, so hat man (nach §. 5.)

$$
\begin{array}{r|l}
3 \mid 50 & 16 \\
3 & \\
\hline
20 & \\
18 & \\
\hline
\text{Rest} \;.\;.\; 2, &
\end{array}
$$

so dafs daher diese Division den Rest 2 läfst, oder dafs der *vollständige* Quotient dieser Division gleich 16 und $\frac{2}{3}$ Einheiten oder gleich dem uneigentlichen Bruche

$$\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

ist.

§. 10. (Reduction der Brüche auf einerley Nenner.)

Wird Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird dadurch der Werth desselben nicht geändert.

So ist z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}.$$

In der That, bey dem Bruche $\frac{6}{8}$ hat man das Ganze in 8, also in doppelt so viel Einheiten getheilt, als bey dem Bruche $\frac{3}{4}$, aber dafür hat man auch dort 6, das heifst, doppelt so viel dieser Theile genommen, als hier.

Eben so ist

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5},$$

wo man wieder in $\frac{3}{5}$ nur halb so viel Theile, als in $\frac{6}{10}$, aber auch zwey Mal gröfsere Theile genommen hat.

I. Will man daher zwey Brüche, ohne ihren Werth zu ändern, auf einerley Nenner bringen, so wird man Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche durch den Nenner des anderen multipliciren. Sind z. B. die Brüche gegeben

$$\frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{4},$$

so hat man auch

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \text{ und } \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12},$$

so daſs man also statt den beyden gegebenen Brüchen auch die zwey folgenden mit gleichen Nennern setzen kann:

$$\frac{8}{12} \text{ und } \frac{9}{12}.$$

II. Dasselbe läſst sich auch auf drey und mehr Brüche fortsetzen. Sind z. B. die Brüche gegeben

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{4},$$

so wird man, um sie auf gleiche Nenner zu bringen, nur Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche durch alle übrigen Nenner multipliciren, also

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2} & \text{durch } 3\times4 & \text{oder} & 12, \\ \frac{2}{3} & \text{»}\quad 2\times4 & \text{»} & 8, \text{ und} \\ \frac{3}{4} & \text{»}\quad 2\times3 & \text{»} & 6, \end{array}$$

wodurch man statt den gegebenen Brüchen die drey gleichgeltenden erhält:

$$\frac{12}{24},\ \frac{16}{24} \text{ und } \frac{18}{24}.$$

Ganz eben so erhält man für die Brüche

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4} \text{ und } \frac{1}{5}$$

die vier folgenden:

$$\frac{60}{120},\ \frac{40}{120},\ \frac{30}{120} \text{ und } \frac{24}{120}.$$

§. 11. (Addition und Subtraction der Brüche.)

Um gegebene Brüche zu addiren oder zu subtrahiren, bringe man sie auf einerley Nenner (nach §. 10.), und addire oder subtrahire dann ihre Zähler.

Um z. B. die beyden Brüche

$$\frac{3}{4} \text{ und } \frac{2}{3}$$

zu addiren, hat man, nach §. 10., wenn man sie auf einerley Nenner bringt:

$$\frac{9}{12} \text{ und } \frac{8}{12}.$$

Man hat daher die Einheit in 12 gleiche Theile getheilt, und von diesen Theilen zuerst 9, und dann noch 8, also in allen 17 genommen, so daſs daher

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} \text{ oder gleich } 1\tfrac{5}{12} \text{ ist.}$$

Eben so hat man nach dem letzten Beyspiele in §. 10. für die Summe der vier Brüche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{oder} \quad \frac{60 + 40 + 30 + 24}{120} = \frac{154}{120},$$

oder endlich gleich $\frac{77}{60}$, wenn man (nach §. 10.) Zähler und Nenner durch 2 dividirt.

Auf dieselbe Weise erhält man auch für die Differenz der beyden Brüche

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{15 - 12}{18} = \frac{3}{18},$$

oder endlich $\frac{1}{6}$.

§. 12. (Multiplication der Brüche.) Man multiplicirt Zähler durch Zähler, und Nenner durch Nenner.

So hat man z. B.

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

In der That, man soll $\frac{4}{5}$ nicht zwey Mal, also nicht $\frac{8}{5}$, sondern man soll nur den dritten Theil dieses Productes, also nur $\frac{8}{15}$ nehmen; oder man soll $\frac{4}{5}$ nicht mit 2 Ganzen, sondern nur mit dem dritten Theile von 2 Ganzen multipliciren.

I. Um eben so einen gegebenen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, multiplicire man blofs den Zähler des Bruches mit dieser ganzen Zahl. So hat man

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{6}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4},$$

denn die ganze Zahl 2 ist gleich dem uneigentlichen Bruche $\frac{2}{1}$, also hat man, nach dem eben Gesagten:

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{8 \times 1} = \frac{6}{8}, \text{ wie zuvor.}$$

I. Man sieht zugleich aus diesem, und eben so aus jedem anderen Beyspiele, dafs, den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multipliciren, so viel ist, als, den Nenner des Bruches durch dieselbe ganze Zahl zu dividiren. So war

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{6}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4},$$

und eben so ist auch $\frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}$.

§. 13. (Division der Brüche.) Man kehre den Bruch, durch den dividirt werden soll, um, und multiplicire dann beyde Brüche nach der Vorschrift des §. 12.

So ist

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} \text{ oder } \frac{5}{6}.$$

In der That, bringt man die beyden gegebenen Brüche

$$\frac{2}{3} \text{ und } \frac{4}{5}$$

nach §. 10. auf einerley Nenner, so hat man

$$\frac{10}{15} \text{ und } \frac{12}{15},$$

oder man hat, wenn man die einzelnen Factoren stehen läſst:

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 5} \text{ und } \frac{4 \times 3}{5 \times 3}.$$

Da aber von zwey Brüchen, die denselben Nenner haben, der Quotient offenbar gleich seyn muſs dem Quotienten ihrer Zähler, so hat man auch für den gesuchten Quotienten

$$\frac{2 \times 5}{4 \times 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

wie zuvor, und eben so in jedem anderen Beyspiele.

I. Auf dieselbe Weise werden auch diejenigen Brüche behandelt, deren Zähler und Nenner selbst wieder Brüche sind. So ist z. B. der Bruch

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7},$$

also auch, nach dem Vorhergehenden, gleichbedeutend mit

$$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}, \text{ das heiſst, mit } \frac{14}{15}.$$

Eben so findet man

$$\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}} = \frac{5}{3} : \frac{11}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{20}{33} \text{ u. s. f.}$$

§. 14. (Reduction der gewöhnlichen Brüche auf zehntheilige.) Man sieht, daſs die Rechnung mit Decimalbrüchen viel bequemer ist, als die mit gewöhnlichen Brüchen. Wir wollen daher ein Mittel suchen, jeden gewöhnlichen Bruch auf einen zehntheiligen zu bringen.

Zu diesem Zwecke hängt man an den Zähler des gegebenen Bruches, nach einem Puncte, mehrere Nullen zur rechten Seite an, wodurch (nach §. 8, II.) der Werth desselben nicht geändert wird, und dividire dann den so bloſs in seiner Form veränderten Zähler (nach §. 5.) durch den Nenner.

Soll man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hat man

$$
\begin{array}{r|l|l}
4 & 3.00 & 0.75 \\
 & 28 & \\
\hline
 & 20 & \\
 & 20 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

also ist $\frac{3}{4} = 0.75$,

und eben so ist

$$\frac{1}{8} = \frac{1.000}{8} = 0.125 \text{ u. f.}$$

I. Wenn bey dieser Division kein Rest gleich Null wird, so setzt man sie so lange fort, als man will oder als man, für eine bestimmte Absicht, nöthig hat. So ist z. B., wenn man bis zu der sechsten Decimalstelle oder bis zu den Milliontheilen fortgehen will:

$$\frac{1}{3} = \frac{1.000000}{3} = 0.333333\ldots,$$

und eben so

$$\frac{1}{9} = 0.111111\ldots,$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909\ldots, \quad \frac{8}{27} = 0.296296296\ldots,$$

$$\frac{4115}{33333} = 0.123451234512\ldots,$$

wo man von selbst die immer wiederkehrenden Perioden derselben Ziffern bemerkt.

§. 15. (Gröſster gemeinschaftlicher Factor zweyer Zahlen.) Wir haben bereits öfter einen gewöhnlichen Bruch, durch Division des Zählers und Nenners mit derselben Zahl, auf einen einfacheren Ausdruck zurückzubringen gesucht. Um aber mit Sicherheit den *einfachsten* Ausdruck eines solchen Bruches zu finden, wird man auf folgende Weise verfahren.

Man dividire die gröſsere der beyden Zahlen durch die kleinere; den so erhaltenen Divisor dividire man wieder durch den Rest der ersten Division; dann wieder den letzten Divisor durch den Rest der zweyten Division, und so fort, bis man zu einer Division ohne Rest kömmt, wo dann der Divisor dieser letzten Division zugleich der gesuchte *gröſste Factor* ist, durch welchen der gegebene Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck zurückge bracht werden kann.

Ist z. B. der Bruch gegeben

$$\frac{182}{420},$$

so hat man

$$\begin{array}{l} 182\,|\,420\,|\,2 \\ \quad\;\; 364 \\ \hline \quad\;\; 56\,|\,182\,|\,3 \\ \qquad\quad\; 168 \\ \hline \qquad\quad\; 14\,|\,56\,|\,4 \\ \qquad\qquad\;\; 56 \\ \hline \qquad\qquad\;\; 0, \end{array}$$

also ist 14 die Zahl, durch welche der gegebene Bruch $\frac{182}{420}$ im Zähler und Nenner dividirt werden soll, um ihn auf seinen einfachsten Ausdruck, d. i. auf $\frac{13}{30}$ zu bringen.

Eben so erhält man

für den Bruch	den gröſsten Factor	und die einfachste Form
$\frac{176}{231}$	11	$\frac{16}{21}$
$\frac{4386}{6188}$	34	$\frac{129}{182}$.

§. 16. (Rechnung mit genannten Zahlen.) Genannte Zahlen heiſsen diejenigen, welche sich auf verschiedene Einheiten, z. B. Fuſse und Zolle, Pfunde und Lothe, Thaler und Groschen u. ſ. beziehen.

Wenn wir unsere Maſse, Gewichte und Münzen nach dem sogenannten zehntheiligen Fuſs eingetheilt hätten, so würde die Rechnung mit ihnen sehr einfach und ganz dieselbe mit denen des zweyten Capitels seyn.

Theilt man z. B. mit den neueren Geometern den Fuſs in 10 Zolle, und den Zoll wieder in 10 Linien, und ist die genannte Zahl gegeben

8 Fuſs, 7 Zoll, 3 Lin.,

so ist dieselbe auch sofort gleich

8.73 Fuſs.

Wird also z. B. gefordert, daſs man diese Zahl fünf Mal nehmen soll, so hat man

$$5\,(8.73) = 43.65 \text{ Fuſs}$$

oder auch

43 Fuſs, 6 Zoll, 5 Lin.

Wird aber umgekehrt der fünfte Theil der gegebenen Zahl von 8,73 Fuſs gefordert, so hat man

$$\frac{8.73}{5} = 1.746 \text{ Fuſs}$$

oder 1 Fuſs, 7 Zoll, 4.6 Lin.,

äuſserst einfache Rechnungen, weil hier die Reductionen der Fuſse auf Zolle, oder der Zolle auf Linien, und umgekehrt, nur in der bloſsen Versetzung des Punctes der Decimalstellen bestehen (§. 7, I.).

Allein wenn auch diese Gröſsen, wie es im bürgerlichen Verkehr noch immer der Fall ist, auf eine andere Weise eingetheilt sind, so ist es im Allgemeinen doch am besten und einfachsten, diese genannten Zahlen auf ein gemeinschaftliches Maſs, am bequemsten auf das gröſsere, zurückzuführen, um Zahlen mit zu viel Ziffern zu vermeiden, und dann mit ihnen wie im zweyten Capitel zu verfahren.

Sind z. B. die drey folgenden Gröſsen zu addiren, wo die Klafter in 6 Fuſs, der Fuſs in 12 Zolle, und der Zoll in 12 Linien getheilt vorausgesetzt wird:

7 Klafter,	3 Fuſs,	5 Zoll,	2.4 Linien,
15 »	4 »	3 »	7.2 »
2 »	2 »	8 »	4.8 »

so hat man für die erste dieser Zahlen

$$2.4 \text{ Lin.} = \frac{2.4}{12} = 0.2 \text{ Zolle}, \text{ also auch } 5.2 \text{ Zolle},$$

ferner

$$\frac{5.2}{12} = 0.43333 \text{ Fuſs}, \text{ also auch } 3.43333 \text{ Fuſs},$$

und endlich

$$\frac{3.43333}{6} = 0.57222 \text{ Klafter}, \text{ also auch } 7.57222 \text{ Klafter},$$

so daſs man demnach erhält für die erste der oben angeführten genannten Zahlen

	7.572222 Klafter,	und eben so
für die zweyte	15.716666,	und
für die dritte	2.45	
gesuchte Summe . .	25.738888 Klafter.	

Wollte man diese Summe wieder auf die alte unbequeme Art ausdrücken, so würde man den Decimalbruch derselben durch 6 multipliciren, um Fuſse zu erhalten:

25 Klafter und 4.433328 Fuſs.

Ganz eben so gibt wieder der letzte Decimalbruch, durch 12 multiplicirt:

25 Klafter, 4 Fuſs, 5.199936 Zoll,

und wenn man endlich auch diesen Decimalbruch durch 12 multiplicirt:

25 Klafter, 4 Fuſs, 5 Zoll, 2.399 Lin.

Sollen eben so die beyden folgenden Zahlen von einander *subtrahirt* werden:

15 Klafter, 4 Fuſs, 3 Zoll, 7.2 Lin.,
6 » 3 » 2 » 10.56 »

so wird man, nach demselben Verfahren, für sie setzen:

$$\begin{array}{lr} & 15.716666 \text{ Klafter,} \\ & 6.54 \\ \hline \text{gesuchte Differenz . .} & 9.176666 \text{ Klafter,} \end{array}$$

oder, nach der alten Art ausgedrückt:

9 Klafter, 1 Fuſs, 0 Zoll, 8.64 Lin.

Ganz eben so wird man auch für die Multiplication und Division verfahren.

Soll z. B. die Summe von

6 Gulden, 18 Kreuzer, 3 Pfennige

durch 24 multiplicirt werden, so kann man, da der Gulden 60 Kreuzer, und der Kreuzer 4 Pfennige hat, statt der angeführten Zahl

6.3125 Gulden

setzen, und diese, durch 24 multiplicirt, gibt

$$\begin{array}{lr} & 6.3125 \\ & 24 \\ \hline & 252500 \\ & 126250 \\ \hline \text{gesuchtes Product . .} & 151.5000 = 151.5 \text{ Gulden,} \end{array}$$

oder 151 Gulden, 30 Kreuzer.

Hätte man eben so die Summe von

8 Guld., 16 Kr., 2 Pf.

in fünf gleiche Theile zu theilen, oder durch 5 zu dividiren, so hat man, da diese Gröſse gleich 8.275 Gulden ist:

$$\frac{8.275}{5} = 1.655 \text{ Gulden},$$

oder 1 Guld., 39 Kr., 1.2 Pf.

I. Noch deutlicher wird der Vortheil dieser Reductionen auf die höchsten Theile einer genannten Zahl bey der Berechnung des Inhaltes der Flächen und Körper.

Wir werden weiter unten sehen, daſs die Oberfläche eines Rechteckes gleich dem Producte seiner zwey Dimensionen, der Länge und Breite, und daſs der körperliche Inhalt eines von solchen Rechtecken begrenzten Körpers gleich dem Producte seiner drey Dimensionen, der Länge, Breite und Höhe ist.

Es sey ein solches rechteckiges Feld gegeben, dessen Länge man 4 Fuſs, 5 Zoll, 3 Linien, und die Breite 3 Fuſs, 7 Zoll, 5 Lin. gefunden hat. Man suche den Flächeninhalt dieses Feldes in Quadratfuſsen. Wenn hier wieder das zwölftheilige oder das Duodecimalmaſs vorausgesetzt wird, so ist, wie man durch Division mit 12 erhält:

3 Fuſs, 7 Zoll, 5 Lin. . . . gleich 3.6180505 Fuſs,
4 » 5 » 3 » . . . gleich 4.4375 »

und das Product der beyden letzten Zahlen, wenn man bis zur sechsten Decimalstelle geht, gibt für den gesuchten Flächeninhalt des Feldes

16.055099 Quadratfuſs.

Da aber der Quadratfuſs 12 Mal 12 oder 144 Quadratzoll, und eben so der Quadratzoll 144 Quadratlinien hat, so erhält man aus der letzten Zahl, durch wiederholte Multiplication ihres Decimalbruches durch 144, für den gesuchten Flächeninhalt

16 Q. Fuſs, 7 Q. Zoll, 134.533 Q. Linien.

Hätte man eben so den sogenannten Kubikinhalt oder das Volum eines von sechs Rechtecken begrenzten Wassergefäſses zu suchen, dessen

Länge . . . . 3 Fuſs, 8 Zoll,
Breite . . . . 2 » 5 »
Höhe . . . . 4 » 6 »

ist, so hat man durch Division mit 12 für die

Länge 3.666666,
Breite 2.416666,
Höhe . . . . 4.5.

Das Product der zwey ersten dieser Zahlen ist, wenn man bis zur sechsten Decimalstelle geht:

8.861107,

und diese Zahl mit 4.5 multiplicirt, gibt für den gesuchten Inhalt des Gefäſses

39.8749815 Kubikfuſs.

Wollte man auch dieses Resultat wieder nach der unbequemen alten Weise durch Fuſs, Zoll und Linie ausdrücken, so wird man, da der Kubikfuſs 144 Mal 12 oder 1728 Kubikzoll, und eben so der Kubikzoll 1728 Kubiklinien hat, wenn man die letzte Zahl in ihrem Decimalbruche

0.8749815

zwey Mal durch 1728 multiplicirt, für den gesuchten Inhalt des Gefäſses haben

39 Kubikfuſs, 1511 Kubikzoll, 1672.7593 Kubiklinien.

II. Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, die hohe Einfachheit und zugleich die groſse Fruchtbarkeit der, allen vorhergehenden Rechnungen zu Grunde liegenden Idee, durch welche wir alle, auch die gröſsten Zahlen und die mannigfaltigsten Combinationen derselben, bloſs mit zehn Zeichen, deren jedes einen doppelten Werth hat, ausdrücken können. Diese Erfindung erscheint uns, die wir bereits daran gewohnt sind, so leicht, daſs wir ihren wahren Werth kaum mehr zu schätzen im Stande sind. Doch muſs sie als eine der schönsten Entdeckungen des menschlichen Geistes angesehen werden, da sie dem Scharfsinne der Alten so lange entgangen ist. Um sich davon durch die That zu überzeugen, würde schon der Versuch genügen, die oben angeführten Rechnungen mit den uns ebenfalls allgemein bekannten römischen Zahlzeichen *M*, *D*, *C*, *L*, . . . auszuführen.

Erste Abtheilung.

Algebra,

oder

Rechnung mit unbestimmten Gröfsen.

Viertes Capitel.

Einfache Rechnungen mit allgemeinen Zahlzeichen.

§. 17. (Erklärung.) Wir haben uns bisher nur mit solchen Gröſsen beschäftiget, die durch Ziffer ausgedrückt werden, deren jede einen bestimmten, unabänderlichen Werth hat. Allein man kann sich auch von dieser Beschränkung befreyen und die Gröſsen allgemein, ohne ihnen einen speciellen Werth beyzulegen, betrachten. Dann wird man sie aber auch durch solche allgemeine Zeichen ausdrücken müssen, und zu diesen Zeichen wollen wir die Buchstaben unserer Alphabete wählen.

Die Rechnung mit solchen allgemeinen Zahlzeichen heiſst *Algebra*.

Um von einer solchen Rechnung schon jetzt einen bestimmten Begriff zu geben, wollen wir uns folgende Aufgabe stellen.

Man suche zwey Zahlen, welche die Eigenschaft haben, daſs ihre Summe gleich einer gegebenen Zahl a, und daſs ihre Differenz gleich einer anderen gegebenen Zahl b ist. Wir wollen diese zwey gesuchten oder unbekannten Zahlen, dem algebraischen Gebrauche gemäſs, durch die letzten Buchstaben x und y des Alphabets bezeichnen, während wir für die bekannten oder gegebenen Gröſsen jedes Problems die ersten Buchstaben a, b, c, ... beybehalten.

Hätte man z. B. diese Frage so gestellt, daſs die Summe der zwey unbekannten Zahlen gleich 27, und die Differenz derselben gleich 15 seyn soll, so würde man wohl, nach einigen Versuchen, bald finden, daſs die zwey gesuchten Zahlen $x = 21$ und $y = 6$ sind, und so fort in ähnlichen Fällen, so oft die zwey gegebenen Zahlen a und b bekannte oder festbestimmte Gröſsen sind, und daher, als solche, durch Ziffer ausgedrückt werden können.

Allein unsere Aufgabe, so fern sie der Algebra zugehört, setzt über die beyden gegebenen Zahlen a und b nichts Bestimmtes fest, sie will sich nicht durch particuläre Werthe dieser Zahlen beschränken lassen, sondern sie fordert, daſs man die zwey unbekannten Gröſsen x und y *ganz allgemein* durch die für die beyden gegebenen Gröſsen gewählten Zeichen a und b ausdrücke, unabhängig von allen besonderen Werthen, die man diesen zwey Zeichen a und b für irgend einen speciellen, einzelnen Fall etwa geben könnte.

Und in dieser Allgemeinheit der Auffassung der Frage gibt die Algebra die Antwort, daſs von den beyden gesuchten oder unbekannten Zahlen die eine x immer gleich der *halben Summe*, und die andere y gleich der halben *Differenz* der beyden gegebenen Gröſsen a und b seyn müsse, wenn diese Werthe von x und y der Bedingung der Aufgabe in *allen* Fällen genügen sollen.

Diese Antwort, in der Sprache der Algebra oder mit den oben (§. 6.) angeführten Symbolen dieser Sprache ausgedrückt, wird daher durch die zwey folgenden Ausdrücke gegeben seyn:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\};$$

und dadurch ist das gegebene Problem ganz *allgemein aufgelöst* worden, indem alle nur immer mögliche *besondere* oder specielle Fälle schon in ihr enthalten sind.

Wären z. B. wie in dem vorhergehenden besonderen Fall, die beyden gegebenen Gröſsen

$$a = 27 \quad \text{und} \quad b = 15,$$

so wird man nur in den beyden vorhergehenden algebraischen Ausdrücken statt dem allgemeinen Zeichen a die Zahl 27, und statt b die Zahl 15 setzen, d. h. man wird in jenen Ausdrücken diese besonderen Werthe von a und b substituiren, und dadurch für die beyden unbekannten Gröſsen sofort erhalten:

$$x = \frac{27+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \quad \text{und}$$

$$y = \frac{27-15}{2} = \frac{12}{2} = 6, \quad \text{wie zuvor.}$$

Ganz eben so leicht wird man aber auch, ohne alle weiteren vorhergehenden Versuche, dieselbe Frage für jede andere gegebene Werthe der Gröſse a und b, beantworten können.

Sollte z. B. die Summe der zwey unbekannten Gröfsen 1404, und die Differenz derselben 548 seyn, so würde man nur, in jenen zwey algebraischen Ausdrücken, statt a die Gröfse 1404, und statt b die Gröfse 548 substituiren, wodurch man sofort erhält:

$$x = \frac{a+b}{2} = 976 \text{ und}$$

$$y = \frac{a-b}{2} = 428.$$

Sollte endlich, um auch Brüche zu wählen, die Summe der beyden Unbekannten $a = \frac{3}{4}$ und ihre Differenz $b = \frac{7}{12}$ seyn, so geben für diesen besonderen Fall jene zwey Ausdrücke

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{2}{3} \text{ und}$$

$$y = \frac{a-b}{2} = \frac{1}{12},$$

und so fort in allen anderen besonderen Fällen, die daher keiner eigenen Auflösung und keiner weiteren Versuche mehr bedürfen, da sie, wie man sieht, alle schon in der allgemeinen Auflösung enthalten sind.

Nehmen wir in einem zweyten allgemeinen Probleme an, dafs von drey Personen die beyden ersten zusammen a, die erste und dritte zusammen b, und endlich die beyden letzten zusammen c Gulden besitzen, und suchen wir, wie viel jede dieser Personen für sich besitzen müsse, damit diesen Bedingungen der Aufgabe genüge geschehe.

Ohne etwas über die besonderen Werthe der drey gegebenen Gröfsen festzusetzen, findet die Algebra, durch einige sehr einfache Schlüsse, folgende allgemeine Auflösung des Problems.

Man nehme die halbe Summe der drey Gröfsen a, b und c, und ziehe von dieser halben Summe ab, zuerst c, dann b, und endlich a, so sind die drey Differenzen, die man auf diese Weise erhält, in derselben Ordnung das gesuchte Vermögen der ersten, der zweyten und der dritten der angeführten Personen.

Nennt man also, um diefs wieder in der Sprache der Algebra auszudrücken,

x das gesuchte Vermögen der ersten Person,
y » » » » zweyten »
z » » » » dritten »

und bezeichnet man die halbe Summe der drey gegebenen Grössen durch S, so ist

$$S = \frac{a + b + c}{2},$$

und die gesuchten Zahlen sind:

$$\left.\begin{array}{l} x = S - c \\ y = S - b \\ z = S - a \end{array}\right\}.$$

Wäre z. B., um auf die letzten allgemeinen Ausdrücke einen besonderen Fall anzuwenden, die Summe des Vermögens

der beyden ersten $a = 3$ Gulden,
der beyden äuſsersten $b = 4$ »
und der beyden letzten $c = 5$ »

so hat man

$$S = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6,$$

und daher das gesuchte Vermögen

des ersten $x = S - c = 6 - 5 = 1$ Gulden,
» zweyten $y = S - b = 6 - 4 = 2$ »
» dritten $z = S - a = 6 - 3 = 3$ »

und man sieht, daſs diese Zahlen $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ den Forderungen der Aufgabe vollkommen entsprechen.

Wäre für einen zweyten besonderen Fall das Vermögen der zwey ersten $a = 36$, der äuſsersten $b = 84$ und der beyden letzten $c = 100$ Gulden, so hätte man

$$S = 110,$$

und daher für das gesuchte Vermögen

des ersten $x = 10$,
» zweyten $y = 26$,
» dritten $z = 74$ Gulden.

Wäre endlich das Gesammtvermögen der beyden ersten $a = 100$, der äuſsersten $b = 500$ und der zwey letzten $c = 1000$ Gulden, so ist

$$S = 800,$$

und daher

$$x = -200,$$
$$y = 300,$$
$$z = 700 \text{ Gulden};$$

oder da hier das Vermögen des ersten mit dem Zeichen — der Subtraction (§. 6.) erscheint, so wird diefs nicht als ein wirkliches *Vermögen*, sondern als das Gegentheil desselben, also als *Schuld* zu betrachten seyn, wie wir sogleich näher sehen werden. Es besitzt daher, in dem letzten besonderen Falle unserer Aufgabe, der dritte 700, der zweyte nur 300 Gulden, und der erste hat 200 Gulden Schulden.

Das Vorhergehende wird genügen, von diesen Gegenständen jetzt schon einen allgemeinen Begriff zu geben.

§. 18. (Entgegengesetzte Gröfsen.) Jede Gröfse, wenn sie allgemein betrachtet werden soll, kann immer unter zwey, einander wesentlich entgegengesetzten Bedingungen betrachtet werden, ohne dabey ihren absoluten Werth zu ändern. Die Gröfse a z.B. oder irgend ein specieller Werth derselben, etwa $a = 3$ Gulden, kann eben so gut 3 Gulden Vermögen, als auch 3 Gulden Schulden bedeuten. Eben so kann, in einem anderen besonderen Fall, die Gröfse $a = 5$ Fufs ein Vorwärts- oder auch ein Rückwärtsgehen von 5 Fufs, ein Auf- oder ein Absteigen von 5 Fufs u. f. bezeichnen.

Da es aber nicht gleichgültig seyn kann, ob man eine solche Gröfse in dieser oder in der entgegengesetzten Bedeutung nimmt, da es vielmehr nothwendig ist, auf diese doppelte Beziehung einer jeden Gröfse Rücksicht zu nehmen, so wollen wir künftig eine jede Gröfse, wenn sie unter der einen dieser beyden Bedingungen, z. B. in Beziehung auf Vermögen, genommen wird, *positiv* heifsen, und ihr das Zeichen + vorsetzen, während sie unter der anderen, jener entgegengesetzten Bedingung, also hier in Beziehung auf Schuld, *negativ* heifsen, und das Zeichen — erhalten soll.

Diese beyden Zeichen + und —, die man durch die Worte *plus* und *minus* auszudrücken pflegt, stimmen mit den im §. 6. aufgestellten Zeichen der Addition und der Subtraction überein, weil in der That die dort und hier zu Grunde liegenden Begriffe einander ganz analog sind. So machen z.B. 7 Gulden Vermögen und 4 Gulden Schulden zusammen

$$+7-4, \text{ das heifst } +3,$$

oder 3 Gulden Vermögen, und eben so machen 5 Gulden Vermögen und 8 Gulden Schulden

$$+5-8, \text{ das heiſst } -3,$$

oder 3 Gulden Schulden.

I. Bemerken wir noch, daſs, wenn das erste Glied eines Ausdrucks positiv ist, das Zeichen $+$ der Kürze wegen weggelassen wird, so daſs also in den vorigen Beyspielen

$$+7-4 \text{ und } +5-8$$

identisch ist mit

$$7-4 \text{ und } 5-8.$$

II. Werden endlich Ziffer mit allgemeinen Zahlzeichen verbunden, wie z. B.

$$3a, \quad 5(a+b),$$

so heiſst dieſs, nach §. 6, II., daſs die Gröſse a mit 3, und daſs die Gröſse $(a+b)$ mit 5 multiplicirt werden soll, wo dann diese Zifferfactoren 3 oder 5 auch die *Coefficienten* der allgemeinen Zahlzeichen a oder $(a+b)$ genannt werden.

§. 19. (Addition.) Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daſs man bey der Addition gleichartiger, d. h. durch einerley Buchstaben ausgedrückten Gröſsen, wenn sie einerley Vorzeichen haben, bloſs die Coefficienten addirt, wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, die Coefficienten subtrahirt, und dem so erhaltenen Resultate das Zeichen des gröſseren Gliedes vorsetzt.

So hat man, wie schon für sich klar ist,

$$\begin{array}{rl} & 5a+4b-\tfrac{1}{2}c-4d \\ & 3a-7b-\tfrac{1}{3}c+9d \\ \hline \text{Summe} & 8a-3b-\tfrac{5}{6}c+5d \quad \text{u. s. f.} \end{array}$$

Im Gegentheile kann der Ausdruck

$$7a+3b$$

nicht weiter durch Addition verändert werden, da man hier zwey Zeichen a und b gewählt hat, um zwey verschiedene heterogene Gröſsen auszudrücken, so daſs z. B. $7a$ sieben Pfunde, und $3b$ drey Thaler, oder jenes 7 Arbeiter und dieses 3 Füſse u. f. bezeichnet.

§. 20. (Subtraction.) Um eine Gröfse von der anderen zu subtrahiren, ändere man das Zeichen der zu subtrahirenden Gröfse in das entgegengesetzte, und verfahre dann nach der im §. 19. gegebenen Vorschrift der Addition.

Denn soll man z. B. von der Zahl $+7$, oder was dasselbe ist, von der Zahl $(+7+4-4)$ die Zahl $+4$ subtrahiren oder wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7-4=+3.$$

Soll man aber von derselben Zahl $(+7+4-4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$+7+4=+11.$$

Soll man ferner von der Zahl -7, oder was dasselbe ist, von der Zahl $(-7+4-4)$ die Zahl $+4$ wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7-4=-11.$$

Soll man endlich von derselben Zahl $(-7+4-4)$ die Zahl -4 wegnehmen, so bleibt der Rest

$$-7+4=-3.$$

Wir haben demnach, wenn folgende Gröfsen zu subtrahiren sind, indem man die Zeichen der unteren Reihe ändert und dann addirt, folgendes Schema:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 5a + & 7b + & \frac{1}{3}c - & \frac{1}{2}d & - e \\
 & 3a - & 7b - & \frac{1}{4}c - & \frac{1}{3}d & + f \\
 & - & + & + & + & - \\
\hline
\text{gesuchte Differenz} & 2a + & 14b + & \frac{7}{12}c - & \frac{1}{6}d - & e - f.
\end{array}$$

I. Eben so hat man, wenn mehrere Gröfsen in Klammern eingeschlossen sind, wo die Bedeutung dieser Klammern schon oben (§. 6, I.) gegeben ist:

$$8a-2b-(5a+4b)=8a-2b-5a-4b=3a-6b \text{ und}$$
$$8a-2b-(5a-4b)=8a-2b-5a+4b=3a+2b.$$

§. 21. (Multiplication.) Da das Product zweyer Factoren (nach §. 4.) den Factor so oft enthalten mufs, als der andere die Einheit enthält, so werden, wenn die Einheit, wie hier immer, positiv vorausgesetzt wird, zwey positive Factoren auch ein positives Product geben.

Ist aber der eine dieser Factoren negativ, so wird das Product den *negativen* Factor so oft enthalten, als der andere, positive Factor die Einheit enthält, d. h. das Product einer positiven Gröſse in eine negative, und umgekehrt, ist negativ.

Sind endlich beyde Factoren negativ, so muſs auch hier, der allgemeinen Regel des §. 6. zu Folge, das Product den einen Factor so oft enthalten, als der andere die Einheit enthält. Allein dieser andere Factor enthält nicht die Einheit (nicht die Gröſse $+1$), sondern ihr Gegentheil (-1), also wird auch das Product nicht den ersten negativen Factor selbst, sondern sein Gegentheil enthalten, d. h. das Product zweyer negativer Factoren ist positiv.

In der Multiplication geben also gleiche Zeichen ein positives, und ungleiche ein negatives Product. In diesem Producte werden die numerischen Coefficienten in der That multiplicirt, die allgemeinen Zahlzeichen aber, als Anzeige ihrer Multiplication (nach §. 6, II.), einfach neben einander gestellt. Sonach erhält man

$$(+3a)\cdot(+4b) = +12ab,$$
$$(+3a)\cdot(-4b) = -12ab,$$
$$(-3a)\cdot(+4b) = -12ab,$$
$$(-3a)\cdot(-4b) = +12ab.$$

I. Bemerken wir noch, daſs man der Kürze wegen das Product mehrerer gleichartiger Gröſsen, wie

$$a.a \quad \text{oder} \quad aa \quad \text{auch durch} \quad a^3,$$
$$a.a.a \quad \text{oder} \quad aaa \quad \text{durch} \quad a^4 \quad \text{u. f.}$$

auszudrücken pflegt, so daſs man daher hat:

$$2a \cdot 3ab = 6a^2b,$$
$$3ab \cdot (-5a^2bc) = -15a^3b^2c,$$
$$2ab \cdot (3a + 5ab - b^2) = 6a^2b + 10a^2b^2 - 2ab^3 \quad \text{u. f.}$$

Um aber das Product der beyden Gröſsen $(a+b)$ und $(a-b)$ zu finden, hat man

$$\begin{array}{lll} a & + & b \\ a & - & b \\ \hline a^2 & + & ab \\ & - & ab - b^2 \\ \hline \text{Product} \ldots & & a^2 - b^2. \end{array}$$

Ganz eben so erhält man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline \text{Product} \ldots a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Eben so wird man für das dreyfache Product

$(1 - a)\,(1 - a)\,(1 - a)$ oder für $(1 - a)^3$

erhalten:

$$(1 - a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3;$$

und eben so ist endlich

$$\begin{aligned}(2a - 3b)^4 = 16a^4 &- 96a^3b \\ &+ 216a^2b^2 \\ &- 216ab^3 \\ &+ 81b^4.\end{aligned}$$

§. 22. (Division.) Da der Divisor, durch den Quotienten multiplicirt, den Dividend wieder geben muſs, oder da (nach §. 5, II) die Multiplication die Probe der Division ist, und umgekehrt, so gilt für die Division, in Beziehung auf die Zeichen, dieselbe Vorschrift, wie oben für die Multiplication, daſs nämlich gleiche Zeichen einen positiven, und ungleiche Zeichen einen negativen Quotienten geben.

Auf diese Weise erhält man z. B.:

$$\frac{12a^2b}{4ab} = 3a$$

$$\frac{4a^3b^2 - 8a^2bc}{4a^2b} = ab - 2c \quad \text{u. f.}$$

I. Ein Bruch wird durch einen Bruch multiplicirt, wenn man, wie in §. 12, Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt. Eben so wird ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt, wenn man den ersten Bruch durch den umgekehrten zweyten multiplicirt (§. 13.). Demnach ist also

$$\frac{2a}{b}\cdot\frac{3b}{c} = \frac{6a}{c} \quad \text{und} \quad \frac{3a^2b}{5c}\cdot\left(\frac{10c}{a} - \frac{5a}{bc}\right) = 6ab - \frac{3a^3}{c^2},$$

und eben so

$$\frac{a^2}{3b} : \frac{5b}{a} = \frac{a^2}{3b} \cdot \frac{a}{5b} = \frac{a^3}{15b^2},$$

$$\left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) : \frac{b}{2a} = \left(\frac{2a}{b} - \frac{3b^2}{a}\right) \cdot \frac{2a}{b} = \frac{4a^2}{b^2} - 6b.$$

II. Enthält der Divisor mehrere Glieder, so ist das Verfahren ganz dem in §. 5. ähnlich, wenn man zuerst die beyden zu dividirenden Grössen nach einem ihnen gemeinschaftlichen Buchstaben, z. B. nach a so ordnet, dass die Grössen a, a^2, a^3 . . . in ihrer natürlichen Folge fortgehen.

Soll z. B. die Grösse

$$2a^2 - 3ab + b^2 - a^2 b + a^3$$

durch $a - b$ dividirt werden, so hat man

$$\begin{array}{l}
a - b \mid a^3 + 2a^2 - a^2 b - 3ab + b^2 \mid a^2 + 2a - b \text{ Quotient,} \\
\quad + a^3 \qquad - a^2 b \\
\quad - \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad 2a^2 - 3ab + b^2 \\
\qquad\qquad + 2a^2 - 2ab \\
\qquad\qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - ab + b^2 \\
\qquad\qquad\qquad - ab + b^2 \\
\qquad\qquad\qquad + \quad - \\
\hline
\text{Rest . . . o.}
\end{array}$$

Oder auch, wenn man nach der Grösse b ordnet:

$$\begin{array}{l}
- b + a \mid b^2 - 3ab - a^2 b + 2a^2 + a^3 \mid - b + 2a + a^2 \text{ wie zuvor,} \\
\quad + b^2 - ab \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad - 2ab - a^2 b + 2a^2 + a^3 \\
\qquad - 2ab \qquad + 2a^2 \\
\qquad + \qquad\quad - \\
\hline
\qquad\qquad - a^2 b + a^3 \\
\qquad\qquad - a^2 b + a^3 \\
\qquad\qquad + \quad - \\
\hline
\text{Rest . . o.}
\end{array}$$

Ganz eben so findet man auch

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

$$\frac{1 + a^2 + a^4}{1 - a + a^2} = 1 + a + a^2 \quad \text{u. s. w.}$$

§. 23. (Division ohne Ende.) Wenn der Dividend durch den Divisor nicht ohne Rest theilbar ist, so kann man, wie oben §. 14, I., diesen Rest als einen neuen Dividend betrachten, und so die Division ohne Ende fortsetzen, wie folgendes Beyspiel zeigt:

$$\begin{array}{l} 1-b \mid \; a \; \mid a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots \\ \quad\; \underline{a - ab} \\ \qquad\quad ab \\ \qquad\quad \underline{ab - ab^2} \\ \qquad\qquad\quad ab^2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{ab^2 - ab^3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad ab^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{ab^3 - ab^4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad ab^4 \text{ etc.} \end{array}$$

Es ist daher der Bruch

$$\frac{a}{1 - b}$$

gleich der ohne Ende fortgehenden *Reihe*

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots,$$

von welcher das Gesetz des Fortgangs der Glieder deutlich ist.

I. Nimmt man die Gröſse b negativ, oder setzt man in dem Vorhergehenden $-b$ statt b, so erhält man

$$\frac{a}{1 + b} = a - ab + ab^2 - ab^3 + - \ldots$$

dieselbe Reihe, wie zuvor, aber mit abwechselnden Zeichen.

Ist z. B. für einen besonderen Fall in dem vorhergehenden Ausdrucke von

$$\frac{a}{1 - b} = a + ab + ab^2 + \ldots$$

die Gröſse $a = 1$ und $b = \frac{1}{10}$, so hat man

$$\tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{1000} + \tfrac{1}{10000} + \ldots,$$

übereinstimmend mit §. 14, I., wo der mit dem vorhergehenden identische Ausdruck

$$\frac{1}{9} = 0.1111\ldots$$

gefunden wurde.

II. Eben so gibt $a = b = 1$ den folgenden Quotienten:

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

ein Ausdruck, der, ohne Ende fortgesetzt, offenbar gröſser als jede andere noch angebbare Zahl, oder der, wie man sich auszudrücken pflegt, *unendlich groſs* wird. Dieſs stimmt mit der oben (§. 9.) gegebenen Erklärung eines Bruches überein, dessen Werth immer gröſser wird, je kleiner, bey unverändertem Zähler, der Nenner desselben ist. Nimmt daher, wie hier bey dem Bruche $\frac{1}{0}$, der Nenner über alle Grenzen ab, oder wird der Nenner, wie man zu sagen pflegt, *unendlich klein*, so nimmt auch der Werth des Bruches über alle Grenzen zu, oder dieser Werth ist dann *unendlich groſs*, welchen Zustand einer Gröſse man auch durch das Zeichen ∞ auszudrücken pflegt, so daſs daher

$$\frac{1}{0} \text{ mit } \infty$$

gleichbedeutend ist.

Wir werden später noch oft Gelegenheit haben, auf diese sogenannten unendlich kleinen Gröſsen, d. h. auf solche Gröſsen zurück zu kommen, die kleiner angenommen werden, als jede andere noch angebliche Gröſse. Hier bemerken wir nur, daſs jede nach einem bestimmten Gesetze fortgehende Folge von Gröſsen eine *Reihe* heiſst. — Diese Reihen spielen in der mathematischen Analysis eine sehr wichtige Rolle, obschon sie zur eigentlichen Berechnung offenbar nur dann brauchbar sind, wenn sie *convergiren*, d. h. wenn ihre mit der Folge stets kleiner werdenden Glieder sich einer gegebenen endlichen Gröſse immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. So ist die vorhergehende Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

convergent, weil die Summe ihrer Glieder, je weiter man sie fortsetzt, der endlichen Gröſse $\frac{1}{9}$ immer näher kommt. Die andere Reihe aber

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

ist divergent, weil die Summe ihrer Glieder ohne Grenze bis in das Unendliche wachsen kann.

Eben so ist die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots$$

oder die Reihe der sogenannten reciproquen natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, ...), wie wir später (§. 65.) sehen werden, ebenfalls divergent, oder die Summe dieser Reihe wächst ins Unendliche fort, obschon ihre Glieder immer kleiner werden, je weiter sie fortgeht. Nicht so ist es mit der convergenten Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots,$$

welche dieselben Glieder, wie die vorhergehende hat, deren Zeichen aber stets abwechseln. Diese Reihe gibt, so weit man sie auch fortsetzen mag, immer eine Summe, die kleiner als die Einheit ist, so wie wieder die Reihe der reciproquen ungeraden Zahlen, oder die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots$$

divergent ist, da die Summe ihrer Glieder, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern, ins Unendliche wächst, wie wir in der Folge sehen werden.

Fünftes Capitel.

Rechnung mit Potenzen.

§. 24. (Erklärung.) Ein Product von mehreren gleichen Factoren heiſst eine *Potenz* dieses Factors. So ist

aa oder a^2 die zweyte,
aaa » a^3 » dritte,
$aaaa$ » a^4 » vierte

Potenz der Gröſse a, und die Zahl oben rechts, welche die Anzahl der Factoren in jeder Potenz anzeigt, heiſst der *Exponent* dieser Potenz.

Die zweyte und dritte Potenz, die am häufigsten vorkommt, wird auch der Kürze wegen das *Quadrat* und der *Cubus* (Würfel) genannt. So ist $3^2 = 9$ und $4^2 = 16$ das Quadrat von 3 und 4, und $2^3 = 8$, so wie $3^3 = 27$ ist der Würfel von 2 und 3.

I. Eben so wird diejenige Zahl a, welche auf die 2te, 3te, 4te, ... Potenz erhoben, die Zahl b gibt, die 2te, 3te, 4te, ... *Wurzel* von der Zahl b genannt. So ist a die 2te Wurzel von a^2, und zugleich die dritte Wurzel von a^3 u. f. So ist 3 die 2te Wurzel von 9, und 2 die dritte Wurzel von 8, und wieder 3 die 4te Wurzel von 81 u. f.

Die zweyte und dritte Wurzel einer Gröſse wird auch abkürzend die Quadrat- und Kubikwurzel dieser Gröſse genannt.

Um anzuzeigen, daſs die 2te, 3te, 4te, ... Wurzel aus einer Zahl gezogen werden soll, setzt man dieser Zahl die Zeichen

$$\sqrt[2]{},\ \sqrt[3]{},\ \sqrt[4]{},\ \ldots$$

vor. So hat man z. B.:

$$\sqrt[2]{9} = 3,\ \sqrt[3]{8} = 2,\ \sqrt[4]{16} = 2,\ \ldots$$

Bey der Quadratwurzel läſst man der Kürze wegen auch wohl die Ziffer 2 in den Wurzelzeichen weg, so daſs $\sqrt{a}$ gleichbedeutend mit $\sqrt[2]{a}$ ist.

Will man endlich mehrere durch $+$ oder $-$ verbundene Gröſsen *zugleich* auf eine Potenz erheben, oder aus ihnen die Wurzel ziehen, so schlieſst man diese Gröſsen in Klammern ein (§. 6, II.). So ist das Quadrat von $a+b$ gleich

$$(a+b)^2,$$

und die Kubikwurzel von $a-b$ ist

$$\sqrt[3]{(a-b)} \text{ oder auch } \sqrt[3]{\overline{a-b.}}$$

§. 25. (Multiplication.) Sucht man das Product von a^2 in a^3, so hat man

$$a^2 \,.\, a^3 = aa \,.\, aaa = a^5,$$

und eben so für jeden anderen, ganzen, positiven Exponenten, also auch allgemein

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n},$$

wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen.

Um daher Potenzen derselben Gröſse a zu multipliciren, addirt man ihre Exponenten.

§. 26. (Division.) Um a^5 durch a^3 zu dividiren, hat man

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2,$$

und eben so für jeden anderen Exponenten: also auch allgemein

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Um daher Potenzen derselben Gröſse a zu dividiren, subtrahirt man ihre Exponenten.

§. 27. (Erhebung auf Potenz.) Um eine gegebene Potenz, z. B. a^3 wieder auf eine Potenz, z. B. auf die zweyte Potenz zu erheben, oder um die Gröſse

$$(a^3)^2$$

zu finden, so hat man

$$a^3 = aaa,$$

und von diesem Ausdrucke ist die zweyte Potenz

$$aaa \,.\, aaa = a^6,$$

also ist auch

$$(a^3)^2 = a^6,$$

und eben so ist

$$(a^2)^3 = a^6, \quad (a^4)^2 = a^8 \quad \text{u. f.},$$

also auch überhaupt für jeden ganzen, positiven Exponenten

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Um also Potenzen auf Potenzen zu erheben, multiplicirt man ihre Exponenten.

I. Um aber Producte oder Brüche auf Potenzen zu erheben, muſs man dieſs bey jedem einzelnen Factor des Products, und bey Zähler und Nenner des Bruches thun.

Will man z. B. das Product ab auf die zweyte Potenz erheben, so hat man

$$ab \,.\, ab = aa \,.\, bb, \quad \text{also auch}$$

$$(ab)^2 = a^2 \,.\, b^2,$$

und daher überhaupt

$$(ab)^m = a^m \,.\, b^m.$$

Eben so erhält man für die zweyte Potenz des Bruches $\frac{a}{b}$ den Ausdruck

$$\frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

so daſs demnach ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

und überhaupt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

wie dieſs alles gleichsam für sich klar ist, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

§. 28. (Potenzen, deren Exponenten Null oder negative ganze Zahlen sind.) Nach dem Vorhergehenden (§. 26.) hat man, wenn m und n ganze positive Zahlen bezeichnen,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Sind aber die beyden Exponenten m und n einander gleich, so hat man $m - n = 0$, also ist auch

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1,$$

d. h. jede Gröſse mit dem Exponenten Null ist gleich der Einheit.

I. Ist aber in demselben vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

der Exponent m des Zählers gleich Null, so ist

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n},$$

oder da, nach dem Vorhergehenden, $a^0 = 1$ und a^{0-n} offenbar gleich a^{-n} ist, so hat man

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

d. h. jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Potenz mit demselben positiven Exponenten.

Nach der vorhergehenden Erklärung einer Potenz ist a^m, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, ein Product von m Factoren, deren jeder gleich a ist. Soll demnach die Gröſse a^0 ein Product von Null Factoren seyn? — Dieſs würde keinen Sinn haben. Und noch weniger läſst sich, nach jener Erklärung, der Ausdruck a^{-m} auslegen.

Wir werden daher die Gröſse a^0 nur als eine bloſse Bezeichnung für die Einheit ansehen können, deren es noch viele andere geben kann, z. B. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ u. dgl. Diese Bezeichnung ist aber dadurch entstanden, daſs man irgend eine Potenz einer Zahl durch sich selbst dividirt, und dabey die Vorschrift des §. 26. angewendet hat.

Eben so werden wir die Gröſse a^{-m} als eine andere Bezeichnung für die Einheit, dividirt durch die m^{te} Potenz von a, gelten lassen, und diese zweyte Annahme ist eine unmittelbare Folge der ersten, daſs nämlich $a^0 = 1$ ist. Denn wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

des §. 26, wo m und n ganze positive Gröſsen sind, die Gröſse $m = 0$, also auch, der ersten Annahme gemäſs, $a^0 = 1$ setzt, so erhält man sofort

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

§. 29. (Potenzen mit gebrochenen Exponenten.) Nach der oben (§. 24, I.) gegebenen Erklärung einer Wurzel, ist der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a}$$

diejenige Zahl, welche auf die n^{te} Potenz erhoben, gleich a wird, also ist auch

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Ist aber n eine ganze Zahl, so hat man, nach §. 27,

$$a = (a^{\frac{1}{n}})^n.$$

Setzt man daher diese beyden Ausdrücke von a einander gleich, so hat man

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = (\sqrt[n]{a})^n,$$

woraus sofort folgt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$$

d. h. Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind mit den analogen Wurzelgröſsen identisch.

I. Auch diesen Ausdruck

$$a^{\frac{1}{n}}$$

wird man also nur als eine andere Bezeichnung von $\sqrt[n]{a}$ betrachten können, der so wie die beyden vorhergehenden

$$a^0 \quad \text{und} \quad a^{-n}$$

durch Analogie aus der Rechnung mit solchen Potenzen entstanden ist, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind.

Diese Erweiterung der eingeführten Bezeichnungen, oder der aufgestellten Begriffe durch Analogie oder Induction, ist auf dem Gebiete der Mathematik von der äuſsersten Wichtigkeit, und sie ist oft schon die Quelle der interessantesten Entdeckungen geworden.

II. Stellen wir die vorhergehenden Vorschriften der Rechnung mit Potenzen zur bequemen Übersicht zusammen, so hat man, welche Zahlen auch die Gröſsen m und n bezeichnen,

für die Multiplication . . . . $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, für die Division . . . . . . $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

für die Erhebung auf Potenz . . $(a^m)^n = a^{mn}$,

für die Ausziehung der Wurzel . $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,

und überdieſs

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ und } a^0 = 1.$$

III. Nach diesen Vorschriften kann man sich an folgenden Beyspielen üben:

$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$, $\quad 16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$,

$\frac{81^{\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{4}}} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$, $\quad (4^{\frac{1}{2}})^3 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{64} = 8$,

$a^{-5} : a^2 = a^{-7}$, $\quad a^5 \cdot a^{-2} = a^3$,

$(\sqrt[6]{a^5})^3 = \sqrt{a^5}$, $\quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = (a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[15]{a}$,

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$, $\quad \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \sqrt[12]{a^{13}}$,

$(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$,

$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$,

$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Sechstes Capitel.

Irrationale und imaginäre Gröfsen.

§. 30. (Irrationale Gröfsen.) Betrachtet man die ersten natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . und ihre zweyten, dritten, . . . Potenzen, so hat man

I. natürliche Zahlen	1,	2,	3,	4,	. . .
II. Quadrate derselben	1,	4,	9,	16,	. . .
III. Würfel derselben	1,	8,	27,	64,	. . .

woraus sofort folgt, dafs z. B. die Quadratwurzel von 4 gleich 2, die Quadratwurzel von 9 gleich 3, die Kubikwurzel von 8 gleich 2 ist, u. f.

Allein welches sind die Quadrat- und Kubikwurzeln derjenigen natürlichen Zahlen, die *zwischen* die Zahlen der Reihe II. und III. fallen, welches sind z. B. die Quadrat- oder Kubikwurzeln von 2, 3, 5, 6 u. f.?

Obschon wir die vollständige Antwort auf diese Frage erst weiter unten geben werden, so kann man doch hier schon sehen, dafs z. B. die Quadratwurzel aus 2 oder dafs die Gröfse $\sqrt{2}$ keine *ganze Zahl* seyn wird, da sie, wie man aus der Vergleichung der Reihen I. und II. findet, zwischen die Gröfsen 1 und 2 fallen mufs, zwischen welchen keine ganze Zahl fallen kann.

Allein eben so leicht wird man auch sehen, dafs dieselbe Gröfse $\sqrt{2}$ auch *kein Bruch* seyn kann. Welches nämlich auch dieser Bruch seyn möchte, so müfste er, auf die zweyte Potenz erhoben, die ganze Zahl 2 wieder geben. Allein um einen Bruch auf die zweyte Potenz zu erheben, mufs man (nach §. 27, I.) den Zähler desselben sowohl, als auch den Nenner mit sich selbst multipliciren. Wenn man aber einen Bruch, der nach §. 15. schon auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht worden ist, wie

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \ldots$$

mit sich selbst multiplicirt, d. h. wenn man das Quadrat dieses Bruches sucht, so mufs man offenbar *wieder einen Bruch* erhalten, da man doch, der Voraussetzung gemäſs, eine *ganze Zahl*, nämlich die Zahl 2 erhalten sollte, indem $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$, mit sich selbst multiplicirt, die Zahl 2 wieder geben muſs.

I. Die Gröſse $\sqrt{2}$, und eben so auch die Gröſsen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, . . . so wie $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, . . . sind demnach, weder ganze Zahlen, noch auch Brüche. Sie sind daher Gröſsen ganz eigener Art.

Wenn wir z. B. von der Zahl 2 sagen, daſs sie die Einheit zwey Mal, oder daſs sie eine zehn Mal kleinere Einheit, d. h. die Gröſse $\frac{1}{10}$ zwanzig Mal, daſs sie die Gröſse $\frac{1}{100}$ zweyhundert Mal *genau* in sich enthalte, und so von jeder anderen ganzen Zahl, und selbst von jedem gegebenen Bruche, so läſst sich dagegen von der Gröſse $\sqrt{2}$ nicht mehr sagen, wie oft sie irgend eine, auch noch so kleine Einheit, genau in sich enthalte. Aus diesem Grunde nennt man alle diese mit irgend einer Einheit unmeſsbaren Gröſsen *incommensurable* oder auch *irrationale* Zahlen, weil das Verhältniſs *(ratio)* dieser Zahlen zur Einheit nicht mehr angeblich ist.

II. Obschon wir aber die irrationalen Gröſsen, ihrer Natur nach, nicht ganz genau angeben können, so werden wir doch Mittel finden, uns dem wahren Werthe derselben immer mehr, und so viel wir wollen, zu nähern, ohne sie jedoch je völlig zu erreichen. So werden wir z. B. finden, daſs der Werth der Quadratwurzel aus 2 oder daſs $\sqrt{2}$ ist

$$\sqrt{2} = 1.414213\ 562373\ .\ .\ .$$

Dieſs wird uns demnach auch nicht hindern, mit diesen Gröſsen selbst, wie mit allen anderen, zu rechnen, wenn wir uns nur dabey erinnern, daſs die Resultate dieser Rechnungen bloſse Annäherungen zur Wahrheit sind, mit denen wir uns ja auch sonst oft genug begnügen müssen. Wir werden bald sehen, daſs beynahe alle unsere Berechnungen des Himmels und der Erde auf diesen irrationalen Zahlen beruhen, und daſs die Natur selbst, in der Construction ihrer bewunderungswürdigen Werke, eine Art von Vorliebe für diese Zahlen gehegt zu haben scheint.

§. 31. (Imaginäre Gröſsen.) Da (nach §. 21.) zwey positive, so wie auch zwey negative Factoren, immer nur ein positives Product geben, so müssen auch die Quadrate aller positiven oder negativen Gröſsen *immer positiv* seyn. Dasselbe gilt, aus demselben Grunde, nicht bloſs für die 2^{ten}, sondern auch für alle 4^{ten}, 6^{ten}, 8^{ten}, . . . und überhaupt für alle Potenzen mit geraden Exponenten.

Daraus folgt sofort, daſs die zweyte, und überhaupt jede gerade Wurzel aus einer negativen Gröſse etwas Undenkbares, etwas Unmögliches ist.

Obschon aber diesen Gröſsen an sich keine Realität zukommt, so hat man es doch versucht dieselben, wenigstens als bloſse symbolische Zeichen, unter der Benennung von *imaginären* (im Gegensatze mit den *reellen*) Gröſsen beyzubehalten, und auch auf sie die Vorschriften (§. 25. bis 29.) der Rechnung mit Potenzen anzuwenden. Und auch diesem scheinbar gewagten Versuche verdankt die mathematische Analyse eine sehr wesentliche Erweiterung ihrer Grenzen, wie wir später bey mehr als einer Gelegenheit bemerken werden.

Die einfachste dieser imaginären Gröſsen ist

$$\sqrt{-1} \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Nimmt man davon nach der Vorschrift des §. 27. die ersten Potenzen, so hat man

$$\begin{array}{ll} \text{Potenz I.} \;\ldots\ldots & \sqrt{-1}, \\ \text{» II.} \;\ldots\ldots & -1, \\ \text{» III.} \;\ldots\ldots & -\sqrt{-1}, \\ \text{» IV.} \;\ldots\ldots & +1, \\ \text{» V.} \;\ldots\ldots & \sqrt{-1} \text{ u. f.}, \end{array}$$

so daſs die Potenz VI. wieder gleich der II., die Potenz VII. gleich der III. u. f. ist.

I. Auf diese einfachsten Ausdrücke lassen sich auch alle übrigen imaginären Gröſsen zurückführen. So ist z. B.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(+3).(-1)} = \sqrt{3}.\sqrt{-1},$$

wovon daher wieder

$$\begin{array}{ll} \text{Potenz I.} \;\ldots\ldots & \sqrt{-3}, \\ \text{» II.} \;\ldots\ldots & -3, \\ \text{» III.} \;\ldots\ldots & -3^{\frac{3}{2}}.\sqrt{-1}, \\ \text{» IV.} \;\ldots\ldots & +9 \text{ u. f. ist.} \end{array}$$

§. 32. (Vielfache Werthe der reellen Wurzeln.) Jede positive Gröſse hat *zwey*, in ihrer Gröſse gleiche, in ihren Zeichen aber entgegengesetzte Quadratwurzeln. Denn da z. B. von der Zahl $+2$ sowohl, als auch von der Zahl -2, das Quadrat gleich $+4$ ist, so ist auch die Quadratwurzel von $+4$ sowohl $+2$, als auch -2, oder man hat

$$\sqrt{4} = \pm 2.$$

Dasselbe gilt auch von jeder 2ten, 4ten, 6ten, . . . überhaupt von jeder *geraden* Wurzel aus irgend einer positiven Zahl. So ist z. B.

$$\sqrt[4]{+81} = \pm 3,$$

weil $(+3)^4$ sowohl als auch $(-3)^4$ wieder gleich der gegebenen Zahl $+81$ ist.

I. Nicht so scheint es sich mit der 3ten, 5ten, 7ten, . . . und überhaupt mit den *ungeraden* Wurzeln einer gegebenen Zahl zu verhalten, die immer nur eine, wenigstens nur eine *reelle* Wurzel haben, und zwar von demselben Zeichen mit der gegebenen Zahl selbst. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{+27} = +3,$$

aber nicht auch zugleich -3, da nur $(+3)^3$, nicht aber auch $(-3)^3$ die gegebene Zahl $+27$ wieder gibt. Und eben so ist auch

$$\sqrt[3]{-27} = -3,$$

weil nur $(-3)^3$, aber nicht $(+3)^3$ gleich -27 ist.

II. Allein die Anzahl der Wurzeln einer gegebenen Zahl wird oft viel gröſser, wenn man auch auf die imaginären Wurzeln derselben Rücksicht nimmt.

Zuerst ist, nach dem Vorhergehenden,

$$\sqrt{+1} = \pm 1,$$

oder überhaupt (nach §. 31, I.)

$$\sqrt{+a^2} = \pm a.$$

Und eben so ist auch

$$\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1},$$

da sowohl $+a\sqrt{-1}$, als auch $-a\sqrt{-1}$, mit sich selbst multiplicirt, die Gröſse $-a^2$ wieder gibt. Daraus folgt daher, daſs jede gegebene Gröſse zwey Quadratwurzeln hat, die nur durch ihre Zeichen verschieden sind, und zwar zwey reelle, wenn die gegebene Gröſse positiv, und zwey imaginäre, wenn die gegebene Gröſse negativ ist.

III. Wenn man aber die Gröſse

$$-1 \pm \sqrt{-3}$$

zwey Mal mit sich selbst multiplicirt (nach den Vorschriften des §. 21. u. 30.), so erhält man, wenn das obere Zeichen genommen wird:

$$\begin{array}{r} -1 + \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 1 - \sqrt{-3} - 3 \\ - \sqrt{-3}, \end{array}$$

oder dieses Product ist gleich

$$-2 - 2\sqrt{-3};$$

und wenn man dasselbe noch einmal durch die ursprüngliche Gröſse multiplicirt, so hat man

$$\begin{array}{r} -2 - 2\sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 2 + 2\sqrt{-3} + 6 \\ - 2\sqrt{-3}, \end{array}$$

oder die dritte Potenz der gegebenen Gröſse $(-1+\sqrt{-3})$ ist gleich der reellen Gröſse $+8$. Ganz eben so findet man auch, wenn bloſs das untere Zeichen genommen wird:

$$(-1-\sqrt{-3})^3 = +8,$$

woraus daher, da $2^3 = 8$ ist, sofort folgt, daſs

$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$$

ist. Ganz eben so findet man auch, daſs

$$\left(\frac{+1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$$

ist, so daſs man also auch umgekehrt die beyden Ausdrücke haben wird:

$$\sqrt[3]{+1} = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}) \quad \text{und}$$
$$\sqrt[3]{-1} = \tfrac{1}{2}(+1 \pm \sqrt{-3}).$$

Allein aus dem Vorhergehenden ist bereits bekannt, dafs auch

$$\sqrt[3]{+1} = +1 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

ist, so dafs wir demnach für die Kubikwurzel aus $(+1)$ und aus (-1) folgende drey Ausdrücke haben:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{+1} &= +1 & \sqrt[3]{-1} &= -1 \\ &= +\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) & &= +\tfrac{1}{2}(+1+\sqrt{-3}) \\ &= +\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}), & &= +\tfrac{1}{2}(+1-\sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Was aber hier von der Kubikwurzel aus $+1$ oder -1 gesagt wird, gilt nach dem Vorhergehenden auch für die Kubikwurzel aus jeder anderen Zahl, z. B. ± 27, da

$$\sqrt[3]{+27} = 3\sqrt[3]{+1} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-27} = 3\sqrt[3]{-1} \quad \text{ist.}$$

Aus dem Vorhergehenden folgt daher, dafs jede positive oder negative Gröfse drey Kubikwurzeln hat, von welchen aber nur eine reell ist, während die beyden anderen imaginär sind.

II. Eben so überzeugt man sich leicht durch Nachrechnung von der Richtigkeit der drey folgenden Ausdrücke:

$$(\pm\sqrt{-1})^4 = +1,$$

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1,$$

$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1,$$

woraus sofort folgt, da nach dem Vorhergehenden auch $\sqrt[4]{+1} = \pm 1$ ist, dafs man für die vierte Wurzel aus $(+1)$ und aus (-1) folgende vier Ausdrücke hat:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{+1} &= +1, & \text{und} \quad \sqrt[4]{-1} &= \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= -1, & &= \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= +\sqrt{-1}, & &= \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ &= -\sqrt{-1}, & &= \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder, dafs jede positive Gröfse vier vierte Wurzeln hat, von welchen aber nur zwey reell sind, und dafs jede negative Gröfse ebenfalls vier vierte Wurzeln hat, die jedoch alle imaginär sind.

Man bemerkt leicht, daſs dieſs durch Analogie zur Aufstellung des Satzes führen wird: »Jede gegebene Zahl hat immer »2 Quadratwurzeln, 3 Kubikwurzeln, 4 Wurzeln der vierten, »5 Wurzeln der fünften Ordnung u. s. w., allein von den gera»den Wurzeln (der 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, . . . Ordnung) sind immer »nur zwey reell, wenn die gegebene Zahl positiv ist, und alle »imaginär, wenn sie negativ ist; von den ungeraden Wurzeln »aber (der 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten} Ordnung) ist immer eine reell und alle »anderen imaginär, die gegebene Zahl mag positiv oder negativ »seyn.« — Wir werden in der Folge wieder auf diesen wichtigen Gegenstand zurückkommen.

Siebentes Capitel.

Umformung der Gleichungen.

§. 33. (Erklärungen.) Wenn ein Ausdruck eine oder auch mehrere veränderliche Grössen, die wir (nach §. 17.) durch $x, y, z, \ldots$ bezeichnen wollen, uud überdiess auch eine oder mehrere gegebene oder unveränderliche Grössen $a, b, c, \ldots$ enthält, so wird jener Ausdruck seinen Werth ändern, wenn diese Grössen $x, y, z, \ldots$ geändert werden, er wird von diesen Grössen abhängig, oder er wird, wie man zu sagen pflegt, eine *Function* dieser veränderlichen Grössen seyn.

So ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{a + bx}{a - bx},$$

oder wenn man für einen besondern Fall $a = 10$ und $b = 1$ setzt, der Ausdruck

$$\frac{10 + x}{10 - x}$$

eine Function der veränderlichen Grösse x, und diese Function

ist gleich 1 für $x = 0$,
$\frac{11}{9}$ » $x = 1$,
$\frac{3}{2}$ » $x = 2$ u. f.

Eben so sind

$$\frac{a + bx}{c - dy} \quad \text{oder} \quad ax^2 + bxy + cy^2$$

Functionen von den beyden veränderlichen Grössen x und y u. f.

Wenn die veränderlichen Grössen $x, y, z, \ldots$ oder wenn die *Stammgrössen* der Function bloss ganze Exponenten enthalten, so heisst die Function *rational*, wie die der vorhergehenden Beyspiele; wenn aber diese Stammgrössen gebrochene Exponenten mit sich führen, so ist die Function *irrational*, wie

$$a + b\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad \sqrt{a + bx},$$

und endlich eine *gebrochene* Function, wenn die Stammgrössen zugleich im Zähler und Nenner erscheinen, wie der vorhergehende Ausdruck

$$\frac{a+bx}{a-bx} \text{ oder auch } \frac{x}{\sqrt{a+bx}},$$

welcher letzte Ausdruck eine gebrochene irrationale Function bezeichnet.

I. Ein aus zwey durch die Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Gliedern bestehender Ausdruck heiſst ein *Binom*, wie

$$a+bx^2 \text{ oder } \sqrt{1-x}.$$

Ein solcher aus drey Gliedern bestehender Ausdruck

$$a+bx+cx^2$$

wird ein *Trinom*, und wenn er noch mehr als drey Glieder hat, ein *Polynom* genannt.

II. Ein aus 2, 3, 4, . . . Factoren bestehender Ausdruck wird eine Gröſse von 2, 3, 4, . . . *Dimensionen* genannt, wo, bey gebrochenen Functionen, die Nenner als Gröſsen mit negativen Exponenten (§. 28, I.) genommen werden. So sind

$$a, \quad \frac{ax}{b}, \quad \frac{ax^2+by^2}{ab}, \quad \sqrt{a^2+bx}$$

sämmtlich Gröſsen von einer Dimension;

$$ax \text{ oder } \frac{ax^2}{b} \text{ oder } \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sind Gröſsen von zwey Dimensionen; die Gröſsen

$$\frac{a+x}{a-x} \text{ oder } \sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$$

gehören zu der Dimension Null;

$$\frac{a}{bx} \text{ oder } \frac{a}{a^2+bx}$$

zu der Dimension -1, und endlich

$$\sqrt{x} \text{ oder } \sqrt{\frac{ax}{a-x}}$$

zu der Dimension $\frac{1}{2}$ u. s. f. Wir werden in der zweyten Abtheilung dieser Schrift sehen, daſs die *Linien* Gröſsen der ersten, die *Flächen* der zweyten, und daſs die *Körper* Gröſsen von drey Dimensionen (Länge, Breite und Höhe) sind.

§. 34. (Gleichung.) Wenn zwey Functionen derselben Stammgröſsen, wie z. B.

$$x^2 - ax \text{ und } bx - c,$$

einander gleich sind, so bilden sie eine *Gleichung*, die auf folgende Art geschrieben wird:

$$x^2 - ax = bx - c.$$

Da die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört wird, wenn man zu jedem derselben dieselbe Gröſse addirt oder von ihr subtrahirt, so hat man, wenn man in der letzten Gleichung zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens die Gröſse c addirt, da $c - c = 0$ ist:

$$x^2 - ax + c = bx;$$

und endlich, wenn man auch hier zu beyden Seiten die Gröſse bx subtrahirt:

$$x^2 - ax - bx + c = 0;$$

oder da die veränderliche Gröſse x als Factor von a und zugleich von b erscheint:

$$x^2 - (a+b)x + c = 0,$$

welcher Ausdruck also ebenfalls eine *Gleichung* für die Variable oder unbekannte Gröſse x darstellt.

Man sieht daraus, daſs jede Gleichung so ausgedrückt werden kann, daſs auf der einen Seite des Gleichheitszeichens bloſs die Null steht, was man eine Gleichung *auf Null bringen* heiſst. So ist demnach auch

$$x^2 + Ax + B = 0$$

eine Gleichung für x, und

$$x^2 + Axy + By^2 + C = 0$$

eine Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Gröſsen x und y, u. f.

1. Wir betrachten hier zuvörderst nur diejenigen Gleichungen, die bloſs Functionen einer einzigen veränderlichen Gröſse x sind. Eine solche Gleichung heiſst *geordnet*, wenn die veränderliche oder unbekannte Gröſse x in allen Gliedern der Gleichung bloſs im Zähler und bloſs mit ganzen positiven Exponenten erscheint, und eine solche geordnete Gleichung gehört zum 1sten, 2ten, 3ten, . . . *Grade*, wenn der höchste Exponent von x

gleich 1, 2, 3, . . . ist. So ist

$$x^2 + ax + b = 0$$

eine geordnete Gleichung des zweyten Grades, und

$$x^3 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{oder auch}$$
$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{oder}$$
$$x^3 + a = 0$$

sind geordnete Gleichungen des dritten Grades. Im Gegentheile sind

$$\frac{a}{1+x} = bx,$$
$$a + b\sqrt{x} = ex,$$
$$\frac{x}{a} + b = a\sqrt{x} \text{ u. f.}$$

noch ungeordnete Gleichungen.

II. Bemerken wir noch, daſs eine jede Gleichung, zwischen der veränderlichen x und anderen constanten Gröſsen, *nicht für jeden willkürlichen* Werth von x, sondern nur für gewisse besondere Werthe dieser Gröſse gleich Null seyn kann. So hat man z. B. in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder wenn man, für ein specielles Beyspiel, $a = 3$ und $b = 2$ setzt, in der Gleichung

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

nur *zwey* Werthe von x, welche dieser Gleichung entsprechen, oder welche den Ausdruck $x^2 + 3x + 2 = 0$ geben. Diese Werthe sind nämlich

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = -2,$$

und auſser ihnen gibt es keinen anderen Werth von x mehr, welcher der gegebenen Gleichung genügt.

Eben so hat die geordnete Gleichung des dritten Grades

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

nur drey Werthe von x, welche diese Function von x gleich Null geben, nämlich, wie man sofort sieht:

$$x = 1, \quad x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3.$$

Man nennt aber diese Werthe von x, welche der gegebenen Gleichung entsprechen, die *Wurzeln* dieser Gleichung, und wir werden weiter unten (§. 67.) sehen, daſs jede geordnete Gleichung des m^{ten} Grades auch m Wurzeln hat, wie dieſs in den beyden vorhergehenden Beyspielen der Fall ist.

III. Würde aber der Fall eintreten, daſs ein Ausdruck der Art

$$o = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

für *alle* Werthe, die man der Gröſse x geben kann, gleich Null werden sollte, so würde auch daraus unmittelbar folgen, daſs die constanten Coefficienten (§. 18, II.) von x^0, x', x^2, ... oder daſs die Gröſsen a, b, c, d, ... jede für sich gleich Null seyn müssen. Denn setzt man in der gegebenen Gleichung die Gröſse x, da man ihr alle möglichen Werthe geben kann, gleich Null, so erhält man

$$a = o,$$

so daſs man also jenen Ausdruck auch so schreiben kann:

$$o = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

oder, da man, ohne die Gleichung zu stören, alle Glieder derselben durch x dividiren kann:

$$o = b + cx + dx^2 + \ldots,$$

also wieder, wenn man neuerdings $x = o$ setzt:

$$b = o,$$

und eben so erhält man

$$c = o, \quad d = o \quad \text{u. f.}$$

§. 35. (Sonderung der Unbekannten.) Die Bestimmung der *Wurzeln* einer gegebenen Gleichung zwischen x und constanten Gröſsen ist eine der wichtigsten Aufgaben der mathematischen Analysis. Man nennt diese Bestimmung der Wurzeln die *Auflösung der Gleichung*. Wir werden unten wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Hier wollen wir nur bemerken, daſs diese Auflösung der Gleichungen, so lange sie für x des *ersten* Grades sind, keine Schwierigkeit habe, da sie offenbar nur darin besteht, diese unbekannte Gröſse aus der Gleichung zu sondern, d. h. sie so zu stellen, daſs sie ganz allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht, während die andere Seite bloſs von den constanten oder gegebenen Gröſsen a, b, c, ... der Gleichung ein-genommen wird. Dadurch ist nämlich der Werth der unbekannten Gröſse x durch die bekannten a, b, c, . . . sofort gegeben, oder die Gleichung ist aufgelöst.

Um aber zu dieser Sonderung der Unbekannten zu gelangen, muſs man mit den gegebenen Gleichungen verschiedene Modificationen vornehmen, durch welche man diesen Zweck erreichen kann.

I. Diese Modificationen gründen sich alle darauf, daſs die Gleichheit zweyer Ausdrücke nicht gestört werden kann, wenn man, wie auch zum Theil schon oben geschehen ist, zu jedem dieser Ausdrücke dieselbe Gröſse addirt, oder von ihnen dieselbe Gröſse subtrahirt, oder auch, wenn man beyde Ausdrücke durch dieselbe Gröſse multiplicirt oder dividirt, oder endlich, wenn man jeden dieser Ausdrücke auf dieselbe ganze oder gebrochene Potenz erhebt.

§. 36. (Nähere Erläuterung dieses Verfahrens.) Die in §. 35, I. angeführten Reductionen lassen sich am einfachsten dadurch ausführen, daſs man alles, was auf der einen Seite des Gleichheitszeichens mit der unbekannten Gröſse

verbunden ist	auf die andere Seite bringt
durch Addition,	durch Subtraction, u. umgekehrt.
» Multiplication,	» Division, und umgekehrt.
» Erhebung auf ganze Potenzen,	» Ausziehung der Wurzeln, und umgekehrt.

Diese Vorschriften werden am besten durch Beyspiele erläutert werden.

I. Ist die Gleichung gegeben

$$\frac{x+2}{5} = 1,$$

so wird man zuerst die Gröſse 5, da durch sie die ganze linke Seite afficirt wird, durch Multiplication auf die rechte Seite schaffen, wodurch man erhält

$$x + 2 = 5;$$

und wenn man dann noch die Gröſse $+2$, durch Subtraction, auf die andere Seite bringt:

$$x = 3,$$

wodurch demnach die unbekannte Gröſse x gegeben wird.

II. Ist die Gleichung gegeben

$$2(3+x) - 3 = 7,$$

so wird man zuerst die Gröſse -3, durch Addition, auf die andere Seite bringen, so daſs man hat

$$2(3+x) = 10.$$

In dieser Gleichung muſs wieder zuerst der allgemeine Factor 2 der linken Seite weggebracht werden, wodurch man hat

$$3 + x = 5,$$

und wenn man endlich noch die Gröſse 3 auf die andere Seite bringt:

$$x = 2.$$

Eben so wird man auch mit solchen Gleichungen verfahren, die statt den Ziffern allgemeine Zahlzeichen haben.

III. Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{ax+b}{c} = d,$$

so gibt die Entfernung von c, die hier wieder zuerst vorgenommen werden muſs:

$$ax + b = cd,$$

und dann die von b:

$$ax = cd - b,$$

und endlich die von a:

$$x = \frac{cd-b}{a}.$$

Dieselbe gegebene Gleichung hätte man aber auch so schreiben können:

$$\frac{ax}{c} + \frac{b}{c} = d,$$

und hier gibt die Entfernung von $\frac{b}{c}$ sogleich

$$\frac{ax}{c} = d - \frac{b}{c},$$

und dann die Entfernung von $\frac{a}{c}$

$$x = \frac{c}{a}\left(d - \frac{b}{c}\right),$$

oder wenn man die Klammern auflöst:

$$x = \frac{cd-b}{a}, \text{ wie zuvor.}$$

IV. Erscheint die Gröſse x mehrmal in den Zählern von Brüchen, so kann man sie als gemeinschaftlichen Factor herausnehmen, und dann wie zuvor verfahren.

Ist z. B.

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - c = d$$

gegeben, so hat man auch

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - c = d,$$

oder wenn man die beyden Brüche auf einerley Nenner bringt, und die Gröſse c auf die andere Seite schafft:

$$x\left(\frac{a+b}{ab}\right) = c + d,$$

also auch, wenn man den Factor $\frac{a+b}{ab}$ durch Division wegbringt:

$$x = \frac{ab(c+d)}{a+b}.$$

Ganz eben so wird

$$\frac{a+x}{b} = \frac{c-x}{d} \quad \text{geben} \quad x = \frac{bc-ad}{b+d},$$

und

$$\frac{b+c(d+ax)}{a} = d \quad \text{geben} \quad x = \frac{(a-c)d-b}{ac}.$$

Alle vorhergehenden Gleichungen sind bloſs des ersten Grades. Wenn aber die gegebene Gleichung mehrere verschiedene Potenzen von x enthält, so ist die Sonderung dieser Unbekannten oft mit sehr groſsen, ja mit unübersteiglichen Schwierigkeiten verbunden, und dann muſs man sich oft schon mit dem blossen *Ordnen* (§. 35, I.) der Gleichung begnügen, um wenigstens den Grad derselben bestimmen zu können. Wir werden in der Folge wieder auf diese Untersuchungen zurückkommen.

Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, daſs man den Ausdruck $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ öfter durch eine ähnliche Umformung auf die einfachere Gestalt $x+\sqrt{y}$ bringen kann. Setzt man nämlich beyde Ausdrücke einander gleich, so ist

$$a + \sqrt{b} - x^2 - 2x\sqrt{y} - y = 0.$$

Da aber ein Ausdruck zwischen rationalen und irrationalen Gröſsen nur dann für alle Werthe derselben gleich Null seyn kann, wenn jene, so wie diese, jede für sich, gleich Null sind, so hat man statt der vorhergehenden Gleichung die zwey folgenden:

$$a - x^2 - y = 0 \text{ und } b - 4x^2 y = 0.$$

Wir werden aber in der Folge (§. 69.) sehen, und wir können uns auch schon jetzt durch Nachrechnung überzeugen, daſs aus den beyden letzten Gleichungen für die Werthe von x und y die Ausdrücke folgen:

$$x = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \text{ und } y = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5},$$
$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2},$$
$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ u. f.}$$

Achtes Capitel.

Proportionen.

§. 37. (Erklärung.) Wenn man bey zwey Gröſsen durch Division untersucht, wie oft eine derselben in der anderen enthalten ist, so sucht man dadurch das *Verhältniſs* dieser zwey Gröſsen.

So haben die zwey Zahlen 3 und 12 das Verhältniſs 4, da die erste in der zweyten 4$^{\text{mal}}$ enthalten ist.

Zwey Zahlenpaare, deren Verhältniſs gleich ist, bilden eine *Proportion*. So hat 3 zu 12 dasselbe Verhältniſs, wie 5 zu 20; also bilden auch diese zwey Zahlenpaare eine Proportion, die man auf folgende Weise zu schreiben pflegt:

$$3 : 12 = 5 : 20, \quad \text{oder auch}$$
$$12 : 3 = 20 : 5.$$

§. 38. (Eigenschaft der Proportionen.) In jeder Proportion ist das Product der beyden äuſseren Glieder gleich dem Producte der beyden inneren.

Denn ist überhaupt

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, nach der gegebenen Erklärung einer Proportion, wenn man sie mit dem oben (§. 6, II.) angeführten Zeichen der Division in der Gestalt von zwey Brüchen ausdrückt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Bringt man aber diese beyden Brüche auf einerley Nenner, so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};$$

also auch, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch bd multiplicirt:

$$ad = bc;$$

d. h. in der gegebenen Proportion

$$a : b = c : d$$

ist das Product der zwey äuſseren gleich dem Product der zwey inneren Glieder.

I. Sind die beyden inneren Glieder einander gleich, oder hat man die Proportion

$$A : B = B : C,$$

so ist, nach dem Vorhergehenden,

$$AC = B^2,$$

oder auch

$$B = \sqrt{AC},$$

und man nennt dieses mittlere Glied $B = \sqrt{AC}$ die *mittlere Proportionale* zwischen den beyden anderen Gliedern A und C.

II. Daraus folgt sofort, daſs sich aus je zwey einander gleichen Producten

$$ad = bc$$

immer eine Proportion bilden lasse. Denn dividirt man die letzte Gleichung zu beyden Seiten durch bd, so hat man

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

das heiſst, man hat:

$$a : b = c : d.$$

§. 39. (Bestimmung eines Gliedes der Proportion aus den drey anderen.) Wenn drey Glieder einer Proportion gegeben sind, so läſst sich dadurch auch das vierte bestimmen. Denn ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d, \text{ so ist auch}$$
$$ad = bc.$$

Ist daher z B. das letzte Glied d unbekannt, so hat man, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch a dividirt,

$$d = \frac{bc}{a},$$

und eben so für jedes der übrigen drey Glieder. — Überhaupt ist jedes äuſsere Glied gleich dem Producte der zwey inneren, dividirt durch das andere äuſsere — und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der zwey äuſseren, dividirt durch das andere innere.

Dieser einfache, aber sehr nützliche Satz ist unter der Benennung der *Regeldetri* bekannt.

§. 40. (Veränderungen der Proportionen.) Eine Proportion kann mannigfaltige Veränderungen erleiden, ohne daſs dadurch die Gleichheit ihrer Verhältnisse gestört wird. Wir führen nur die vorzüglichsten derselben kurz an.

I. *Umkehrung der Verhältnisse.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch sofort

$$b : a = d : c,$$

wie schon für sich klar ist.

II. *Verwechslung der inneren Glieder.*

Ist

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a : c = b : d,$$

da beyde Proportionen auf die ihnen gemeinsame Gleichung

$$ad = bc$$

zurückgeführt werden können.

III. *Addition und Subtraction der einzelnen Glieder.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch

$$a \pm b : c \pm d = b : d,$$

und eben so

$$a \pm c : b \pm d = a : b,$$

weil auch die beyden letzten Proportionen sich wieder auf die Gleichung

$$bc = ad,$$

das heiſst, auf die gegebene Proportion

$$a : b = c : d$$

zurückführen lassen.

IV. *Multiplication der beyden ersten, oder der beyden letzten Glieder durch dieselbe Gröſse.*

Ist die Proportion gegeben

$$a : b = c : d,$$

so ist auch, für jeden Werth der Gröfse m,

$$am : bm = c : d,$$

und eben so

$$a : b = cm : dm,$$

da jede der zwey letzten Proportionen wieder die Gleichung gibt

$$ad = bc.$$

§. 41. (Verbindung mehrerer Proportionen unter einander.) Die Producte gleichliegender Glieder von zwey oder mehreren Proportionen sind ebenfalls proportionirt.

Sind nämlich die zwey Proportionen gegeben

$$a : b = c : d \text{ und}$$
$$e : f = g : h,$$

so ist auch sofort

$$ae : bf = cg : dh.$$

Denn die erste Proportion gibt $ad = bc$, und die zweyte gibt eben so $eh = fg$, also ist auch

$$ad \,.\, eh = bc \,.\, fg,$$

oder, was dasselbe ist,

$$ae \,.\, dh = cg \,.\, bf,$$

also auch

$$ae : bf = cg : dh.$$

I. Daraus folgt sofort:

Sind die zwey Proportionen gegeben

$$\left.\begin{array}{r} a : b = c : d \\ \text{und } \; b : e = d : f \end{array}\right\},$$

so hat man auch

$$a : e = c : f.$$

II. Sind eben so die zwey Proportionen gegeben

$$\left.\begin{array}{r} a : b = c : d \\ \text{und } \; b : e = f : c \end{array}\right\},$$

so hat man auch

$$a : e = f : d.$$

III. Sind endlich die zwey Proportionen gegeben

$$\left.\begin{array}{r} a : b = c : d \\ \text{und } \; e : f = d : g \end{array}\right\},$$

so hat man auch

$$ae : bf = c : g,$$

und dieser Satz III. ist unter dem Namen der *Regelquinque* bekannt.

IV. Das Verfahren in III. gibt, wenn man es auf mehrere Proportionen fortsetzt, die sogenannte *Kettenregel* oder den folgenden Satz:

Sind die Proportionen gegeben:

$$a : b = A : B,$$
$$c : d = B : C,$$
$$e : f = C : D,$$
$$g : h = D : E \text{ u. f.},$$

so besteht zwischen diesen Gröſsen auch die Proportion

$$aceg : bdfh = A : E.$$

Neuntes Capitel.

L o g a r i t h m e n.

§. 42. (Exponentialgröſsen.) Wenn in dem Ausdrucke

$$y = a^x,$$

wo a eine constante, x und y aber eine veränderliche Gröſse bezeichnet, der Exponent x bekannt oder gegeben ist, so wird man, nach dem Vorhergehenden, immer den entsprechenden Werth von y finden können. So hat man z. B. wenn $a = 2$ ist,

für $x = 2$ den Werth von $y = 4$,
» $x = 3$ » » » $y = 8$ u. f.,

und selbst wenn x irgend ein Bruch, z. B. gleich $\frac{1}{2}$ ist, so wird $y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ seyn, eine irrationale Gröſse, deren Werth man aber nach §. 29, II. der Wahrheit so nahe, als man nur will, finden kann, wie wir weiter unten sehen werden.

Wenn aber umgekehrt in dem gegebenen Ausdrucke

$$y = a^x$$

die Gröſse y die bekannte Zahl ist, oder wenn man z. B. die Gleichung hat:

$$2^x = 3,$$

so bietet alles Vorhergehende kein Mittel dar, denjenigen Werth von x zu finden, welcher der Gleichung $2^x = 3$ entspricht.

Man nennt aber solche Ausdrücke, wie a^x, wo der Exponent die unbekannte oder veränderliche Gröſse ist, *Exponentialgröſsen*, zum Unterschiede mit den *gewöhnlichen Potenzen*

$$x^a \quad \text{oder} \quad (1 + x)^a,$$

in welcher der Exponent a constant ist.

Diese Exponentialgröſsen bilden, so wie die irrationalen Zahlen, ein eigenes, weitverbreitetes Geschlecht von Gröſsen, das sich von allen anderen wesentlich unterscheidet, und das in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielt. Man heiſst sie, und die mit ihr verwandten, *transcendente* Gröſsen, zum Unterschiede mit den bisher betrachteten, die man *algebraische* Gröſsen zu nennen pflegt.

Um diesen Unterschied besser zu übersehen, wollen wir z. B. in der *Potenz*

$$y = x^a$$

für a die constante Gröſse 2, und dann für x die auf einander folgenden Werthe $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ setzen, wodurch man für die entsprechenden Werthe von $y = 1, 4, 8, 16, \ldots$ erhält. Eben so gibt $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ die Werthe $y = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$, wo immer die Werthe von y nach einem constanten und sehr einfachen Gesetze auf einander folgen.

Ähnliche Resultate erhält man auch, wenn man für x dieselben Gröſsen 1, 2, 3, ... aber negativ annimmt u. s. f.

Anders aber verhalten sich die auf einander folgenden Werthe der *Exponentialgröſse* a^x. Nimmt man in derselben für die constante Gröſse a z. B. die Zahl -2, so erhält man

$$\begin{array}{lllllll} \text{für} & x & = 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ & a^x & = -2, & +4, & -8, & +16, \ldots \\ \text{und für} & x & = -1, & -2, & -3, & -4, \ldots \\ & a^x & = -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{8}, & +\frac{1}{16}, \ldots \end{array}$$

so daſs also hier die positiven Gröſsen mit den negativen abwechseln.

Setzt man aber für x die reciproquen natürlichen Zahlen, oder ist

$$x = 1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{5}, \ldots,$$

so hat man $a^x = -2, \sqrt{-2}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{-2}, -\sqrt[5]{2}, \ldots$

wo sogar die reellen Werthe mit den imaginären wechseln.

Setzt man ferner die Gröſse a gleich Null, so hat man, so lange x positiv bleibt, wie groſs dasselbe auch werden mag, immer

$$a^x = 0^x = 0.$$

Wird aber x ebenfalls Null, so erhält man

$$a^x = a^0 = 1,$$

und erhält endlich x irgend einen negativen Werth, z. B. $x = -1$, so hat man

$$a^x = \frac{1}{a} = \frac{1}{0} \text{ für } a = 0,$$

oder a^x wird dann unendlich grofs (§. 23, II.).

Noch auffallendere Sprünge erhält man, wenn x irgend eine irrationale Gröfse, z. B. wenn $x = \sqrt{2}$ wird. Nach dem oben (§. 30, II.) Erwähnten ist annähernd:

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

Setzt man also wieder die Gröfse $a = +2$, und nimmt man von der vorhergehenden Wurzelgröfse nach und nach immer mehr genäherte Werthe, und bemerkt man, dafs (nach §. 32, II.) jede Gröfse $a^{\frac{1}{m}}$ immer eine Anzahl von m reeller oder imaginärer Werthe hat, so erhält

für $\sqrt{2} = \frac{14}{10}$ die Gröfse $a^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$ ... zehn,
» $\sqrt{2} = \frac{141}{100}$ » » » » ... hundert,
» $\sqrt{2} = \frac{1414}{1000}$ » » » » ... tausend u. f.

verschiedene Werthe, ja die wahre Anzahl dieser Werthe wird in der That unendlich grofs seyn, da der wahre Werth von $\sqrt{2}$ selbst nur durch einen ohne Ende fortgehenden Bruch angegeben werden kann.

Wäre endlich noch die Gröfse a negativ, und z. B. $a = -2$, und wie zuvor $x = \sqrt{2}$ eine irrationale Gröfse, so hätte man

$$(-2)^{\sqrt{2}},$$

und von diesem Ausdrucke läfst sich nicht einmal angeben, ob er zu den reellen oder zu den imaginären Gröfsen gehört, da man nicht sagen kann, ob $\sqrt{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Diefs wird genügen, die Verschiedenheit der transcendenten und algebraischen Gröfsen zu erkennen.

§. 43. (Logarithmen.) Gehen wir wieder zu unserer Gleichung

$$y = a^x$$

zurück. Obschon wir, wie gesagt, den Werth des Exponenten x für jeden gegebenen Werth von y jetzt noch nicht bestimmen können, so ist doch klar, dafs dieser Werth von x, für dasselbe y, seinen Werth mit der constanten Gröfse a ändern werde, dafs er

z. B. ein anderer für $3 = 2^x$, als für $3 = 4^x$ oder $3 = 5^x$ ... seyn werde. Die gesuchte Gröſse x wird also nicht bloſs von y, sondern auch von demjenigen Werthe abhängen, den man der constanten Gröſse a gegeben hat. — Wir wollen im Folgenden annehmen, daſs diese Gröſse a positiv und gröſser, als die Einheit ist, ohne weiter etwas Näheres über ihren absoluten Werth festzusetzen.

Da wir noch sehr oft auf das Problem zurückkommen werden, aus dem Ausdrucke

$$a^x = y$$

die Gröſse x für jedes gegebene a und y zu finden, so wollen wir dieser Groſse x eine eigene Bezeichnung geben, und sie den *Logarithmus* von y nennen, was wir abkürzend auf folgende Art ausdrücken:

$$x = \operatorname{Log} y.$$

Die constante Zahl a aber, die, als solche, immer denselben, übrigens willkürlichen Werth beybehält, während die beyden Gröſsen x und y sich ändern, wollen wir die *Basis* dieser Logarithmen nennen.

Wäre also z. B. die Basis $a = 10$, so hätte man die Gleichung

$$10^x = y,$$

und da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ u. f. ist, so würde man auch, für diese Basis, haben:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} 1 &= 0, \\ \operatorname{Log} 10 &= 1, \\ \operatorname{Log} 100 &= 2, \\ \operatorname{Log} 1000 &= 3 \quad \text{u. f.} \end{aligned}$$

Wie man aber die Logarithmen der zwischen diesen Zahlen 1, 10, 100, ... fallenden Gröſsen, wie man also Log 2, Log 3, Log 4, ... finden soll, ist jetzt noch nicht bekannt.

Da übrigens die Logarithmen aus der Exponentialgröſse a^x unmittelbar entspringen, so gehören auch sie, nach §. 42, zu den *transcendenten* Gröſsen.

§. 44. (Eigenschaften der Logarithmen.) Wie es sich aber auch mit dieser Bestimmung der Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl verhalten mag, so lassen sich doch hier schon einige sehr merkwürdige Eigenschaften derselben aus den zwey für sie aufgestellten Gleichungen

$$a^x = y \quad \text{und} \quad x = \text{Log}\, y$$

ableiten.

I. Da nämlich zuerst, für jeden Werth der Basis a, die positiv und > 1 ist, wenn man $x = 0$ setzt, der Werth von $y = 1$ wird, so hat man auch für jede Basis

$$\text{Log}\, 1 = 0.$$

Und da eben so $y = a$ für $x = 1$ wird, so hat man auch

$$\text{Log}\, a = 1.$$

Das heiſst also: »Für jeden Werth der Basis a, oder für »jedes logarithmische System, ist der Logarithmus dieser Basis »immer gleich der Einheit, und der Logarithmus der Einheit ist »immer gleich Null.«

II. Da $a^x = y$ ist, wo x und y willkürliche Zahlen bezeichnen, so ist auch, wenn u und z ähnliche Zahlen ausdrücken,

$$a^u = z.$$

Man hat daher, nach der in §. 43. gegebenen Erklärung eines Logarithmus

$$x = \text{Log}\, y, \quad \text{und eben so} \quad u = \text{Log}\, z.$$

Allein nach §. 29, II. ist

$$a^x \cdot a^u = a^{x+u} \quad \text{oder}$$
$$a^{x+u} = y \cdot z,$$

also ist auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$x + u = \text{Log}\,(y \cdot z),$$

das heiſst, es ist

$$\text{Log}\,(y \cdot z) = \text{Log}\, y + \text{Log}\, z,$$

oder »der Logarithmus eines Products zweyer Zahlen ist gleich »der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.«

So war in dem vorhergehenden Beyspiele für $a = 10$

$$\text{Log}\, 10 = 1 \quad \text{und} \quad \text{Log}\, 100 = 2,$$

also ist auch

$$\text{Log}\, 10 \times 100 \quad \text{oder} \quad \text{Log}\, 1000 = \text{Log}\, 10 + \text{Log}\, 100,$$

das heiſst, es ist

$$\text{Log}\, 1000 = 1 + 2 = 3, \quad \text{wie zuvor.}$$

Es ist für sich klar, daſs sich dasselbe auch auf Producte von mehr als zwey Factoren fortsetzen läſst. Denn setzt man statt y die Gröſse $x.y$, was man kann, da x und y ganz willkürliche Gröſsen sind, so gibt die letzte Gleichung

$$\mathrm{Log}\,(x.y.z) = \mathrm{Log}\,(x.y) + \mathrm{Log}\,z,$$

und da bereits $\mathrm{Log}\,(x.y) = \mathrm{Log}\,x + \mathrm{Log}\,y$ ist, so hat man auch

$$\mathrm{Log}\,(x.y.z) = \mathrm{Log}\,x + \mathrm{Log}\,y + \mathrm{Log}\,z \quad \text{u. s. f.}$$

III. Ganz auf dieselbe Weise ist auch

$$\frac{a^x}{a^u} = a^{x-u} \quad \text{oder} \quad a^{x-u} = \frac{y}{z},$$

und daher

$$x - u = \mathrm{Log}\,\frac{y}{z},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mathrm{Log}\,\frac{y}{z} = \mathrm{Log}\,y - \mathrm{Log}\,z,$$

d. h.: »der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Loga»rithmus des Dividends, weniger dem des Divisors.«

IV. Endlich ist noch (nach §. 29, II.)

$$(y^x)^u = y^{xu},$$

also auch, nach derselben Erklärung des Logarithmus,

$$u\,\mathrm{Log}\,y^x = xu\,\mathrm{Log}\,y,$$

oder, wenn man beyde Glieder dieses Ausdrucks durch u dividirt,

$$\mathrm{Log}\,y^x = x\,\mathrm{Log}\,y,$$

d. h.: »der Logarithmus einer Potenz y^x ist gleich dem Producte »des Exponenten x in dem Logarithmus der Gröſse y.«

Da in dem letzten Ausdrucke die willkürliche Gröſse x auch ein Bruch seyn kann, so hat man, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt,

$$\mathrm{Log}\,y^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\,y,$$

oder, was dasselbe ist (§. 29.),

$$\mathrm{Log}\,\sqrt[x]{y} = \frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\,y,$$

d. h.: »der Logarithmus der x^{ten} Wurzel aus einer jeden Zahl y »ist gleich dem x^{ten} Theile des Logarithmus dieser Zahl y selbst.«

Aus dem Vorhergehenden folgt demnach, dafs durch die Logarithmen verwandelt wird:

die Multiplication . . . . in Addition,
» Division . . . . » Subtraction,
» Erhebung auf ganze Potenzen . . » Multiplication,
» Ausziehung der Wurzeln . . . . . » Division.

Wenn daher, für irgend eine Basis a, die Logarithmen aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . bereits berechnet und in eine Tafel gebracht wären, so würden dadurch alle gröfseren und oft sehr zeitraubenden Rechnungen ungemein erleichtert werden, so zwar, dafs die Arbeit mehrerer Monate auf die einiger Stunden herabgebracht, und dadurch das Leben des Geometers gleichsam vielfach verlängert werden könnte.

Die Logarithmen sind daher eine der nützlichsten und wichtigsten Entdeckungen, und der menschliche Geist darf sich dieser Eroberung auf dem Gebiete der Wissenschaft um so mehr erfreuen, da er sie nicht dem Zufalle oder einer äufseren Einwirkung, sondern da er sie ganz sich selbst verdankt, während ihm bey den meisten anderen seiner Erfindungen, besonders in den Künsten und Manufacturen, die Veranlassung sowohl, als auch selbst den Stoff zu seiner Entdeckung erst von aufsen entgegengeführt werden mufs.

§. 45. (Vergleichung der Logarithmen verschiedener Systeme.) Das Vorhergehende bezieht sich auf solche Logarithmen, deren Basis eine bestimmte Zahl a ist, und wir haben für die Logarithmen dieses Systems die Gleichungen aufgestellt:

$$y = a^x, \quad x = \operatorname{Log} y \quad \text{und} \quad \operatorname{Log} a = 1.$$

Betrachten wir nun irgend ein anderes System, dessen Basis wir durch e bezeichnen wollen, und bezeichnen wir die Logarithmen dieses zweyten Systems, zum Unterschiede mit jenen, durch das analoge Symbol *log*, so dafs man, wenn y dieselben Zahlen wie vorher bedeutet, für dieses zweyte System die Gleichungen hat:

$$y = e^u, \quad u = \log y \quad \text{und} \quad \log e = 1,$$

wo demnach u eine solche Zahl ist, die für e^u denselben Werth, nämlich y gibt, wie x für a^x gegeben hat.

Wenn man die beyden vorhergehenden Gleichungen

$$x = \mathrm{Log}\,y \quad \text{und} \quad u = \log y$$

durch einander dividirt, so erhält man

$$\frac{\mathrm{Log}\,y}{\log y} = \frac{x}{u}$$

für das Verhältniſs der Logarithmen derselben Zahl y in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist.

Allein dieses Verhältniſs der beyden Logarithmen $\mathrm{Log}\,y$ und $\log y$ kann, wenn es sonst ein veränderliches Verhältniſs ist, nur von der Gröſse y selbst abhängig, oder es kann bloſs eine Function (§. 34.) von y seyn, die wir, da wir sie noch nicht kennen, allgemein durch $f(y)$ bezeichnen wollen, so daſs man demnach hat:

$$\mathrm{Log}\,y = f(y)\,.\,\log y.$$

Da aber in diesen Ausdrücken die Gröſse y ganz willkürlich ist, so wird man auch statt ihr irgend eine Potenz derselben, z. B. y^n setzen können, so daſs man also auch die Gleichung haben wird:

$$\mathrm{Log}\,(y^n) = f(y^n)\,.\,\log(y^n).$$

Allein nach §. 44, IV. hat man für den Logarithmus eines jeden Systems

$$\mathrm{Log}\,(y^n) = n\,\mathrm{Log}\,y, \quad \text{und eben so}$$
$$\log(y^n) = n\log y,$$

so daſs demnach die vorhergehende Gleichung in die folgende übergeht:

$$\mathrm{Log}\,y = f(y^n)\,.\,\log y,$$

und diese, mit der ersten Gleichung

$$\mathrm{Log}\,y = f(y)\,.\,\log y$$

verglichen, zeigt, daſs

$$f(y^n) = f(y),$$

das heiſst, daſs die gesuchte Function $f(y)$ der Art ist, daſs sie ihren Werth nicht ändert, wenn man auch in ihr statt y irgend eine Potenz y^n setzt, wo n eine ganz willkürliche Gröſse bezeichnet. Daraus folgt aber sofort, daſs $f(y)$ von y selbst ganz und gar nicht abhängig seyn kann, daſs also $f(y)$ irgend eine constante Gröſse seyn muſs, die wir gleich m setzen wollen, so daſs man daher hat:

$$\text{Log}\, y = m \,.\, \log y,$$

d. h. also, das Verhältniſs der Logarithmen *derselben* Zahlen y in zwey verschiedenen Systemen ist für alle Zahlen dasselbe, oder ist eine constante Gröſse.

I. Um diese Constante m näher zu bestimmen, so hat man, wenn man die beyden obigen Werthe von y, nämlich

$$y = a^x \quad \text{und} \quad y = e^u$$

einander gleich setzt:

$$a^x = e^u.$$

Nimmt man von den beyden Gliedern dieser Gleichung die Logarithmen des einen sowohl, als auch des anderen Systems, so hat man

$$\left.\begin{array}{r} x\,\text{Log}\, a = u\,\text{Log}\, e \\ \text{und} \;\; x \,\log a = u\, \log e \end{array}\right\}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden,

$$\frac{x}{u} = m \quad \text{und} \quad \text{Log}\, a = \log e = 1$$

ist, so gehen die beyden letzten Gleichungen in folgende einfachere über:

$$\left.\begin{array}{r} m = \text{Log}\, e \\ \text{und} \;\; m = \dfrac{1}{\log a} \end{array}\right\},$$

wodurch demnach die gesuchte constante Gröſse m auf doppelte Weise bestimmt ist.

Kennt man also bereits den Logarithmus einer Zahl y in dem einen der beyden Systeme, z. B. in dem ersten, dessen Basis a ist, oder kennt man bereits die Gröſse $\text{Log}\, y$, so hat man auch sofort den Logarithmus derselben Gröſse y in dem zweyten Systeme durch die Gleichung

$$\log y = \log a \,.\, \text{Log}\, x = \frac{1}{m} \,.\, \text{Log}\, x,$$

und eben so hat man auch umgekehrt

$$\text{Log}\, y = \text{Log}\, e \,.\, \log y = m \,.\, \log y,$$

und endlich, wie aus diesen beyden Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\log a \,.\, \text{Log}\, e = 1.$$

Zehntes Capitel.

Änderungen der Functionen oder Principien der Differentialrechnung.

§. 46. (Erklärung.) Wenn in irgend einem analytischen Ausdruck u, der eine veränderliche Gröſse x, und überdieſs vielleicht noch mehrere constante Gröſsen a, b, c, . . . enthält, oder wenn in irgend einer *Function* (§. 34.) von x, welche Function wir allgemein durch

$$u = f(x)$$

bezeichnen wollen, diese Stammgröſse x sich ändert und z. B. in $x + h$ übergeht, so wird auch die Function $f(x)$ sich ändern, oder einen anderen Werth annehmen, und in

$$u' = f(x + h)$$

übergehen, und man wird die auf diese Weise erfolgte Änderung $(u' - u)$ der Function erhalten, wenn man diese beyden Werthe u' und u, welche die Function für jene beyden Werthe von x hat, von einander abzieht.

Eben so wird also auch das *Verhältniſs* der Änderung $(u' - u)$ der Function, zu der Änderung h ihrer Stammgröſse x gleich seyn

$$\frac{u' - u}{h} \text{ oder } \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Hat man z. B., um dieſs sogleich durch einen besonderen Fall zu erläutern, die Function

$$u = f(x) = a x^2$$

gegeben, und geht x über in $x + h$, so erhält man

$$u' = f(x + h) = a\,(x + h)^2,$$

und wenn man die Potenz $(x + h)^2$ (nach §. 21, 1.) entwickelt:

$$u' = a\,(x^2 + 2hx + h^2).$$

Zieht man von diesem Ausdrucke den früheren Werth desselben, oder $u = ax^2$ ab, und dividirt den Rest durch h, so hat man:

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah.$$

Dieses Verhältniſs $\frac{u' - u}{h}$ der beyden Änderungen, der Function und ihrer Stammgröſse, besteht also, wie man sieht, aus *zwey* Theilen $2ax$ und ah, die wesentlich von einander verschieden sind. Der erste Theil $2ax$ ist nämlich, da er die Gröſse h nicht mehr enthält, von dieser Änderung der Stammgröſse ganz unabhängig, oder er behält immer denselben Werth jener Änderung, h mag groſs oder klein gewesen seyn. Nicht so der zweyte Theil oder die Gröſse ah, die allerdings von h abhängt und die offenbar immer kleiner ist, je kleiner diese erste Änderung h der Stammgröſse x selbst genommen wird.

Je kleiner also diese Änderung h wird, desto mehr nähert sich das Verhältniſs

$$\frac{u' - u}{h}$$

dem ersten Gliede seines vorhergehenden Ausdrucks, oder desto mehr nähert sich dieses Verhältniſs dem Werthe $2ax$, als einer *Grenze*, welcher dieses Verhältniſs, bey immer abnehmendem Werthe von h, immer näher tritt, und welche es offenbar nur dann als in der That erreichend betrachtet werden kann, wenn die Gröſse h selbst so klein geworden ist, daſs sie schon ganz auſser unserer Betrachtung fallend angenommen werden kann, oder wenn diese Gröſse h kleiner noch geworden ist, als jede andere uns noch angebbare Gröſse, in welchem Zustande dann die Gröſse h (nach §. 23, II.) eine *unendlich kleine* Gröſse genannt zu werden pflegt.

Da wir uns mit diesem letzten Zustande von stets abnehmenden Gröſsen fortan öfter beschäftigen werden, so wird es, zur gröſseren Kürze und Deutlichkeit des Vortrags, angemessen seyn, für diese äuſsersten Grenzwerthe der Gröſsen eine eigene Bezeichnung einzuführen. Wir wollen demnach diese Änderung h der Stammgröſse x, wenn sie in jenem Zustand der letzten Abnahme übergegangen, oder wenn sie, in dem so eben aufgestellten Sinne des Wortes, unendlich klein geworden ist, durch das Symbol dx bezeichnen, so daſs demnach die durch sie erzeugte, im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Änderung $u' - u$ der Function, auch durch das Zeichen du angezeigt werden wird.

Demnach wird also die vorhergehende Gleichung

$$\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah,$$

für den Zustand der letzten Abnahme von h, oder für den Fall, wo diese Änderung h der Stammgröſse x kleiner, als jede andere noch angebliche Gröſse geworden ist, durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\frac{du}{dx} = 2ax.$$

I. Man pflegt die Gröſsen dx und du das *Differential* der Stammgröſse x und ihrer Function u, so wie das Verhältniſs $\frac{du}{dx}$ den *Differentialcoefficienten* der Function u zu nennen. Der Differentialcoefficient einer Function ist daher als die äuſserste Grenze des Verhältnisses, der Änderung der Function zu der Änderung ihrer Stammgröſse, zu betrachten, oder als diejenige Grenze, welcher sich dieses Verhältniſs immer mehr nähert, je kleiner die Änderung der Stammgröſse x wird, bis es endlich, für eine unendlich kleine Änderung dx dieser Stammgröſse, jene Grenze selbst erreicht.

Ganz eben so hat man in einem zweyten Beyspiele, wenn die Function

$$u = ax^3$$

gegeben ist, und wenn in ihr die Gröſse x wieder in $x + h$ übergeht:

$$u' = a(x + h)^3,$$

oder wenn man entwickelt, wie zuvor:

$$\frac{u' - u}{h} = a(3x^2 + 3hx + h^2).$$

Auch hier ist, wie man sieht, bloſs das erste Glied $3ax^2$ des Verhältnisses $\frac{u' - u}{h}$ von der Gröſse h unabhängig, so daſs demnach hier ebenfalls dieses Glied wieder die Grenze seyn wird, welcher sich jenes Verhältniſs immer mehr nähert, je kleiner h angenommen wird, und daſs daher dieses letzte Grenzverhältnifs, wenn h gleich dx oder unendlich klein geworden ist, durch die einfache Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

ausgedrückt wird, und so fort in allen anderen Fällen.

Man sieht daraus, dafs, wenn auch die beyden Änderungen du und dx, der Function und ihrer Stammgröfse, jede für sich, unendlich klein geworden sind, dafs doch das *Verhältnifs dieser Aenderungen* demungeachtet noch eine endliche Gröfse seyn kann, d. h. dafs, wenn auch die Gröfsen du und dx, wegen ihrer Kleinheit, von uns nicht mehr angegeben werden können, da sie in der That, der aufgestellten Erklärung zu Folge, noch unter jeder angebbaren Gröfse stehen sollen, dafs demungeachtet das *Verhältnifs* dieser an sich selbst nicht mehr angebbaren Gröfsen, noch immer sehr wohl angegeben werden kann, oder endlich, dafs, wenn auch die *Differentialien* zweyer Gröfsen, du und dx, unendlich klein sind, doch das Verhältnifs derselben oder der *Differentialcoefficient* $\frac{du}{dx}$ noch immer eine endliche Gröfse, deren Werth von uns vollkommen bestimmbar ist, seyn kann.

Diefs vorausgesetzt, wird es nun unsere Aufgabe seyn, diesen Differentialcoefficienten, oder dieses Grenzverhältnifs der Änderung der Function und ihrer Stammgröfse, für jede angegebene Function, z. B. für die Potenz x^a, oder für die Exponentialgröfse a^x, oder für den Logarithmus $\log x$ u. f. zu bestimmen. Diese Bestimmungen machen den Gegenstand der sogenannten *Differentialrechnung* aus. — Ehe wir aber zu diesem Geschäfte übergehen, wird es angemessen seyn, einige Bemerkungen über dasselbe vorauszuschicken.

§. 47. (Einfachere Darstellung und Erweiterung des Vorhergehenden.) Das in unserem vorhergehenden ersten Beyspiele erhaltene Grenzverhältnifs

$$\frac{du}{dx} = 2ax$$

läfst sich auch, in Gestalt einer gewöhnlichen Gleichung, auf folgende Art ausdrücken:

$$du = 2ax \,.\, dx,$$

in welcher Gleichung a und x endliche, du und dx aber unendlich kleine Gröſsen bezeichnen.

Um aber zu dieser Gleichung zu gelangen, kann man annehmen, daſs sie aus der analogen, früher (in §. 46.) erhaltenen Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = (2ax + adx) \quad \text{oder}$$

$$du = (2ax + adx)\,dx,$$

und zwar *dadurch* entstanden ist, daſs man, in diesem letzten Ausdrucke, die unendlich kleine Gröſse adx gegen die endliche $2ax$ *weggelassen* hat, wie man wohl, der oben aufgestellten Erklärung einer unendlich kleinen Gröſse zu Folge, berechtigt zu seyn annehmen darf, da die unendlich kleine Gröſse adx, die kleiner als jede von uns noch angebbare Gröſse ist, auf die allerdings noch angebliche, endliche Gröſse $2ax$, keinen für uns mehr bemerkbaren Einfluſs äuſsern kann, oder da diese beyden Gröſsen

$$2ax \quad \text{und} \quad 2ax + adx,$$

in Beziehung auf die Angabe ihres absoluten Werthes, von uns, der aufgestellten Definition zu Folge, nicht mehr unterschieden werden können.

Auf gleiche Weise haben wir in unserem zweyten Beyspiele des §. 46. aus dem gegebenen Ausdrucke

$$u = ax^3$$

für die Differenz $u' - u$ oder für du erhalten:

$$du = a\,(3x^2 + 3x\,dx + dx^2)\,.\,dx,$$

einen Ausdruck, den man auch so darstellen kann:

$$du = [3ax^2 + a\,(3x + dx)\,.\,dx]\,.\,dx.$$

Läſst man hier wieder die unendlich kleine Gröſse dx gegen die endliche $3x$ in dem Gliede $(3x + dx)$ weg, so erhält man

$$du = [3ax^2 + 3ax\,dx]\,.\,dx,$$

oder, was dasselbe ist:

$$du = 3ax\,(x + dx)\,.\,dx,$$

und daher, wenn man auch hier wieder, analog dasselbe Verfahren anwendend, statt $x + dx$ die Gröſse x setzt,

$$du = 3ax^2\,dx,$$

oder auch

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2, \text{ wie zuvor.}$$

Man kömmt daher zu demselben Zwecke, wenn man, wie in §. 46, das Grenzverhältniſs der Änderung einer Function zur Änderung ihrer Stammgröſse sucht, oder wenn man, wie hier, die Veränderung du einer Function u, die aus einer Änderung dx ihrer Stammgröſse x folgt, unter der Voraussetzung sucht, daſs man, bey diesem zweyten Verfahren, diese Änderung dx so klein annimmt, daſs sie gegen jede andere, endliche, noch angebbare Gröſse als völlig verschwindend betrachtet, und daher, jener Gröſse gegenüber, ganz weggelassen werden kann

Beyde Verfahren führen zu demselben Resultate, aber das letzte ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, obschon es übrigens nur als ein, wegen dieser Einfachheit eingeführter, abgekürzter Ausdruck des ersten, gleichsam als eine Redens- oder Schreibart zu betrachten ist, deren man sich, als eines bequemen Mittels zu demselben Zwecke, bedienen kann, wenn man ihr die oben (§. 46.) gegebene Bedeutung zu Grunde legt.

I. Demnach besteht, dieser zweyten Darstellungsweise zu Folge, das *Princip* der Differentialrechnung darin, »daſs man »zwey endliche Gröſsen, welche unter sich nur durch eine un»endlich kleine Gröſse verschieden sind, als *völlig gleiche* Grös»sen betrachtet,« weil man, nach der vorhergehenden Erklärung des Wortes *unendlich klein*, zwischen jenen zwey Gröſsen keinen Unterschied, keine weiter noch angebliche Ungleichheit auffinden kann.

II. Wenn man aber diesen Begriff der unendlich kleinen Gröſsen einmal eingeführt hat, so folgt daraus unmittelbar, daſs die Verhältnisse dieser, so wie die der endlichen Gröſsen, unter einander sehr verschieden, und selbst wieder unendlich klein seyn können. Ist z. B. dx eine unendlich kleine Gröſse, so ist das Verhältniſs des Quadrats derselben zu ihr selbst gleich

$$\frac{dx^2}{dx}, \text{ also gleich } dx;$$

d. h. dieses Verhältniſs ist selbst wieder unendlich klein, so daſs man daher, nach demselben oben aufgestellten Princip, die

Gröſse dx^2 gegen dx weglassen, oder daſs man die beyden Ausdrücke

$$dx + dx^2 \quad \text{und} \quad dx$$

als nicht mehr unter sich verschieden, sondern als vollkommen identisch betrachten muſs, wie dieſs auch schon oben, bey unserem zweyten Beyspiele, geschehen ist, wo man in der Gleichung

$$du = a\,(3x^2 + 3x\,dx + dx^2)\,.\,dx$$

die Gröſse $3x\,dx + dx^2$ gleich $3x\,dx$ angenommen hat. In der That ist auch

$$dx + dx^2 = dx\,(1 + dx),$$

und da, nach dem erwähnten Princip, $1 + dx = 1$ ist, so muſs auch

$$dx + dx^2 = dx$$

seyn.

Man pflegt aber solche Gröſsen, wie dx^2, *unendlich kleine Gröſsen der zweyten Ordnung* zu nennen, und diese überhaupt durch d^2x anzudeuten, so daſs demnach Ausdrücke der Form

$$d^2u, \quad dx^2, \quad du\,.\,dx \quad \text{u. f.}$$

als unendlich kleine Gröſsen der zweyten Ordnung anzusehen sind, weil ihr Verhältniſs zu den unendlich kleinen Gröſsen du, dx, dy, . . . der ersten Ordnung selbst wieder unendlich klein ist.

Ganz eben so wird man auch Ausdrücke der Art,

$$d^3u, \quad dx^3, \quad d^2u\,.\,dx, \quad du\,.\,dx\,.\,dy \quad \text{u. f.}$$

zu den unendlich kleinen Gröſsen der dritten Ordnung zählen u. s. f.

III. Übrigens wird man auf diesen Begriff der unendlich kleinen Gröſsen durch die uns von allen Seiten umgebenden Erscheinungen der Natur gleichsam von selbst geführt, und man kann sie daher keineswegs, wie manche glauben, als bloſse Einbildungen betrachten, welche sich die Geometer zu ihren Speculationen ausgedacht haben, und von denen sich, auſser dieser Einbildung, kein reeller Grund nachweisen läſst. So wächst die Zeit durch die Aufeinanderfolge von Momenten, deren Intervalle kleiner sind, als jede andere, noch angebbare, wenn auch noch so kleine Zeit. So wächst die von einem bewegten Körper beschriebene gerade oder krumme Linie auf eine Weise, daſs der zwischen je zwey nächsten Puncten dieser Linie enthaltene Raum kleiner ist, als jede andere noch angebliche Linie u. f. Aus diesem Grunde wird man auch jene krummen Linien in der Geometrie, unserem aufgestellten Princip gemäfs, als Vielecke von unendlich vielen, aber unendlich kleinen, *geradlinigen* Seiten betrachten können, und die auf diese Betrachtungen gegründeten Resultate werden mit denjenigen als identisch zusammenfallen, die unmittelbar aus dem Begriffe der *stetigen* Aufeinanderfolge der Puncte hervorgehen, die ein in Bewegung begriffener, und dadurch diese Linie beschreibender Punct nach und nach einnimmt. — Ein in einem Kreise eingeschriebenes, oder ihm umschriebenes Vieleck wird diesem Kreise desto näher kommen, je kleiner die Seiten dieses Vieleckes sind, und beyde, Kreis und Vieleck, werden als ganz identische Gröfsen zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen ihnen wird nicht weiter angegeben werden können, wenn einmal diese Seiten des Vieleckes selbst kleiner, als jede noch angebliche gerade Linie, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein seyn werden. — Die Geometrie, die uns auf diese Weise gleichsam von selbst auf die Betrachtung der unendlich kleinen Gröfsen geführt hat, leitet uns auch noch auf den Unterschied, der zwischen diesen unendlich kleinen Gröfsen, in Beziehung auf die oben erwähnten Ordnungen derselben, Statt hat. So mufs z. B. der Flächeninhalt einer in allen ihren Dimensionen unendlich kleinen Oberfläche irgend eines Körpers immer wenigstens eine unendlich kleine Gröfse der *zweyten* Ordnung seyn, weil dieser Flächeninhalt kleiner ist, als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieser Oberfläche zu einem anderen ziehen kann. Und eben so mufs auch das Volum eines in allen seinen Dimensionen unendlich kleinen Körpers wenigstens eine unendlich kleine Gröfse der dritten Ordnung seyn, weil dieses Volum kleiner ist, als der Würfel der längsten geraden Linie, die man von einem Puncte des Umfanges dieses Körpers zu einem anderen Puncte dieses Umfanges ziehen kann.

§. 48. (Differential der einfachsten algebraischen Functionen.) Sey zuerst der Ausdruck gegeben

$$u = f(x) = a - bx,$$

wo a und b constante Gröſsen sind, so hat man, nach dem Vorhergehenden, sofort

$$du = f(x + dx) - f(x) \quad \text{oder}$$
$$du = [a - b(x + dx)] - (a - bx),$$

das heiſst, man hat

$$du = - b\,dx,$$

und dieſs ist das gesuchte Differential der Function $u = a - bx$, also ist auch ihr Differentialcoefficient

$$\frac{du}{dx} = - b,$$

oder eine constante Gröſse.

I. Ist eben so die Function gegeben

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3,$$

wo A, B, C und D constante Gröſsen bezeichnen, so hat man auf dieselbe Weise

$$u + du = A - B(x + dx) + C(x + dx)^2 - D(x + dx)^3.$$

Wenn man diese Potenzen entwickelt, und dann von dem so entwickelten Ausdrucke die gegebene Gleichung

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3$$

subtrahirt, so erhält man

$$du = - B\,dx + C(2x + dx).dx$$
$$- D[3x^2 + 3(1 + dx)x.dx]\,dx.$$

Da aber, nach dem oben aufgestellten Princip der Differentialrechnung, die Gröſsen

$$2x + dx, \quad 3x^2 + 3x\,dx \quad \text{und} \quad 1 + dx$$

in derselben Ordnung gleich

$$2x, \quad 3x^2 \quad \text{und} \quad 1$$

sind, so hat man auch sofort für das gesuchte Differential:

$$du = - B\,dx + 2Cx\,dx - 3Dx^2\,dx,$$

oder für den gesuchten Differentialcoefficienten:

$$\frac{du}{dx} = - B + 2Cx - 3Dx^2.$$

II. Auf dieselbe Weise wird man für

$$u = ax^4, \quad u = bx^5, \ldots$$

die Differentialien erhalten

$$du = 4ax^3dx, \quad du = 5bx^4dx,$$

so daſs man daraus leicht durch Analogie für den Ausdruck

$$u = A + Bx^m$$

das Differential

$$du = mBx^{m-1}dx$$

finden wird, wenn m, wie in allen vorhergehenden Beyspielen, eine positive, ganze Zahl bezeichnet. Wir werden aber bald (§. 51.) sehen, daſs dieser Ausdruck auch allgemein, für jede willkürliche Zahl m, geltend ist.

§. 49. (Differential eines Products.) Sey u das Product zweyer veränderlichen Gröſsen x und y, oder sey die Function

$$u = x.y$$

gegeben. Läſst man in ihr die Gröſse x in $x + dx$, und die Gröſse y in $y + dy$ übergehen, so hat man für den so veränderten Werth der gegebenen Function den Ausdruck

$$u + du = (x + dx) \cdot (y + dy),$$

oder wenn man entwickelt:

$$u + du = xy + xdy + ydx + dx \cdot dy.$$

Subtrahirt man von dem letzten Ausdrucke die gegebene Gleichung $u = xy$, und subtrahirt den Rest durch dx, so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y + dy.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ eine endliche Gröſse ist, so ist auch

$$\frac{xdy}{dx} \text{ sowohl, als auch } y$$

eine endliche, dy aber ist eine unendlich kleine Gröſse, und daher, nach dem erwähnten Princip dieser Rechnungsart:

$$\frac{xdy}{dx} + y + dy = \frac{xdy}{dx} + y,$$

also auch

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y,$$

so dafs man daher, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes wieder durch dx multiplicirt, für das gesuchte Differential eines Products $u = xy$ erhält:

$$d.(xy) = x.dy + y.dx;$$

es ist daher *das Differential eines Products von zwey veränderlichen Factoren gleich der Summe der Producte eines jeden dieser Factoren in das Differential des anderen Factors.*

Dieser Satz ist für die gesammte Analysis von der gröfsten Wichtigkeit, und wir werden noch sehr oft Gelegenheit haben, auf ihn wieder zurück zu kommen.

I. Ganz eben so würde man, wenn das Product

$$u = axy$$

gegeben ist, wo a eine constante Gröfse bezeichnet, für das Differential dieses Products erhalten:

$$d.(axy) = a(xdy + ydx).$$

II. Wäre aber das Product

$$u = xyz$$

von drey Factoren gegeben, so kann man das Product von zweyen derselben, z. B. $yz = t$ setzen, wodurch man

$$u = xt,$$

also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$du = xdt + tdx$$

erhält. Da aber $t = yz$ ist, so ist, nach derselben Vorschrift, das Differential dieses letzten Products

$$dt = ydz + zdy,$$

so dafs man daher, wenn man diesen Werth von dt in dem vorhergehenden Ausdrucke von du substituirt, für du oder für das Differential des Productes xyz erhält

$$d.(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

III. Wäre endlich das Product von mehreren veränderlichen Gröfsen $x, x', x'', x''', \ldots$ gegeben, so würde man für das Differential dieses Productes haben:

$$d.(xx'x''x'''\ldots) = (x'x''x'''\ldots)dx + (xx''x'''\ldots)dx' + (xx'x'''\ldots)dx'' + (xx'x''x^{\mathrm{IV}}\ldots)dx''' + \ldots,$$

welchen Ausdruck man auch auf folgende einfachere Weise schreiben kann, indem man alle Glieder desselben durch das gegebene Product $x x' x'' \ldots$ dividirt:

$$\frac{d \, . \, x x' x'' x''' \ldots}{x x' x'' x''' \ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \frac{dx'''}{x'''} + \ldots$$

§. 50. (Differential eines Quotienten.) Ist von dem Ausdrucke

$$u = \frac{x}{y}$$

das Differential zu suchen, so kann man denselben auch so darstellen:

$$x = uy,$$

und von diesem Producte uy ist, nach §. 49., das Differential

$$dx = udy + ydu,$$

woraus folgt

$$du = \frac{dx - udy}{y};$$

oder endlich, wenn man in dem letzten Ausdrucke den Werth von $u = \frac{x}{y}$ wieder herstellt, du oder

$$d \, . \, \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differential eines Bruches ist daher gleich dem Producte des Nenners in das Differential des Zählers, weniger dem Producte des Zählers in das Differential des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners.

§. 51. (Differential einer Potenz.) Man suche nun das Differential irgend einer Potenz x^m, wo x eine veränderliche, und m eine beständige, übrigens willkürliche (positive oder negative, ganze oder gebrochene) Zahl bezeichnet (vergl. §. 48, II.).

Obschon uns dieses Differential, seiner Form und seinem Werthe nach, noch ganz unbekannt ist, so werden wir doch annehmen können, daſs es die Gestalt

$$d \, . \, (x^m) = f(m, x) \, . \, dx$$

haben müsse, wo $f(m, x)$ irgend eine Function der beyden Grössen m und x bezeichnet, die wir nun näher zu bestimmen suchen wollen.

Da, der Voraussetzung gemäſs, die Gröſse m ganz willkürlich ist, so werden wir dafür auch jede andere, z. B. n setzen können, so daſs man daher auch eben so die Gleichung haben wird:

$$d.(x^n) = f(n, x).dx.$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken x^m und x^n das Product, so hat man, nach §. 49.:

$$d.(x^m.x^n) = x^m.d(x^n) + x^n.d(x^m);$$

oder da

$$x^m.x^n = x^{m+n}$$

ist, wenn man in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von $d.(x^m)$ und $d.(x^n)$ substituirt:

$$d.x^{m+n} = x^m.f(n, x)\,dx + x^n.f(m, x)\,dx \;...\; (a).$$

Substituirt man aber in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, da in ihr m willkürlich ist, statt m die Gröſse $m+n$, so hat man auch, derselben obigen Annahme gemäſs:

$$d.x^{m+n} = f(m+n, x)\,dx \;...\; (b).$$

Setzt man endlich die beyden Werthe von $d.x^{m+n}$ in den Ausdrücken (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$f(m+n, x) = x^m.f(n, x) + x^n.f(m, x) \;...\; (I),$$

und diese Gleichung ist es, die uns zu der gewünschten Kenntniſs der Function $f(m, x)$ führen wird.

Nimmt man in dieser Gleichung (I), da m und n ganz willkürliche Gröſsen bezeichnen, $n = m$ an, so erhält man

$$f(2m, x) = 2x^m.f(m, x).$$

Ist aber $n = 2m$, so gibt die Gleichung (I)

$$f(3m, x) = x^m.f(2m, x) + x^{2m}.f(m, x),$$

oder da wir bereits $f(2m, x)$ gefunden haben:

$$f(3m, x) = 3x^{2m}.f(m, x).$$

Setzt man dieſs fort, so erhält man

für $n = m$ . . . $f(2m, x) = 2x^m.f(m, x)$,
» $n = 2m$ . . . $f(3m, x) = 3x^{2m}.f(m, x)$,
» $n = 3m$ . . . $f(4m, x) = 4x^{3m}.f(m, x)$,
» $n = 4m$ . . . $f(5m, x) = 5x^{4m}.f(m, x)$ u. f.,

woraus sofort folgt, daſs man, wenn r irgend eine ganze, positive Zahl bezeichnet, den Ausdruck hat

$$f(rm,\ x) = r x^{(r-1)m} \,.\, f(m,\ x),$$

oder, wenn man beyde Theile dieser Gleichung durch $rm \,.\, x^{mr-1}$ dividirt:

$$\frac{f(rm \,.\, x)}{rm \,.\, x^{mr-1}} = \frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}.$$

Allein diese Gleichung zeigt offenbar, daſs der Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von m sowohl, als auch von x ganz unabhängig seyn muſs, da der Werth dieses Ausdruckes, der letzten Gleichung zu Folge, ganz unverändert bleibt, wenn man auch in ihm statt m irgend ein Vielfaches rm von m substituirt, obgleich diese Gröſse m in dem erwähnten Ausdrucke nicht bloſs als Factor, sondern auch noch als Exponent von x erscheint. Wenn aber dieser Ausdruck

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}}$$

von den Gröſsen m und x unabhängig ist, so muſs er, da doch nichts, als diese beyden Gröſsen, in ihm vorkommen, irgend einer mit x und m nicht weiter zusammenhängenden, in allen Fällen denselben Werth beybehaltenden, d. h. er muſs einer *constanten Gröſse* gleich seyn. Nennen wir A diese Constante, so hat man

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

und es ist nur noch übrig, den absoluten Werth dieser Constante zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke sey für einen speciellen Fall die Gröſse $m = 1$, so gibt die erste der obigen Gleichungen

$$d \,.\, x^m = f(m, x) \,.\, dx,$$

wenn man in ihr $m = 1$ setzt:

$$dx = f(1,\ x)\, dx \quad \text{oder} \quad f(1,\ x) = 1.$$

Und eben so gibt auch die letzte der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{f(m, x)}{m x^{m-1}} = A,$$

wenn man in ihr ebenfalls $m = 1$ setzt, da $x^0 = 1$ ist:

$$f(1, x) = A,$$

woraus daher folgt, daſs $A = 1$ und daſs

$$f(m, x) = m x^{m-1}$$

seyn muſs, welchen Werth auch die Gröſse m haben mag.

Substituirt man endlich diesen Werth von $f(m, x)$ in der allerersten der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$d.x^m = m x^{m-1} dx,$$

das heiſst: *das Differential einer Potenz ist immer gleich dem Producte des Exponenten in die um die Einheit nächst niedere Potenz, und in das Differential der Wurzel dieser Potenz.* Damit stimmt das überein, was wir oben (§. 48, II.) bloſs für diejenigen Potenzen gefunden haben, deren Erponenten ganze und positive Zahlen sind.

§. 52. (Differential eines Logarithmus.) Das Differential des Logarithmus irgend einer veränderlichen Gröſse x wird, welches auch sein näher bestimmter Ausdruck seyn mag, die folgende Form haben, wenn man die Logarithmen der Basis a nimmt (§. 43.):

$$d.\mathrm{Log}\, x = f(x).dx.$$

Da in dieser Gleichung die Gröſse x ganz willkürlich ist, so wird man auch y dafur setzen können, wodurch man eine zweyte Gleichung

$$d.\mathrm{Log}\, y = f(y).dy$$

erhält. Beyder Gleichungen Summe gibt

$$d.[\mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y] = fx.dx + fy.dy.$$

Aber nach der oben (§. 44, II.) aufgestellten Eigenschaft der Logarithmen überhaupt hat man

$$\mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}(xy),$$

und dadurch geht die vorhergehende Gleichung in folgende über:

$$d.\mathrm{Log}(xy) = fx.dx + fy.dy \;.\;.\;. \text{(a)}.$$

Allein die erste der vorhergehenden Gleichungen gibt auch, wenn man in ihr statt der willkürlichen Gröſse x das eben so willkürliche Product xy setzt:

$$d.\mathrm{Log}(xy) = f(xy)\, d.(xy);$$

und da (nach §. 49.) für das Differential eines Products

$$d.(xy) = xdy + ydx$$

ist, so kann die unmittelbar vorhergehende Gleichung auch so dargestellt werden:

$$d.\mathrm{Log}(xy) = (xdy + ydx).f(xy) \quad . \; . \; . \quad \text{(b)}.$$

Setzt man beyde Werthe von $d.\mathrm{Log}(xy)$ aus den Gleichungen (a) und (b) einander gleich, so erhält man

$$[y.f(xy) - fx]\,dx + [x.f(xy) - fy]\,dy = 0 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)},$$

und diese Gleichung ist es wieder, die uns die nähere Kenntniſs der Function $f(x)$ verschaffen wird.

Setzt man nämlich in der Gleichung (I) die willkürliche Gröſse $y = x$, so erhält man sofort

$$x.f(x^2) = f(x).$$

Setzt man dann in derselben Gleichung (I) die Gröſse $y = x^2$, so gibt sie

$$3x^2.f(x^3) - 2x.f(x^2) - fx = 0,$$

oder da bereits der Werth von $x.f(x^2) = f(x)$ bekannt ist, so hat man auch

$$x^2.f(x^3) = f(x).$$

Setzt man dieſs fort, so findet man

für $y = x$ . . . $x.f(x^2) = f(x)$,
» $y = 2x$ . . . $x^2.f(x^3) = f(x)$,
» $y = 3x$ . . . $x^3.f(x^4) = f(x)$ u. s. f.,

und diese einfachen Gleichungen zeigen, daſs man für jede ganze und positive Zahl r die Gleichung hat

$$x^{r-1}.f(x^r) = f(x),$$

oder auch, wenn man zu beyden Seiten durch x dividirt:

$$x^r.f(x^r) = x.f(x),$$

woraus sofort folgt, daſs der Ausdruck

$$x.f(x)$$

sich nicht ändert, wenn man auch statt x irgend eine ganze positive Potenz x^r in ihm substituirt, das heiſst, daſs der Ausdruck $x.f(x)$ ganz unabhängig von x, und daher, wie in §. 51., irgend eine constante Gröſse seyn muſs.

Nennt man M diese Constante, so hat man

$$x . f(x) = M \quad \text{oder}$$

$$f(x) = \frac{M}{x},$$

und daher auch für das gesuchte Differential eines Logarithmus den Ausdruck

$$d . \text{Log}\, x = M . \frac{dx}{x}.$$

Um diese Constante M zu bestimmen, bemerken wir, daſs nach §. 45, I. die Gröſsen $\text{Log}\, x$ und $\log x$, oder daſs die Logarithmen derselben Zahl in den beyden Systemen, deren Basis a und e ist, das constante Verhältniſs m haben, so daſs

$$\text{Log}\, x = m . \log x$$

ist. Dasselbe Verhältniſs wird also auch zwischen den Differentialien dieser Logarithmen bestehen, woraus demnach folgt, daſs in dem zweyten Systeme

$$d . \log x = \frac{dx}{x},$$

und daſs die vorhergehende Gröſse M mit der in §. 45, I. eingeführten Constante m gleichbedeutend ist, so daſs man daher hat

$$m = \text{Log}\, e \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\log a}$$

und

$$d . \log x = \frac{dx}{x}, \text{ so wie } d . \text{Log}\, x = \frac{m\, dx}{x}.$$

§. 53. (Differential einer Exponentialgröſse.) Ist der Ausdruck gegeben

$$y = a^x,$$

so hat man, wenn man davon die Logarithmen in Beziehung auf das erste System nimmt:

$$x = \text{Log}\, y,$$

und von diesem Ausdrucke ist (nach §. 52.) das Differential

$$dx = \frac{m\, dy}{y}.$$

so daſs man daher hat

$$d . y = \frac{y\, dx}{m};$$

oder, wenn man den Werth von $y = a^x$ wieder herstellt:

$$d . a^x = \frac{a^x\, dx}{m} = a^x\, dx . \log a.$$

1. Ist aber $a = e$ die Basis des zweyten Systems, so ist $\log e = 1$, und daher

$$d.e^x = e^x dx.$$

§. 54. (Anwendung des Vorhergehenden.) Wir haben nun die Differentialien eines Products, eines Quotienten, so wie die der Potenzen, der Logarithmen und der Exponentialgröſsen, d. h. wir haben die Differentialien aller uns bisher bekannt gewordenen verschiedenen Gattungen von Gröſsen entwickelt. Wenn wir dieselben der bequemern Übersicht wegen zusammenstellen, so hat man

$$\text{I.} \quad . \quad . \quad d.xy = x\,dy + y\,dx,$$

$$\text{II.} \quad . \quad . \quad d.\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$\text{III.} \quad . \quad . \quad d.x^n = n x^{n-1} dx,$$

$$\text{IV.} \quad . \quad . \quad d.\log x = \frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad d.\text{Log}\,x = \frac{m\,dx}{x},$$

$$\text{V.} \quad . \quad . \quad d.a^x = \frac{a^x\,dx}{m},$$

$$\text{VI.} \quad . \quad . \quad d.e^x = e^x dx,$$

$$\text{wo} \quad m = \text{Log}\,e = \frac{1}{\log a} \quad \text{ist.}$$

I. Dieſs sind die einfachsten Ausdrücke ihrer Art, auf welche sich alle anderen, aus ihnen zusammengesetzten, leicht zurückführen lassen, wie folgende Beyspiele zeigen.

Sey die Function gegeben

$$u = (a + b x^m)^n.$$

Um von ihr das Differential nach den vorhergehenden Vorschriften zu finden, kann man die Gröſse

$$a + b x^m = y$$

setzen, so daſs man also den Ausdruck hat

$$u = y^n,$$

wovon das Differential (nach der Gleichung III) ist:

$$du = n y^{n-1} dy.$$

Da aber, nach derselben Gleichung III

$$dy = m b x^{m-1} dx$$

ist, so hat man, wenn man diesen Werth von dy in dem vorhergehenden Ausdruck von du substituirt, und den Werth von y wieder herstellt:

$$du = mnb(a + bx^m)^{n-1} . x^{m-1} dx.$$

Dasselbe Resultat wird man auch, ohne Einführung der Hülfsgröſse y, unmittelbar aus dem gegebenen Ausdrucke

$$u = (a + bx^m)^n$$

ableiten können. Man hat nämlich (nach Gl. III)

$$du = n(a + bx^m)^{n-1} . d(a + bx^m),$$

also auch, da $d.(a + bx^m) = mbx^{m-1} dx$ ist:

$$du = mnb(a + bx^m)^{n-1} . x^{m-1} dx,$$

wie zuvor.

Auf dieselbe Weise wird man auch finden

$$d.\frac{a+x}{a-x} = \frac{2a\,dx}{(a-x)^2},$$

$$d.(a+x)\sqrt{a-x} = \frac{(a-3x)\,dx}{2\sqrt{a-x}},$$

$$d.\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$d.\log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{x(1+x^2)},$$

$$d.e^x(x-1) = e^x . x\,dx,$$

$$d.e^{e^x} = e^{e^x} . e^x dx$$

Eilftes Capitel.

Entwicklung der Functionen.

§. 55. (Höhere Differentialien.) Da der Differentialcoefficient irgend einer Function von x im Allgemeinen wieder eine Function von x ist, so wird sich derselbe ebenfalls einer neuen Differentiation unterwerfen lassen. Ist z. B. der Ausdruck gegeben

$$u = x^4,$$

so hat man für den Differentialcoefficienten desselben, nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3.$$

Wenn man nun diese Gröfse $u' = 4x^3$ neuerdings differentiirt, so hat man eben so

$$\frac{du'}{dx} = 12x^2.$$

Da aber $u' = \frac{du}{dx}$ ist, so kann man, analog mit dem Vorhergehenden, für du' die Bezeichnung einführen:

$$du' = \frac{d^2u}{dx},$$

so dafs man also hat

$$\frac{du'}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

und daher auch

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 12x^2 \quad \text{oder} \quad d^2u = 12x^2dx^2,$$

und man nennt, übereinstimmend mit §. 47, II., die Gröfse d^2u das *zweyte Differential* der gegebenen Gröfse u. — Eben so wird man für das dritte Differential d^3u derselben Gröfse erhalten

$$d^3u = 24x\,dx^3,$$

und für das vierte

$$d^4u = 24\,dx^4,$$

während alle folgenden Differentialien d^5u, d^6u, . . . verschwinden, wenn man nämlich, wie hier vorausgesetzt wird, das erste Differential dx der Stammgröfse der aufgestellten Function als eine gegebene oder unveränderliche Gröfse betrachtet.

I. Diese Voraussetzung, dafs bey dem Übergange zu den höheren Differentialien einer Function das erste Differential der Stammgröfse, oder dafs überhaupt irgend ein erstes Differential als constant angenommen werde, ist selbst nothwendig, weil sonst die Werthe von $d^2 u$, $d^3 u$, ... keine bestimmte Bedeutung mehr haben könnten. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$\frac{x^2 d^2 x}{d x^2},$$

worin kein erstes Differential als constant angenommen ist, so wird derselbe, wenn man $dx = \text{Const.}$, also $d^2 x = 0$ nimmt, den Werth 0 annehmen. Hätte man aber irgend ein anderes erstes Differential, z. B. $d.x^2 = \text{Const.}$ oder $2x\,dx = \text{Const.}$ angenommen, so wäre

$$2dx^2 + 2x\,d^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{1}{x},$$

und daher der Werth des oben gegebenen Ausdruckes gleich $-x$. Eben so würde man für diesen Werth $-2x$ finden, wenn man $d.x^3 = 3x^2\,dx = \text{Const.}$ oder $6x\,dx^2 + 3x^2 d^2 x = 0$ angenommen hätte, u. s. w.

§. 56. (Taylor's Theorem.) Sey $u = f(x)$ als eine Function von x gegeben. Wenn in dieser Function die Stammgröfse x in $x + y$ übergeht, welches wird dann der Ausdruck der so veränderten Function $u' = f(x + y)$ seyn?

Die Beantwortung dieser Frage enthält das hier in Rede stehende Theorem.

Um diese Antwort zu geben, bemerken wir zuerst, dafs eine willkürliche Function von der *Summe* zweyer Gröfsen $x + y$, dafs z. B. die Function

$$(x+y)^m, \quad \text{oder} \quad \log(x+y) \quad \text{oder} \quad a^{x+y} \text{ u. f.}$$

immer *denselben* Differentialcoefficienten geben wird, welche von den beyden Gröfsen x oder y man auch als die einzige Veränderliche betrachten mag. Ist z. B.

$$u = (x+y)^m$$

gegeben, so hat man, wenn man bloſs die Gröſse x als veränderlich sieht:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = m(x+y)^{m-1},$$

und wenn man nur die Gröſse y sich verändern läſst:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = m(x+y)^{m-1}$$

wie zuvor, so daſs man daher erhält

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right),$$

wo die Klammern anzeigen, daſs man in $\left(\frac{du}{dx}\right)$ bloſs x, so wie in $\left(\frac{du}{dy}\right)$ bloſs die Gröſse y als veränderlich angesehen hat.

Dieſs vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, daſs der gesuchte Ausdruck von $u = f(x+y)$ sich in eine Reihe entwickeln lasse, die nach Potenzen von y fortgeht. Nehmen wir für diese Reihe, da wir sie noch nicht näher kennen, folgende allgemeine Gestalt an:

$$f(x+y) = L + My^{\alpha} + Ny^{\beta} + Py^{\gamma} + \ldots,$$

wo L, M, N, ... noch unbekannte Factoren von x sind, die kein y weiter enthalten, und wo α, β, γ, ... unbestimmte Exponenten vorstellen, die wir nun, sammt den Coefficienten L, M, N, ... zu bestimmen suchen wollen.

Man sieht zuerst von selbst, daſs keiner dieser Exponenten negativ seyn kann. Denn wenn z. B. das zweyte Glied jener Entwickelung die Form

$$My^{-\alpha} = \frac{M}{y^{\alpha}}$$

hätte, so würde für $y = 0$ die zweyte Seite des für $f(x+y)$ aufgestellten Ausdruckes unendlich groſs werden, während doch die erste Seite, oder die Gröſse $f(x+y)$ selbst, nur in $f(x)$ übergeht, was unmöglich ist.

Wenn aber alle Exponenten α, β, γ, ... positiv sind, so erhält man, wenn man $y = 0$ setzt, was man darf, da y als eine ganz unbestimmte Gröſse alle Werthe haben, also auch gleich Null seyn kann, sofort

$$f(x) = L,$$

wodurch daher bereits der erste Coefficient L der oben aufgestellten Reihe bestimmt ist.

Bildet man dann den Differentialcoefficienten dieser Entwickelung der Gröfse $f(x+y)$, und zwar so, dafs man zuerst blofs x, und dann blofs y als eine veränderliche Gröfse betrachtet, so erhält man

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)+\left(\frac{dM}{dx}\right)y^\alpha+\left(\frac{dN}{dx}\right)y^\beta+\left(\frac{dP}{dx}\right)y^\gamma+\ldots,$$

und eben so, nach §. 51.:

$$\alpha My^{\alpha-1}+\beta Ny^{\beta-1}+\gamma Py^{\gamma-1}+\ldots,$$

und diese beyden Ausdrücke müssen, der oben vorausgeschickten Bemerkung zu Folge, einander völlig gleich seyn, welches auch der Werth von y seyn mag. Diese Gleichheit kann aber offenbar nur dann Statt finden, wenn in beyden Ausdrücken gleiche Exponenten von y vorkommen. Allein wenn in dem ersten Ausdrucke diese Exponenten steigend geordnet sind, so dafs β grösser als α, γ gröfser als β u. f. ist, so sind sie auch in dem zweyten Ausdrucke steigend, und man hat daher

$$\alpha-1=0,\quad \alpha=\beta-1,\quad \beta=\gamma-1,\quad \gamma=\delta-1 \text{ u. f.},$$

das heifst, man hat

$$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=3,\quad \delta=4 \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von α, β, γ, . . . in den erwähnten beyden Ausdrücken, und setzt sie dann, da sie nach dem Vorhergehenden identisch sind, einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = &\left[M-\left(\frac{dL}{dx}\right)\right]+\left[2N-\left(\frac{dM}{dx}\right)\right]y \\ &+\left[3P-\left(\frac{dN}{dx}\right)\right]y^2+\left[4Q-\left(\frac{dP}{dx}\right)\right]y^3+\ldots, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck soll für *alle* Werthe von y gleich Null seyn. Diefs kann aber nach §. 34, III. nur dann Statt haben, wenn die einzelnen Factoren der Potenzen

$$y^0,\ y',\ y^2,\ \ldots$$

jeder für sich gleich Null sind, das heifst, wenn man die Bedingungsgleichungen hat:

$$M = \left(\frac{dL}{dx}\right),$$
$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dx}\right),$$
$$P = \frac{1}{3}\left(\frac{dN}{dx}\right),$$
$$Q = \frac{1}{4}\left(\frac{dP}{dx}\right) \text{ u. f.}$$

Es wurde aber bereits zuvor

$$L = f(x)$$

gefunden, also ist auch, wenn man diesen Werth von L in der ersten der vorhergehenden Bedingungsgleichungen substituirt:

$$M = \left(\frac{d\,fx}{dx}\right),$$

und dadurch ist auch der zweyte der obigen Coefficienten L, M, N, . . . bestimmt. Es ist nämlich dieser zweyte Coefficient M nichts anderes, als der erste Differentialcoefficient der gegebenen Function $f(x)$.

Substituirt man dann diesen Werth von M in der zweyten unserer Bedingungsgleichungen, so erhält man, vermöge der oben (§. 55.) eingeführten Bezeichnung der höheren Differentialien, wenn das erste Differential dx der Stammgröfse x constant ist:

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d.\left(\frac{d.fx}{dx}\right)}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right),$$

wodurch auch der dritte unserer Factoren N bestimmt ist.

Ganz eben so erhält man für die übrigen

$$P = \frac{1}{3}\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3.fx}{dx^3}\right),$$
$$Q = \frac{1}{4}\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{d^4.fx}{dx^4}\right) \text{ u. f.}$$

Substituirt man daher die gefundenen Werthe von L, M, N, . . . in den oben für $f(x+y)$ aufgestellten Ausdruck, so erhält man

$$f(x+y) = fx + y\left(\frac{d.fx}{dx}\right) + \frac{y^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{d^3.fx}{dx^3}\right) + \ldots \text{(A)},$$

oder auch, wenn man wieder, der Kürze wegen,

$$fx = u \quad \text{und} \quad f(x+y) = u'$$

setzt:

$$u' = u + y\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{y^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots \text{(A)}.$$

I. Von dieser Reihe, die nach ihrem Erfinder unter der Benennung des *Theorems von Taylor* bekannt ist, ist das einfache Gesetz des Fortganges der Glieder für sich klar, und sie zeigt uns die zwey sehr merkwürdigen Eigenschaften der Entwickelung einer jeden Function $f(x)$, wenn man in ihr die Stammgröfse x in $x+y$ übergehen läfst: dafs erstens diese Entwickelung durch eine Reihe dargestellt wird, die nach den natürlichen Potenzen $0, 1, 2, 3, \ldots$ der Gröfse y fortgeht, und dafs zweytens jedes einzelne Glied aus dem ihm unmittelbar vorhergehenden ganz auf dieselbe Art und durch dasselbe Verfahren abgeleitet wird, wie dieses vorhergehende Glied selbst wieder aus dem ihm vorhergehenden entstanden ist. Das zweyte Glied ist nämlich der Differentialcoefficient des ersten, multiplicirt in die Gröfse y; das dritte ist eben so das Differential des zweyten, multiplicirt in $\frac{1}{2}y$; das vierte ist das Differential des dritten, multiplicirt in $\frac{1}{3}y$ u. s. f., so dafs es daher schon genügt, von jeder gegebenen Function $f(x)$ das erste Differential zu kennen, um daraus auch sofort die Entwickelung von $f(x+y)$ abzuleiten, wo y jede willkürliche, constante oder veränderliche Gröfse bezeichnet. Aus dieser Ursache haben wir auch in dem vorhergehenden zehnten Capitel das erste Differential der verschiedenen Gattungen von Functionen

$$f(x) \ldots x^m, \quad \log x, \quad a^x, \ldots$$

die wir bisher kennen gelernt haben, aufgesucht, um sie, wie wir sogleich näher sehen werden, zur Entwickelung der Function $f(x+y)$ zu verwenden.

II. Bemerken wir noch, dafs, wenn in der gegebenen Function $f(x)$ die Gröfse x, statt zu wachsen, wie wir bisher angenommen haben, um die Gröfse y abnimmt, dafs dann diese Gröfse y in der Gleichung (A) negativ genommen wird, so dafs man also für den so veränderten Zustand der Function $f(x)$ hat

$$f(x-y) = fx - y\left(\frac{d.fx}{dx}\right) + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right) - \frac{y^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 fx}{dx^3}\right) + - \ldots$$

III. Ist endlich der Zuwachs der Stammgröfse x, den wir bisher allgemein durch y bezeichnet haben, gleich dem Differential dx dieser Stammgröfse selbst, so wird man in der Gleichung (A) die Gröfse $y = dx$ setzen, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.fx + \frac{1}{1.2} d^2.fx + \frac{1}{1.2.3} d^3.fx + \ldots,$$

oder auch, nach dem zweyten Ausdrucke der Gleichung (A):

$$u' - u = du + \frac{1}{1.2} d^2 u + \frac{1}{1.2.3} d^3 u + \ldots,$$

und diefs ist demnach der *vollständige* Zuwachs der Function $u = fx$, wenn x in seinen nächstfolgenden Werth $x + dx$ übergeht. Da aber jedes Glied dieser Reihe gegen sein nächstvorhergehendes unendlich klein ist, so werden, dem oben (§. 47, I.) aufgestellten Princip der Differentialrechnung gemäfs, alle Glieder dieser Reihe, bis auf das erste, verschwinden, wodurch man erhält

$$f(x+dx) - fx = d.fx$$

oder

$$u' - u = du, \text{ wie zuvor.}$$

§. 57. (Maclaurin's Lehrsatz.) Wenn man in der Reihe (A) des vorhergehenden §. 56. sowohl in dem Ausdrucke $f(x)$, als auch in den Differentialcoefficienten

$$\frac{d.fx}{dx}, \frac{d^2.fx}{dx^2}, \frac{d^3.fx}{dx^3}, \ldots$$

nach vollbrachter Differentiation, die Stammgröfse $x = 0$ setzt, und wenn man, der Kürze wegen, die dieser Annahme von $x = 0$ entsprechenden Werthe von

u	oder	fx	durch	U,	
$\frac{du}{dx}$	»	$\frac{d.fx}{dx}$	»	U',	
$\frac{d^2u}{dx^2}$	»	$\frac{d^2 fx}{dx^2}$	»	U''	u. f.

bezeichnet, so geht die Reihe (A), da jetzt in ihr die Gröfse $f(x+y)$ gleich $f(y)$ wird, in folgende über:

$$f(y) = U + y.U' + \frac{y^2}{1.2}.U'' + \frac{y^3}{1.2.3}.U''' + \ldots$$

Da dieser Ausdruck für jeden willkürlichen Werth von y

Statt hat, und da die Grössen U, U', U'', . . . kein y enthalten, so kann man in demselben auch x statt y setzen, so dass man demnach für jede gegebene Function $u = f(x)$ von x den Ausdruck hat

$$u = f(x) = U + x \, . \, U' + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} \, . \, U'' + \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \, . \, U''' + \ldots \text{(B)},$$

wo wieder U, U', U'', . . . die Werthe von u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, . . . für den Fall $x = 0$ bezeichnen.

Dieser Ausdruck, der, wie man sieht, nur eine Modification des *Taylor*'schen Theorems ist, wird der Lehrsatz *Maclaurin's* genannt.

Beyde Theoreme sind von dem wichtigsten Einflusse auf das ganze Gebiet der mathematischen Analysis, besonders aber auf die Entwickelung der verschiedenen Functionen, wie wir sogleich näher zeigen wollen.

§. 58. (Entwickelung des Binoms.) Sey die Function

$$u = f(x) = x^n$$

gegeben, wo x eine veränderliche, und n eine constante willkürliche Zahl bezeichnet. Man suche den Werth dieser Function, wenn die Stammgrösse x derselben in $x + y$ übergeht, oder man suche

$$u' = f(x + y) = (x + y)^n.$$

Nach §. 51. hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = n x^{n-1},$$

und wenn man von diesem Ausdrucke wiederholt das Differential nimmt, und dx constant voraussetzt:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = n(n-1) x^{n-2},$$

$$\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) = n(n-1)(n-2) x^{n-3} \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)$, . . . in der Gleichung (A) des §. 56., so erhält man

$$(x + y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} x^{n-2} y^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} x^{n-3} y^3 + \ldots \text{(I)},$$

und diese Entwickelung der Function $(x+y)^n$ ist unter dem Namen von *Newton's Binom* bekannt.

Das Gesetz des Fortganges der Reihe ist auch hier für sich klar. So ist das nächstfolgende oder vierte Glied, wenn das erste das 0^{te} heiſst:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4,$$

und so ist auch, wenn r irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, das r^{te} Glied dieser Reihe

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots (n-[r-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)r} \cdot x^{n-r} y^r.$$

Man sieht, daſs diese Reihe abbricht oder endlich ist, wenn n eine ganze, positive Zahl ist.

I. Setzt man in dem vorhergehenden Ausdrucke für n nach der Ordnung die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ so hat man für $x = 1$

$$\begin{aligned}
(1+y) &= 1+y, \\
(1+y)^2 &= 1+2y+y^2, \\
(1+y)^3 &= 1+3y+3y^2+y^3, \\
(1+y)^4 &= 1+4y+6y^2+4y^3+y^4, \\
(1+y)^5 &= 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5, \\
(1+y)^6 &= 1+6y+15y^2+20y^3+15y^4+6y^5+y^6,
\end{aligned}$$

welche Reihen, selbst wenn ihre allgemeine Form durch das Vorhergehende noch nicht gegeben wäre, sich leicht fortsetzen lassen, da jedes Glied gleich dem zunächst über ihm stehenden und dem diesem vorhergehenden Gliede ist. So ist

$$\begin{aligned}
6 &= 3+3, \\
10 &= 6+4, \\
15 &= 10+5 \text{ u. f.}
\end{aligned}$$

II. Ist die Gröſse y negativ, so erhält man

$$(x-y)^n = x^n - n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 - + \ldots$$

III. Setzt man in der gefundenen Entwickelung

$$y = \frac{ax}{1-a},$$

also auch

$$x + y = \frac{x}{1-a},$$

so hat man

$$(x+y)^n = x^n \cdot (1-a)^{-n}.$$

Es ist aber, wenn man in (I) die Gröfse $x=1$, $y=-a$ und $n=-n$ setzt:

$$(1-a)^{-n} = 1 + na + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \ldots,$$

also ist auch, wenn man den Werth von $a = \frac{y}{x+y}$ wieder herstellt:

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + nX + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot X^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot X^3 + \ldots\right],$$

wo $X = \frac{y}{x+y}$ gesetzt worden ist. Diese Reihe bricht ab, wenn n eine ganze negative Zahl ist, und sie convergirt oft viel schneller, als die vorhergehende Reihe (I).

IV. Ist $x=y=1$, so gibt die Reihe (I)

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Die Summe der Coefficienten des *Newton*'schen Binoms ist also gleich 2^n.

Ist aber $x=y=1$, und setzt man statt n die Gröfse $-n$, so gibt dieselbe Reihe (I)

$$\frac{1}{2^n} = 1 - n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Ist endlich $x=1$ und $y=-1$, so hat man für jeden Werth von n:

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

§. 59. (Ausziehung der Wurzeln.) Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes wird man von jeder gegebenen Zahl A irgend eine Potenz derselben, also auch, wenn der Exponent dieser Potenz eine gebrochene Zahl ist, die *Wurzel* der Zahl A, und somit den Werth aller irrationalen Zahlen (§. 30.) angeben können.

Es war nämlich die Gleichung (I)

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots\right].$$

Man wird daher jede Zahl A, aus welcher man z. B. die zweyte oder die Quadratwurzel ziehen soll, in zwey Theile

$$a^2 + b$$

so zerlegen, dafs der erste Theil ein vollkommenes oder bekanntes Quadrat, und dafs der zweyte Theil gegen den ersten sehr klein ist. Denn setzt man

$$c = \frac{b}{a^2},$$

so geht der vorhergehende Ausdruck in folgenden über:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a[1 + \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{8}c^2 + \tfrac{1}{16}c^3 - \tfrac{5}{128}c^4 + \tfrac{7}{256}c^5 - \tfrac{21}{1024}c^6 + \ldots].$$

Eben so wird man, um aus einer gegebenen Zahl A die Kubikwurzel auszuziehen, diese Zahl in zwey Theile

$$a^3 + b$$

so theilen, dafs der erste Theil ein vollkommener Würfel, und dafs der zweyte gegen den ersten sehr klein ist. Setzt man dann

$$c = \frac{b}{a^3},$$

so hat man

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + b} = a[1 + \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{9}c^2 + \tfrac{5}{81}c^3 - \tfrac{10}{243}c^4 + \tfrac{22}{729}b^5 - \tfrac{154}{6561}c^6 + \ldots],$$

und so fort für alle anderen Wurzeln.

Um diefs durch ein Beyspiel zu zeigen, wollen wir die Quadratwurzel von 2 suchen. Setzt man in einer ersten Näherung $a = 1$ und $b = 1$, also auch $c = 1$, so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}, \quad \text{oder nahe} \quad \sqrt{2} = 1.4.$$

Sey daher in einer zweyten Näherung $a = 1.4$, also auch $a^2 = 1.96$, und sonach $b = 0.04$ und $c = \frac{0.04}{1.96} = \frac{1}{49}$, so hat man

$$\sqrt{2} = 1.4[1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{49}) - \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{49})^2 + \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{49})^3 - \ldots],$$

eine viel schneller convergirende Reihe, als zuvor.

Wenn man diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so ist

$$\sqrt{2} = 1.4 \left\{\begin{array}{l} 1 \\ +\ 0.010\ 2041 \\ -\ 0.000\ 0521 \\ +\ 0.000\ 0005 \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \sqrt{2} = 1.4\,\{1.0101525\},$$

so daſs man daher hat

$$\sqrt{2} = 1.4142135,$$

und dieser Werth, wie man sieht, bis auf die sechste Decimalstelle inclus. genau.

Will man noch weiter gehen, so kann man $a = 1.414213$ setzen, woraus folgt

$$a^2 = 1.99999\ 8409369, \text{ also auch}$$
$$b = 0.000001\ 590631 \text{ und}$$
$$c = \frac{b}{a^2} = 0.000000\ 795316\ 132527,$$

so daſs man daher die folgende sehr schnell convergirende Reihe erhält:

$$\sqrt{2} = 1.414213 \left\{\begin{array}{l} 1 \\ +\ 0.000000\ 397658\ 0662636 \\ -\ 0.000000\ 000000\ 0790667 \\ +\ 0.000000\ 000000\ 0000003 \end{array}\right\}$$

oder

$$\sqrt{2} = 1.414213\,\{1.000000\ 397657\ 9871972\},$$

oder endlich

$$\sqrt{2} = 1.414213\ 562373\ 095048$$

noch in der letzten oder 18ten Decimalstelle genau.

Eben so erhält man

$$\sqrt{3} = 1.732050\ 807569,$$

woraus man dann durch einfache Rechnung auch findet

$$\sqrt{6} = \sqrt{2}.\sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{ so wie}$$
$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ u. f.}$$

Eben so hat man endlich zur Übung in solchen Rechnungen:

$$\sqrt[10]{10} \text{ oder } 10^{\frac{1}{10}} = 1.25892\ 54118\ \ldots$$
$$10^{\frac{1}{100}} = 1.02329\ 29923\ \ldots$$
$$10^{\frac{1}{1000}} = 1.00230\ 52381\ \ldots \text{ u. f.}$$

§. 60. (Entwickelung der Logarithmen.) Sey die Function gegeben

$$u = \mathrm{Log}\,(1 + x),$$

so hat man, nach §. 52.:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{m}{1+x},$$

also auch

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -\frac{m}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{2m}{(1+x)^3},$$

$$\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right) = -\frac{2.3m}{(1+x)^4} \text{ u. f.}$$

Setzt man in allen diesen Ausdrücken die Gröſse $x = 0$, so erhält man, nach *Maclaurin's* Theorem, da $\mathrm{Log}\,1 = 0$ ist:

$$U = 0, \quad U' = m, \quad U'' = -m, \quad U''' = 2m, \quad U'''' = -2.3m, \ldots$$

also auch, wenn man diese Werthe von U, U', U'', ... in der Reihe (B) des §. 57., das heiſst, in dem Ausdrucke

$$u = U + xU' + \frac{x^2}{1.2}U'' + \frac{x^3}{1.2.3}U''' + \ldots$$

substituirt:

$$\mathrm{Log}\,(1 + x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) \ldots \text{(C)},$$

und dieſs ist die schöne und einfache Reihe, welche den Logarithmus jeder Zahl $(1 + x)$ durch diese Zahl x selbst ausdrückt.

I. Man kann der gefundenen Reihe mehrere verschiedene Gestalten geben, die sie zur Berechnung der Logarithmen bequemer machen.

Setzt man z. B. in ihr statt der willkürlichen Gröſse x die Gröſse $-x$, so erhält man

$$\mathrm{Log}\,(1 - x) = -m\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Subtrahirt man aber diese beyden Reihen von einander, und bemerkt man, daſs nach §. 44, III.

$$\log y - \log z = \log\frac{y}{z}$$

ist, so hat man

$$\mathrm{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = 2m\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right\}.$$

Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke statt x die

Grösse $\frac{y}{2x+y}$, so erhält man

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+y}{x},$$

so dass man daher hat:

$$\text{Log}\,(x+y)$$
$$= \text{Log}\,x + 2m \left\{ \left(\frac{y}{2x+y}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots \right\}.$$

§. 61. (Entwicklung der Exponentialgrössen.) Ist endlich noch die dritte der oben erwähnten Functionen, oder ist die Exponentialgrösse

$$u = a^x$$

gegeben, so hat man (nach §. 53.)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{m} \cdot a^x, \quad \text{also auch}$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{1}{m^2} \cdot a^x, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{1}{m^3} \cdot a^x \quad \text{u. f.}$$

und wenn man in diesen Ausdrücken die Grösse $x = 0$ setzt,

$$U = 1, \quad U' = \frac{1}{m}, \quad U'' = \frac{1}{m^2}, \quad U''' = \frac{1}{m^3} \quad \text{u. f.},$$

so dass man daher nach *Maclaurin's* Theorem (§. 57, Gleichung B) erhält:

$$a^x = 1 + \left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots \text{(D)},$$

und diess ist die gesuchte Entwicklung der Potenz a^x durch ihren veränderlichen Exponenten x.

§. 62. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl m.) Wir haben bereits oben (§. 45, I.) gesehen, dass das Verhältniss der Logarithmen *derselben* Zahl x, in zwey verschiedenen Systemen, ein *constantes* Verhältniss zu einander haben, welches Verhältniss wir a. a. O. durch die Zahl m bezeichnet haben, so dass

$$\text{Log}\,x = m \,.\, \text{log}\,x$$

ist, wenn durch die beyden Symbole *Log* und *log* die Logarithmen von zwey Systemen bezeichnet werden, deren Basis a und e sind, für welche man also den Werth von $\text{Log}\,a$ in dem ersten, und von $\text{log}\,e$ in dem zweyten Systeme, der Einheit gleich ist.

Da es unzählig viele Systeme von Logarithmen gibt, indem jede willkürliche Zahl als die Basis eines solchen Systems angenommen werden kann, so wird es von unserer Wahl abhängen, eines derselben gleichsam vorzugsweise zu betrachten, und auf dasselbe alle anderen zu beziehen.

Die Gleichung (C) des §. 60. gab für den allgemeinen Ausdruck des Logarithmus in jedem Systeme

$$\mathrm{Log}(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Da die Gröſse m, dem Vorhergehenden zu Folge, eine beständige Zahl ist, deren Werth aber unserer Wahl überlassen bleibt, und da es am einfachsten und natürlichsten ist, diese Zahl m gleich der Einheit anzunehmen, so wollen wir auch die unter dieser Annahme entstehenden Logarithmen die *natürlichen* nennen, und sie durch das zweyte der oben erwähnten Symbole, oder durch *log* bezeichnen, so daſs man daher für diese natürlichen Logarithmen, deren Basis wir, wie zuvor, durch e anzeigen wollen, nach §. 60. die Ausdrücke haben wird:

$$\left\{\begin{array}{l} \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \\ \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \text{ u. f.} \end{array}\right.$$

während wir für jedes andere System, dessen Basis a ist, die zu diesem System gehörenden Logarithmen durch die in §. 60. gegebenen, unveränderten Ausdrücke bestimmen:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Log}(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) \\ \mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2m\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \text{ u. f.} \end{array}\right.$$

Wir wollen diese letzten, durch *Log* bezeichneten Logarithmen, zum Unterschiede von den natürlichen, die *gewöhnlichen Logarithmen* nennen.

Dieſs vorausgesetzt, werden wir nur noch anzugeben haben, wie die Gröſsen a und m von einander abhängen, oder welches der Factor m ist, durch welchen man alle natürlichen Logarithmen, deren Basis e ist, multipliciren muſs, um dadurch die gewöhnlichen Logarithmen, deren Basis a ist, zu erhalten.

I. Zu diesem Zwecke wollen wir in der Reihe (D) des §. 61. die Grösse $x = 1$ setzen, wodurch man erhält:

$$a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1 \cdot 2\, m^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3\, m^3} + \ldots,$$

und dieser Ausdruck gibt den Werth der Basis a des gewöhnlichen Logarithmensystems, wenn sein Factor, oder, wie man zu sagen pflegt, wenn sein *Model* m bekannt ist.

II. Setzt man eben so in der Gleichung (C) des §. 60. die Grösse $x = a - 1$ oder $1 + x = a$, so erhält man, da für das gewöhnliche System $\mathrm{Log}\, a = 1$ ist:

$$\frac{1}{m} = (a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \ldots,$$

und dieser Ausdruck gibt den Model m des Systems, wenn die Basis a desselben bekannt ist.

III. Wegen der bey uns eingeführten decadischen Art zu zählen (§. 16, II.), hat man die Zahl 10 für die Basis der gewöhnlichen Logarithmen, mit welchen wir zu rechnen pflegen, gewählt. Setzt man also $a = 10$, so gibt die letzte Reihe

$$\frac{1}{m} = 9 - \tfrac{1}{2} 9^2 + \tfrac{1}{3} 9^3 - \tfrac{1}{4} 9^4 + \ldots$$

Diese Reihe convergirt erst in ihren höheren Gliedern, und auch da anfangs nur langsam. Wir werden aber bald ein anderes Mittel finden, den Werth der Grösse m auf eine bequemere Weise zu bestimmen. Berechnet man indess eine grössere Anzahl Glieder der letzten Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{m} = 2.302585\ 092994\ 045684,$$

und daher auch

$$m = 0.434294\ 481903\ 251828.$$

Mit diesem Factor m wird man daher die natürlichen Logarithmen jeder Zahl multipliciren, um die gewöhnlichen Logarithmen derselben Zahl zu erhalten.

Bemerken wir noch, dass dieser Werth von m zugleich der Werth des gewöhnlichen Logarithmus von e, und der reciproke Werth des natürlichen Logarithmus von a ist, da man, nach §. 45, I. hat:

$$m = \mathrm{Log}\, e \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} = \log a.$$

§. 63. (Bestimmung der vorhergehenden Zahl e.) Noch ist die Bestimmung des Werthes von e oder von der Basis der natürlichen Logarithmen übrig.

Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Gröſse a in e übergeht, wenn m gleich der Einheit ist, so gibt die Gleichung (D) des §. 61, wenn man in ihr $m = 1$ und daher $a = e$ setzt,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ (E)},$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke $x = 1$ setzt,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

Berechnet man eine gröſsere Anzahl von Gliedern der letzten Reihe, so findet man

$$e = 2.718281\ 828459\ 045235\ \ldots$$

eine sehr wichtige Zahl, auf die wir in der Folge noch öfter zurückkommen werden.

§. 64. (Berechnung der Logarithmen und Gebrauch der logarithmischen Tafeln.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Theorie der Logarithmen vollständig kennen gelernt haben, wollen wir nun auch zu dem Gebrauch derselben übergehen, wie er bey unseren Rechnungen erfordert wird. Dazu aber ist es vor allem nothwendig, die numerischen Werthe dieser Logarithmen für alle natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in einer Tafel aufgestellt zu haben. Diese zu finden, werden uns die vorhergehenden Ausdrücke mehr als ein Mittel an die Hand geben.

Setzt man z. B. in der letzten Gleichung des §. 60, I. die Gröſse $x = y = 1$, und nimmt man auch $m = 1$, so hat man für die natürlichen Logarithmen

$$\log(x+y) = \log x + 2\left\{\left(\frac{y}{2x+y}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots\right\}$$

oder

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right),$$

das heiſst, wenn man diese Brüche in Decimalbrüche auflöst:

$$\log 2 = 0.69314\ 71806.$$

Eben so gibt $x = 2$ und $y = 1$

$$\log 3 = \log 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \ldots\right) \quad \text{oder}$$

$$\log 3 = 1.09861\ 22887.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$\log 5 = 1.60943\ 79124,$$
$$\log 7 = 1.94591\ 01490.$$

Hat man aber so bereits die Logarithmen von 2, 3, 5 und 7, so findet man die übrigen bis zu 10 durch folgende einfache Gleichungen (§. 44.):

$$\log 4 = 2 \log 2, \quad \log 6 = \log 2 + \log 3,$$
$$\log 8 = 3 \log 2, \quad \log 9 = 2 \log 3 \quad \text{und}$$
$$\log 10 = \log 2 + \log 5 \quad \text{u. s. f.}$$

Auf diese Weise erhält man z. B. den letzten dieser Logarithmen, oder

$$\log 10 = 2.30258\ 50930\ \ldots,$$

und dieſs ist zugleich der Werth von der Gröſse $\frac{1}{m}$, die wir oben (§. 62, III.) durch eine langsam convergirende Reihe bestimmt haben.

I. Bemerken wir noch, daſs die zwey in §. 62. aufgestellten Ausdrücke für $\log(1 + x)$ und für $\log \frac{1+x}{1-x}$ geben, wenn man in ihnen $x = 1$ setzt:

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$
$$\text{und} \quad \log \infty = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots,$$

so wie zugleich die erste, für $x = -1$, gibt

$$-\log 0 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Da aber der Logarithmus einer unendlich groſsen Zahl ohne Zweifel ebenfalls unendlich groſs ist, und da, wie aus den Gleichungen

$$e^{-u} = x \quad \text{oder} \quad u = -\log x$$

folgt, die Gröſse $-\log 0$ positiv und unendlich groſs ist, so ist die erste der drey vorhergehenden Reihen convergent, während die bey den anderen divergent sind, übereinstimmend mit §. 23, II.

II. Man hat bereits mehrere Tafeln berechnet, welche die gewöhnlichen Logarithmen der natürlichen Zahlen enthalten.

Unter den neueren sind die vorzüglichsten die von *Vega* und *Callet*, und die bequemsten für kleinere Rechnungen die von *Lalande*.

Die allgemeinen Vorschriften für den Gebrauch dieser Tafeln sind ihnen gewöhnlich beygegeben, daher wir uns hier nicht dabey aufhalten, und nur einige Bemerkungen über diesen Gegenstand hinzufügen.

A. Da $\text{Log}\,1 = 0$ ist, so sind die Logarithmen aller eigentlichen Brüche negativ. So findet man z. B. in diesen Tafeln, wo ich mich hier der Kürze wegen nur auf drey Decimalstellen beschränke:

$$\begin{aligned}\text{Log}\,624 &= 2.795,\\ \text{Log}\,62.4 &= 1.795,\\ \text{Log}\,6.24 &= 0.795.\end{aligned}$$

Setzt man dieſs weiter fort, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned}\text{Log}\,0.624 &= 0.795 - 1,\\ \text{Log}\,0.0624 &= 0.795 - 1.\end{aligned}$$

Es ist aber viel bequemer, die letzten Ausdrücke so darzustellen:

$$\begin{aligned}\text{Log}\,0.624 &= 9.795,\\ \text{Log}\,0.0624 &= 8.795 \text{ u. f.}\end{aligned}$$

Man wird nämlich nie anstehen, in dem Endresultate einer jeden Rechnung zu entscheiden, ob der letzte Logarithmus, wie hier 8.795, zu einem sehr kleinen Bruch, wie hier 0.0624, oder zu einer ganzen Zahl mit 9 Ziffern gehören soll.

B. Die Logarithmen der negativen Gröſsen sind imaginär, da in der Gleichung

$$y = 10^x \quad \text{oder} \quad x = \text{Log}\,y$$

die Gröſse y nie negativ werden kann, welchen Werth man auch der Gröſse x geben mag. Dieſs hindert aber nicht, während der Berechnung eines algebraischen Ausdrucks, die Zeichen vorerst wegzulassen, um sie dann in dem Endresultate wieder zu berücksichtigen. Um Irrungen zu vermeiden, kann man die Logarithmen der negativen Zahlen durch ein N bezeichnen. Wollte man z. B. von den beyden Zahlen 0.0036 und -0.048 das Product mit Hülfe der Logarithmen suchen, so hätte man

$$\begin{aligned} \text{Log}\, 0.0036 &= 7.55630 \\ \text{Log}\,(-0.048) &= \underline{8.68124\, N} \\ \text{Summe}\ \ldots &\ 6.23754. \end{aligned}$$

Von diesem Logarithmus geben die Tafeln die Zahl 1728, also ist auch das gesuchte Product gleich — 0.0001728.

C. Endlich bemerken wir noch, daſs eine solche Tafel das bequemste Mittel darbietet, die Wurzeln aller Zahlen, wenigstens innerhalb den Grenzen, welche diese Tafeln gewähren, zu finden, da nach §. 44. die Ausziehung der Wurzeln durch die Logarithmen in eine einfache Division verwandelt wird. So findet man z. B. aus den erwähnten Tafeln *Vega's* ohne Anstand die zehnte Wurzel aus der Zahl 1000. Da nämlich

$$\text{Log}\, 1000 = 3.0000000$$

ist, so gibt der zehnte Theil dieser Zahl oder die Gröſse

$$0.3000000$$

in jener Tafel sofort 1.9952623 für den gesuchten Werth von $\sqrt[10]{1000}$.

§. 65. (Gröſste und kleinste Werthe, und unbestimmte Ausdrücke der Functionen.) Wenn in einer Function $u = f(x)$ von x die Stammgröſse x übergeht in $x + h$, so hat man, nach der Gleichung (A) des §. 56, für den so veränderten Werth dieser Function

$$u' - u = h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \ldots,$$

und eben so erhält man, wenn x in $x - h$ übergeht:

$$u' - u = -h \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \ldots,$$

und man sieht leicht, daſs man die Gröſse h so klein annehmen kann, daſs, in diesen beyden Reihen, jedes einzelne Glied grösser wird, als die Summe aller ihm folgenden Glieder. Bleibt man bey dem ersten Gliede stehen, so ist also $u' - u$ im ersten Falle positiv, und im zweyten negativ, oder u' ist im ersten Falle gröſser, und im zweyten kleiner, als u. Es kann daher zwischen $x + h$ und $x - h$ kein gröſster oder kleinster Werth von u Statt haben, auſser in dem Falle, wo $\frac{du}{dx} = 0$ ist, wo nämlich das erste Glied in beyden Reihen völlig verschwindet, und wo man daher, wenn man zu dem zweyten übergeht und bey demselben stehen bleibt, in beyden Reihen haben wird

$$u' - u = + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 u}{d x^2};$$

ein Ausdruck, der, da das Quadrat von h immer positiv ist, mit der Gröſse $\frac{d^2 u}{d x^2}$ zugleich positiv oder zugleich negativ seyn wird. Ist also du gleich Null, so wird für $x+h$ sowohl, als auch für $x-h$ die Gröſse u' gröſser oder kleiner als u seyn, je nachdem $d^2 u$ negativ oder positiv ist, d. h. u' wird in jenem Falle gröſser, und in diesem kleiner seyn, als alle ihm zunächst vorhergehenden oder zunächst nachfolgenden Werthe von u.

Die Function u kann also nur dann ein Gröſstes oder Kleinstes seyn, wenn $du = 0$ ist. Sucht man dann aus dieser Bedingungsgleichung $du = 0$ den Werth von x, und substituirt ihn in $d^2 u$, so wird u, für diesen Werth von x, ein Gröſstes oder Kleinstes seyn, wenn $d^2 u$ negativ oder positiv ist.

Ist aber $d^2 u$ ebenfalls, so wie du, gleich Null, so kann, wie zuvor, u nur dann ein Gröſstes oder Kleinstes seyn, wenn auch noch $d^3 u = 0$ ist. Sucht man dann aus der letzten Gleichung den Werth von x, und substituirt ihn in $d^4 u$, so wird u, für diesen Werth von x, ein Gröſstes oder Kleinstes seyn, wenn $d^4 u$ negativ oder positiv ist u. s. w.

Beyspiele werden dieſs sofort deutlich machen.

Ex. I. Sey $u = x^2 + 4x + 2$ gegeben, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 2.$$

Setzt man aber $2x+4$ gleich Null, so erhält man $x = -2$, und da überdieſs $d^2 u$, für alle Werthe von x, positiv bleibt, so ist die gegebene Function u für $x = -2$ ein Kleinstes, nämlich selbst gleich -2.

Ex. II. Eben so gibt die Function $u = x^3 + 3x^2 - 9x + 18$ für ihre beyden ersten Differentiale

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x - 9 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 6x + 6.$$

Aber die Gleichung $du = 3x^2 + 6x - 9 = 0$ hat die beyden Wurzeln $x = +1$ und $x = -3$;

$$x = +1 \text{ gibt } \frac{d^2 u}{dx^2} = +12, \text{ also ein Kleinstes, und}$$

$$x = -3 \text{ gibt } \frac{d^2 u}{dx^2} = -12, \text{ also ein Gröſstes.}$$

Diese Function u ist demnach ein Kleinstes, und zwar $u = +13$ für $x = 1$, und ein Gröſstes, $u = +45$ für $x = -3$.

Eben so wird man finden, daſs man hat:

$$u = \frac{x}{1 + x^2} \text{ ein Gröſstes für } x = 1, \text{ und}$$
$$\text{ein Kleinstes für } x = -1,$$

$$u = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2} \text{ ein Gröſstes für } x = -\sqrt{2}, \text{ und}$$
$$\text{ein Kleinstes für } x = \sqrt{2},$$

und $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ ein Kleinstes für $x = 1$, ein Gröſstes für $x = 2$, und wieder ein Kleinstes für $x = 3$.

I. Noch wollen wir, zum Schlusse dieses Gegenstandes, bemerken, daſs man öfter Ausdrücke findet, die für gewisse Werthe der in ihnen enthaltenen Gröſsen die Gestalt $\frac{0}{0}$ annehmen. Sind X und X' solche Functionen, die z. B. für $x = a$, beyde verschwinden, und soll man den Werth von

$$u = \frac{X}{X'}$$

für $x = a$ bestimmen, so hat man, wenn x in $x + h$ übergeht, nach der Gleichung (A) des §. 56.

$$u' = \frac{X + h \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \ldots}{X' + h \cdot \frac{dX'}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \ldots}.$$

Da nun, für $x = a$, X sowohl als X' verschwindet, so gibt der letzte Ausdruck

$$u' = \frac{\frac{dX}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \ldots}{\frac{dX'}{dx} + \frac{h}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 X'}{dx^2} + \ldots},$$

und daher, für $h = 0$, der gesuchte Werth

$$u' = \frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}.$$

Sollte auch dieser letzte Ausdruck von u' für $x = a$ wieder $\frac{0}{0}$ werden, so findet man auf dieselbe Weise

$$u' = \frac{d^2 X}{d x^2} : \frac{d^2 X'}{d x^2} \text{ u. s. w.}$$

Ex. I. Um den Werth von

$$u = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

für den besonderen Fall $x = 1$ zu finden, hat man, wenn man das Differential des Zählers sowohl, als auch das des Nenners nimmt:

$$u' = \frac{n x^{n-1} d x}{d x} = n x^{n-1},$$

also auch $u' = n$ für $x = 1$.

Ex. II. Um die Function

$$u = \frac{a x^2 - 2 a c x + a c^2}{b x^2 - 2 b c x + b c^2}$$

für den besonderen Fall $x = c$ zu finden, hat man, nach der ersten Differentiation,

$$u' = \frac{a x - a c}{b x - b c},$$

und da auch dieser Ausdruck wieder $\frac{0}{0}$ für $x = c$ wird, so erhält man durch eine zweyte Differentiation

$$u' = \frac{a d x}{b d x} = \frac{a}{b}$$

für den gesuchten particulären Werth von u.

Eben so findet man für den besonderen Fall $x = 0$ folgende Werthe:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{x} \log (1 + x) = 1,$$

$$\frac{(1 - x)}{(1 - x)^2} \cdot \log x = \frac{1}{0} \text{ oder unendlich grofs.}$$

Zwölftes Capitel.

Auflösung der Gleichungen.

§. 66. (Anzahl der Wurzeln einer Gleichung.) Jede geordnete algebraische Gleichung des m^{ten} Grades hat, nach §. 34, die Form

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + hx + k = 0,$$

wo m eine ganze, positive Zahl, und wo $a, b, c, \ldots h, k$ reelle und rationelle Gröſsen bezeichnen. Statt diesem Ausdrucke wollen wir, der Kürze wegen, hier und im Folgenden

$$X = 0$$

setzen. — Man kann eine solche Gleichung im Allgemeinen als das Product von m Gleichungen der ersten Ordnung, oder als das Product der m Factoren

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

ansehen, da dieses Product, wenn es entwickelt wird, die Gestalt der obigen Gleichung $X=0$ annimmt. Da aber dieses Product, so wie jener ihm gleichgeltende Ausdruck X, gleich Null wird, wenn man statt x die Gröſse α, oder β, oder γ, ... setzt, so werden α, β, γ, ... nach §. 34, II., die *Wurzeln* der Gleichung $X=0$ seyn, und man sieht, daſs die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung des m^{ten} Grades gleich m seyn wird. Diese Wurzeln können übrigens gleich oder ungleich, rational oder irrational und selbst imaginär seyn.

I. Ist aber die gegebene Gleichung nicht algebraisch, sondern transcendent, so ist die Anzahl ihrer Wurzeln unendlich groſs. So ist die Gleichung

$$0 = a - e^x,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, nach §. 63. mit der folgenden Gleichung identisch,

$$0 = a - 1 - x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} - \ldots,$$

die nach dem Vorhergehenden unendlich viele Wurzeln hat, da sie einer ohne Ende fortgehenden Reihe gleichgeltend ist.

Die *Auflösung* einer gegebenen Gleichung besteht in der Bestimmung ihrer Wurzeln.

§. 67. (Auflösung der Gleichungen des ersten Grades.) Da die algebraischen Gleichungen des ersten Grades die unbekannte Gröſse x nur in der ersten Potenz enthalten, so besteht die Auflösung derselben in der Isolirung oder in der *Sonderung* dieser Unbekannten von den übrigen Gröſsen der Gleichung, wovon bereits oben §. 35. gehandelt worden ist, wenn man bloſs *eine* Gleichung mit einer Unbekannten vorgelegt hat.

I. Sind aber zwey Unbekannte x und y in zwey Gleichungen gegeben, so wird man am einfachsten auch hier in jeder der zwey Gleichungen die eine der beyden Unbekannten sondern, und dann die so erhaltenen Werthe dieser Unbekannten einander gleich setzen. Dadurch erhält man eine Gleichung, die bloſs die zweyte Unbekannte enthält, und die man daher wieder nach den Vorhergehenden behandeln wird.

Sind z. B. die beyden Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{array}\right\},$$

so erhält man durch Absonderung der Gröſse x aus der ersten

$$x = -(by + c)\,\frac{1}{a},$$

und aus der zweyten

$$x = -(b'y + c')\,\frac{1}{a'}.$$

Setzt man beyde Werthe von x einander gleich, so hat man die Gleichung

$$a(b'y + c') = a'(by + c),$$

und wenn man aus derselben die Gröſse y nach §. 35. sucht, so erhält man

$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Substituirt man dann diesen Werth von y in einem der zwey oben gegebenen Werthe von x, so erhält man

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},$$

und dadurch sind demnach beyde unbekannten Gröſsen x und y gefunden. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$m = ab' - a'b,$$

so hat man

$$m.x = bc' - b'c \quad \text{und}$$

$$m.y = ac' - a'c.$$

Man sieht, wie sich dasselbe Verfahren auf drey und mehr Gleichungen der ersten Ordnung zwischen eben so viel Unbekannten fortsetzen läſst.

§. 68. (Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.) Die Gleichungen des zweyten Grades oder die quadratischen Gleichungen sind sämmtlich in der Form enthalten:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

oder auch

$$x^2 + ax = -b.$$

Wäre nun der erste Theil $x^2 + ax$ dieser Gleichung ein vollkommenes Quadrat, von dem sich die Wurzel in einem geschlossenen Ausdrucke angeben läſst, so würde man den gesuchten Werth von x ohne Anstand bestimmen, wenn man aus diesem Theile die Wurzel zieht.

Es ist aber immer leicht, diesen ersten Theil zu einem solchen Quadrat zu machen. Zu diesem Zwecke darf man nämlich nur den Factor a von x durch 2 theilen, und dann das Quadrat dieses Quotienten oder die Gröſse $\frac{1}{4}a^2$ zu beyden Seiten der gegebenen Gleichung addiren. Dadurch erhält man

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b.$$

Zieht man dann auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, so hat man

$$x + \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

das doppelte Zeichen wegen §. 32, und daher auch

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b};$$

und dieſs ist die gesuchte doppelte Wurzel (§. 66.) der gegebenen quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

I. Ist daher $a^2 = 4b$, oder ist $a = 2\sqrt{b}$, so sind die beyden Wurzeln der Gleichung gleich, und jede $= -\frac{1}{2}a = -\sqrt{b}$. Ist a^2 gröſser als $4b$, so sind beyde Wurzeln reell, und ist endlich a^2 kleiner als $4b$, so sind beyde Wurzeln imaginär. Ist die Gröſse $(a^2 - 4b)$ ein vollkommenes Quadrat, so sind die Wurzeln rational, im entgegengesetzten Falle aber sind sie irrational.

Ex. Ist die Gleichung gegeben

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

so hat man $a = 1$ und $b = -1$, also ist auch

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

oder die beyden Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618034\ldots$$

und $x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = -1.618034\ldots$

Eben so wird man finden, daſs

zu der Gleichung	die Wurzeln gehören:		
$x^2 - 3x + 2 = 0 \ldots$	$x = 1$	und	$x = 2$
$x^2 - 2x - 3 = 0 \ldots$	$x = 3$	»	$x = -1$
$x^2 - 2x + 2 = 0 \ldots$	$x = 1 + \sqrt{-1}$	»	$x = 1 - \sqrt{-1}$.

II. Auf dieselbe Weise lassen sich auch höhere Gleichungen der Form

$$x^{2m} + ax^m + b = 0$$

behandeln, da sie, wenn man $x^m = u$ setzt, die Gestalt

$$u^2 + au + b = 0$$

einer quadratischen Gleichung annehmen, für die man, nach dem Vorhergehenden, hat:

$$u = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

also auch, da $x = \sqrt[m]{u}$ ist:

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}}.$$

Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^6 - 3x^3 + 2 = 0,$$

so hätte man für $x^3 = u$ auch

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

und da von der letzten Gleichung die Wurzeln

$$u = 1 \quad \text{und} \quad u = 2$$

sind, so hat man auch für die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = \sqrt[3]{1} \quad \text{und} \quad x = \sqrt[3]{2},$$

oder da jeder der zwey letzten Ausdrücke (nach §. 33, I.) einen dreyfachen Werth hat, so sind die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ &= \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 + \sqrt{-3}) \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 - \sqrt{-3}) \end{aligned}$$

§. 69. (Eigenschaften der Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen.) Obschon die Theorie der algebraischen Gleichungen, mit welcher sich die vorzüglichsten Geometer beschäftiget haben, bereits sehr ausgebildet ist, so läfst sie doch noch vieles zu wünschen übrig, und besonders ist das Fundamentaltheorem, die Bestimmung der Wurzeln einer jeden Gleichung, welches wir so eben für die quadratischen Gleichungen betrachtet haben, nur noch auf die Gleichungen des dritten und vierten Grades fortgeführt worden, und selbst hier sind die Endresultate gewöhnlich sehr complicirt und für die Anwendung unbequem. Für Gleichungen des fünften und höheren Grades aber scheint die Auflösung dieser Aufgabe die Kräfte unserer Analysis ganz zu übersteigen.

I. Wenn jedoch die Coefficienten der Gröfse x in einer gegebenen Gleichung nicht mehr *allgemeine Zeichen* oder Buchstaben, die jeden Werth annehmen können, sondern wenn sie gegebene *Zahlen* von bestimmtem Werthe sind, wo dann die Gleichung eine *numerische* genannt wird, so hat man allerdings mehr als ein Mittel, die Wurzel einer solchen Gleichung, selbst wenn sie transcendent ist, zu bestimmen, wie wir bald sehen werden.

Hier wollen wir uns damit begnügen, die vorzüglichsten jener Sätze, die man über die Relationen der Wurzeln der *allgemeinen* algebraischen Gleichungen gefunden hat, kurz zusammen zu stellen.

II. Wenn, wie in §. 66, die Gröfsen α, β, γ, δ, . . . die Wurzeln einer Gleichung $X=o$ bezeichnen, so ist, wie a. a. O. gesagt wurde,

$$X = o = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots$$

Entwickelt man diese Producte, so hat man z. B. für jede Gleichung des *vierten* Grades

$$\begin{aligned} X = o = x^4 & - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\, x^3 \\ & + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\, x^2 \\ & - (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)\, x \\ & + \alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit der allgemeinen Form einer Gleichung des vierten Grades, die nach §. 66. ist:

$$X = o = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so erhält man für die Coefficienten a, b, c, d folgende Werthe:

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ b &= +(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta) \\ c &= -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta) \\ d &= +\alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke findet man auch für Gleichungen des 5^{ten}, 6^{ten}, . . . Grades u. f., und man hat daraus das Theorem abgeleitet:

»In jeder Gleichung der Form

$$X = o = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + hx + k$$

»ist der Factor a des zweyten Gliedes gleich der Summe aller »Wurzeln der Gleichung, diese Wurzeln mit verkehrten Zeichen »genommen; der Factor b des dritten Gliedes ist die Summe aller »Paare oder aller Amben der so genommenen Wurzeln; der »Factor c des vierten Gliedes ist die Summe aller Ternen u. s. f., »und der Factor k des letzten Gliedes ist das Product aller dieser »Wurzeln, dieselben mögen reell oder imaginär seyn.«

III. Wenn in derselben Gleichung $X=o$ für $x=A$ der Werth von X positiv, und für $x=B$ negativ wird, so liegt zwischen den beyden Gröfsen A uud B immer wenigstens *eine* reelle Wurzel der Gleichung, vielleicht aber auch 3, 5, 7, . . . oder überhaupt eine *ungerade* Anzahl reeller Wurzeln.

Wird aber für $x=A$ sowohl, als auch für $x=B$ der Werth von X in beyden Fällen positiv, oder in beyden Fällen negativ, so liegt zwischen A und B entweder keine, oder 2, oder 4, oder überhaupt eine *gerade* Anzahl reeller Wurzeln.

IV. Jede Gleichung des 3ten, 5ten, 7ten, . . . und überhaupt eines ungeraden Grades, hat wenigstens *eine* reelle Wurzel, und diese ist positiv, wenn das letzte constante Glied k negativ ist, und umgekehrt. So kann aber auch 3, 5, 7, . . . reelle Wurzeln haben. Jede Gleichung eines geraden Gliedes hat aber entweder keine, oder 2, 4, 6, . . . reelle Wurzeln.

V. Jede Gleichung des 2ten, 4ten, 6ten, und überhaupt eines geraden Grades, deren letztes constantes Glied k negativ ist, hat wenigstens zwey reelle Wurzeln, von welchen immer die eine positiv und die andere negativ ist.

VI. Wenn in der obigen Gleichung $X=0$ das letzte Glied k negativ ist, und wenn die positiven Glieder, falls solche da sind, alle unmittelbar auf das erste folgen, so hat die Gleichung immer eine reelle positive Wurzel. So hat z. B. die Gleichung

$$x^2 + 7x^2 - 5x - 35 = 0$$

die Wurzeln $\quad + \sqrt{5}, - \sqrt{5}$ und -7.

VII. Die irrationalen Wurzeln jeder Gleichung sind immer paarweise da, und wenn die eine die Form hat $\alpha + \sqrt{\beta}$, so hat die andere die Form $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Dasselbe gilt auch von den imaginären Wurzeln, die ebenfalls immer paarweise von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

vorkommen.

VIII. Um von einer Gleichung alle ihre positiven Wurzeln in negative, und alle ihre negativen Wurzeln in positive zu verwandeln, wird man bloſs die Zeichen derjenigen Glieder ändern, in welchen der Exponent von x ungerade ist.

IX. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der obigen Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + g x^2 + h x + k,$$

so sind auch $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m + \frac{h}{k} x^{m-1} + \frac{g}{k} x^{m-2} + \ldots + \frac{b}{k} x^2 + \frac{a x}{k} + \frac{1}{k},$$

und man nennt die letzte Gleichung die *reciproke* der ersten, so wie auch die Gröſsen $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, . . . die reciproken Gröſsen von α, β, γ, . . . genannt werden.

X. Um die sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung um die Gröſse A zu vermehren, darf man bloſs in dieser Gleichung statt x die Gröſse $x + A$ setzen.

XI. Um in der gegebenen Gleichung

$$X = 0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + h x + k$$

das zweyte Glied $a x^{m-1}$ wegzubringen, darf man bloſs in dieser Gleichung statt x die Gröſse $x - \frac{a}{m}$ setzen, wodurch dann eine Gleichung der Form entsteht:

$$0 = x^m + A x^{m-2} + B x^{m-3} + \ldots + H x + K.$$

In einer solchen Gleichung, der das zweyte Glied fehlt, ist die Summe aller ihrer positiven Wurzeln gleich der Summe aller ihrer negativen Wurzeln, wenn diese Wurzeln sämmtlich reell sind.

Fehlt endlich in einer Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + \ldots + g x^2 + h x$$

das letzte oder constante Glied k, so ist immer eine ihrer Wurzeln gleich Null.

XII. Wenn kein Glied der Gleichung fehlt, und wenn diese Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so hat sie auch immer eben so viel positive Wurzeln, als sie Zeichenwechsel [$+ -$ oder $- +$] ihrer Glieder hat, und eben so viele negative Wurzeln, als sie Zeichenfolgen [$+ +$ oder $- -$] ihrer Glieder hat.

So hat die Gleichung

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

zwey Zeichenwechsel und nur eine Zeichenfolge, also hat sie auch, da alle ihre Wurzeln reell sind, zwey positive Wurzeln $+2$ und $+7$, und eine negative Wurzel -1.

Wenn aber einige Glieder der Gleichung fehlen, so kann man sich dieselben durch Glieder mit dem Coefficienten Null ersetzt denken, deren Zeichen sich willkürlich annehmen lassen. Nimmt man nun diese Zeichen so an, daſs die Anzahl N sämmtlicher Wechsel ein Kleinstes ist, und nimmt man sie dann auch so an, daſs die Anzahl N' sämmtlicher Folgen der Zeichen ein

Kleinstes ist, so ist die Zahl der positiven Wurzeln der Gleichung nicht grösser als N, und die Zahl der negativen Wurzeln nicht grösser als N', und zugleich ist die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung nicht grösser als

$$m - (N + N'),$$

wenn die Gleichnng des m^{ten} Grades ist.

So hat z. B. die Gleichung

$$x^m + 1 = 0$$

alle ihre Wurzeln imaginär, wenn m gerade, und sie hat nur eine reelle Wurzel, wenn m ungerade ist.

§. 70. (Genäherte Auflösung aller numerischen Gleichungen.) Wenn eine numerische Gleichung $X = 0$, in welcher die Coefficienten von x gegebene Zahlen sind (§. 69, I.), zur Auflösung vorgelegt wird, so ist es beynahe immer sehr leicht, durch blofse Versuche einen ersten, wenn auch nur sehr wenig genäherten Werth einer ihrer Wurzeln zu finden. So wird man z. B. nach §. 69, II. sofort erfahren, dafs eine solche Wurzel zwischen $x = A$ und $x = B$ fällt, wenn die Summe aller Glieder der Gleichung für $x = A$ positiv, und für $x = B$ negativ ist.

Sey demnach $x = a$ ein solcher genäherter Werth von x. Substituirt man ihn in der gegebenen Gleichung, so wird er die gegebene Grösse X nicht auf Null bringen, da nur der wahre Werth von x, nämlich nur die eigentliche Wurzel der Gleichung, also noch nicht der blofs genäherte Werth derselben, die Grösse X gleich Null machen kann.

Nehmen wir also an, dafs wir durch diese Substitution von $x = a$ in der Gleichung, statt $X = 0$, den Ausdruck erhalten

$$X = \omega,$$

wo ω eine von Null desto weniger verschiedene Grösse seyn wird, je näher bereits a dem wahren Werthe von x genommen worden ist.

Sey eben so a' eine von a nur wenig verschiedene Grösse, die also ebenfalls als ein zweyter genäherter Werth von x betrachtet werden kann. Substituirt man diesen Werth $x = a'$ in der gegebenen Gleichung, so gehe diese über in

$$X = \omega'.$$

Wir haben demnach *zwey Hypothesen* für den wahren Werth von x angenommen, nämlich $x = a$ und $x = a'$, und wir haben auch zugleich die Fehler der Endresultate, oder die Grösen ω und ω' erhalten, die aus jenen zwey Hypothesen entstanden sind.

Man hat nämlich

	Fehler der Hypothese,	Fehler des Resultats
in der ersten Voraussetzung . . .	$a - x$	ω
» » zweyten » . . .	$a' - x$	ω'.

Je näher aber die beyden aufgestellten Hypothesen der gesuchten Wahrheit liegen, oder je kleiner die beyden Fehler $a - x$ $a' - x$ dieser Hypothesen sind, desto näher wird auch das Verhältnifs derselben, oder desto näher wird die Gröfse

$$\frac{a - x}{a' - x} \text{ der Gröfse } \frac{\omega}{\omega'}$$

liegen, so dafs man, da es sich hier doch nur um eine erste Näherung handelt,

$$\frac{a - x}{a' - x} = \frac{\omega}{\omega'} \ldots \text{(I)}$$

setzen kann, woraus sofort folgt:

$$x = \frac{a'\omega - a\omega'}{\omega - \omega'}, \text{ oder auch}$$

$$x = a - \frac{(a - a')\,\omega}{\omega - \omega'} = a' - \frac{(a - a')\,\omega'}{\omega - \omega'} \ldots \text{(II)},$$

und dieser Ausdruck wird einen anderen Werth von x geben, welcher der Wahrheit näher liegt, als die beyden vorhergehenden $x = a$ und $x = a'$, so dafs man daher, mit dieser neuen Hypothese, in Verbindung mit einer der vorhergehenden, dieselbe jetzt bereits mehr gesicherte Rechnung wiederholen, und so, durch Fortsetzung der Operation, der gesuchten Wahrheit immer näher kommen kann.

In der That, um zu zeigen, dafs die Gleichung (I) der Wahrheit desto näher kömmt, je kleiner die Fehler der beyden Voraussetzungen sind, so kann man die gegebene Gleichung als eine Function von x ansehen, die für den gesuchten Werth von x gleich Null ist, so dafs man daher hat

$$u = f(x) = 0.$$

Läfst man in diesem Ausdrucke die Gröfse x in $x + (a - x)$, das heiſst, in a übergehen, so hat man, nach dem *Taylor*'schen Lehrsatz (§. 56.)

$$u' = u + (a - x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots,$$

und eben so erhält man, wenn x in $x + (a' - x)$ oder in a' übergeht:

$$u'' = u + (a' - x) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{(a'-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots$$

Je kleiner aber die Gröſsen $(a - x)$ und $(a' - x)$ sind, das heiſst, je näher die beyden Hypothesen $x = a$ und $x = a'$ der Wahrheit liegen, desto mehr wird man auch, in den beyden vorhergehenden Ausdrücken, die zweyten und höheren Potenzen dieser Gröſsen, gegen die erste, in einer bloſsen Annäherung, weglassen können, so daſs dann jene Ausdrücke sich bloſs auf ihre ersten Glieder, oder da $u' - u = \omega$ und $u'' - u = \omega'$ ist, auf die beyden einfachen Gleichungen reduziren:

$$\omega = (a - x) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{und}$$

$$\omega' = (a' - x) \cdot \frac{du}{dx},$$

deren Division die Gleichung (I) wieder gibt.

Ex. Um die Wurzel der Gleichung

$$X = x^3 - 2x + 1 = 0$$

zu finden, hat man, wenn $x = a = 0.5$ gesetzt wird, $X = 0.125$, und eben so wird $x = a' = 0.7$ geben $X = -0.057$. Setzt man daher $a = 0.5$ und $\omega = 0.125$, so wie $a' = 0.7$ und $\omega' = -0.057$, so gibt die Gleichung (II) für einen weiter genäherten Werth

$$x = a - \frac{(a - a')\,\omega}{\omega - \omega'} = 0.5 + 0.137 = 0.637.$$

Setzt man daher in einer zweyten Berechnung $a = 0.637$, so findet man $X = \omega = -0.01552$, und da, wegen dem negativen Werth von ω dieses a noch etwas zu groſs ist, so kann man $a' = 0.620$ annehmen, wodurch $X = \omega' = -0.00176$ wird. Dieses zweyte Hypothesenpaar gibt, durch die Gleichung (II) den neuen genäherten Werth

$$x = 0.637 - 0.01905 = 0.61795.$$

Nimmt man in einer dritten Rechnung

$$a = 0.6180, \quad \text{also auch} \quad X = \omega = 0.00002903 \quad \text{und}$$
$$a' = 0.6181, \quad » \quad » \quad X = \omega' = -0.00005637,$$

so gibt die Gleichung (II)

$$x = 0.6180 + 0.0000340 = 0.6180340,$$

und dieser letzte Werth von x ist noch in der letzten Decimalstelle genau, da die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung sind:

1	oder	1
$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$	»	0.6180340
$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$	»	−1.6180340.

Dafs sich aber dasselbe Verfahren auch auf transcendente Gleichungen anwenden lasse, ist für sich klar. — Zur Übung in diesen Entwicklungen mögen folgende Beyspiele dienen:

$$x^x = 10 \quad \text{gibt} \quad x = 2.50618,$$
$$10^x = x^{10} \quad » \quad x = 1.37129,$$
$$4^x + 5^x = 20 \quad » \quad x = 1.52761.$$

§. 71. (Homogeneität der Glieder einer Gleichung.)

Beschliefsen wir diesen Gegenstand noch mit einer allen gegebenen Gleichungen zukommenden Bemerkung.

In jeder Gleichung müssen nämlich, wie es die Natur der Sache erfordert, die *Dimensionen* (§. 33, II.) eines jeden Gliedes eben so grofs, als in jedem anderen Gliede seyn.

Demnach kann z. B. die folgende Gleichung

$$y^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$$

nicht bestehen, da 3 die Dimension des ersten, 2 die des zweyten, 1 die des dritten und 0 die Dimension des vierten Gliedes ist. In der That wird nach dem, was a. a. O. gesagt ist, y^3 einen Körper, x^2 eine Fläche und x eine Linie bezeichnen können, und es ist unmöglich, dafs dergleichen, ganz heterogene Dinge, unter sich eine Gleichung bilden.

Wenn daher solche Gleichungen, in welchen die Gleichheit der Dimensionen für die einzelnen Glieder nicht Statt hat, oder wenn solche nicht homogene Gleichungen doch öfter vorkommen, wie diefs auch in der That der Fall ist, so wird ihnen immer die Voraussetzung zu Grunde liegen, daſs man früher irgend eine Gröſse als die *Einheit* der Gröſsen ihrer Art angenommen hat, wodurch dann diese Gröſse, eben weil sie durch die Einheit vorgestellt wird, aus der Gleichung gleichsam verschwunden oder doch in ihr unsichtbar gemacht worden ist.

Wenn z. B. in der Gleichung

$$x \cdot y = 12$$

die Gröſse x sowohl, als y Linien bezeichnet, und wenn man eine Linie von bestimmter Länge, z. B. die Toise, als die Einheit aller Linien annimmt, so werden dann die Gröſsen x und y als bloſse Vielfache der Toise, d. h. als bloſse *Zahlen* zu betrachten seyn, und dann wird die gegebene Gleichung, obschon sie nicht homogen erscheint, z. B. für $x = 3$ und $y = 4$ bestehen können. — Wollte man aber dann, nicht die Toise, sondern den Fuſs, deren 6 auf die Toise gehen, zur Einheit des Längenmaſses annehmen, so würde, für jeden speciellen Fall (wie vorhin für $x = 3$ und $y = 4$), die Gröſse x sowohl, als y sechsmal gröſser, als zuvor, werden, oder man würde haben

$$x' = 6x \quad \text{und} \quad y' = 6y,$$

$$\text{also auch} \quad x = \tfrac{1}{6}x' \quad \text{»} \quad y = \tfrac{1}{6}y'.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der gegebenen Gleichung, so geht sie in folgende über:

$$\frac{x'}{6} \cdot \frac{y'}{6} = 12,$$

welche Gleichung demnach für denselben speciellen Fall $x = 3$, $y = 4$ Toisen, d. h. für $x' = 18$, $y' = 24$ Fuſs ebenfalls Statt hat.

Man sieht daraus, daſs, wenn sich die gegebene Gleichung $x \cdot y = 12$, die sich auf irgend eine Einheit bezieht, auf eine andere a Mal gröſsere Einheit beziehen soll, daſs man nur alle in der Gleichung enthaltenen Buchstaben durch diese Gröſse a dividiren darf, wodurch zugleich auch die äuſsere Homogeneität der Gleichung hergestellt wird.

So geht die Gleichung $xy = 1$, wenn in ihr die Gröſse a als Einheit angenommen wird, in folgende über:

$$\frac{xy}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad xy = a^2,$$

in welchem letzten Ausdrucke jedes Glied zwey Dimensionen hat.

Unter derselben Voraussetzung wird die oben aufgestellte Gleichung

$$y^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$$

in folgende übergehen:

$$\frac{y^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{3x}{a} - 7 = 0,$$

oder

$$y^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 7a^3 = 0,$$

wo jedes Glied drey Dimensionen hat.

Eben so wird endlich die Gleichung

$$b^2x^2 + y^2 = b^2$$

übergehen in

$$\frac{b^2x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

das heiſst in die Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

von vier Dimensionen, oder in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo jedes Glied die Dimension Null hat.

I. Dasselbe wird man von denjenigen Gleichungen bemerken, in welchen mehrere unter sich heterogene Gröſsen vorkommen. Wenn man z. B. zwischen den Gröſsen k, l, t die Gleichung hätte:

$$k = l \,.\, t^2,$$

wo k eine Kraft anzeigt, die einen Körper, auf den sie wirkt, in der Zeit t durch den Weg l bewegen soll, so ist die auf *diese* Weise ausgedrückte Gleichung unmöglich, da Kräfte, Wege und Zeiten unter sich nicht unmittelbar verglichen werden, also auch keine Gleichung bilden können. Eine solche Gleichung setzt also eine gewisse Einheit der Kräfte, eine der Wege und eben so eine Einheit der Zeiten, z. B. eine Secunde voraus. Nennt man aber $\varkappa$, λ und τ diejenige Kraft, den Weg und diejenige Zeit, die man früher als Einheit angenommen hat, so wird die gegebene Gleichung in folgende homogene übergehen:

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{t^2}{\tau^2},$$

und da die Gleichung, in der letzten Gestalt, nur mehr die *Verhältnisse* jener drey Gröſsen, nicht aber diese Gröſsen selbst, d. h. da sie nunmehr bloſse *Zahlen* enthält, so ist dadurch ihre Realität hergestellt.

Dreyzehntes Capitel.

Reihen.

§. 72. (Geometrische Reihen.) Wenn von den Gliedern einer Reihe je zwey nächste immer *dasselbe Verhältniſs* (§. 37.) haben, so wird die Reihe eine *geometrische* genannt. Ist a das erste Glied derselben, und ist b das Verhältniſs je zwey nächster Glieder, so ist die allgemeine Form der geometrischen Reihe

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots$$

Diese Reihe ist aber schon oben (§. 23.) vorgekommen, und wir haben dort gesehen, daſs sie aus der Division der Gröſse a durch $(1 - b)$ entsteht, so daſs man demnach hat

$$\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots$$

Das allgemeine oder n^{te} Glied U einer solchen Reihe ist offenbar

$$U = ab^{n-1},$$

da man das erste, zweyte, dritte Glied der Reihe erhält, wenn man in U die Gröſse $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt.

I. Welches ist aber das *summatorische Glied* S dieser Reihe, d. h. welches ist diejenige Function von dem *Index* n der Reihe, der die Summe der $2, 3, 4, \ldots$ ersten Glieder gibt, wenn man in ihm $n = 2, 3, 4, \ldots$ setzt.

Setzt man die Reihe bis zu ihrem n^{ten} Gliede fort, so hat man

$$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots + ab^{n-3} + ab^{n-2} + ab^{n-1},$$

also auch, wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch b multiplicirt:

$$Sb = ab + ab^2 + ab^3 + \ldots + ab^{n-2} + ab^{n-1} + ab^n.$$

Subtrahirt man diese beyden Ausdrücke von einander, so heben sich von den zwey Reihen alle Glieder, bis auf das erste und letzte, gegenseitig auf, und man erhält

$$Sb - S = ab^n - a,$$

so daſs man daher für das gesuchte summatorische Glied hat

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1},$$

oder auch, wenn man den vorigen Werth des allgemeinen Gliedes in S substituirt:

$$S = \frac{Ub - a}{b - 1}.$$

II. Ist also die Reihe convergent (§. 23, II.), so ist für ein unendlich groſses n die Gröſse b^n oder auch $U = a\,b^{n-1}$ unendlich klein, da für eine convergente Reihe b ein eigentlicher Bruch ist, und dann ist die Summe *aller* Glieder dieser Reihe, ohne Ende fortgesetzt:

$$S = \frac{a}{1 - b},$$

oder dann ist das summatorische Glied S gleich dem *erzeugenden Bruch* $\frac{a}{1 - b}$, aus dessen Entwickelung durch Division die Reihe entstanden ist.

Ex. I. Für die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

ist $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, also ist auch, für $n = 10$, die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S = \frac{a(b^n - 1)}{b - 1} = \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{1023}{512} = 1.998046875.$$

Die Summe der *ganzen* Reihe, ohne Ende fortgesetzt, aber ist

$$S = \frac{a}{1 - b} = 2.$$

Ex. II. Für die Reihe

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \ldots$$

ist $a = 1$ und $b = -2$, also auch die Summe der ersten zehn Glieder

$$S = \frac{1 - 2^{10}}{1 + 2} = -341;$$

die Summe *aller* Glieder aber ist unendlich groſs, da diese Reihe divergirt.

§. 73. (Arithmetische Reihen.) Eine Folge von Grössen, deren je zwey nächste immer dieselbe Differenz haben, ist eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Sind aber in einer Reihe erst die Unterschiede dieser Differenzen oder sind erst die zweyten Differenzen constant, so heiſst sie eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung, und eben so wird sie der dritten Ordnung seyn, wenn die Unterschiede der zweyten Differenzen oder wenn erst die dritten Differenzen der Glieder constant sind, u. s. w.

So ist die arithmetische Reihe

I. . . . . $1, 2, 3, 4, \ldots$ der ersten Ordnung,
II. . . . . $1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ » zweyten »
III. . . . . $1, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$ » dritten » u. f.,

weil alle ersten Differenzen von I. gleich 1, alle zweyten von II. gleich 2, und alle dritten Differenzen von III. gleich 6 sind.

Sey die arithmetische Reihe irgend einer Ordnung

$$a + b + c + d + e + \ldots,$$

so hat man für die Differenz von je zwey nächsten Gliedern

$$b - a,\ c - b,\ d - c,\ e - d, \ldots$$

und davon sind wieder die Differenzen

$$c - 2b + a,\quad d - 2c + b,\quad e - 2d + c, \ldots,$$

und von diesen neuerdings die Differenzen

$$d - 3c + 3b - a,\quad e - 3d + 3c - b \text{ u. s. f.}$$

Nennen wir, der Kürze wegen, die ersten Glieder dieser Differenzreihen Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, . . . so daſs man hat

$$\begin{aligned}\Delta a &= b - a,\\ \Delta^2 a &= c - 2b + a,\\ \Delta^3 a &= d - 3c + 3b - a,\\ \Delta^4 a &= e - 4d + 6c - 4b + a \text{ u. f.,}\end{aligned}$$

so zeigt schon der Anblick dieser Reihen, daſs die Coefficienten der einzelnen Glieder derselben die des Binoms (§. 58, I.) sind, so daſs man demnach allgemein für die n^{te} Differenz $\Delta^n a$ den Ausdruck hat

$$\Delta^n a = a + nb + \frac{n.n-1}{1.2} c - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} d + \ldots$$

I. Mit Hülfe der letzten Gleichung kann man auch die Glieder b, c, d, ... der ersten gegebenen Reihe bloſs durch das erste Glied a und durch die auf einander folgenden Differenzen Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... ausdrücken. Man erhält nämlich

$$b = a + \Delta a,$$
$$c = a + 2\Delta a + \Delta^2 a,$$
$$d = a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a,$$
$$e = a + 4\Delta a + 6\Delta^2 a + 4\Delta^3 a + \Delta^4 a \text{ u. f.},$$

so daſs man also auch hier für das *allgemeine* oder für das n^{te} Glied U der oben aufgestellten Reihe, nach der Analogie mit dem Binom, haben wird

$$U = a + \frac{n-1}{1}\Delta a + \frac{n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2}\Delta^2 a + \frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\Delta^3 a + \ldots$$

II. Sucht man endlich noch auf ähnliche Weise auch die *Summe* der ersten Glieder der gegebenen Reihe, so hat man für die Summe

der 2 ersten Glieder .... $a + b = 2a + \Delta a$,
» 3 » » . $a + b + c = 3a + 3\Delta a + \Delta^2 a$,
» 4 » » $a + b + c + d = 4a + 6\Delta a + 4\Delta^2 a + \Delta^3 a$ u. f.,

so daſs also auch hier die Coefficienten des Binoms wieder sichtbar werden, und daſs man daher für die Summe der ersten n Glieder, d. h. für das *summarische Glied* S einer jeden arithmetischen Reihe den Ausdruck haben wird

$$S = na + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}\Delta a + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\Delta^2 a + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\Delta^3 a + \ldots,$$

wo für eine Reihe der 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Ordnung die Differenz Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... constant, und alle folgenden gleich Null sind.

In den beyden vorhergehenden Ausdrücken von U und S ist die ganze Theorie der arithmetischen Reihen irgend einer Ordnung enthalten. — Wir wollen uns hier mit der näheren Betrachtung der zwey ersten Ordnungen begnügen.

§. 74. (Arithmetische Reihen der ersten Ordnung.) Für diese Reihen der ersten Ordnung ist, nach dem Vorhergehenden, die erste Differenz $\Delta a = d$ constant, also auch $\Delta a = \Delta^2 a \ldots$ gleich Null.

Demnach geben die Ausdrücke für U und S (in §. 72, II.) sofort folgende einfache Gleichungen:

$$U = a + (n-1)d \quad \text{und}$$
$$S = na + \tfrac{1}{2}n(n-1)d = \tfrac{1}{2}n[a + (n-1)d],$$

wo man, statt der letzten, auch schreiben kann

$$S = \tfrac{1}{2}n(a + U).$$

Der erste Ausdruck für S zeigt, daſs in diesen Reihen die Summe je zweyer, vom Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder, gleich $2a + (n-1)d$ ist.

Ex. I. In der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

ist $a = d = 1$, also auch das allgemeine Glied

$$U = n,$$

und das summatorische Glied, oder die Summe der n ersten Glieder

$$S = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

So ist z. B. die Summe der ersten Million Glieder dieser Reihe, da $n = 1000000$ ist, gleich

$$S = 500000\ 500000.$$

Ex. II. Eben so hat man für die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$$

$a = 1$ und $d = 2$, also auch

$$U = 2n - 1 \quad \text{und} \quad S = n^2,$$

also auch die Summe der ersten 1000 Glieder

$$S = 1000^2 = 1000000.$$

Ex. III. Endlich gibt die Reihe

$$1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4 + \ldots$$

$a = 1$ und $d = 0.1$, also auch

$$U = \frac{1}{10}(n+9) \quad \text{und} \quad S = \frac{n}{20}(n+19),$$

so daſs man für die Summe der ersten 1000 Glieder dieser Reihe hat

$$S = 50950.$$

§. 75. (Arithmetische Reihen der zweyten Ordnung.) Für solche Reihen ist $\Delta^3 a = \Delta^4 a \ldots$ gleich Null, also hat man (nach §. 72.) für das allgemeine Glied

$$U = a + (n-1)\Delta a + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta^2 a,$$

und eben so für das summatorische Glied dieser Reihen

$$S = na + \tfrac{1}{2}n(n-1)\Delta a + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Delta^2 a.$$

Ex. Die Reihen der sogenannten *Polygonalzahlen* sind:

Zahlen des Dreyecks	. . .	$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \ldots$
» » Vierecks	. . .	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots$
» » Fünfecks	. . .	$1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + \ldots$
» » Sechsecks	. . .	$1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + \ldots$

Für die Dreyeckszahlen ist demnach $a = 1$, $\Delta a = 2$ und $\Delta^2 a = 1$, also auch

$$U = \tfrac{1}{2}n(n+1) \quad \text{und} \quad S = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

und eben so hat man für die Viereckzahlen

$$U = n^2 \quad \text{und} \quad S = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ u. f.}$$

§. 76. (Reversion der Reihen.) Oft wird eine Gröſse y durch irgend eine andere x mittelst einer Reihe der Form

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

gegeben, und man sucht umgekehrt die Gröſse x durch eine ähnliche, nach den Potenzen von y fortschreitende Reihe auszudrücken. — Nehmen wir an, die gesuchte Reihe sey von der Gestalt

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \ldots,$$

so daſs also die unbekannten Gröſsen α, β, γ, . . . durch die bekannten a, b, c, . . . zu bestimmen sind.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir zuerst die Potenzen von x^2, x^3, x^4, . . . indem wir die zweyte unserer Reihen wiederholt mit ihr selbst multipliciren. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
x &= \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \ldots \\
x^2 &= \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) y^4 + \ldots \\
x^3 &= \alpha^3 y^3 + 3\alpha^2\beta y^4 + \ldots \\
x^4 &= \alpha^4 y^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Substituirt man dann diese Werthe von x, x^2, x^3, ... in der ersten gegebenen Reihe, so erhält man

$$\begin{aligned} o = & (\alpha a - 1)y \\ & + (\beta a + \alpha^2 b)y^2 \\ & + (\gamma a + 2\alpha\beta b + \alpha^3 c)y^3 \\ & + (\delta\alpha + (2\alpha\gamma + \beta^2)b + 3\alpha^2\beta c + \alpha^4 d)y^4 + \ldots, \end{aligned}$$

und da diese Reihe für alle Werthe von y gleich Null seyn soll, so hat man (§. 34, III.) die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} o &= \alpha a - 1, \\ o &= \beta a + \alpha^2 b, \\ o &= \gamma a + 2\alpha\beta b + \alpha^3 c \text{ u. f.}, \end{aligned}$$

aus welchen man also die Werthe der gesuchten Grössen α, β, γ, ... bestimmen wird. Man findet nämlich $\alpha = \frac{1}{a}$ oder

$$\begin{aligned} \alpha . a &= 1, \\ \beta . a^3 &= -b, \\ \gamma . a^5 &= 2b^2 - ac, \\ \delta . a^7 &= 5abc - a^2 d - 5b^3, \\ \varepsilon . a^9 &= 14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Ex. Wir haben oben (§. 60.) den Ausdruck erhalten

$$y = \text{Log}(1 + x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right).$$

Sucht man daraus die Grösse x durch y zu bestimmen, und nimmt man, wie zuvor, an

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma x^3 + \ldots,$$

so hat man $a = m$, also auch $\alpha = \frac{1}{m}$,

$$\begin{aligned} b &= -\frac{m}{2}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \beta = \frac{1}{2m^2}, \\ c &= \frac{m}{3}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \gamma = \frac{1}{2.3m^2}, \\ \delta &= -\frac{m}{4}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \delta = \frac{1}{2.3.4m^3} \text{ u. f.}, \end{aligned}$$

so dass man demnach erhält

$$x = \frac{1}{m}\text{Log}(1+x) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\text{Log}(1+x)}{m}\right)^3 + \ldots$$

Da aber $\text{Log}(1 + x) = y$ ist, so ist auch $1 + x = a^y$, und daher die letzte Reihe

$$a^y = 1 + \left(\frac{y}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{y}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{y}{m}\right)^3 + \ldots,$$

übereinstimmend mit der Reihe (D) des §. 61.

§. 77. (Entwickelung der Functionen in Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.) Dasselbe Verfahren des §. 76. läfst sich auch auf die Entwickelung gegebener Functionen in Reihen anwenden.

Sey z. B. das ohne Ende fortgehende Polynom

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

gegeben, und die n^{te} Potenz desselben durch eine, nach den Potenzen von x fortgehende Reihe darzustellen, oder sey

$$y = (a + bx + cx^2 + \ldots)^n$$

in eine Reihe der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots,$$

zu entwickeln, also die Gröfsen α, β, γ, ... durch die bekannten a, b, c, zu bestimmen.

Nimmt man von dem ersten Ausdrucke die logarithmischen Differentialien (nach §. 52.), so hat man

$$\frac{dy}{y} = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)dx}{a + bx + cx^2 + \ldots}.$$

Eben so hat man, wenn man auch den zweyten Ausdruck von y differentiirt:

$$\frac{dy}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots$$

Setzt man beyde Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)$$
$$- (a + bx + cx^2 + \ldots)(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots) = 0.$$

Führt man aber diese zwey Multiplicationen aus, und ordnet das Product nach den Potenzen von x, so erhält man

$$0 = (a\beta - nb\alpha)$$
$$+ (2a\gamma + b\beta - nb\beta - 2nc\alpha)x$$
$$+ (3a\delta + 2b\gamma + c\beta - nb\gamma - 2nc\beta - 3nd\alpha)x^2 + \ldots,$$

und wenn man auch hier wieder, nach §. 34, III., den Factor einer jeden Potenz von x für sich gleich Null setzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
a\beta &= n\,.\,b\alpha, \\
2a\gamma &= (n-1)b\beta + 2n\,.\,c\alpha, \\
3a\delta &= (n-2)b\gamma + (2n-1)c\beta + 3n\,.\,d\alpha, \\
4a\varepsilon &= (n-3)b\delta + (2n-2)c\gamma + (3n-1)d\beta + 4n\,.\,e\alpha, \\
5a\zeta &= (n-4)b\varepsilon + (2n-3)c\delta + (3n-2)d\gamma + (4n-1)e\beta \\
&\quad + 5n\,.\,f\alpha, \\
6a\eta &= (n-5)b\zeta + (2n-4)c\varepsilon + (3n-3)d\delta + (4n-2)e\gamma \\
&\quad + (5n-1)f\beta \\
&\quad + 6n\,.\,g\alpha,
\end{aligned}$$

u. s. w.,

wovon das Gesetz des Fortganges deutlich ist. Dabey bleibt die erste Gröſse α unbestimmt. Es ist aber $\alpha = a^n$, wie man findet, wenn man in dem ersten Ausdrucke für y die Gröſse $x = 0$ setzt.

Ist $c = d = e \ldots$ gleich Null, so erhält man $y = (a + bx)^n$, übereinstimmend mit §. 58.

Für das Trinom

$$y = (1 + Ax + Bx^2)^n = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

endlich erhält man, wenn man in dem Vorhergehenden $a = 1$, $b = A$, $c = B$ und $d = e = f \ldots$ gleich Null setzt, zur Bestimmung der Factoren α, β, γ, ... die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1, \\
\beta &= nA, \\
2\gamma &= (n-1)A\beta + 2nB, \\
3\delta &= (n-2)A\gamma + (2n-1)B\beta, \\
4\varepsilon &= (n-3)A\delta + (2n-2)B\gamma, \\
5\zeta &= (n-4)A\varepsilon + (2n-3)B\delta \text{ u. f.}
\end{aligned}$$

§. 78. (Interpolation der Reihen.) Wenn man das allgemeine Glied U einer Reihe kennt, das immer eine Function des Index n (§. 72, I.) der Reihe ist, so erhält man daraus das 1ste, 2te, 3te, ... Glied der Reihe, wenn man in U diese Gröſse n gleich 1, 2, 3, ... setzt. So war oben (§. 74.) für die Dreyeckzahlen

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

das allgemeine Glied

$$U = \tfrac{1}{2}n(n+1),$$

also ist auch, wenn man z. B. $n = 100$ setzt, das hundertste Glied dieser Reihe

$$50(101) = 5050.$$

Allein nichts hindert uns, für diesen Index nicht bloſs ganze, positive oder negative Zahlen, sondern auch Brüche zu setzen, wo man dann diejenigen Glieder erhalten wird, die *zwischen* die Glieder der gegebenen Reihe fallen. Man nennt diese neuen Glieder die eingeschalteten oder interpolirten Gröſsen.

So gibt unser Beyspiel, wenn man zwischen je zwey Glieder der Reihe ein mittenliegendes einschalten will,

$$\text{für } n = \tfrac{3}{2} \;.\;.\;.\; U = \tfrac{15}{8},$$
$$\tfrac{5}{2} \;.\;.\;.\; \tfrac{35}{8},$$
$$\tfrac{7}{2} \;.\;.\;.\; \tfrac{63}{8} \text{ u. f.},$$

so daſs daher die so interpolirte Reihe der Dreyeckzahlen seyn wird

$$\tfrac{8}{8} + \tfrac{15}{8} + \tfrac{24}{8} + \tfrac{35}{8} + \tfrac{48}{8} + \tfrac{63}{8} + \tfrac{80}{8} + \ldots,$$

und auch dieſs ist eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung, da ihre zweyten Differenzen constant und gleich $\tfrac{1}{4}$ sind.

Da es aber sehr viele Reihen gibt, die, ohne eben zu den arithmetischen zu gehören, wenn auch nicht auf genau constante, doch auf nahe beständige höhere Differenzen führen, so läſst sich dieses Verfahren oft mit Vortheil auch auf solche Reihen anwenden, ohne daſs man ihr allgemeines Glied zu kennen braucht.

Betrachtet man nämlich eine solche Reihe, deren Differenzen einmal nahe constant werden, als eine arithmetische Reihe höherer Ordnung, so erhält man für das allgemeine Glied derselben (nach §. 73, I.):

$$U = a + (n-1)\Delta a + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\Delta^2 a$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 a + \ldots,$$

wo a das erste, dem Index 1 entsprechende Glied, und wo die übrigen auf einander folgenden Glieder sind

$$\overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \ldots,$$

so daſs man für die 1sten, 2ten, 3ten, . . . Differenzen (nach §. 73.) hat

$$\Delta a = b - a,$$
$$\Delta^2 a = c - 2b + a,$$
$$\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a,$$
$$\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a \quad \text{u. f.}$$

Ex. Um die Anwendung dieses Verfahrens durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, man hätte bereits (nach §. 64.) die Logarithmen von den fünf folgenden Zahlen auf 6 Decimalstellen genau gefunden, und wollte nun die dazwischen liegenden Logarithmen der ganzen Zahlen durch Interpolation bis auf 5 Decimalstellen genau bestimmen.

Index.	Zahl.	Logarithmus.
1	1000	$3.000000 = a$,
2	1010	$3.004321 = b$,
3	1020	$3.008600 = c$,
4	1030	$3.012837 = d$,
5	1040	$3.017033 = e$.

Von diesen Logarithmen sind die Differenzen

$$\Delta a = \quad 0.004321,$$
$$\Delta^2 a = -0.000042.$$

Ferner ist $\Delta^3 a$ schon sehr nahe gleich Null, und überdieſs $a = 3$.

Es ist demnach das n^{te} Glied dieser Reihe

$$U = 3.000000 + 0.004321\,(n-1)$$
$$- 0.000021\,(n-1)(n-2).$$

Mit diesem Ausdrucke von U erhält man für

$n = 1.1$	$n = 1.2$	$n = 1.3$	$n = 1.4$
3.000000	3.000000	3.000000	3.000000
432	864	1296	1728
4	4	4	4
3.00043	3.00087	3.00130	3.00173

so daſs man daher für die ersten der gesuchten Einschaltungen erhält

$$\text{Log } 1001 = 3.00043,$$
$$\text{Log } 1002 = 3.00087,$$
$$\text{Log } 1003 = 3.00130,$$
$$\text{Log } 1004 = 3.00173,$$

übereinstimmend mit den gewöhnlichen Tafeln unserer Logarithmen. Übrigens wird in diesen, wie in allen ähnlichen Fällen, wo dieselben Rechnungen öfter wiederholt werden sollen, eine geringe Aufmerksamkeit schon hinreichen, mehrere Vortheile und Abkürzungen an die Hand zu geben, die keiner besonderen Erläuterung bedürfen, und daher besser der Umsicht und Selbsterfahrung des Rechners überlassen bleiben. So wird es z. B. hier bequemer, und doch gleich sicher seyn, nicht immer von dem ersten Gliede a, sondern für jedes neue Zwischenglied, das z. B. zwischen b und c fällt, von dem ihm zunächst vorstehenden Gliede b auszugehen, und dieses Zwischenglied durch eine einfache Proportion aus b und c abzuleiten. Dabey wird allerdings nur auf die erste Differenz Δa Rücksicht genommen, und die zweyte $\Delta^2 a$ vorläufig gleich Null gesetzt. Allein man sieht, daſs die aus dieser vorläufigen Annahme entspringende Correction, so lange man immer nur von einem gegebenen Gliede b zu dem nächstfolgenden c, oder von c zu d übergeht, eine constante Gröſse, und zwar in unserem Falle gleich $+0.000004$ ist, daher man nur diese Constante zu dem aus der erwähnten Proportion erhaltenen Resultate für alle zwischen a und e enthaltenen Zahlen wieder hinzusetzen wird.

Sucht man z. B. den Logarithmus von 1015, so hat man, da $c - b = 0.004279$ ist, die Proportion

$$10 : 0.004279 = 5 : x \quad \text{oder} \quad x = 0.002140,$$

also auch		und eben so	
Log 1010 =	3.004321	Log 1020 =	3.008600
Proportionaltheil	2140		2118
Constante . . .	4		4
Log 1015 =	3.00647,	Log 1025 =	3.01072,

Log 1030 =	3.012837
	2098
	4
Log 1035 =	3.01494,

und alle diese Logarithmen sind, der aufgestellten Forderung gemäſs, in der fünften Decimalstelle noch richtig.

Zweyte Abtheilung.

G e o m e t r i e.

Vierzehntes Capitel.

Erste Grundsätze der Geometrie.

§. 79. (Erklärungen.) Der Gegenstand der Geometrie ist die Messung des Raumes. — *Körper* ist eine bestimmte Ausdehnung des Raumes nach allen seinen drey Richtungen (der Länge, Breite und Höhe). — *Fläche* ist die Grenze der Körper, also Ausdehnung nach zwey Richtungen (der Länge und Breite). — *Linie* ist die Grenze der Fläche, also Ausdehnung bloſs nach einer Richtung (der Länge). — *Punct* endlich ist die Grenze der Linie, also ohne alle Ausdehnung.

I. *Gerade* heiſst die Linie, welche in allen ihren Puncten dieselbe Richtung hat; jede andere Linie heiſst *krumm*. — *Ebene* heiſst die Fläche, in welcher man zwischen je zwey Puncten derselben eine gerade, ganz in der Fläche liegende Linie ziehen kann; jede andere Fläche heiſst krumm.

II. Die *Neigung* zweyer Geraden AB und AC (Fig. 1) gegen einander heiſst der *Winkel* dieser zwey Geraden, wo also die Länge dieser Geraden willkürlich oder unbegrenzt ist. — Man bezeichnet den Winkel so, daſs der Buchstabe A bey dem Durchschnitte beyder Geraden (des *Scheitels* des Winkels) zwischen den beyden andern Zeichen B und C gestellt wird, also durch BAC oder durch CAB; oder auch, wo keine Zweydeutigkeit zu besorgen ist, kürzer bloſs durch das Zeichen A des Scheitels, oder endlich durch einen in den Winkel eingeschriebenen Buchstaben x. — Die beyden Geraden AB, AC endlich, deren Neigung durch den Winkel ausgedrückt wird, oder die den Winkel begrenzen, heiſsen die *Schenkel* des Winkels.

III. Wird eine dieser zwey Geraden AB oder AC, z. B. die letzte nach dem Punct D hin, auf der andern Seite des Scheitels A, verlängert, so bildet diese Verlängerung AD mit der ersten Geraden AB wieder einen Winkel $BAD = y$, und die beyden Winkel x und y, welche eine Gerade BA mit einer andern

Geraden CD in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte A bildet, werden *Nebenwinkel* genannt. Für sie ist der mittlere Schenkel AB beyden Winkeln gemeinschaftlich.

IV. Sind die beyden sich in dem Puncte A schneidenden Geraden EA und CD (Fig. 2) so gegen einander geneigt, daſs die Nebenwinkel CAE und EAD einander gleich sind, oder ist die Neigung des gemeinschaftlichen Schenkels AE gegen die beyden Theile AC und AD der andern Geraden dieselbe, so heiſsen die Nebenwinkel, für diesen besondern Fall, *rechte Winkel*, und die Geraden EA und CD heiſsen auf einander *senkrecht* (oder lothrecht oder auch perpendiculär). Ein kleinerer Winkel, als ein rechter, wie BAC, heiſst *spitz*, und ein grösserer, wie BAD, heiſst *stumpf*. — Alle Winkel, auſser dem rechten, heiſsen auch, mit einem gemeinsamen Worte, *schiefe Winkel*.

V. Zwey in derselben Ebene liegende Gerade heiſsen gleichlaufend oder *parallel*, wenn sie gegen jede dritte sie schneidende Gerade, auf derselben Seite, dieselbe Neigung haben. So sind die beyden Geraden AB und CD (Fig. 3) parallel, wenn von den Winkeln, die sie mit einer dritten Geraden EF bilden, der Winkel $x = y$ oder der Winkel $u = z$ ist.

VI. Jeder von Linien begrenzte Raum heiſst *Figur*. Sind diese Grenzlinien Gerade, so heiſst die Figur *Vieleck* oder Polygon.

§. 80. (Dreyecke.) Ein von drey geraden Linien begrenzter Raum heiſst *Dreyeck*, die einfachste Figur unter den Polygonen. Die Grenzlinien heiſsen die *Seiten*, und die Neigungen dieser Seiten gegen einander heiſsen die *Winkel* des Dreyecks.

I. Das Dreyeck ist *gleichschenklig*, wie ABC (Fig. 4), wenn zwey Seiten, z. B. AB und BC desselben unter sich gleich sind; es ist *gleichseitig*, wie ABC (Fig. 5), wenn alle drey Seiten desselben unter sich gleich sind; und es ist *rechtwinklig*, wie ABC (Fig. 6), wenn es einen rechten Winkel (A oder BAC) hat.

II. In dem rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 6) heiſst die dem rechten Winkel A gegenüberstehende Seite BC die *Hypotenuse*, und die beyden andern Seiten AB und AC heiſsen die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.

III. Wenn man endlich die Seite AC (Fig. 5) irgend eines Dreyecks ABC nach D verlängert, so wird der durch diese Verlängerung CD entstehende Winkel BCD auſser dem Dreyeck der *äuſsere* Winkel, und A und B werden die zwey jenem *entgegengesetzten inneren* Winkel des Dreyecks genannt.

§. 81. (Vierecke.) Ein von vier Geraden begrenztes Polygon wird *Viereck* genannt. — Sind alle Seiten des Vierecks gleich und alle Winkel recht, so heiſst es *Quadrat*, wie $ABCD$ (Fig. 7). Sind bloſs die Seiten alle unter sich gleich, aber die Winkel schief, so heiſst es *Rhombus*. Sind alle Winkel recht, aber bloſs die zwey gegenüberstehenden Seiten unter sich parallel, so heiſst es ein *Rechteck*, wie $ABCD$ (Fig. 8). Sind endlich in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten unter sich parallel, ohne über die Winkel etwas festzusetzen, so heiſst es *Parallelogramm*, wie $ABCD$ oder $abcd$ (Fig. 9).

Das Rechteck, der Rhombus und das Quadrat sind daher ebenfalls Parallelogramme, so wie das Quadrat ein besonderer Fall des Rechteckes ist.

Eine Gerade AC oder BD (Fig. 9), welche die Scheitel zweyer gegenüberstehender Winkel eines Vierecks verbindet, wird *Diagonale* genannt.

§. 82. (Kreise.) Ein Kreis $AMBN$ (Fig. 10) entsteht, wenn eine in ihrer Länge unveränderliche Gerade CA, CM, CM', . . . in einer Ebene um ihren festen Endpunct C gedreht wird, und mit dem andern beweglichen Endpuncte A, M, M', . . . Spuren in der Ebene zurückläſst.

Der feste Endpunct C der beweglichen Geraden heiſst der *Mittelpunct* (Centrum), und die Geraden CA, CM, CM', . . . heiſsen die *Halbmesser* (Radien) des Kreises. Der doppelte Radius ACB wird der *Durchmesser* (Diameter) des Kreises, der von dem beschreibenden Endpuncte A des Radius rings um den Mittelpunct C zurückgelegte Weg $AMBNA$ aber wird die *Peripherie* (der Umfang), und jeder Theil AM, MM', . . . dieser Peripherie wird ein *Bogen (Arcus)* des Kreises genannt.

I. Die Gerade MPN, welche die beyden Endpuncte M und N eines Bogens MN verbindet, heiſst die *Sehne (Chorde)* dieses

Bogens. — Der Theil $MANC$ der Kreisebene, der von dem Bogen MN und von den beyden Radien CM und CN seiner Endpuncte M und N begrenzt wird, heiſst *Ausschnitt* (Sector) des Kreises, so wie derjenige Theil $MPNA$ der Kreisebene, der von dem Bogen MN und seiner Sehne MPN begrenzt wird, der *Abschnitt* (Segment) des Kreises genannt wird.

§. 83. (Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren.) Zwey Figuren heiſsen *gleich*, wenn sie, auf einander gelegt, sich in allen Puncten vollkommen decken können.

Zwey Figuren heiſsen *ähnlich*, wenn jeder Winkel, der durch die Verbindung zweyer Scheitel mit den übrigen, mittelst gerader Linien, entsteht, in der einen Figur dem homologen (gleichliegenden) Winkel in der andern Figur gleich ist. So sind z. B. die beyden Parallelogramme (Fig. 9) einander ähnlich, wenn der Winkel $BAD = bad$ und $CAD = cad$, und $ADB = adb$ u. f. ist. So sind daher auch zwey Dreyecke ähnlich, wenn jeder Winkel des einen dem homologen Winkel des andern gleich ist, wobey ihre Seiten sehr verschieden seyn können.

Ähnliche Figuren sind demnach solche, welche dieselbe Gestalt, ohne Rücksicht auf ihre Gröſse, haben, oder solche, die sich bloſs durch ihre Gröſse, und sonst durch nichts, unterscheiden. Gleiche Figuren aber sind gar nicht verschieden, sie sind völlig identisch.

Wenn endlich zwey Figuren, welches auch die Verschiedenheit ihrer Gestalt seyn mag, mit ihrem Umfange (Perimeter) gleich groſse Flächen einschlieſsen, so heiſsen diese Figuren *äquivalent*.

§. 84. (Folgerungen aus den vorhergehenden Erklärungen.)

I. In Beziehung auf gerade Linien und Winkel.

Aus den vorher gefundenen Erklärungen flieſsen sofort, ohne weitere Erläuterungen, folgende Sätze:

A. Durch zwey Puncte geht nur eine einzige gerade, aber unzählige krumme Linien. — Unter allen Linien zwischen zwey

Puncten ist die Gerade die *kürzeste*, daher sie auch als das *Maſs der Entfernung* zweyer Puncte von einander gebraucht wird.

B. Alle rechten Winkel sind unter sich gleich, weil sie sich, auf einander gelegt, vollkommen decken (§. 79. und 83).

C. Die Summe zweyer *Nebenwinkel* (§. 79, III.), wie CAB und BAD (Fig. 2) ist immer gleich zwey rechten Winkeln. Denn ist AE senkrecht auf CD, und nennt man z den Winkel BAE, so ist der erste jener Winkel oder so ist CAB um z kleiner, und der zweyte BAD ist um z gröſser, als ein rechter Winkel CAE oder EAD.

D. Also ist auch die Summe aller an einer Seite der Linie CD um einen Punct A liegender Winkel desselben Scheitels gleich *zwey* rechten Winkeln. So ist die Summe der Winkel CAB, BAF, FAD gleich zwey rechten Winkeln. Daraus folgt sofort, daſs die Summe aller rings um einen Punct liegender Winkel gleich *vier* rechten Winkeln ist. So ist die Summe der vier Winkel M, N, m und n der Fig. 11 gleich vier rechten Winkeln.

E. Wenn, wie in der so eben erwähnten Fig. 11, zwey Gerade AB und ED sich in einem Puncte schneiden, so sind die sich paarweise gegenüberstehenden Winkel M und m, so wie N und n, unter sich gleich. Man nennt diese Winkel *Scheitelwinkel.* — Nach (*C*) ist nämlich die Summe der Winkel M und N, so wie auch die Summe der Winkel M und n gleich zwey rechten Winkeln; also ist auch, wenn man jede dieser Summen um die Gröſse M vermindert, der Winkel N gleich seinem Scheitelwinkel n; und eben so findet man auch, daſs der Winkel M gleich seinem Scheitelwinkel m ist.

II In Beziehung auf den Kreis.

F. Aus der oben (§. 82.) gegebenen Erklärung des Kreises folgt sofort, daſs in jedem Kreise alle Halbmesser unter sich, also auch alle Durchmesser unter sich gleich sind, daſs also alle Puncte der Peripherie von dem Mittelpuncte des Kreises gleiche Entfernung haben, und daſs endlich jeder Durchmesser die Peripherie sowohl als auch die Fläche des Kreises in zwey gleiche Hälften theilt.

G. Da die Peripherie des Kreises, nach der oben erwähnten Entstehung desselben, eine stetige (ununterbrochene) krumme

Linie ist, die durch die gleichförmige Drehung des Halbmessers um den Mittelpunct erzeugt wird, so werden zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte auch gleiche Theile der Peripherie, d. h. gleich grofse Bogen gehören, so dafs, wenn z. B. der Winkel ACM' (Fig. 10) zwey Mal so grofs ist, als ACM, auch der Bogen AM' das Doppelte von dem Bogen AM betragen wird, da kein Grund angegeben werden kann, warum Bogen und Winkel, die beyde zugleich in irgend einem Puncte, z. B. in A, anfangen, sich auf verschiedene Weise ändern sollten. Dasselbe wird auch von den Flächen AMC, $AM'C$ gelten, die sich wie ihre Winkel ACM, ACM', also auch wie ihre Bogen AM, AM' verhalten werden.

H. Wie daher die gerade Linie als das Mafs der Längen (A) oder als das Mafs der Distanz zweyer Puncte von einander gebraucht wird, so wird auch der Bogen eines Kreises, als der einfachste aller krummen Linien, als das Mafs der Drehung einer Geraden (des Radius) um ihren Endpunct, oder als das *Mafs der Neigung* zweyer Geraden gegen einander, d. h. als das *Mafs des Winkels*, zwischen welchem dieser Bogen enthalten ist, gebraucht werden.

I. Man pflegt die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, die man *Grade* nennt, einzutheilen. Da aber nach (D) die Summe aller um einen Punct liegender Winkel gleich vier rechten Winkeln ist, so wird auch der rechte Winkel oder sein Mafs, d. h. so wird auch der vierte Theil (Quadrant) der Peripherie des Kreises 90 solcher Grade betragen.

Um noch kleinere Theile des Winkels, oder, was dasselbe ist, des Bogens angeben zu können, theilt man jeden Grad in 60 *Minuten*, und jede Minute wieder in 60 gleiche Theile, die man *Secunden* nennt. Die Grade bezeichnet man durch $^{\circ}$, die Minuten durch $'$, und die Secunden durch $''$, so dafs z. B. der siebente Theil des rechten Winkels oder der 28ste Theil der ganzen Peripherie gleich ist

$$\frac{90^{\circ}}{7} = 12^{\circ}.857142857\ldots$$

oder gleich

$$12^{\circ}\ 51'\ 25''.714\ldots,$$

das heifst, gleich 12 Grade, 51 Minuten und $25\frac{714\ldots}{1000}$ Secunden.

§. 85. (Summe der Winkel eines Dreyecks.) Seyen zwey ihrer Lage nach unveränderte Gerade AM und AN (Fig. 12) gegeben, die demnach auch einen unveränderlichen Winkel A zwischen sich einschliefsen. Wenn diese beyden Geraden durch eine dritte Gerade BC in irgend einer Richtung geschnitten werden, so entsteht ein Dreyeck ABC.

Es bewege sich nun diese dritte Linie BC, jedoch so, dafs sie immer durch denselben Punct B geht, das heifst also, es drehe sich diese Linie BC um den Punct B, so dafs sie z. B. in die Lage BC' kommt. Bey einer solchen Bewegung ist für sich klar, dafs, so wie sich der Winkel B ändert, sofort auch der Winkel C geändert werden mufs, dafs demnach beyde Gröfsen B und C sich zugleich ändern, dafs also auch, da A der Voraussetzung gemäfs immer derselbe Winkel bleibt, dafs also auch, bey dieser Bewegung der Linie BC, die beyden Gröfsen

$$(A+B) \quad \text{und} \quad C$$

sich zu gleicher Zeit ändern werden.

Bewegt sich aber dieselbe Gerade BC so, dafs sie mit sich selbst immer parallel bleibt, dafs sie also, der obigen Erklärung (§. 79, V) zu Folge, mit den beyden festen Geraden AM und AN immer dieselben Winkel bildet, so wird, wenn diese Gerade BC z. B. in die Lage $B'C'$ gekommen ist, der Winkel $B=B'$ sowohl, als auch der Winkel $C=C'$ noch derselbe seyn, die beyden Gröfsen B und C werden sich nicht geändert haben, und da auch, der erwähnten Voraussetzung gemäfs, der Winkel A immer derselbe bleibt, so werden auch, bey dieser Bewegung der Linie BC, die beyden Gröfsen

$$(A+B) \quad \text{und} \quad C$$

zu gleicher Zeit dieselben constanten Gröfsen bleiben.

Da demnach diese zwey Gröfsen $(A+B)$ und C immer, entweder zugleich constant oder auch zugleich veränderlich sind, so mufs eine jede derselben von der anderen abhängen, oder so mufs die eine dieser Gröfsen eine *Function* (§. 33) der anderen seyn, so dafs, wenn in einem Dreyecke die eine dieser Gröfsen, z. B. $(A+B)$ gegeben ist, dadurch auch zugleich die andere Gröfse C gegeben wird.

I. Wenn daher in zwey oder mehreren Dreyecken ABC die Summe zweyer Winkel z. B. $(A+B)$ in dem einen, gleich der Summe zweyer Winkel in dem andern Dreyecke gleich ist, so müssen auch die dritten Winkel C dieser Dreyecke unter sich gleich seyn.

II. Dieſs vorausgesetzt, sey nun ABC (Fig. 13) ein in A rechtwinkliges Dreyeck und AD senkrecht auf die Hypotenuse BC.

Durch diese Senkrechte AD entstehen zwey Dreyecke ABD und ABC, welche den Winkel B gemeinschaftlich und welche die beyden rechten Winkel BAC und BDA (nach §. 84, B.) unter sich gleich haben. In diesen beyden Dreyecken ist also die Summe der zwey Winkel B und BDA in dem einen Dreyecke, gleich der Summe B und BAC in dem anderen, also ist auch (nach Nro. I.) der dritte Winkel

$$BAD = C.$$

Ganz eben so haben auch die beyden Dreyecke ACD und ABC den Winkel C gemeinschaftlich und die beyden rechten Winkel BAC und CDA unter sich gleich, also ist auch der dritte Winkel

$$CAD = B.$$

Addirt man diese zwey Gleichungen, so erhält man

$$BAD + CAD = B + C,$$

oder da $BAD + CAD = BAC$ ein rechter Winkel ist, den wir hier und in der Folge überhaupt durch R bezeichnen wollen, so ist

$$B + C = R,$$

das heiſst: *in jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Summe der beyden schiefen Winkel gleich einem rechten Winkel.*

III. Sey nun ABC (Fig. 14) irgend ein anderes, nicht rechtwinkliges Dreyeck, und wieder AD senkrecht auf BC.

Ist der Winkel $BAD = x$ und $CAD = y$, so hat man, da durch die Senkrechte AD das gegebene Dreyeck ABC in zwey andere bey D rechtwinklige Dreyecke ABD und ACD getheilt wird, nach Nro. II. in dem ersten Dreyecke ABD

$$B + x = R,$$

und eben so in dem zweyten Dreyecke ACD

$$C + y = R.$$

Addirt man wieder diese beyden Gleichungen, so hat man, da $x+y=A$ ist:

$$A + B + C = 2R;$$

das heifst: *In jedem Dreyecke ist die Summe der drey Winkel desselben gleich zwey rechten Winkeln.*

Dasselbe hat auch Statt, wenn das Loth AD (wie in der zweyten Zeichnung der Fig. 14) aufser dem gegebenen Dreyecke ABC, auf die Verlängerung der Seite BC fällt. Denn auch hier ist in dem ersten der so entstehenden rechtwinkligen Dreyecke BAD (nach Nr. II.)

$$B + BAD = R,$$

und eben so ist in dem zweyten Dreyecke CAD der Winkel

$$ACD + CAD = R,$$

und dieser beyden Gleichungen Differenz ist

$$B + BAD - CAD - ACD = 0.$$

Setzt man aber wieder $BAC=x$ und $ACB=y$, so hat man

$$BAD - CAD = BAC = x,$$

und überdiefs (nach §. 84, *C.*) für die Nebenwinkel

$$ACD + y = 2R \quad \text{oder} \quad ACD = 2R - y,$$

so dafs daher die vorhergehende Gleichung wird:

$$B + x - (2R - y) = 0,$$

oder

$$B + x + y = 2R, \quad \text{wie zuvor.}$$

IV. Daraus folgt zugleich, dafs in jedem Dreyecke ABC (Fig. 5) der *äufsere* (durch die Verlängerung einer Seite AC entstandene) *Winkel BCD gleich ist der Summe der beyden inneren entgegengesetzten Winkel A* und B (vergl. §. 80, III.). Denn da (nach §. 84, *C.*) die Nebenwinkel $BCD+C=2R$, und da eben so auch $A+B+C=2R$ ist, so hat man auch für den erwähnten äufseren Winkel

$$BCD = A + B.$$

Auch folgt aus Nr. III. sofort, dafs in einem Dreyecke nur ein einziger Winkel ein rechter, oder auch ein stumpfer Winkel seyn kann.

§. 86. (Eigenschaften der parallelen Linien.) Wenn AB und CD (Fig. 3) zwey parallele Grade sind, das heifst, nach §. 79, V., wenn der Winkel $x = y$ ist, ist ist auch *(A)* der Winkel $u = y$, und eben so ist *(B)* die Summe der beyden Winkel m und y, oder auch der beyden n und u gleich zwey rechten Winkeln.

Man nennt aber die beyden Winkel u und y (oder auch m und n) die *Wechselwinkel*, so wie man die beyden Winkel m und y (oder auch n und u) die *inneren Winkel* der beyden Parallelen zu nennen pflegt.

Bey parallelen Linien sind daher, nach (A), die Wechselwinkel gleich, und, nach (B), ist die Summe der zwey inneren Winkel gleich $2R$.

Denn, da $x = y$, und da immer (nach §. 84, *E.*) die Scheitelwinkel $x = u$ sind, so ist auch

$$u = y \; . \; . \; . \text{ wie in } (A).$$

Da ferner $x = y$, und da immer (nach §. 84, *C.*) die Summe der zwey Nebenwinkel

$$m + x = 2R$$

ist, so hat man auch

$$m + y = 2R \; . \; . \; . \text{ wie in } (B).$$

I. Jede dieser drey hier ausgesprochenen Bedingungen

$$x = y, \quad u = y, \quad m + y = 2R,$$

hat die beyden anderen zur Folge. Denn hat z. B. die zweyte Bedingung Statt, oder ist $u = y$, so hat man (da nach §. 84, *E.* immer $u = x$ ist), auch sofort $x = y$, welches die erste Bedingung ist. Da überdiefs auch immer (nach §. 84, *C.*) die Summe der Winkel $u + m = 2R$ seyn mufs, so ist auch $y + m = 2R$, welches die dritte Bedingung ist.

II. Und eben so umgekehrt: Hat eine dieser drey Bedingungen nicht Statt, so haben auch die beyden anderen nicht Statt.

Denn ist z. B. $x = y + a$, wo a irgend eine positive oder negative Gröfse bezeichnet, so hat man doch immer (nach §. 84, *C.*)

$$m + x = 2R \quad \text{und} \quad n + y = 2R.$$

Dieser beyden Gleichungen Differenz gibt

$$m - n + x - y = 0,$$

oder da $x - y = a$ ist,

$$n - m = a,$$

und nicht $n = m$, wie es nach der zweyten Bedingung seyn soll.

Eben so, wenn man in der vorhergehenden Gleichung $m + x = 2R$ den gegebenen Werth von $x = y + a$ substituirt, so erhält man

$$m + y = 2R - a,$$

und nicht $m + y = 2R$, wie es nach der dritten Bedingung seyn soll, u. s. w.

III. *Zwey parallele Linien können sich, auch ins Unbegrenzte verlängert, nie schneiden.* Denn da schon die Summe ihrer zwey inneren Winkel $m + y$ oder $n + u$ gleich $2R$ ist, so würden diese Linien, wenn sie sich schneiden, mit der dritten Linie EF ein Dreyeck bilden, in welchem die Summe aller drey Winkel grösser als $2R$ ist, was nach §. 85. unmöglich ist.

§. 87. (Verhältniſs der Seiten rechtwinkliger Dreyecke.) Seyen ABC und abc (Fig. 15 und 16) zwey in A und a rechtwinklige Dreyecke, deren Hypotenusen (§. 80, II.) von gleicher Gröſse seyn sollen, so daſs also die Seite $BC = bc$ ist. Wir wollen der Kürze wegen diese Hypotenuse für die Einheit der übrigen Seiten dieser Dreyecke, oder für die Einheit unserer Längenmaſse annehmen, so daſs also $BC = bc = 1$ ist.

Dieſs vorausgesetzt, kann man den Satz aufstellen: »Zwey »rechtwinklige Dreyecke mit derselben Hypotenuse sind unter »sich vollkommen *gleich* (§. 83.), wenn sie einen der beyden »schiefen Winkel gleich haben.«

Denn ist z. B. der schiefe Winkel C gleich c, so ist, nach §. 85, I., auch der andere schiefe Winkel B gleich b. — Man lege nun das erste Dreyeck ABC so auf das zweyte abc, daſs der eine Endpunct C der ersten Hypotenuse auf den Endpunct c der zweyten, und daſs überdieſs die erste Hypotenuse CB längs der zweyten cb falle. Dann müssen auch die zweyten Endpuncte B und b der Hypotenusen auf einander fallen, weil diese Hypotenusen, der Voraussetzung gemäſs, von gleicher Länge, nämlich jede gleich 1 ist. Es mufs aber auch die eine Kathete CA auf die andere ca fallen, weil die Winkel C und c gleich sind; so dafs also auch der Punct A des ersten Dreyecks irgendwo in die Linie ca des zweyten fallen wird. Aus demselben Grunde mufs endlich auch die zweyte Kathete BA auf ba fallen, weil nämlich die Winkel B und b ebenfalls gleich sind; so dafs demnach der Punct A des ersten Dreyecks auch irgendwo in die Linie ba des zweyten fallen wird. — Da also der Punct A sowohl auf die Linie ca, als auch auf die Linie ba fällt, und da überdiefs (nach §. 84, B.) alle rechten Winkel, also auch die Winkel A und a, unter sich gleich sind, so mufs der erwähnte Punct A in den der beyden Linien ca und ba gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, oder er mufs in den Punct a fallen, und sonach wird das Dreyeck ABC das andere abc in allen seinen Theilen vollkommen decken, oder es wird ihm *gleich* seyn.

I. Unter allen möglichen rechtwinkligen Dreyecken, deren Hypotenusen sämmtlich von gleicher, übrigens willkürlicher Gröfse (die wir gleich der Einheit, z. B. gleich einem Fufs, einem Zoll u. f. angenommen haben) sind, wird daher jedes einzelne vollkommen bestimmt seyn, wenn nur einer der beyden schiefen Winkel desselben gegeben ist, da jedes andere dieser Dreyecke, welches denselben schiefen Winkel haben könnte, mit jenem *gleich*, oder (§. 83.) da es ein mit ihm ganz identisches Dreyeck seyn wird.

II. Ist daher von einem solchen Dreyecke nur einer der zwey schiefen Winkel, ist z. B. der Winkel C gegeben, so ist damit auch sofort das ganze Dreyeck gegeben, so ist also auch jede der beyden Katheten AB sowohl, als auch AC gegeben; oder mit anderen Worten: in allen solchen Dreyecken hängt jede der beyden Katheten blofs von dem Winkel C [oder was dasselbe ist, blofs von dem Winkel B] ab.

Nennen wir der Kürze wegen, hier und in der Folge, in jedem Dreyecke ABC die den Winkeln A, B und C in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten α, β und γ, so dafs also $BC = \alpha$, $AC = \beta$ und $AB = \gamma$ ist.

Unserer vorhergehenden Annahme gemäfs sind diejenigen Dreyecke, die wir hier betrachten, alle in A rechtwinklig, und ihre Hypotenusen $\alpha = 1$ sind sämmtlich gleich grofs.

Wir haben gesehen, daſs in diesen Dreyecken jede der beyden Katheten β oder γ bloſs von einem der beyden schiefen Winkel, z. B. von C abhängt. In der That werden auch, wie die Figur 17 selbst ohne Rücksicht auf den vorhergehenden Beweis versinnlicht, wenn die Hypotenuse CB, CB', CB'', ... immer von derselben Gröſse und gleich der Einheit bleibt, die Katheten $AC = \beta$ und $AB = \gamma$ dieselben bleiben, so lange der Winkel C oder B derselbe bleibt, und sie werden sich ändern, so bald einer dieser Winkel sich ändert; oder mit anderen Worten: die Gröſsen β und γ werden Functionen von C seyn (§. 33.).

III. Obschon wir diese Functionen noch nicht näher kennen, so wollen wir doch, da wir in der Folge noch oft auf sie zurückkommen werden, ihnen eine eigene Benennung beylegen, und β den *Cosinus*, so wie γ den *Sinus* des Winkels C heiſsen, und dieſs so bezeichnen:

$$\beta = \operatorname{Cos} C \quad \text{und} \quad \gamma = \operatorname{Sin} C.$$

IV. Diese beyden Gleichungen beziehen sich, wie gesagt, nur auf solche rechtwinklige Dreyecke, deren Anzahl übrigens unendlich ist, bey welchen die Hypotenuse überall von derselben Gröſse und gleich der Einheit ist. Man kann sie aber auch auf alle anderen rechtwinkligen Dreyecke ausdehnen, in welchen die Hypotenuse zwey, drey, vier Mal ..., und überhaupt α Mal gröſser, in welcher also die Hypotenuse, die bisher gleich 1 war, allgemein durch α bezeichnet wird. Zu diesem Zwecke wird man nämlich nur (nach §. 71.) in den vorhergehenden zwey Gleichungen alle Gröſsen derselben Art, die sich auf Längenmaſse oder Linien beziehen, durch die Gröſse α, die bisher durch die Einheit vorgestellt wurde, dividiren, so daſs man demnach für alle rechtwinkligen Dreyecke, die beyden Gleichungen hat:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{Cos} C \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \operatorname{Sin} C.$$

V. Die beyden letzten Ausdrücke beziehen sich auf ein in A rechtwinkliges Dreyeck, wie es durch die Figur 18 dargestellt wird. Allein in dieser Zeichnung kann man auch, ohne das Dreyeck selbst zu ändern, die Bezeichnung desselben durch Buchstaben so variiren lassen, daſs man B mit C, also auch β mit γ verwechselt, wodurch A und α ungeändert bleibt, wie es die nebenstehende Figur 19 darstellt. Beyde Dreyecke (Fig. 18 und 19) sind identisch oder vollkommen dieselben, aber ihre Bezeichnung ist verschieden. Demnach nehmen die zwey letzten Gleichungen, die für das erste Dreyeck (Fig. 18) gehören, da sie unmittelbar auch auf das zweyte (Fig. 19) anwendbar sind, für dieses zweyte Dreyeck die folgende Form an:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \operatorname{Cos} B \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{Sin} B,$$

welche zwey Gleichungen daher mit denen der Nr. IV. als gleichgeltend, oder welche nur als ein anderer Ausdruck derselben anzusehen sind.

In Worten ausgedrückt, sagt jedes Paar dieser Gleichungen: »*In einem rechtwinkligen Dreyecke ist jede Kathete, dividirt durch* »*die Hypotenuse, gleich dem Cosinus des dieser Kathete anliegen-* »*den, und auch gleich dem Sinus des dieser Kathete gegenüber-* »*stehenden schiefen Winkels.*«

VI. Bemerken wir noch, dafs aus den vier vorhergehenden Gleichungen, wegen dem doppelten Ausdruck der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$, sofort folgt:

$$\operatorname{Sin} B = \operatorname{Cos} C \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Sin} C = \operatorname{Cos} B;$$

so dafs demnach in jedem rechtwinkligen Dreyecke der Sinus des einen schiefen Winkels zugleich der Cosinus des anderen ist.

Da überdiefs (nach §. 85, II.) die Summe der beyden schiefen Winkel eines rechtwinkligen Dreyeckes gleich einem rechten Winkel oder gleich R ist, so hat man

$$B + C = R \quad \text{oder} \quad B = R - C;$$

so dafs daher die beyden vorhergehenden Gleichungen auch so ausgedrückt werden können:

$$\operatorname{Sin} B = \operatorname{Cos}(R - B) \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{Sin}(R - B);$$

d. h. der Sinus jedes gegebenen Winkels ist gleich dem Cosinus des *Complements* dieses Winkels zu 90 Graden und umgekehrt. So ist z. B.

$$\operatorname{Sin} 30^\circ = \operatorname{Cos} 60^\circ, \quad \operatorname{Cos} 30^\circ = \operatorname{Sin} 60^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin} 45^\circ = \operatorname{Cos} 45^\circ.$$

VII. Endlich folgt noch aus den beyden vorhergehenden Ausdrücken

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{Sin} B = \operatorname{Cos} C \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \operatorname{Cos} B = \operatorname{Sin} C,$$

daſs, wenn in einem rechtwinkligen Dreyecke die beyden schiefen Winkel B und C gleich sind, auch die beyden Katheten β und γ unter sich gleich seyn werden, und umgekehrt.

§. 88. (Ähnliche rechtwinklige Dreyecke.) Wenn man in einem bey A rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 20) zu der einen Kathete AB eine Parallele ab zieht, so entsteht ein anderes, dem ersten *ähnliches* Dreyeck abC.

Denn wegen dem Parallelismus der beyden Linien AB und ab sind (§. 86, II.) die Winkel von B und b, so wie auch die Winkel von A und a einander gleich, und der dritte Winkel C ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich; also sind in diesen zwey Dreyecken alle Winkel gleich, und daher (§. 83.) die Dreyecke ähnlich.

Wenden wir darauf die zwey Gleichungen des §. 87, V. an, so hat man in dem Dreyecke ABC

$$\frac{AB}{BC} = \operatorname{Sin} C,$$

und eben so in dem Dreyecke abC

$$\frac{ab}{bC} = \operatorname{Sin} C;$$

also ist auch

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bC} \; . \; . \; . \; (1).$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch aus den beyden Gleichungen

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{Cos} C \quad \text{und} \quad \frac{ac}{bC} = \operatorname{Cos} C$$

die folgende:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{aC}{bC} \; . \; . \; . \; (2);$$

und aus den Gleichungen (1) und (2) folgt sofort

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{aC} \; . \; . \; . \; (3).$$

Wenn daher in einem rechtwinkligen Dreyecke zu einer Kathete eine Parallele gezogen wird, so entstehen zwey ähnliche rechtwinklige Dreyecke, *deren Seiten unter sich proportionirt sind.*

§. 89. (Darstellung dieser Functionen im Kreise.)

Wenn DE und FG (Fig. 21) zwey auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises $DFEG$ sind, so wird durch sie die Peripherie des Kreises in vier gleiche Theile (Quadranten, §. 84, I.) eingetheilt. Wir wollen diese vier Quadranten FD, DG, GE und EF nach der Ordnung durch I, II, III und IV bezeichnen.

Läſst man von dem Endpuncte B des Halbmessers CB ein Loth BA auf den ersten Durchmesser herab, so entsteht ein in A rechtwinkliges Dreyeck ABC, von welchem daher alles das gilt, was wir oben von dem rechtwinkligen Dreyecke überhaupt ausgesagt haben.

Nimmt man nämlich wieder, der Kürze wegen, den Halbmesser des Kreises für die Einheit an, so ist, nach §. 87, III. das erwähnte Loth BA der Sinus, und AC ist der Cosinus des Winkels ACB, oder da (nach §. 84, *G.*) der Kreisbogen FB das Maſs des Winkels ACB ist, so ist auch BA der Sinus, und AC der Cosinus des Bogens FB, so daſs man demnach diese zwey Functionen auch so darstellen kann: Wenn man von dem Endpuncte B eines beweglichen Halbmessers eines Kreises, auf einen gegebenen festen Halbmesser desselben ein Loth fällt, so ist dieses Loth der *Sinus,* und die Distanz des Fuſspuncts A dieses Loths von dem Mittelpuncte C ist der *Cosinus* des Bogens oder des Winkels, der zwischen den beyden Halbmessern enthalten ist.

Da uns nichts hindert, diese Drehung des beweglichen Halbmessers CB durch alle Quadranten des Kreises, selbst mehr als einmal, fortzusetzen, so gelangen wir, durch diese Erklärung unserer beyden Functionen, zu einem allgemeinen Begriffe des Wortes *Winkel,* indem wir dadurch die Neigung einer beweglichen Geraden CB gegen eine fixe Gerade CF *für alle Lagen* jener Beweglichen um ihren Drehungspunct C verstehen, wodurch wir daher auf Winkel geführt werden, die den rechten Winkel, ja selbst die ganze Peripherie des Kreises, so viel man will, übertreffen können.

Läſst man daher von den Endpuncten b, b', b'', . . . des beweglichen Halbmessers, wenn er in die Lagen Cb, Cb', Cb'', ... gekommen ist, die Lothe ba, $b'a'$, $b''a''$, . . . auf den fixen Durchmesser FG herab, so wird auch hier, der eingeführten Erklärung zu Folge,

ba der Sinus und Ca der Cosinus des Bogens FBb oder des Winkels FCb

seyn, und dasselbe wird auch für $b'a'$ und Ca' in Beziehung auf den Bogen $FDGb'$, so wie für $b''a''$ und $c''a''$ in Beziehung auf den Bogen $FDGEb''$ gelten u. s. f.

Da aber diese beyden Functionen, wie man sieht, in den verschiedenen Quadranten auch verschiedene, einander entgegengesetzte *Lagen* einnehmen, so wird es nöthig seyn, diese Lagen zu berücksichtigen, und sie, gleich allen übrigen Gröſsen (§. 18.), durch eigene Zeichen zu unterscheiden. Wir wollen daher diese und alle ähnlichen Functionen, so lange sie dem *ersten* Quadranten FD angehören, *positiv* nehmen und durch $+$ bezeichnen, woraus von selbst folgt, daſs sie, wenn sie in den übrigen Quadranten eine der in dem ersten entgegengesetzte Lage erhalten, als negativ zu betrachten und mit — zu bezeichnen seyn werden. Ganz eben so kann auch die Drehung des beweglichen Halbmessers CB nach zwey entgegengesetzten Richtungen genommen werden. Wir wollen diese Drehung, wenn sie, von F beginnend, nach B, D, G, . . . fortgeht, die positive, und daher auch die von F nach $b''EG$ . . . die negative nennen, so daſs also auch die Bogen FB, FD, . . . positiv, und Fb'', Fb', . . . negativ seyn werden.

I. Aus dieser Annahme folgt, schon durch den bloſsen Anblick der Zeichnung, daſs

die Sinus in dem Quadranten I und II positiv, in III und IV aber negativ

sind, weil sie in den beyden letzten eine mit jenen entgegengesetzte Lage haben. Eben so sind die Cosinus in I und IV positiv, in II und III aber negativ. Endlich ist auch der Sinus eines negativen Bogens selbst negativ, während der Cosinus eines negativen Bogens sein positives Zeichen beybehält, so daſs man für jeden Bogen x die Gleichungen hat:

$$\mathrm{Sin}(-x) = -\mathrm{Sin}(+x) \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}(+x).$$

II. Abgesehen aber von dieser *Lage* unserer beyden Functionen sieht man eben so leicht, daſs die absolute *Gröſse* derselben in den verschiedenen Quadranten nach einem bestimmten Gesetze zu- und abnimmt, und daſs die frühern Werthe des ersten Quadranten in den folgenden periodisch wiederkehren. So ist, wenn der bewegliche Punct B im Anfange seiner Bewegung in F ist, wo der Bogen FB, also auch der Winkel FCB gleich Null ist, auch der Sinus dieses Bogens gleich Null und der Cosinus desselben gleich der Einheit. Wie aber der bewegliche Punct von F über B nach D fortschreitet, und der Bogen FB allmählig wächst, wächst auch sein Sinus, bis er für den Punct D, am Ende des ersten Quadranten, oder bis er für einen rechten Winkel seinen gröſsten Werth erreicht, der daher gleich dem Halbmesser des Kreises oder gleich der Einheit wird; während im Gegentheile der Cosinus des rechten Winkels für denselben Punct D seinen kleinsten Werth erhält oder gleich Null wird.

Von diesem Puncte D an nimmt der Sinus durch den ganzen Lauf des zweyten Quadranten wieder stufenweise ab, und zwar auf dieselbe Weise, wie er zuvor, im ersten Quadranten, gewachsen ist, da er nach und nach alle seine früheren Werthe wieder erhält.

Denn wenn der bewegliche Punct B z. B. nach b gekommen ist, wo der Winkel bCa eben so groſs ist, als früher der Winkel BCA war, so sind die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABC und abC (nach §. 87.) einander gleich; also ist auch die Seite $ba = BA$, oder der Sinus des Bogens FB ist gleich dem Sinus des Bogens $FBDb$. Setzt man daher den Bogen $FB = x$, so ist auch $Gb = x$ und daher $FBDb = 180° - x$, wodurch die vorige Gleichung $ba = BA$ in die folgende übergeht:

$$\text{Sin}(180 - x) = \text{Sin}\, x.$$

Aus demselben Grunde (§. 87.) ist auch $Ca = CA$. Da aber CA der Cosinus des Bogens FB, und Ca der Cosinus des Bogens $FBDb$ ist, und da beyde in ihren Lagen entgegengesetzt sind, so geht die Gleichung $Ca = CA$ in folgende über:

$$\text{Cos}(180 - x) = - \text{Cos}\, x.$$

Ist ferner die durch B gehende Gerade Bb parallel mit dem ſixen Durchmesser FG, so ist auch (§. 86, II. C.) der Winkel $CBb = ACB$; also sind auch (§. 87.) die beyden Dreyecke ABC und CBd gleich, und daher die Seite

$$Bd = AC, \quad \text{so wie} \quad Cd = AB.$$

Setzt man demnach wieder den Bogen $FB = x$, also auch, da $FD = 90^0$ ist, den Bogen $BD = 90 - x$, so hat man in dem Dreyecke ABC

$$AB = \text{Sin}\, x \quad \text{und} \quad AC = \text{Cos}\, x,$$

und eben so in dem Dreyecke CBd

$$Bd = \text{Sin}(90 - x) \quad \text{und} \quad Cd = \text{Cos}(90 - x);$$

so daſs daher die zwey vorhergehenden Gleichungen, $Bd = AC$ und $Cd = AB$, in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}(90 - x) &= \text{Cos}\, x \\ \text{und} \quad \text{Cos}(90 - x) &= \text{Sin}\, x \end{aligned}\right\};$$

übereinstimmend mit dem, was wir schon oben (§. 87, VI.) unmittelbar aus der bloſsen Erklärung dieser beyden Functionen abgeleitet haben. — Man wird diese und ähnliche Bemerkungen sehr leicht auch auf alle übrigen Quadranten fortsetzen können.

III. Betrachtet man dabey vorzüglich diejenigen Puncte des Kreises, für welche diese zwey Functionen ihre gröſsten und kleinsten Werthe erhalten, so findet man, schon aus dem bloſsen Anblick der Zeichnung, daſs für diese Puncte folgende Gleichungen Statt haben, in welchen wieder R den rechten Winkel oder den vierten Theil des Kreisumfangs, und wo n die auf einander folgenden natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . bedeuten.

$$\begin{array}{lll} \text{Sin}\, 2nR = 0 & \text{und} & \text{Cos}(2n+1)R = 0, \\ \text{Sin}(4n+1)R = +1 & \text{»} & \text{Cos}\, 4nR = +1, \\ \text{Sin}(4n+3)R = -1 & \text{»} & \text{Cos}(4n+2)R = -1. \end{array}$$

§. 90. (Tangenten, Secanten etc.) Auſser den beyden bisher betrachteten Functionen der Sinus und Cosinus, hat man auch noch einige andere eingeführt, die aber bloſse einfache Combinationen von jenen sind, übrigens für die Anwendung groſsen Nutzen mit Bequemlichkeit vereinigen. So nennt man z. B. den Quotienten

$\frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}$ die Tangente,

$\frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}$ » Cotangente,

$\frac{1}{\text{Cos}\,x}$ » Secante,

$\frac{1}{\text{Sin}\,x}$ » Cosecante, und endlich

$1 - \text{Cos}\,x$ den Sinusversus des Bogens x;

und man drückt diese Functionen auf folgende Weise aus:

$$\text{Tang}\,x = \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}, \quad \text{Sec}\,x = \frac{1}{\text{Cos}\,x},$$
$$\text{Cotang}\,x = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}, \quad \text{Cosec}\,x = \frac{1}{\text{Sin}\,x},$$
$$\text{Sinvers}\,x = 1 - \text{Cos}\,x.$$

I. Um auch diese Functionen in unserer Zeichnung darzustellen, seyen wieder (Fig. 22) FG und DE zwey auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises, dessen Halbmesser als Einheit angenommen wird. An dem Endpuncte F des ersten Durchmessers errichte man die auf ihr senkrechte Gerade Ff, bis sie der Verlängerung des beweglichen Halbmessers CB in f begegnet, und ziehe Dm und Bd senkrecht auf den zweyten Durchmesser DE, so ist

Ff die Tangente, Cf die Secante,
Dm » Cotangente, Cm » Cosecante und
FA der Sinusversus des Bogens FB.

Da nämlich die beyden Linien Ff und BA, so wie auch Dm und Bd unter sich parallel sind (§. 86.), so sind auch die rechtwinkligen Dreyecke ABC und FfC, so wie CBd und CmD unter sich ähnlich, und man hat demnach (§. 88.) die Proportionen

$$CA : AB = CF : Ff,$$
$$Cd : Bd = AB : AC = CD : Dm,$$
$$CA : CB = CF : Cf,$$
$$Cd : CB = AB : CB = CD : Cm.$$

Setzt man aber wieder den Bogen $FB = x$, und nimmt man, wie zuvor, den Halbmesser CF, CB, CD des Kreises für die Einheit an, so geben diese vier Proportionen nach der Reihe die Gleichungen

$$Ff \text{ oder } \mathrm{Tang}\, x = \frac{\mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cos}\, x},$$

$$Dm \text{ » } \mathrm{Cotg}\, x = \frac{\mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Sin}\, x},$$

$$Cf \text{ » } \mathrm{Sec}\, x = \frac{1}{\mathrm{Cos}\, x},$$

$$Cm \text{ » } \mathrm{Cosec}\, x = \frac{1}{\mathrm{Sin}\, x},$$

die mit den obigen Ausdrücken übereinstimmen.

Diese Gleichungen geben nicht nur den absoluten Werth oder die Gröſse, sondern auch das Zeichen der neuen Functionen für jeden Punct der Peripherie, wenn die Sinus und Cosinus desselben bekannt sind. So sieht man z. B. daſs für einen rechten Winkel, oder für $x = 90^\circ$, wo $\mathrm{Sin}\, x = 1$ und $\mathrm{Cos}\, x = 0$ ist, die Tangente und Secante unendlich groſs, die Cotangente aber gleich Null und die Cosecante gleich der Einheit wird; daſs ferner die Tangente und Cotangente in dem Quadranten I und III positiv, in II und IV aber negativ ist u. f.

Man pflegt diese Ausdrücke der Sinus, Cosinus, Tangenten u. f. unter der gemeinsamen Benennung der *trigonometrischen Functionen* zu begreifen. Ihr Einfluſs verbreitet sich über das ganze Gebiet der Geometrie, und sie werden uns in der Folge noch sehr nützlich seyn.

Fünfzehntes Capitel.

Eigenschaften der Dreyecke und weitere Entwicklung der trigonometrischen Functionen.

---

§. 91. (Fundamentalgleichung des Dreyeckes.) Sey ABC (Fig. 23) ein Dreyeck, dessen Winkel, nach der oben (§. 87, II.) eingeführten Bezeichnung A, B, C, und die ihnen in derselben Ordnung entgegenstehenden Seiten $BC = \alpha$, $AC = \beta$ und $AB = \gamma$ sind. Wenn man von dem Scheitel eines Winkels A des Dreyeckes auf die gegenüberstehende Seite $BC = \alpha$ ein Loth AD fällt, so wird dadurch diese Seite in zwey Theile BD und DC getheilt, die, nach der oben (§. 87, IV.) gegebenen Erklärung des Cosinus, so ausgedrückt werden können:

$$BD = \gamma \operatorname{Cos} B \quad \text{und} \quad DC = \beta \operatorname{Cos} C;$$

so daſs man daher, da $BC = BD + DC$ ist, den Ausdruck hat:

$$\alpha = \gamma \operatorname{Cos} B + \beta \operatorname{Cos} C.$$

Ganz eben so wird auch das Loth aus dem Puncte B und C auf die ihnen gegenüberstehenden Seiten geben:

$$\beta = \gamma \operatorname{Cos} A + \alpha \operatorname{Cos} C$$
$$\text{und} \quad \gamma = \alpha \operatorname{Cos} B + \beta \operatorname{Cos} A.$$

Multiplicirt man die erste dieser drey Gleichungen durch α, die zweyte durch β und die dritte endlich durch γ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha\gamma \operatorname{Cos} B + \alpha\beta \operatorname{Cos} C \\ \beta^2 &= \beta\gamma \operatorname{Cos} A + \alpha\beta \operatorname{Cos} C \\ \gamma^2 &= \alpha\gamma \operatorname{Cos} B + \beta\gamma \operatorname{Cos} A \end{aligned}\right\}.$$

Subtrahirt man endlich von der Summe je zweyer der drey letzten Ausdrücke den dritten, so erhält man die folgenden drey Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \operatorname{Cos} A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \operatorname{Cos} B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \operatorname{Cos} C \end{aligned}\right\} \ldots (\text{A});$$

das heiſst: »*In jedem Dreyecke ist das Quadrat einer Seite gleich* »*der Summe der Quadrate der beyden anderen, weniger dem dop-* »*pelten Producte dieser zwey anderen Seiten in den Cosinus des* »*von ihnen eingeschlossenen Winkels,*« und dieſs ist die gesuchte Grundgleichung des Dreyeckes, aus welcher sich alle anderen leicht ableiten lassen.

I. Es wird nicht nothwendig seyn, zu erinnern, daſs diese Gleichungen (A) für *alle* Dreyecke gehören, selbst wenn z. B. das Loth von einem Puncte C nicht auf die gegenüberstehende Seite BA, sondern, wie in Fig. 26, wegen dem stumpfen Winkel ABC, nur auf die Verlängerung BD dieser Seite fällt, da für diesen Fall der Cosinus des erwähnten Winkels (nach §. 89, II.) negativ ist, und daher der obige Ausdruck

$$\gamma = \alpha \operatorname{Cos} B + \beta \operatorname{Cos} A$$

durch die bloſse Berücksichtigung des Zeichens von $\operatorname{Cos} B$ in

$$\gamma = \beta \operatorname{Cos} A - \alpha \operatorname{Cos} B,$$

also auch die zweyte der Gleichungen (A) in

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma \operatorname{Cos} B$$

übergeht. — Fällt aber, wie bey einem in A rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 6) das Loth von B auf den Endpunct der gegenüberstehenden Seite CA, so geht für diesen Fall, da wieder nach §. 89, I. der Cosinus eines rechten Winkels Null ist, die Gleichung

$$\beta = \gamma \operatorname{Cos} A + \alpha \operatorname{Cos} C$$

in die folgende über:

$$\beta = \alpha \operatorname{Cos} C,$$

welche mit der oben (§. 87, IV.) gegebenen Gleichung identisch ist.

II. Bemerken wir noch, daſs von den drey Gleichungen (A) je zwey nur eine Folge oder vielmehr ein anderer Ausdruck der dritten sind. In der That findet man z. B. aus der zweyten jener Gleichungen

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \operatorname{Cos} B,$$

die für das Dreyeck (I) (Fig. 24) gehören mag, wo AC die unterste Seite oder die Basis des Dreyecks ist, sofort die beyden anderen Gleichungen, wenn man dasselbe Dreyeck zweymal so dreht, dafs in der zweyten Lage (II) die Seite BA, und in der dritten Lage (III) die Seite CB die Basis des Dreyecks wird.

Aber auch ohne diese Drehung des Dreyeckes kann man denselben Zweck noch einfacher dadurch erreichen, dafs man blofs die Buchstaben ABC und $\alpha\beta\gamma$ so verwechselt, dafs sie für den zweyten Fall um eine, und für den dritten um zwey Stellen verrückt werden, wie folgendes Schema zeigt:

erster Fall $A\ B\ C\ldots\alpha\ \beta\ \gamma$;
zweyter » $B\ C\ A\ldots\beta\ \gamma\ \alpha$;
dritter » $C\ A\ B\ldots\gamma\ \alpha\ \beta$.

Diese Bemerkung wird in der Folge noch öfter Anwendung finden, da jede allgemeine, das Dreyeck betreffende Gleichung, ihrer Natur nach, zwey ähnliche analoge Gleichungen mit sich führt, die demnach, ohne sie erst eigens zu entwickeln, durch diese Transformation sogleich erhalten werden können.

§. 92. (Verhalten der Quadrate der Seiten des rechtwinkligen Dreyeckes.) Die vorhergehenden Gleichungen (A) beziehen sich auf jedes willkürliche Dreyeck. Ist dasselbe aber rechtwinklig, und ist z. B. A der rechte Winkel desselben, so ist (nach §. 89, II) $\operatorname{Cos} A = 0$, also auch die erste der Gleichungen (A)

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

oder: *In dem rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beyder Katheten;* ein wichtiger Satz, den schon *Pythagoras* erfunden und dafür den Göttern eine Hekatombe geopfert haben soll, der aber hier nur als ein einzelner Fall des durch die Gleichungen (A) ausgedrückten Theorems erscheint.

I. Ist $\beta = \gamma$, so ist $\alpha^2 = 2\beta^2$, oder es ist $\alpha = \beta\sqrt{2}$, oder die Diagonale des Quadrats (§. 81.) ist mit der Seite desselben incommensurabel (§. 30.).

II. Ist das Dreyeck ABC (Fig. 25) in A rechtwinklig, und ist AD ein Loth von dem Punct A auf die ihm gegenüberstehende Hypotenuse $BC = \alpha$, so seyen $BAD = M$, $DAC = N$ die Winkel, und $BD = m$, $DC = n$ die Segmente, in welche der rechte Winkel und die Hypotenuse durch dieses Loth getheilt wird.

Diefs vorausgesetzt hat man, da in jedem rechtwinkligen Dreyecke die Summe der zwey schiefen Winkel (nach §. 85, II.) gleich einem rechten Winkel oder gleich R ist,

$$B + C = R,$$

und eben so

$$B + M = R,$$
$$C + N = R.$$

Diese drey Gleichungen geben

$$B = R - M = R - C \text{ und}$$
$$C = R - N = R - B;$$

woraus sofort folgt, dafs der Winkel $C = M$, und dafs der Winkel $B = N$, dafs also auch (§. 83.) die drey rechtwinkligen Dreyecke ABC, ABD und ADC unter sich ähnlich sind.

Weiter hat man in denselben Dreyecken, nach der blofsen Erklärung des Cosinus (§. 87, IV.), die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{m}{\gamma} = \operatorname{Cos} B \text{ und } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\beta} = \operatorname{Cos} C;$$

also auch

$$\left.\begin{array}{r} \beta^2 = \alpha \,.\, n \\ \text{und } \gamma^2 = \alpha \,.\, m \end{array}\right\};$$

das heifst: »Im rechtwinkligen Dreyecke ist jede Kathete die »mittlere Proportionale (§. 38, I.) zwischen der Hypotenuse und »dem dieser Kathete anliegenden Segment der Hypotenuse.«

III. Ist überdiefs das erwähnte Loth $AD = p$, so hat man eben so (§. 87, IV.)

$$\frac{p}{\gamma} = \operatorname{Cos} M \text{ und } \frac{p}{\beta} = \operatorname{Cos} N;$$

also auch, da $M = C$ und $N = B$ ist, wenn man das Product der zwey letzten Gleichungen nimmt,

$$p^2 = \beta\gamma \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C;$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von

$$\operatorname{Cos} B = \frac{m}{\gamma} \text{ und } \operatorname{Cos} C = \frac{n}{\beta}$$

substituirt:

$$p^2 = mn;$$

das heifst: »Im rechtwinkligen Dreyecke ist das Loth aus dem »rechten Winkel auf die Hypotenuse die mittlere Proportionale »zwischen den beyden Segmenten der Hypotenuse.«

§. 93. (Verhältniſs der Seiten jedes Dreyeckes.) Ist ABC (Fig. 23) ein Dreyeck, und AD ein aus dem Scheitel des Winkels A auf die gegenüberstehende Seite $BC = \alpha$ gefälltes Loth, so ist, nach der oben (§. 87, IV.) gegebenen Erklärung des Sinus eines Winkels

$$\frac{AD}{AB} = \operatorname{Sin} B \quad \text{und} \quad \frac{AD}{AC} = \operatorname{Sin} C;$$

also auch, da $AB = \gamma$ und $AC = \beta$ ist,

$$AD = \gamma \operatorname{Sin} B \quad \text{und} \quad AD = \beta \operatorname{Sin} C.$$

Setzt man beyde Werthe von AD einander gleich, so erhält man

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C};$$

und auch diese Gleichung ist, nach der Bemerkung des §. 91, II, noch zwey anderen analogen gleichgeltend, so daſs man daher hat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\gamma} &= \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C} \\ \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C} \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} B} \end{aligned}\right\} \ldots (B).$$

Drückt man den Inhalt dieser Gleichungen in Worten aus, so geben sie den Satz: »*Die Seiten des Dreyeckes verhalten sich,* »*wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel.*«

§. 94. (Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz zweyer Winkel.) Da in jedem Dreyecke (nach §. 85.) die Summe aller drey Winkel gleich $2R$ oder gleich 180 Graden ist, oder da man, wenn A, B und C diese Winkel des Dreyeckes bezeichnen, die Gleichung hat:

$$C = 180 - (A + B);$$

und da überdieſs (nach §. 89, II.)

$$\operatorname{Sin}(180 - (A + B)) = \operatorname{Sin}(A + B)$$

ist, da also auch, für jedes Dreyeck, die Gleichung Statt hat:

$$\operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin}(A + B),$$

so erhält man, wenn man diesen Werth von $\operatorname{Sin} C$ in der ersten der Gleichungen (B) des §. 93. substituirt:

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\operatorname{Sin}(A+B)}{\operatorname{Sin} B}.$$

Allein nach dem, was oben (§. 91.) gesagt worden ist, hat man auch

$$\gamma = \beta \operatorname{Cos} A + \alpha \operatorname{Cos} B,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\gamma}{\beta} = \operatorname{Cos} A + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{Cos} B;$$

oder endlich, da nach denselben Gleichungen (B) auch

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} B}$$

ist, so hat man

$$\frac{\gamma}{\beta} = \operatorname{Cos} A + \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} B} \operatorname{Cos} B.$$

Setzt man diese zwey Werthe von $\frac{\gamma}{\beta}$ einander gleich, so erhält man

$$\operatorname{Sin}(A+B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B,$$

und dieser Ausdruck gibt den Sinus der Summe zweyer Winkel, wenn der Sinus und Cosinus jedes einzelnen dieser Winkel bekannt ist.

I. Nimmt man in dem letzten Ausdrucke den Winkel B negativ, oder setzt man in ihm $-B$ statt B, so erhält man, da nach §. 89, I. für jeden Winkel x die Gleichungen bestehen:

$$\operatorname{Sin}(-x) = -\operatorname{Sin} x \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}(-x) = \operatorname{Cos} x,$$

für den Sinus der Differenz zweyer Winkel den Ausdruck

$$\operatorname{Sin}(A-B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B.$$

II. Setzt man überdieſs in diesen beyden Ausdrücken von $\operatorname{Sin}(A+B)$ und $\operatorname{Cos}(A+B)$ statt A die Gröſse $90^\circ - A$, so hat man, da (nach §. 87, VI. oder §. 89, III.) für jeden Winkel x die Gleichungen

$$\operatorname{Sin}(90-x) = \operatorname{Cos} x \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}(90-x) = \operatorname{Sin} x$$

bestehen:

$$\operatorname{Sin}(90 - A + B) \quad \text{oder} \quad \operatorname{Sin}(90 - (A-B)),$$

oder endlich

$$\operatorname{Cos}(A-B) = \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B,$$

und eben so

$$\text{Sin}(90 - A - B) \quad \text{oder} \quad \text{Sin}(90 - (A + B)),$$

oder endlich

$$\text{Cos}(A + B) = \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B;$$

und diese zwey Ausdrücke geben den Cosinus der Summe und der Differenz zweyer Winkel, wenn die Sinus und Cosinus der einfachen Winkel gegeben sind.

Stellt man diese vier Gleichungen zur bequemern Übersicht zusammen, so hat man, wenn man die beyden einfachen Winkel durch x und y bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin}(x + y) &= \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y + \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y\\ \text{Sin}(x - y) &= \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y - \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y\\ \text{Cos}(x + y) &= \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y - \text{Sin}\,x\,\text{Sin}\,y\\ \text{Cos}(x - y) &= \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y + \text{Sin}\,x\,\text{Sin}\,y\end{aligned}\right\} \ldots (\text{C}).$$

Diese vier Gleichungen werden uns künftig sehr nützlich seyn, da sie eine allgemeine Relation zwischen den beyden Functionen der Sinus und Cosinus enthalten, und uns dadurch behülflich seyn werden, die merkwürdigen Eigenschaften dieser Functionen noch näher kennen zu lernen. Hier werden vorerst folgende kurze Bemerkungen darüber genügen.

A. Verwechselt man in der zweyten und vierten der Gleichungen (C) alle Zeichen, so erhält man

$$\text{Sin}(y - x) = \text{Sin}\,y\,\text{Cos}\,x - \text{Cos}\,y\,\text{Sin}\,x \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}(y - x) = \text{Cos}\,y\,\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,y\,\text{Sin}\,x.$$

Vergleicht man diese zwey Ausdrücke mit den Gleichungen (C), so erhält man

$$\text{Sin}(y - x) = -\text{Sin}(x - y) \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}(y - x) = \text{Cos}(x - y),$$

übereinstimmend mit dem, was oben (§. 89, I.) von dem Sinus und Cosinus der negativen Bogen gesagt worden ist.

B. Setzt man in den Gleichungen (*C*) statt x die Gröfse $R = 90^\circ$, so hat man, da (nach §. 89, II.) $\text{Sin}\,R = 1$ und $\text{Cos}\,R = 0$ ist:

$$\text{Sin}(R + y) = \text{Cos}\,y,$$
$$\text{Sin}(R - y) = \text{Cos}\,y,$$
$$\text{Cos}(R + y) = -\text{Sin}\,y,$$
$$\text{Cos}(R - y) = \text{Sin}\,y;$$

und auch diese Ausdrücke sind übereinstimmend mit den Gleichungen des §. 89, II.

Überhaupt wird man, um die ganze Peripherie des Kreises zu umfassen, da nach den Gleichungen des §. 89, III.

$\mathrm{Sin}\,0 = \mathrm{Sin}\,2R = \mathrm{Sin}\,4R = \mathrm{Cos}\,R = \mathrm{Cos}\,3R = 0$ und

$\mathrm{Sin}\,R = -\mathrm{Sin}\,3R = \mathrm{Cos}\,0 = -\mathrm{Cos}\,2R = \mathrm{Cos}\,4R = 1$ ist,

aus den Gleichungen (C) unmittelbar die folgenden ableiten:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sin}(R \pm y) &= \mathrm{Cos}\,y\\ \mathrm{Sin}(2R \pm y) &= \mp \mathrm{Sin}\,y\\ \mathrm{Sin}(3R \pm y) &= -\mathrm{Cos}\,y\\ \mathrm{Sin}(4R \pm y) &= \pm \mathrm{Sin}\,y\end{aligned}\right\}\text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Cos}(R \pm y) &= \mp \mathrm{Sin}\,y\\ \mathrm{Cos}(2R \pm y) &= -\mathrm{Cos}\,y\\ \mathrm{Cos}(3R \pm y) &= \pm \mathrm{Sin}\,y\\ \mathrm{Cos}(4R \pm y) &= \mathrm{Cos}\,y\end{aligned}\right\};$$

wo dann für die folgenden, die ganze Peripherie übersteigenden Bogen dieselben Werthe und Zeichen periodisch wieder kommen, so dafs man z. B. hat:

$$\mathrm{Sin}(5R \pm y) = \mathrm{Cos}\,y,$$
$$\mathrm{Sin}(6R \pm y) = \mp \mathrm{Sin}\,y \text{ u. f.}$$

C. Aus diesen Ausdrücken in (B) folgen sofort auch die Tangenten, Cotangenten u. f. für alle den rechten Winkel übersteigenden Bogen. So hat man nach §. 90.

$$\mathrm{Tang}\,x = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x} \text{ und } \mathrm{Cotang}\,x = \frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x};$$

also auch, wenn man statt x die Winkel $R \pm y$, $2R \pm y$, $3R \pm y$ u. f. setzt, und die Sinus und Cosinus dieser letzten Winkel für die verschiedenen Quadrate aus (B) substituirt:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Tang}(R \pm y) &= \mp \mathrm{Cotg}\,y\\ \mathrm{Tang}(2R \pm y) &= \pm \mathrm{Tang}\,y\\ \mathrm{Tang}(3R \pm y) &= \mp \mathrm{Cotg}\,y\\ \mathrm{Tang}(4R \pm y) &= \pm \mathrm{Tang}\,y\end{aligned}\right\}\text{ und eben so}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Cotg}(R \pm y) &= \mp \mathrm{Tang}\,y\\ \mathrm{Cotg}(2R \pm y) &= \pm \mathrm{Cotg}\,y\\ \mathrm{Cotg}(3R \pm y) &= \mp \mathrm{Tang}\,y\\ \mathrm{Cotg}(4R \pm y) &= \pm \mathrm{Cotg}\,y\end{aligned}\right\}.$$

D. Endlich wollen wir noch bemerken, daſs man nach den zweyten Gleichungen in (B), übereinstimmend mit §. 89, II., hat:

$$\text{Sin}\,(180^\circ - y) = \text{Sin}\,y \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}\,(180^\circ - y) = -\,\text{Cos}\,y.$$

So lange man also bloſs die Winkel von Dreyecken betrachtet, deren jeder, nach §. 85, III., kleiner als 180° seyn muſs, so wird man, wenn man für irgend ein Dreyeck *ABC* die Gleichung

$$\text{Cos}\,A = \text{Cos}\,B$$

erhält, daraus unmittelbar schlieſsen, daſs auch der Winkel $A = B$ ist. Dasselbe gilt aber nicht für die andere Gleichung

$$\text{Sin}\,A = \text{Sin}\,B,$$

aus welcher *zwey* Werthe für *A* folgen, nämlich

$$\text{entweder} \quad A = B \quad \text{oder} \quad A = 180 - B.$$

Wohl fällt aber diese Zweydeutigkeit der Winkel wieder weg, wenn man die Gleichung

$$\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Cos}\,A} = \frac{\text{Sin}\,B}{\text{Cos}\,B} \quad \text{oder} \quad \text{Tang}\,A = \text{Tang}\,B$$

hat, da diese, nach den Ausdrücken von (C), unmittelbar wieder auf den einzigen Werth $A = B$ führt; eine Bemerkung, auf die wir in der Folge wieder zurückkommen werden.

§. 95. (Relationen zwischen dem Sinus, Cosinus, Tangente u. f. desselben Winkels.) Da in jedem rechtwinkligen Dreyecke, wenn *A* den rechten Winkel, also auch α die Hypotenuse desselben bezeichnet, nach §. 92. die Gleichung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

und da, nach der oben gegebenen Erklärung des Sinus und Cosinus (§. 87, V.), wenn der Winkel $ABC = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{Sin}\,x \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \text{Cos}\,x$$

ist, so hat man auch, wenn man diese Werthe von β und γ in der vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1;$$

und diese merkwürdige einſache Gleichung setzt uns in den

Stand, jede der oben erwähnten trigonometrischen Functionen bloſs durch irgend eine der übrigen auszudrücken.

So hat man zuerst, wenn z. B. der Sinus eines Winkels bekannt ist, auch den Cosinus desselben sofort durch die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\, x = \sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2 x},$$

oder umgekehrt, wenn der Cosinus bekannt ist,

$$\mathrm{Sin}\, x = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 x}.$$

I. Eben so wird man auch die Tangente oder Cotangente eines Winkels bloſs durch den Sinus, oder bloſs durch den Cosinus desselben Winkels mit Hülfe der Gleichung bestimmen:

$$\mathrm{Tang}\, x = \frac{1}{\mathrm{Cotang}\, x} = \frac{\mathrm{Sin}\, x}{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 x}}{\mathrm{Cos}\, x};$$

oder auch den Sinus und Cosinus bloſs durch die Tangente oder Cotangente mittelst des Ausdruckes

$$\mathrm{Sin}\, x = \frac{\mathrm{Tang}\, x}{\sqrt{1 + \mathrm{Tang}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{Cotang}^2 x}},$$

$$\mathrm{Cos}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{Tang}^2 x}} = \frac{\mathrm{Cotang}\, x}{\sqrt{1 + \mathrm{Cotang}^2 x}} \quad \text{u. s. f.}$$

§. 96. (Summe und Differenz der Sinus und Cosinus zweyer Winkel.) Wenn man die vier Gleichungen (C) des §. 94. paarweise addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\,(x+y) + \mathrm{Sin}\,(x-y) = 2\,\mathrm{Sin}\, x\,\mathrm{Cos}\, y \\ \mathrm{Sin}\,(x+y) - \mathrm{Sin}\,(x-y) = 2\,\mathrm{Cos}\, x\,\mathrm{Sin}\, y \\ \mathrm{Cos}\,(x-y) + \mathrm{Cos}\,(x+y) = 2\,\mathrm{Cos}\, x\,\mathrm{Cos}\, y \\ \mathrm{Cos}\,(x-y) - \mathrm{Cos}\,(x+y) = 2\,\mathrm{Sin}\, x\,\mathrm{Sin}\, y \end{array}\right\};$$

oder auch, wenn man in diesen Ausdrücken

statt x die Gröſse $\frac{1}{2}(x+y)$
und statt y die Gröſse $\frac{1}{2}(x-y)$

substituirt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\, x + \mathrm{Sin}\, y = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x-y) \\ \mathrm{Sin}\, x - \mathrm{Sin}\, y = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x-y) \\ \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Cos}\, x = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(x-y) \\ \mathrm{Cos}\, y - \mathrm{Cos}\, x = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(x-y) \end{array}\right\}.$$

Durch diese Gleichungen wird die Summe oder die Differenz dieser Functionen auf Producte derselben gebracht, welche Producte zur Berechnung mit Logarithmen viel bequemer sind.

§. 97. (Sinus und Cosinus der halben und doppelten Bogen.) Setzt man in den ersten Gleichungen des §. 96. die Gröſse $x = y$, so erhält man

$$\operatorname{Sin} 2x = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x$$

und $$\operatorname{Cos} 2x = \operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x,$$

wo man, nach §. 95., statt der letzten Gleichung auch die folgende hat:

$$\operatorname{Cos} 2x = 1 - 2 \operatorname{Sin}^2 x = 2 \operatorname{Cos}^2 x - 1.$$

I. Setzt man in den letzten Ausdrücken von $\operatorname{Cos} 2x$ statt x die Gröſse $\frac{1}{2}x$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}x &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{2}} \\ \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}x &= \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos} x}{2}} \end{aligned}\right\} .$$

§. 98. (Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen durch die der einfachen.) Setzt man in den ersten Gleichungen des §. 96.

statt x die Gröſse $(n + 1)x$

und statt y die Gröſse x,

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}(n+2)x &= 2 \operatorname{Sin}(n+1)x \,.\, \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} nx \\ \operatorname{Cos}(n+2)x &= 2 \operatorname{Cos}(n+1)x \,.\, \operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} nx \end{aligned}\right\} \ldots (a).$$

Substituirt man dann in den beyden letzten Ausdrücken für die Gröſse n nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . ., so erhält man folgende Gleichungen, in welchen der Kürze wegen

$$p = \operatorname{Sin} x \quad \text{und} \quad q = 2 \operatorname{Cos} x$$

gesetzt worden ist,

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} 2x &= pq, \\ \operatorname{Sin} 3x &= p(q^2 - 1), \\ \operatorname{Sin} 4x &= p(q^3 - 2q), \end{aligned}$$

$$\mathrm{Sin}\,5x = p\,(q^4 - 3q^2 + 1),$$
$$\mathrm{Sin}\,6x = p\,(q^5 - 4q^3 + 3q),$$
$$\mathrm{Sin}\,7x = p\,(q^6 - 5q^4 + 9q^2 - 1) \text{ u. f.;}$$

und eben so

$$2.\mathrm{Cos}\,2x = q^2 - 2,$$
$$2.\mathrm{Cos}\,3x = q^3 - 3q,$$
$$2.\mathrm{Cos}\,4x = q^4 - 4q^2 + 2,$$
$$2.\mathrm{Cos}\,5x = q^5 - 5q^3 + 5q,$$
$$2.\mathrm{Cos}\,6x = q^6 - 6q^4 + 9q^2 - 2,$$
$$2.\mathrm{Cos}\,7x = q^7 - 7q^5 + 14q^3 - 7q \text{ u. f.}$$

Diese Ausdrücke, welche sich leicht fortsetzen lassen, geben die Sinus und Cosinus der 2, 3, 4, ... fachen Bogen, wenn die Sinus und Cosinus der einfachen Bogen bekannt sind.

§. 99. (Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen.) Noch leichter erhält man die Auflösung der des §. 98. entgegengesetzten Aufgabe, wenn man nämlich die 2ten, 3ten, 4ten, ... Potenzen des Sinus oder des Cosinus eines Bogens blofs durch die ersten Potenzen des Sinus oder Cosinus desselben 2, 3, 4, ... fachen Bogens ausdrücken will.

So hat man z. B. aus §. 97. die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rl} 2\,\mathrm{Sin}^2 x = 1 - \mathrm{Cos}\,2x \\ \text{und} \quad 2\,\mathrm{Cos}^2 x = 1 + \mathrm{Cos}\,2x \end{array}\right\}.$$

Multiplicirt man die erste durch $\mathrm{Sin}\,x$, und bemerkt man, dafs nach §. 96.

$$\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,2x = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,3x - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,x$$

ist, so hat man

$$4\,\mathrm{Sin}^3 x = 3\,\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Sin}\,3x.$$

Multiplicirt man auch diese Gleichung wieder durch $\mathrm{Sin}\,x$, so hat man

$$4\,\mathrm{Sin}^4 x = 3\,\mathrm{Sin}^2 x - \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,3x.$$

Da aber, wie zuvor,

$$\mathrm{Sin}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{Cos}\,2x),$$

und nach demselben §. 96.

$$\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,3x = \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2x - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,4x$$

ist, so erhält man

$$8\,\mathrm{Sin}^4 x = 3 - 4\,\mathrm{Cos}\,2x + \mathrm{Cos}\,4x.$$

Fährt man auf diese Art fort, und behandelt eben so die zweyte der oben aufgestellten Gleichungen

$$2\,\mathrm{Cos}^2 x = 1 + \mathrm{Cos}\,2x,$$

so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Sin}^2 x &= -\mathrm{Cos}\,2x + 1,\\
4\,\mathrm{Sin}^3 x &= -\mathrm{Sin}\,3x + 3\,\mathrm{Sin}\,x,\\
8\,\mathrm{Sin}^4 x &= \mathrm{Cos}\,4x - 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 3,\\
16\,\mathrm{Sin}^5 x &= \mathrm{Sin}\,5x - 5\,\mathrm{Sin}\,3x + 10\,\mathrm{Sin}\,x,\\
32\,\mathrm{Sin}^6 x &= -\mathrm{Cos}\,6x + 6\,\mathrm{Cos}\,4x - 15\,\mathrm{Cos}\,2x + 10,\\
64\,\mathrm{Sin}^7 x &= -\mathrm{Sin}\,7x + 7\,\mathrm{Sin}\,5x - 21\,\mathrm{Sin}\,3x + 35\,\mathrm{Sin}\,x,\\
128\,\mathrm{Sin}^8 x &= \mathrm{Cos}\,8x - 8\,\mathrm{Cos}\,6x + 28\,\mathrm{Cos}\,4x - 56\,\mathrm{Cos}\,2x + 35,\\
256\,\mathrm{Sin}^9 x &= \mathrm{Sin}\,9x - 9\,\mathrm{Sin}\,7x + 36\,\mathrm{Sin}\,5x - 84\,\mathrm{Sin}\,3x + 126\,\mathrm{Sin}\,x,\\
512\,\mathrm{Sin}^{10} x &= -\mathrm{Cos}\,10x + 10\,\mathrm{Cos}\,8x - 45\,\mathrm{Cos}\,6x + 120\,\mathrm{Cos}\,4x - 210\,\mathrm{Cos}\,2x + 126 \quad \text{u. f.};
\end{aligned}$$

und auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Cos}^2 x &= \mathrm{Cos}\,2x + 1,\\
4\,\mathrm{Cos}^3 x &= \mathrm{Cos}\,3x + 3\,\mathrm{Cos}\,x,\\
8\,\mathrm{Cos}^4 x &= \mathrm{Cos}\,4x + 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 3,\\
16\,\mathrm{Cos}^5 x &= \mathrm{Cos}\,5x + 5\,\mathrm{Cos}\,3x + 10\,\mathrm{Cos}\,x,\\
32\,\mathrm{Cos}^6 x &= \mathrm{Cos}\,6x + 6\,\mathrm{Cos}\,4x + 15\,\mathrm{Cos}\,2x + 10,\\
64\,\mathrm{Cos}^7 x &= \mathrm{Cos}\,7x + 7\,\mathrm{Cos}\,5x + 21\,\mathrm{Cos}\,3x + 35\,\mathrm{Cos}\,x,\\
128\,\mathrm{Cos}^8 x &= \mathrm{Cos}\,8x + 8\,\mathrm{Cos}\,6x + 28\,\mathrm{Cos}\,4x + 56\,\mathrm{Cos}\,2x + 35,\\
256\,\mathrm{Cos}^9 x &= \mathrm{Cos}\,9x + 9\,\mathrm{Cos}\,7x + 36\,\mathrm{Cos}\,5x + 84\,\mathrm{Cos}\,3x + 126\,\mathrm{Cos}\,x,\\
512\,\mathrm{Cos}^{10} x &= \mathrm{Cos}\,10x + 10\,\mathrm{Cos}\,8x + 45\,\mathrm{Cos}\,6x + 120\,\mathrm{Cos}\,4x + 210\,\mathrm{Cos}\,2x + 126 \quad \text{u. f.}
\end{aligned}$$

Diese Reihen sind ebenfalls leicht fortzusetzen, da die numerischen Coefficienten die des Binoms (§. 58.) sind, nämlich

$$n \cdot \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. f.},$$

mit Ausnahme des letzten Gliedes, das nur der Hälfte des binomischen Coefficienten gleich ist.

Die letzten Ausdrücke werden uns in der Folge sehr wesentliche Dienste leisten.

§. 100. (Tangenten der halben und doppelten Bogen.) Nach den ersten Gleichungen des §. 97. ist

$$\text{Sin}\, 2x = 2\, \text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, x \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}\, 2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x,$$

woraus sofort, durch Division, folgt:

$$\text{Tang}\, 2x = \frac{2\, \text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, x}{\text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x};$$

oder wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\text{Cos}^2 x$ dividirt:

$$\text{Tang}\, 2x = \frac{2\, \text{Tang}\, x}{1 - \text{Tang}^2 x}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke statt x die Gröfse $\frac{1}{2}x$, so hat man

$$\text{Tang}\, x - \text{Tang}\, x \,.\, \text{Tang}^2 \tfrac{1}{2}x = 2\, \text{Tang}\, \tfrac{1}{2}x.$$

Löst man aber diese in Beziehung auf $\text{Tang}\, \frac{1}{2}x$ quadratische Gleichung (nach §. 68.) auf, so erhält man

$$\text{Tang}\, \tfrac{1}{2}x = \frac{\text{Tang}\, x}{1 + \sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}}{\text{Tang}\, x};$$

oder auch, wenn man in diesem Ausdrucke statt $\text{Tang}\, x$ seinen Werth $\frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x}$ substituirt:

$$\text{Tang}\, \tfrac{1}{2}x = \frac{1 - \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x} = \frac{\text{Sin}\, x}{1 + \text{Cos}\, x}.$$

I. Nach §. 95. haben wir überdiefs

$$\text{Sin}\, x = \frac{\text{Tang}\, x}{\sqrt{1 + \text{Tang}^2 x}};$$

also ist auch, wenn man in dieser Gleichung den so eben gefundenen Werth von

$$\text{Tang}\, x = \frac{2\, \text{Tang}\, \frac{1}{2} x}{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}$$

substituirt:

$$\text{Sin}\, x = \frac{2\, \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x},$$

und eben so erhält man auch

$$\text{Cos}\, x = \frac{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} x}.$$

§. 101. (Tangente der Summe und Differenz zweyer Winkel.) Dividirt man die Gleichungen (C) des §. 94. unter einander, so erhält man sofort

$$\text{Tang}\,(x + y) = \frac{\text{Tang}\, x + \text{Tang}\, y}{1 - \text{Tang}\, x\, \text{Tang}\, y} \quad \text{und}$$

$$\text{Tang}\,(x - y) = \frac{\text{Tang}\, x - \text{Tang}\, y}{1 + \text{Tang}\, x\, \text{Tang}\, y}.$$

I. Dieselben vier Gleichungen geben auch, wenn man die beyden ersten durch $\text{Cos}\, x\, \text{Cos}\, y$, und die beyden letzten durch $\text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, y$ dividirt, für die Summe oder Differenz der Tangenten zweyer Winkel

$$\text{Tang}\, x \pm \text{Tang}\, y = \frac{\text{Sin}\,(x \pm y)}{\text{Cos}\, x\, \text{Cos}\, y} \quad \text{und}$$

$$\text{Cotg}\, x \pm \text{Tang}\, y = \frac{\text{Cos}\,(x \mp y)}{\text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, y}.$$

II. Setzt man aber in der ersten Gleichung dieses §. 101. die Gröfse $x = \frac{1}{2} R$, oder $x = 45^0$ und $y = \frac{1}{2} x$, so erhält man

$$\text{Tang}\, \frac{90 + x}{2} = \frac{1 + \text{Tang}\, \frac{x}{2}}{1 - \text{Tang}\, \frac{x}{2}} = \frac{\text{Cos}\, \frac{x}{2} + \text{Sin}\, \frac{x}{2}}{\text{Cos}\, \frac{x}{2} - \text{Sin}\, \frac{x}{2}};$$

also auch, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch

$$\text{Cos}\, \frac{x}{2} + \text{Sin}\, \frac{x}{2}$$

multiplicirt:

$$\text{Tang}\, \frac{90^0 + x}{2} = \frac{1 + \text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} = \frac{\text{Cos}\, x}{1 - \text{Sin}\, x} = \sqrt{\frac{1 + \text{Sin}\, x}{1 - \text{Sin}\, x}},$$

und eben so ist auch, wenn man in der letzten Gleichung die Gröfse x negativ nimmt:

$$\text{Tang}\, \frac{90^0 - x}{2} = \frac{1 - \text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} = \frac{\text{Cos}\, x}{1 + \text{Sin}\, x} = \sqrt{\frac{1 - \text{Sin}\, x}{1 + \text{Sin}\, x}}.$$

Dieſs sind die vorzüglichsten Relationen, die man zwischen den trigonometrischen Functionen aufgestellt hat. Wir werden bald sehen, wie man dieselben zur näheren Bestimmung der Dreyecke anwenden kann.

§. 102. (Differentialien der trigonometrischen Functionen.) Durch das Vorhergehende haben wir demnach eine neue Gattung von Functionen kennen gelernt, die sehr merkwürdige Eigenschaften haben. Indem wir sie den bereits oben erhaltenen Functionen der Potenzen, der Logarithmen und der Exponentialgröſsen, von welchen sie sich wesentlich unterscheiden, hinzufügen, wird es, zum Schlusse dieses Gegenstandes, angemessen seyn, auch die Differentialien dieser neuen Functionen zu bestimmen.

Um zuerst das Differential des Sinus eines gegebenen Bogens, oder um den Ausdruck von

$$d\,.\,\mathrm{Sin}\,x$$

zu finden, so wird man nach dem, was oben (§. 46. u. f.) gesagt worden ist, die Gleichung haben:

$$d\,.\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,(x + dx) - \mathrm{Sin}\,x.$$

Allein nach den Gleichungen (C) des §. 94. ist

$$\mathrm{Sin}\,(x + dx) = \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,dx + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,dx,$$

also ist auch

$$d\,.\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,x\,(\mathrm{Cos}\,dx - 1) + \mathrm{Cos}\,x\,.\,\mathrm{Sin}\,dx.$$

Wenn nun der Bogen dx eines Kreises immer abnimmt, oder wenn er sich der Grenze Null immer mehr nähert, so entsteht die Frage, ob auch die beyden Gröſsen

$$\mathrm{Cos}\,dx - 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}\,dx$$

sich dabey einer bestimmten Grenze immer mehr nähern, ohne sie eher, als bis $dx = 0$ ist, zu erreichen.

Für die erste Gröſse ($\mathrm{Cos}\,dx - 1$) hat man, nach §. 97., für jeden Werth von dx

$$\mathrm{Cos}\,dx = 1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\frac{dx}{2},$$

woraus folgt, daſs, für ein unendlich kleines dx, die Gröſse $\mathrm{Cos}\,dx$ gleich der Einheit wird, wie wir auch schon oben §. 89, II.

gefunden haben, und wie selbst unmittelbar aus der oben (§. 87, V.) gegebenen Erklärung des Cosinus hervorgeht. Es ist demnach, an der erwähnten Grenze, $1 - \text{Cos}\, dx = 0$ oder $\frac{1}{\text{Cos}\, dx} = 1$.

Um nun auch die Grenze der immer abnehmenden Gröſse $\text{Sin}\, dx$ zu finden, wollen wir bemerken, daſs, im ersten Quadranten des Kreises, die Tangente (§. 90.) eines jeden Bogens immer gröſser, als ihr Bogen, und eben so dieser Bogen immer gröſser, als sein Sinus ist, was man so auszudrücken pflegt (§. 6.)

$$\text{Tang}\, dx > dx > \text{Sin}\, dx.$$

Dividirt man alle diese Gröſsen durch $\text{Sin}\, dx$, so ist auch noch

$$\frac{\text{Tang}\, dx}{\text{Sin}\, dx} > \frac{dx}{\text{Sin}\, dx} > 1,$$

oder endlich, da $\frac{\text{Tang}\, dx}{\text{Sin}\, dx} = \frac{1}{\text{Cos}\, dx}$ ist,

$$\frac{1}{\text{Cos}\, dx} > \frac{dx}{\text{Sin}\, dx} > 1.$$

So lange daher der immer abnehmende Bogen dx die Grenze Null seines Abnehmens noch nicht erreicht hat, ist die Gröſse

$$\frac{dx}{\text{Sin}\, dx}$$

immer gröſser als die Einheit, und zugleich immer kleiner als $\frac{1}{\text{Cos}\, dx}$, welcher letzte Ausdruck sich selbst wieder, nach dem Vorhergehenden, der Einheit desto mehr nähert, je kleiner dx ist; woraus daher folgt, daſs die Einheit selbst die Grenze seyn muſs, welcher sich die Gröſse

$$\frac{dx}{\text{Sin}\, dx}$$

immer mehr nähert, je kleiner der Bogen dx ist, und daſs man also, für diese Grenze selbst, hat:

$$1 - \text{Cos}\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \text{Sin}\, dx = dx.$$

Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck von $d\,.\,\text{Sin}\, x$, so erhält man

$$d\,.\,\text{Sin}\, x = dx\,.\,\text{Cos}\, x$$

für das gesuchte Differential des Sinus eines gegebenen Kreisbogens, dessen Halbmesser gleich 1 ist.

I. Ist so das Differential des Sinus eines Bogens bekannt, so findet man auch sofort das Differential der anderen trigonometrischen Functionen.

Setzt man z. B. in der letzten Gleichung, in welcher x jeden willkürlichen Werth haben kann, statt x die Gröſse $90^\circ - x$, so hat man

$$d\,.\,\mathrm{Sin}\,(90 - x) = d\,.\,(90 - x)\,.\,\mathrm{Cos}\,(90 - x);$$

oder da

$$\mathrm{Sin}\,(90 - x) = \mathrm{Cos}\,x \quad \text{und} \quad \mathrm{Cos}\,(90 - x) = \mathrm{Sin}\,x$$

ist (§. 94, *B.*), so hat man auch

$$d\,.\,\mathrm{Cos}\,x = -\,dx\,\mathrm{Sin}\,x.$$

II. Weiter ist

$$\mathrm{Tang}\,x\,.\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,x;$$

also auch, wenn man dieses Product nach §. 49. differentiirt:

$$d\,.\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Tang}\,x\,.\,d\,.\,\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cos}\,x\,.\,d\,.\,\mathrm{Tang}\,x,$$

und daher, wenn man statt $d\,.\,\mathrm{Sin}\,x$ und $d\,.\,\mathrm{Cos}\,x$ die vorigen Ausdrücke substituirt, und die ganze Gleichung durch $\mathrm{Cos}\,x$ dividirt:

$$d\,.\,\mathrm{Tang}\,x = dx\,(1 + \mathrm{Tang}^2\,x);$$

oder, was dasselbe ist (§. 95, I.)

$$d\,.\,\mathrm{Tang}\,x = \frac{dx}{\mathrm{Cos}^2\,x}.$$

Und eben so findet man auch

$$d\,.\,\mathrm{Cotg}\,x = -\frac{dx}{\mathrm{Sin}^2\,x},$$

$$d\,.\,\mathrm{Sec}\,x = \frac{dx\,\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}^2\,x},$$

$$d\,.\,\mathrm{Cosec}\,x = -\frac{dx\,\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}^2\,x}.$$

III. Auf gleiche Weise erhält man, da $d\,.\,\log u = \frac{du}{u}$ ist, wenn man $u = \mathrm{Sin}\,x$ setzt,

$$d\,.\,\log\,\mathrm{Sin}\,x = dx\,\mathrm{Cotang}\,x \quad \text{und}$$

$$d\,.\,\log\,\mathrm{Cos}\,x = -\,dx\,\mathrm{Tang}\,x,$$

so wie auch

$$d \,.\, \log \operatorname{Tang} x = \frac{dx}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{2\,dx}{\operatorname{Sin} 2x},$$

$$d \,.\, \log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} x = \frac{dx}{\operatorname{Sin} x}, \text{ und}$$

$$d \,.\, \log \operatorname{Tang} \frac{90 + x}{2} = \frac{dx}{\operatorname{Cos} x},$$

$$d \,.\, \log \operatorname{Tang} \frac{90 - x}{2} = -\frac{dx}{\operatorname{Cos} dx} \text{ u. f.}$$

Sechzehntes Capitel.

Numerische Bestimmung der Peripherie des Kreises und der trigonometrischen Functionen für jeden gegebenen Bogen.

§. 103. (Verhältniſs der Peripherie des Kreises zu seinem Halbmesser.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die allgemeinen Eigenschaften der trigonometrischen Functionen kennen gelernt haben, erübrigt uns noch, die speciellen oder absoluten Werthe derselben für jeden gegebenen Bogen zu bestimmen, da wir, ohne die Kenntniſs dieser Werthe, jene Functionen zur Berechnung in gegebenen besonderen Fällen nicht gebrauchen könnten.

Da wir aber diese Werthe der Functionen für jeden Bogen ohne Zweifel am natürlichsten und einfachsten durch diesen Bogen selbst, das heiſst, als Theile der *Peripherie* des Kreises, ausdrücken werden, so wird es nothwendig seyn, zuerst diese Peripherie, in Theilen des Halbmessers des Kreises, zu suchen.

Zu diesem Zwecke wollen wir u den Bogen nennen, zu welchem die Tangente x gehört, so daſs man die Gleichung hat

$$x = \operatorname{Tang} u.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach §. 102, II., so ist

$$dx = \frac{du}{\operatorname{Cos}^2 u},$$

oder auch, da $\operatorname{Cos}^2 u = \frac{1}{1 + \operatorname{Tang}^2 u} = \frac{1}{1 + x^2}$ ist:

$$\frac{du}{dx} = (1 + x^2)^{-1}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck wieder, und nimmt man dabey das erste Differential von x oder die Gröſse dx constant an (§. 55, I.), so ist

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -2x(1 + x^2)^{-2},$$

und eben so erhält man auch

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3},$$

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4} \text{ u. f.}$$

Setzt man, um darauf *Maclaurin's* Theorem (§. 57.) anzuwenden, in diesen Ausdrücken die Gröſse $x = 0$, so erhält man

$$U = U'' = U^{\text{IV}} \ldots \text{ gleich Null, und}$$

$$U' = 1, \quad U''' = -2, \quad U^{\text{V}} = 2.3.4, \quad U^{\text{VII}} = -2.3.4.5.6 \text{ u. f.},$$

so daſs man daher, nach dem erwähnten Theorem, den Ausdruck erhält:

$$u = \text{Tang}\, u - \tfrac{1}{3}\text{Tang}^3 u + \tfrac{1}{5}\text{Tang}^5 u - \tfrac{1}{7}\text{Tang}^7 u + \ldots \text{ (I)},$$

eine sehr einfache Reihe, von welcher das Gesetz des Fortgangs fur sich deutlich ist.

Durch diese Reihe erhält man demnach den Werth jedes Bogens eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, wenn die Tangente dieses Bogens, in Theilen desselben Halbmessers, bekannt ist.

I. Um einen solchen Bogen zu finden, dessen Tangente bekannt ist, sey FB (Fig. 22) die Hälfte des Quadranten, also ein Bogen von 45 Graden. Die Tangente Ff dieses Bogens, die (nach §. 90, I.) auf dem Halbmesser CF des Kreises senkrecht steht, bildet mit diesem Halbmesser und mit der Secante Cf ein in F rechtwinkliges Dreyeck, in welchem die beyden schiefen Winkel bey C und f unter sich gleich sind, da nach §. 85, II. die Summe dieser zwey Winkel immer gleich einem rechten Winkel ist, und der eine C derselben, unserer Voraussetzung gemäſs, gleich der Hälfte eines rechten Winkels oder gleich 45 Graden ist. In einem solchen Dreyecke sind aber (nach §. 87, VII.) die beyden Katheten von gleicher Gröſse, also ist auch

$$Ff = FC = 1.$$

Nennt man daher π die Hälfte der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, und ist u ein Bogen von 45 Graden oder ist $u = \frac{1}{4}\pi$, so hat man $\text{Tang}\, u = 1$, und wenn man diese Werthe von u und $\text{Tang}\, u$ in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so erhält man

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots$$

II. Nach dieser schönen Reihe könnte man den gesuchten Werth π der halben, also auch den der ganzen Peripherie des Kreises berechnen. Da aber die Reihe nur langsam convergirt, so wird man besser auf folgende Art verfahren.

Man zerlege den Octanten des Kreises oder die Gröſse $\frac{1}{4}\pi$ in zwey Theile a und b, so daſs

$$\tfrac{1}{4}\pi = a + b, \quad \text{also auch} \quad \operatorname{Tang}(a+b) = 1$$

ist. Da man, nach §. 101, die Gleichung hat

$$\operatorname{Tang}(a+b) = \frac{\operatorname{Tang} a + \operatorname{Tang} b}{1 - \operatorname{Tang} a \operatorname{Tang} b} = 1,$$

so ist auch

$$\operatorname{Tang} b = \frac{1 - \operatorname{Tang} a}{1 + \operatorname{Tang} a}.$$

Setzt man daher $\operatorname{Tang} a = \frac{1}{2}$, so muſs $\operatorname{Tang} b = \frac{1}{3}$ seyn, also wird man auch, selbst ohne die Werthe dieser Bogen a und b zu kennen, wenn man in der obigen Reihe für u statt $\operatorname{Tang} u$ zuerst $\frac{1}{2}$ und dann $\frac{1}{3}$ substituirt, die folgende Doppelreihe erhalten:

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \ldots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \ldots,$$

und da beyde Reihen schnell genug convergiren, so wird man aus ihnen den Werth von π auf eine bequeme Weise ableiten können.

Noch vortheilhafter wird man die Gröſse $\frac{1}{4}\pi$ in drey Theile theilen, von denen man, um nicht drey verschiedene Reihen zu erhalten, zwey unter sich gleich nehmen kann, so daſs z. B.

$$\tfrac{1}{4}\pi = 2a + b$$

ist, wo man dann, für $\operatorname{Tang} a = \frac{1}{3}$, erhält $\operatorname{Tang} b = \frac{1}{7}$, also auch

$$\tfrac{1}{4}\pi = 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \ldots$$

Auf diese Weise hat man für die halbe Peripherie π des Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, den folgenden Werth gefunden:

$$\pi = 3.141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279 \ldots$$

Da diese Zahl im Folgenden noch oft wieder kommen wird, so kann man von ihr auch folgende Ausdrücke anmerken:

$$\mathrm{Log}\,\pi = 0.49714\;98727,$$
$$\frac{1}{\pi} = 0.31830\;98862,$$
$$\pi^2 = 9.86960\;43785,$$
$$\sqrt{\pi} = 1.77245\;38509.$$

Durch wiederholte Divisionen nach der Methode des §. 15. erhält man endlich für π die folgenden genäherten Werthe:

$$\frac{3}{1},\; \frac{22}{7},\; \frac{333}{106},\; \frac{355}{113},\; \frac{103638}{32989}\text{ u. f.}$$

§. 104. (Ausdruck des Sinus und Cosinus durch seinen Bogen.) Wenn die Gleichung gegeben ist

$$u = \mathrm{Sin}\,x,$$

so erhält man durch wiederholte Differentiation, wo dx constant angenommen wird, nach §. 102:

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{Cos}\,x,\quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\,\mathrm{Sin}\,x,\quad \frac{d^3u}{dx^3} = -\,\mathrm{Cos}\,x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \mathrm{Sin}\,x \text{ u. f.},$$

also auch, wenn man in diesen Ausdrücken $x = 0$ setzt, nach *Maclaurin's* Theorem (§. 57.):

$$U = 0,\quad U' = 1,\quad U'' = 0,\quad U''' = -1 \text{ u. f.},$$

und daher

$$\mathrm{Sin}\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \text{ (II)},$$

und ganz eben so erhält man auch für $u = \mathrm{Cos}\,x$ die ähnliche Reihe

$$\mathrm{Cos}\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \text{ (III)}.$$

I. Diese zwey merkwürdigen Reihen geben daher den Sinus und Cosinus jedes Bogens x eines Kreises, dessen Halbmesser 1 ist, wo $\mathrm{Sin}\,x$ und $\mathrm{Cos}\,x$ sowohl, als auch der Bogen x selbst, in Theilen dieses Halbmessers ausgedrückt ist. Gewöhnlich gibt man aber den Bogen eines Kreises oder den ihm entsprechenden Winkel am Mittelpuncte des Kreises in *Secunden* an, deren (nach §. 84, *I.*) $180.(60)^2$ auf die halbe Peripherie π

gehen. Um daher einen in Secunden ausgedrückten Bogen in Theilen des Halbmessers auszudrücken, wird man, da nach §. 84, *G.* diese Winkel sich wie ihre Bogen verhalten, für den Winkel von einer Secunde oder für den Winkel $= 1''$ die Proportion haben

$$180 . 60^2 : \pi = 1'' : x,$$

oder der zu diesem Winkel gehörende Bogen wird

$$x = \frac{\pi}{180 . 60^2}$$

Theile des Halbmessers enthalten. Substituirt man in diesem Ausdrucke den Werth von π aus §. 103, so erhält man

$$x = 0.00000\ 48481\ 36811\ 09536 \ldots$$

Da aber ein so kleiner Bogen schon sehr nahe mit seinem Sinus zusammenfällt, so hat man für die letzte, öfter wiederkommende Zahl das Symbol Sin 1″ gewählt, so daſs man daher hat

$$\text{Sin}\, 1'' = \frac{\pi}{180 . 60^2} = 0.00000\ 48481 \ldots,$$

also auch

$$\frac{1}{\text{Sin}\, 1''} = 206264.80624\ 70963,$$

$$\text{Log Sin}\, 1'' = 4.6855749,$$

$$\text{Log} \frac{1}{\text{Sin}\, 1''} = 5.3144251.$$

Da man also jeden in Secunden ausgedrückten Bogen oder Winkel durch Sin 1″ multipliciren muſs, um ihn in Theilen des Halbmessers zu erhalten, so sind auch die zwey vorhergehenden Reihen (II, III), wenn in denselben der Bogen x in Secunden ausgedrückt wird, so zu schreiben:

$$\text{Sin}\, x = (x \,\text{Sin}\, 1'') - \frac{(x \,\text{Sin}\, 1'')^3}{1 . 2 . 3} + \ldots,$$

$$\text{Cos}\, x = 1 - \frac{(x \,\text{Sin}\, 1'')^2}{1 . 2} + \frac{(x \,\text{Sin}\, 1'')^4}{1 . 2 . 3 . 4} - \ldots$$

Will man, zur bequemern Berechnung, den Winkel x in Graden und Theilen des Grades ausgedrückt voraussetzen, so wird man in dem zweyten Theile der Reihen (II) und (III) statt x nicht $\frac{\pi x}{180 . 60^2}$ oder Sin 1″, wie zuvor, sondern $\frac{\pi x}{180}$ setzen, so daſs man daher hat

$$\operatorname{Sin} x = \left(\frac{\pi x}{180}\right) - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \ldots,$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^4 - \ldots,$$

oder endlich, wenn man $x = 90 . n$ setzt:

$$\operatorname{Sin}(90 . n) = \left(\frac{\pi}{2}\right) n - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 . n^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 . n^5 - \ldots,$$

$$\operatorname{Cos}(90 . n) = 1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 . n^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 . n^4 - \ldots$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken den Werth von der Gröfse π und ihren Potenzen aus §. 103, so erhält man endlich die beyden folgenden Reihen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}(90 . n) = {} & 1.570796\, n \\ & - 0.645964\, n^3 \\ & + 0.079693\, n^5 \\ & - 0.004682\, n^7 \\ & + 0.000160\, n^9 \\ & - 0.000004\, n^{11},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(90 . n) = 1 & - 1.233700\, n^2 \\ & + 0.253669\, n^4 \\ & - 0.020863\, n^6 \\ & + 0.000919\, n^8 \\ & - 0.000025\, n^{10},\end{aligned}$$

und durch diese Ausdrücke wird man die Sinus und Cosinus für jeden gegebenen Winkel berechnen, und dieselben, oder bequemer noch ihre Logarithmen, in Tafeln bringen können, wie diejenigen sind, deren wir bereits oben (§. 64, II.) Erwähnung gethan haben. Man bemerkt übrigens von selbst, dafs es genügt, z. B. nur die Sinus für alle Theile des ersten Quadranten von 0^0 bis 90^0 zu berechnen, weil dadurch auch schon die Cosinus derselben Theile gegeben sind, indem

$$\operatorname{Cos}(90 - x) = \operatorname{Sin} x$$

ist. Um endlich noch den Gebrauch der vorigen Reihen durch ein Beyspiel zu zeigen, so hat man für den Sinus von 9 Graden, wenn man

$$90 . n = 9 \quad \text{oder} \quad n = \tfrac{1}{10}$$

setzt,

aus der ersten Reihe: und aus der zweyten:

$$\begin{array}{rr} 0.15707960 & \\ -\ 0.00064596 & \\ +\ 0.00000080 & \\ \hline \text{Sin}\,9^0 = 0.156434 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 1 & \\ -\ 0.012337 & \\ +\ 0.000025 & \\ \hline \text{Cos}\,9^0 = 0.987688. & \end{array}$$

§. 105. (Ausdruck des Sinus und Cosinus durch imaginäre Gröſsen.) Wenn man in der oben (§. 63.) für e^x erhaltenen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

statt x zuerst die Gröſse $x\sqrt{-1}$ und dann $-x\sqrt{-1}$ setzt, so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

und

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Die Summe und die Differenz dieser beyden Reihen gibt sofort

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right]$$

und

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right].$$

Allein die in den Klammern eingeschlossenen Glieder der zwey letzten Ausdrücke sind, nach §. 104,

die erste gleich $\text{Cos}\,x$,
und die andere gleich $\text{Sin}\,x$,

so daſs man daher die zwey merkwürdigen Gleichungen erhält:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\,x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \text{Cos}\,x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(IV)},$$

in welchen e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

I. Addirt und subtrahirt man die Gleichungen (IV), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= \mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x \\ e^{-x\sqrt{-1}} &= \mathrm{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x \end{aligned}\right\}\ldots\text{(V)}.$$

II. Nimmt man überdieſs von den beyden letzten Ausdrücken die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\log(\mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\log\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x} \end{aligned}\right\}\ldots\text{(VI)},$$

und statt der letzten dieser Gleichungen kann man auch, da $\log 1 = 0$ ist, die folgende setzen:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\log(\mathrm{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x),\ \text{oder auch}$$

$$x = \sqrt{-1}\,.\,\log(\mathrm{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x).$$

III. Setzt man endlich in der ersten der Gleichungen (V) statt x die Gröſse nx, wo n irgend eine willkürliche Zahl bezeichnet, so hat man

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\,nx + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,nx.$$

Es ist aber

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (e^{x\sqrt{-1}})^n = (\mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x)^n,$$

also ist auch

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x)^n = \mathrm{Cos}\,nx + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,nx \\ &\text{und eben so} \\ &(\mathrm{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x)^n = \mathrm{Cos}\,nx - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,nx \end{aligned}\right\}\ldots\text{(VII)},$$

Gleichungen, die sämmtlich für die Theorie der trigonometrischen Functionen von groſser Wichtigkeit sind.

IV. Beschlieſsen wir diesen Gegenstand mit einer die Logarithmen betreffenden Bemerkung. — Wenn man in der ersten der Gleichungen (V) statt x die Gröſse $(2m\pi + x)$ setzt, wo m irgend eine ganze positive Zahl $0, 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet, so hat man

$$e^{(2m\pi + x)\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x,$$

also auch, wenn man davon die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$(2m\pi + x)\,.\,\sqrt{-1} = \log(\mathrm{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x).$$

Der letzte Ausdruck gibt

$$\text{für } x = 0 \quad \ldots \quad \log(+1) = 2m\pi\,.\,\sqrt{-1},$$

$$\text{und für } x = \pi \quad \ldots \quad \log(-1) = (2m+1)\pi\,.\,\sqrt{-1}.$$

Da aber jede Zahl $\pm a$ als das Product von $+a$ in ± 1 angesehen werden kann, so ist auch

$$\log a = \log a + \log(+1) \quad \text{oder}$$
$$\log a = \log a + 2m\pi\sqrt{-1},$$

und eben so

$$\log(-a) = \log a + \log(-1) \quad \text{oder}$$
$$\log(-a) = \log a + (2m+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Diese beyden Gleichungen zeigen, daſs jede positive, so wie auch jede negative Zahl unendlich viele Logarithmen hat, von welchen aber, wenn die Zahl positiv ist, *nur einer* (für den besondern Werth $m=0$), und wenn sie negativ ist, *keiner* einen reellen Werth hat.

Setzt man endlich, in der letzten dieser zwey Gleichungen, die Gröſse $a=1$, so hat man, da für alle logarithmischen Systeme $\log 1 = 0$ ist:

$$\log(-1) = (2m+1) \,.\, \pi\sqrt{-1}$$

oder auch

$$\pi = \frac{1}{(2m+1)\sqrt{-1}} \,.\, \log(-1),$$

also auch, wenn man für den einfachsten Fall $m=0$ setzt:

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \,.\, \log(-1),$$

ein merkwürdiger, obschon zur Berechnung unbrauchbarer Ausdruck für die Gröſse π.

Siebzehntes Capitel.

Das geradlinige Dreyeck, oder ebene Trigonometrie.

---

§. 106. (Weitere Betrachtung der Gleichungen des Dreyecks.) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die trigonometrischen Functionen genauer kennen gelernt, und uns dadurch gleichsam das Instrument vorbereitet haben, mit dessen Hülfe wir den gröſsten Theil der nun folgenden geometrischen Probleme aufzulösen gedenken, wollen wir wieder zu dem, am Ende des §. 93. verlassenen Gegenstandes, zu den *Gleichungen des Dreyecks* zurückgehen, von welchen wir bereits oben (§. 91. und §. 93.) die beyden folgenden erhalten haben:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \operatorname{Cos} A \ldots (A),$$
$$\alpha \operatorname{Sin} B = \beta \operatorname{Sin} A \ldots\ldots (B),$$

wobey wir uns erinnern wollen, daſs jede dieser Gleichungen (nach §. 91, II.) eigentlich *drey* analogen Gleichungen gleichgeltend ist.

Die erste dieser Gleichungen ist offenbar auch

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

oder, da nach §. 97, I.

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} A}{2}}$$

ist, so kann jene Gleichung auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\alpha^2 - (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2)}{4\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2}{4\beta\gamma},$$

oder endlich, da der Zähler des letzten Bruches die Differenz zweyer Quadrate ist (§. 21, I.):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)}{4\beta\gamma} \\ &\text{und eben so} \\ &\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\beta + \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha)}{4\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

mit den zwey anderen analogen Ausdrücken für die Sinus und Cosinus von $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}C$.

I. Eben so erhält man aus der im Eingange erwähnten zweyten Gleichung (B)

$$\alpha = \gamma \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C} \quad \text{und} \quad \beta = \gamma \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C},$$

oder, da in jedem Dreyecke $C = 180 - (A + B)$ ist:

$$\alpha = \gamma \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin}(A+B)} \quad \text{und} \quad \beta = \gamma \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}(A+B)}.$$

Addirt und subtrahirt man die zwey letzten Ausdrücke, und bemerkt man, daſs nach §. 96. ist

$$\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \operatorname{Cos} \frac{A-B}{2},$$

$$\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2} \operatorname{Sin} \frac{A-B}{2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Sin}(A+B) = 2 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2},$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= \gamma \frac{\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{C}{2}} \\ \alpha - \beta &= \gamma \frac{\operatorname{Sin} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{C}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(D)},$$

oder auch, wenn man die beyden letzten Gleichungen durch einander dividirt:

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \operatorname{Tang} \frac{A-B}{2} \operatorname{Tang} \frac{C}{2} \ldots \text{(E)}.$$

II. Endlich hat man nach §. 91.

$$\gamma - \alpha \operatorname{Cos} B = \beta \operatorname{Cos} A = \beta \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Tang} A} \quad \text{und}$$

$$\beta - \alpha \operatorname{Cos} C = \gamma \operatorname{Cos} A = \gamma \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Tang} A},$$

oder da, nach den erwähnten Gleichungen (B) ist

$$\beta \operatorname{Sin} A = \alpha \operatorname{Sin} B \quad \text{und} \quad \gamma \operatorname{Sin} A = \alpha \operatorname{Sin} C,$$

so erhält man, wenn man diese Werthe von $\beta \operatorname{Sin} A$ und $\gamma \operatorname{Sin} A$ in den beyden letzten Ausdrücken substituirt:

$$\text{Tang}\,A = \frac{\alpha \,\text{Sin}\,B}{\gamma - \alpha \,\text{Cos}\,B} = \frac{\alpha \,\text{Sin}\,C}{\beta - \alpha\,\text{Cos}\,C} \dots (\text{F})$$

mit noch zwey analogen Doppelwerthen für Tang B und Tang C.

III. Die vorhergehenden Gleichungen, ja schon die einzige Gleichung (A), aus welcher sie alle sehr leicht abgeleitet werden können, enthalten alle Eigenschaften des Dreyecks, daher auch durch sie alle Probleme, die man über das Dreyeck aufstellen kann, aufgelöst werden können, wie wir bald näher sehen werden. So zeigt z. B. die Gleichung (C) unmittelbar, daſs in jedem Dreyecke die Summe zweyer Seiten immer gröſser seyn muſs, als die dritte Seite, weil sonst der Werth von Sin $\frac{1}{2}A$ oder Cos $\frac{1}{2}A$ gleich der Quadratwurzel aus einer negativen Gröſse, also unmöglich seyn würde. — Da ferner jeder Winkel C eines Dreyecks kleiner als 180°, also auch Tang $\frac{1}{2}C$ immer positiv seyn muſs, so zeigt die Gleichung (E), daſs die beyden Gröſsen $(\alpha - \beta)$ und $(A - B)$ immer entweder zugleich positiv, oder zugleich negativ sind, d. h. daſs in jedem Dreyeck der gröſsere Winkel auch immer der gröſsern Seite gegenüber steht, und umgekehrt. — Daraus folgt wieder unmittelbar, daſs in jedem rechtwinkligen Dreyecke, in welchem immer der rechte Winkel der gröſste von allen ist, jede Kathete kleiner ist, als die Hypotenuse, wie auch schon aus der ersten Gleichung des §. 92. hervorgeht, oder mit andern Worten, daſs das Loth, welches man von einem Puncte auſser einer Linie auf diese Linie fällt, die *kürzeste Distanz* des Punctes von der Linie ausdrückt, daher auch diese Distanz als das *Maſs der Entfernung* eines Punctes von einer Linie angenommen wird.

§. 107. (Aehnlichkeit der Dreyecke.) Ähnliche Dreyecke sind nach §. 83. solche, wo in dem einen jeder Winkel, einem Winkel des andern Dreyecks gleich ist. Die in solchen Dreyecken den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten wollen wir die homologen Seiten nennen.

Dieſs vorausgesetzt, können wir den Satz aufstellen: »*In ähnlichen Dreyecken sind die homologen Seiten unter sich proportionirt.*«

Seyen nämlich die beyden Dreyecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich, und der Winkel $A = A'$, $B = B'$ und $C = C'$, so folgt sofort aus den Gleichungen (B) des §. 106, daſs

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}, \quad \text{also auch} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} \text{ ist.}$$

I. Eben so auch umgekehrt: »*Sind in zwey Dreyecken die Seiten proportionirt, so sind die Dreyecke ähnlich.*« Denn aus der Gleichung (A) des §. 106. folgt für das erste Dreyeck

$$\frac{2\gamma}{\beta} \operatorname{Cos} A = 1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

und eben so für das zweyte

$$\frac{2\gamma'}{\beta'} \operatorname{Cos} A' = 1 + \frac{\gamma'^2}{\beta'^2} - \frac{\alpha'^2}{\beta'^2},$$

und da nach der Voraussetzung $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ und $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$ ist, so ist auch

$$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} A',$$

und daher auch (§. 94, D) der Winkel $A = A'$. Eben so folgt auch $B = B'$ und $C = C'$.

II. Dreyecke sind auch ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich, und die zwey ihn einschlieſsenden Seiten proportionirt haben.

Denn ist $A = A'$ und $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$, so folgt aus der Gleichung (A)

$$\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} - 2 \operatorname{Cos} A = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} \quad \text{und}$$

$$\frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{\gamma'}{\beta'} - 2 \operatorname{Cos} A' = \frac{\alpha'^2}{\beta'\gamma'};$$

und da von diesen zwey Gleichungen die ersten Theile, nach der Voraussetzung, gleich sind, so ist auch

$$\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} = \frac{\alpha'^2}{\beta'\gamma'},$$

welcher Ausdruck, mit der gegebenen Gleichung

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$$

verbunden, sofort gibt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \text{und eben so} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}.$$

III. Wird endlich in irgend einem Dreyecke ABC (Fig. 4) zu einer Seite AC eine Parallele ac gezogen, so sind die Dreyecke ACB und acB ähnlich, da (nach §. 86.) ihre Winkel gleich sind, also sind auch, nach (I), die homologen Seiten dieser Dreyecke proportionirt, oder es ist

$$BA : BC = Ba : Bc = Aa : Cc \text{ und}$$
$$BA : AC = Ba : ac.$$

§. 108. (Gleichheit der Dreyecke.) Auf dieselbe einfache Weise wird man auch, aus den Gleichungen des §. 106, die Fälle bestimmen, in welchen zwey Dreyecke unter sich gleich sind oder sich vollkommen decken (§. 83.).

I. Zwey Dreyecke sind nämlich erstens gleich, wenn jede Seite des einen einer Seite des anderen gleich ist.

Denn ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$, so gibt die Gleichung (A) auch sofort

$$\text{Cos}\, A = \text{Cos}\, A', \quad \text{also auch} \quad A = A',$$

und eben so findet man auch $B = B'$ und $C = C'$, so dafs daher in beyden Dreyecken alle sechs ein Dreyeck bestimmenden Stücke völlig dieselben sind.

II. Zwey Dreyecke sind ferner gleich, wenn sie zwey Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben.

Denn ist $A = A'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$, so ist, nach derselben Gleichung (A), auch die Seite $\alpha = \alpha'$, also alle Seiten gleich, also auch, nach Nro. I., die Dreyecke selbst gleich.

III. Zwey Dreyecke sind gleich, wenn sie eine Seite mit den zwey ihr anliegenden Winkeln gleich haben.

Denn ist $A = A'$, $B = B'$ und $\gamma = \gamma'$, so ist, nach der Gleichung (F), auch $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

IV. Zwey Dreyecke sind gleich, wenn sie zwey Winkel und eine der diesen Winkeln entgegenstehende Seite gleich haben.

Denn ist $A = A'$, $B = B'$ und $\beta = \beta'$, so ist, nach derselben Gleichung (F), auch $\alpha = \alpha'$ und $\gamma = \gamma'$.

V. Zwey Dreyecke sind endlich auch gleich, wenn sie zwey Seiten und einen der diesen Seiten entgegenstehenden Winkel gleich haben.

Denn ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $A = A'$, so ist, nach der Gleichung (A), auch $\gamma = \gamma'$, und daher (nach Nro. I.) die Dreyecke selbst gleich.

Doch mufs für diesen Fall bemerkt werden, dafs die erwähnte Gleichung (A) gibt

$$\gamma = \beta \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{Sin}^2 A},$$

so daſs der Werth von γ doppelt ist, und daſs es daher eigentlich zwey verschiedene Dreyecke geben kann, welche die Grössen $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $A = A'$ gemeinschaftlich haben.

Ist nämlich (Fig. 26) $BC = B'C = \alpha$ und CD senkrecht auf die verlängerte Seite AB des Dreyecks ABC, so ist

$$DC = \beta \operatorname{Sin} A \quad \text{und} \quad AD = \beta \operatorname{Cos} A,$$

und BD sowohl, als auch $B'D$ ist gleich (§. 92.)

$$\sqrt{\alpha^2 - DC^2} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{Sin}^2 A},$$

also ist auch die dritte Seite $\gamma = AB$ oder gleich AB', das heiſst, es ist

$$\gamma = AD \pm BD = \beta \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{Sin}^2 A},$$

wie zuvor.

§. 109. (Auflösung der Dreyecke.) Da die in §. 108. (Nro. I. — V.) erwähnten Bedingungen ein Dreyeck vollkommen bestimmen, oder da jedes Dreyeck, welches denselben Bedingungen entspricht, mit dem ersten identisch ist, so reichen diese Bedingungen, wenn sie für irgend ein Dreyeck gegeben werden, auch hin, die noch übrigen unbekannten Seiten oder Winkel desselben *durch Rechnung zu finden*, und das ist es, worin die sogenannte *Auflösung der Dreyecke* besteht.

Wir wollen zu diesem Zwecke jene fünf erwähnten Fälle noch einmal kurz durchgehen.

I. Fall. Wenn die drey Seiten eines Dreyeckes gegeben sind.

Dann findet man den Winkel A (nach der Gleichung C) durch

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)}{\beta \gamma}} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(\beta + \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha)}{\beta \gamma}},$$

und eben so findet man auch die zwey anderen Winkel B und C durch die zwey, den vorhergehenden analogen (§. 91, II.) Gleichungen, oder bequemer, wenn bereits A bekannt ist, durch die Gleichungen

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Sin} A \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin} C = \frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{Sin} A.$$

II. Fall. Wenn zwey Seiten β, γ *mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel* A *gegeben sind.*

Dann findet man die übrigen drey Stücke B, C und α durch die Gleichungen (A) und (F), oder durch

$$\text{Tang}\, B = \frac{\beta \,\text{Sin}\, A}{\gamma - \beta \,\text{Cos}\, A}, \quad \text{Tang}\, C = \frac{\gamma \,\text{Sin}\, A}{\beta - \gamma \,\text{Cos}\, A},$$
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \,\text{Cos}\, A.$$

Kennt man bereits den Winkel B oder C, so erhält man auch die dritte Seite α durch die Gleichung

$$\alpha = \beta \frac{\text{Sin}\, A}{\text{Sin}\, B} \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma \frac{\text{Sin}\, A}{\text{Sin}\, C}.$$

Auch findet man den Werth von $(B - C)$ durch die obige Gleichung (E) oder durch

$$\text{Tang}\, \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \,\text{Cotang}\, \tfrac{1}{2} A.$$

Da nämlich sonach $\frac{1}{2}(B - C)$ bekannt ist, so ist auch B und C selbst bekannt, da man hat

$$\tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}(180 - A).$$

III. Fall. Wenn zwey Winkel A *und* B *und die ihnen anliegende Seite* γ *gegeben ist.*

Dann ist auch der dritte Winkel durch

$$C = 180 - A - B$$

bekannt, und man findet die zwey Seiten α und β durch

$$\alpha = \gamma \frac{\text{Sin}\, A}{\text{Sin}\,(A + B)}, \quad \beta = \gamma \frac{\text{Sin}\, B}{\text{Sin}\,(A + B)},$$

oder auch durch die Gleichungen (D), nämlich durch

$$\alpha + \beta = \gamma \frac{\text{Cos}\, \frac{1}{2}(A - B)}{\text{Sin}\, \frac{1}{2} C},$$
$$\alpha - \beta = \gamma \frac{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(A - B)}{\text{Cos}\, \frac{1}{2} C},$$

wo dann die halbe Summe dieser beyden Ausdrücke gleich α, und die halbe Differenz derselben gleich β ist.

IV. Fall. Wenn zwey Winkel A *und* B *und eine der ihnen entgegenstehenden Seiten* α *gegeben ist.*

Dann ist wieder

$$C = 180 - A - B,$$

$$\beta = \alpha \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A} \quad \text{und} \quad \gamma = \alpha \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A}.$$

V. Fall. Wenn zwey Seiten α und β und einer der ihnen entgegenstehenden Winkel A gegeben ist.

Dann hat man aus §. 108, V.

$$\gamma = \beta \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{Sin}^2 A} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Cos} A, \quad \text{und endlich} \quad C = 180 - A - B,$$

wo man für γ das obere Zeichen nimmt, wenn das gegebene Dreyeck einen stumpfen Winkel hat.

Die vorhergehenden Gleichungen werden gewöhnlich unter dem Namen der *Trigonometrie* (Ausmessung der Dreyecke) begriffen.

Ex. Um den Gebrauch dieser Ausdrücke durch ein Beyspiel zu zeigen, sey, für den Fall II., gegeben

die Seite $\beta = 186.241$,
» » $\gamma = 148.326$,

und der eingeschlossene Winkel $A = 125^0\ 32'\ 40''$.

Mit diesen Zahlen erhält man durch die in (II) gegebenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\log(\beta - \gamma) &= 1.5788111 \\
\log(\beta + \gamma) &= \underline{2.5244831} \\
&\ 9.0543280 \\
\log \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} A &= \underline{9.7114219} \\
\log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}(B - C) &= 8.7657499 \\
\tfrac{1}{2}(B - C) &= 3^0\ 20'\ 13''.89 \\
\tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}(180 - A) &= \underline{27^0\ 13'\ 40''.00} \\
B &= 30^0\ 33'\ 53''.89 \\
C &= 23^0\ 53'\ 26''.11,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \beta &= 2.2700753 \\
\log \operatorname{Sin} A &= \underline{9.9104455} \\
&\ 2.1805208 \\
\log \operatorname{Sin} B &= \underline{9.7063038} \\
\log \alpha &= 2.4742170 \\
\alpha &= 298.0005.
\end{aligned}$$

Zur Prüfung der Rechnung hat man noch

$$\begin{aligned} \log\gamma &= 2.1712172 \\ \log \operatorname{Sin} A &= \underline{9.9104455} \\ &\ 2.0816627 \\ \log \operatorname{Sin} C &= \underline{9.6074458} \\ \log\alpha &= 2.4742169, \text{ wie zuvor.} \end{aligned}$$

Eben so hat man für ein zweytes Beyspiel

$$\begin{aligned} \alpha &= 170.9660, & A &= 65^\circ\, 32'\, 10'', \\ \beta &= 181.2197, & B &= 74^\circ\, 45'\, 20'', \\ \gamma &= 120.0000. & C &= 39^\circ\, 42'\, 30''. \end{aligned}$$

Man sieht aus diesen Beyspielen, daſs wenn man die Entfernung eines Punctes C (Fig. 26), der uns, etwa wegen eines zwischenliegenden Flusses, unzugänglich ist, von der Linie AD kennen will, man nur einen Theil AB dieser Linie und die Winkel BAC und ABC zu messen braucht, um daraus, mittelst jener Gleichungen, auch die Entfernung CA sowohl, als auch CB zu finden. Ganz auf dieselbe Weise wird man auch die Entfernung der Gestirne, z. B. des Mondes C von der Erde bestimmen können, wenn zwey Beobachter auf der Erde, deren Distanz AB von einander bekannt ist, zu gleicher Zeit die Winkel A und B des Dreyeckes ABC messen. Man sieht aber leicht, daſs in dem letzten Falle die *Basis* AB so groſs als möglich, etwa nahe gleich dem Durchmesser der ganzen Erde angenommen werden muſs, weil sonst der geringste Fehler, den man in dieser Distanz AB oder in der Messung der beyden Winkel A und B begangen hat, auf die Bestimmung einer so groſsen Entfernung AC oder BC, wie die des Mondes, schon einen sehr bedeutenden Einfluſs äuſsern wird.

§. 110. (Gleichschenklige und gleichseitige Dreyecke.) I. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so sind auch die ihnen entgegenstehenden Seiten gleich, oder das Dreyeck ist gleichschenklig.

Denn ist $A=B$, so ist auch, nach der Gleichung (B) des §. 106, die Seite $\alpha=\beta$.

Und umgekehrt: In einem gleichschenkligen Dreyecke sind die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel ebenfalls gleich. Denn ist $\alpha = \beta$, so geben die Gleichungen (F)

$$\text{Tang}\,A = \frac{\text{Sin}\,C}{1 - \text{Cos}\,C}, \quad \text{und eben so} \quad \text{Tang}\,B = \frac{\text{Sin}\,C}{1 - \text{Cos}\,C},$$

also ist Tang A = Tang B, und daher (§. 94, D.) auch $A = B$.

Sind daher in einem Dreyecke alle drey Winkel gleich, so sind auch alle Seiten gleich, oder das Dreyeck ist gleichseitig; und umgekehrt, im gleichseitigen Dreyecke sind alle Winkel gleich, und jeder derselben hat 60 Grade.

II. Wenn in einem gleichschenkligen Dreyecke ABC (Fig. 27), wo $AB = AC$ ist, von dem Scheitel A ein Loth AD auf die gegenüberstehende Basis BC gefällt wird, so theilt dieses Loth den Winkel A sowohl, als auch die Basis BC in zwey gleiche Theile, und jede dieser drey Bestimmungen hat die beyden andern zur Folge.

Denn wird durch das Loth AD die Seite BC halbirt, so sind die so entstehenden zwey Dreyecke ABD und ACD gleich (nach §. 108, II.); wird der Winkel A halbirt, so sind dieselben Dreyecke gleich (nach §. 108, III.); und steht endlich die Linie AD senkrecht auf BC, so sind die Dreyecke gleich (nach §. 108, V.).

III. Zur Auflösung des gleichschenkligen Dreyeckes hat man, wenn in den Gleichungen des §. 106. der Winkel $B = C$, also auch $\beta = \gamma$ gesetzt wird, folgende Ausdrücke:

$$A = 180 - 2B = 180 - 2C,$$
$$B = C = 90 - \tfrac{1}{2}A,$$
$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{2\beta}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2},$$
$$\alpha = 2\beta\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = 2\beta\,\text{Cos}\,B.$$

§. 111. (Anwendung des Vorhergehenden auf den Kreis.) Wenn man von dem Mittelpuncte C (Fig. 10) eines Kreises ein Loth CPA auf die Sehne MN herabläſst, so theilt dieses Loth sowohl die Sehne, als auch den Winkel MCN, als endlich auch den Bogen MAN in zwey gleiche Theile, und jede dieser vier Bestimmungen hat die drey anderen zur Folge, so daſs z. B. jedes Loth auf der Mitte der Sehne durch den Mittelpunct C geht, und den zu dieser Sehne gehörenden Bogen und Winkel halbirt, wie unmittelbar aus §. 110. folgt, da wegen den gleichen Halbmessern CM, CN das Dreyeck MCN gleichschenklig ist, und da sich (nach §. 84, *G.*) die Kreisbogen wie die zu ihnen gehörenden Winkel verhalten.

I. Um daher durch drey gegebene Puncte M, A, N, die nicht in einer Geraden liegen, einen Kreis zu beschreiben, wird man die Sehnen MA und AN ziehen, und in der Mitte jeder Sehne ein Loth auf sie errichten, wo dann der Durchschnittspunct der beyden Lothe zugleich der gesuchte Mittelpunct des Kreises seyn wird, den man sonach verzeichnen kann.

§. 112. (Peripheriewinkel im Kreise.) Der Winkel BCD (Fig. 28) am Mittelpuncte C des Kreises ist doppelt so groſs als der auf demselben Bogen BD stehende Winkel BAD an der Peripherie.

Denn verlängert man den Schenkel DC des Winkels DCB bis an die Peripherie in A, und verbindet A mit B, so ist (nach §. 85, IV.) der *äuſsere* Winkel

$$BCD = BAC + ACB.$$

Aber in dem gleichschenkligen Dreyecke ABC ist (§. 110.)

$$BAC = ACB,$$

also ist auch

$$BCD = 2 . BAC.$$

Ganz eben so ist also auch

$$bCD = 2 . bAD,$$

und wenn man die beyden letzten Gleichungen von einander subtrahirt:

$$bCB = 2 . bAB.$$

I. Daraus folgt sofort, daſs alle Winkel im Halbkreise, wie AbD oder ABD . . ., rechte Winkel sind, und daſs alle Peripheriewinkel BAb, Bab . . ., die auf demselben Bogen stehen, gleich groſs sind.

§. 113. (Winkel der Secanten.) Wenn man von einem Puncte A (Fig. 29) auſser dem Kreis zwey gerade, den Kreis schneidende Linien AD und AE (die man auch *Secanten* zu nennen pflegt) zieht, so ist der Winkel A dieser Secanten gleich der halben Differenz der beyden Bogen DE und Be, auf welchen seine Schenkel stehen.

Denn zieht man Bb mit AE parallel, und den Halbmesser

CM senkrecht auf Bb und Ec, so wird (nach §. 111.) dadurch sowohl der Bogen BMb als auch EMe in dem Puncte M halbirt, also ist auch

$$\text{Bogen } Be = Eb,$$

oder die Bogen zwischen zwey parallelen Sehnen sind gleich.

Nach §. 112. ist aber der Winkel DAE oder DBb gleich $\frac{1}{2} Db$ oder gleich $\frac{1}{2}(DE - bE)$, also ist auch der Winkel

$$A = \frac{1}{2}(DE - Be).$$

§. 114. (Winkel der Sehnen.) Der Winkel BOD (Fig 30) zweyer Sehnen AB, DE ist gleich der halben Summe der Bogen BD und AE. — Denn ist Bb mit DE parallel, so ist, wie §. 113, der Bogen $BD = bE$. Nach §. 112. ist aber der Peripheriewinkel ABb oder AOE gleich dem halben Bogen AEb oder gleich $\frac{1}{2}(AE + Eb)$, das heifst, gleich

$$\frac{1}{2}(AE + BD).$$

Eben so ist also auch der Winkel AOD oder BOE gleich

$$\frac{1}{2}(AD + BE).$$

§. 115. (Winkel der Berührungslinie am Kreise.) Wenn sich die Sehne Ab (Fig. 28) um den festen Punct A aufwärts dreht, so rücken die beyden Durchschnittspuncte b und A der Sehne mit dem Kreise immer näher an einander, bis sie endlich, für die Lage At, ganz zusammen fallen. In dieser Lage trifft die Linie At den Kreis nur mehr in einem einzigen Puncte A, und wird die *Berührungslinie* (auch Tangente) des Kreises genannt.

Da nach §. 112. der Winkel Bab der beyden Sehnen AB, Ab immer gleich der Hälfte des Bogens Bb ist, welche Lage auch die bewegliche Sehne Ab einnimmt, so wird auch noch für die letzte dieser Lagen, für At, der Winkel tAB gleich der Hälfte des Bogens BaA seyn. — Eben so wird, wenn die erste Sehne durch den Mittelpunct C geht, oder wenn sie der Durchmesser AD des Kreises ist, der Winkel DAt gleich der Hälfte des Bogens $DBaA$, oder gleich einem rechten Winkel seyn. Die Berührungslinie At des Kreises steht daher auf dem Durchmesser desselben senkrecht.

Achtzehntes Capitel.

Parallelogramme und regelmäſsige Polygone.

---

§. 116. (Eigenschaften des Parallelogramms.) Ist $ABCD$ (Fig. 31.) ein Parallelogramm, und sind AC, BD die Diagonalen desselben, so sind, der Erklärung (§. 81.) dieser Figur zufolge, die gegenüberstehenden Seiten derselben parallel, also sind auch die *Wechselwinkel* (§. 86.) a und c', so wie auch a' und c, unter sich gleich, also sind auch (§. 108.) die beyden Dreyecke ABC und ADC selbst unter sich gleich, das heiſst: In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten gleich, und das Parallelogramm wird von jeder der beyden Diagonalen halbirt.

I. Und umgekehrt: Sind die gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks paarweise gleich, so sind auch (§. 108.) die beyden genannten Dreyecke gleich, oder es ist $a = c'$ und $a' = c$, d. h. die gegenüberstehenden Seiten sind parallel oder das Viereck ist ein Parallelogramm. — Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

II. Wenn auch nur ein Paar der gegenüberstehenden Seiten, z. B. AD und BC eines Vierecks *gleich und parallel* sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm, weil, wegen des Parallelismus dieser beyden Seiten, der Winkel $a = c'$ und $a' = c$, also wieder die beyden erwähnten Dreyecke gleich, also auch die zwey andern Seiten AB und CD unter sich gleich sind.

III. Die beyden Diagonalen AC und BD halbiren sich in ihrem Durchschnittspuncte O, weil in den Dreyecken ADO und BCO die Seiten AD und BC, und die beyden diesen Seiten anliegenden Winkel gleich sind.

IV. In jedem Parallelogramm sind die in der Richtung der Diagonalen einander entgegenstehenden Winkel unter sich gleich, oder es ist $A = C$ und $B = D$.

V. Die Summe der Quadrate der Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der Seiten desselben. Denn es ist (§. 106, Gleichung A)

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2\,AD \,.\, CD \,\mathrm{Cos}\, ADC \quad \text{und}$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \,.\, AD \,\mathrm{Cos}\, BAD.$$

Addirt man diese Gleichungen und bemerkt, daſs nach dem Vorhergehenden $AB = CD$ und

$$ADC + BAD = 180^\circ, \quad \text{also} \quad \mathrm{Cos}\, ADC = -\,\mathrm{Cos}\, BAD$$

ist, so erhält man

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \quad \text{oder}$$
$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

§. 117. (Aequivalente Parallelogramme.) Parallelogramme sind äquivalent (oder sie schlieſsen gleiche Flächen ein, §. 83.), wenn sie gleiche Basis und gleiche Höhe haben.

Man nennt aber *Höhe* eines Parallelogramms das Loth DM (Fig. 31), welches von irgend einem Puncte einer Seite desselben auf die gegenüberstehende Seite AB, oder auf die *Basis* der Figur gefällt wird, welche Lothe, als Parallelen zwischen Parallelen, nach §. 116, I. alle unter sich gleich sind. Diesem gemäſs ist also auch die Höhe eines Dreyecks DAB (Fig. 31) das Loth, welches von dem Scheitel D eines Winkels des Dreyecks auf die diesem Winkel gegenüberstehende Seite AB gefällt wird, welche letzte Seite dann auch die Basis des Dreyecks genannt wird.

Seyen $ABCD$ und $ABFE$ (Fig. 32) zwey Parallelogramme, deren gemeinschaftliche Basis AB ist, und von welchen die der Basis gegenüberstehenden Seiten CD und EF in einer einzigen, der AB parallelen Geraden DE liegen, so daſs demnach jedes von einem Puncte dieser Geraden DE auf die Basis AB gefällte Loth die *Höhe* dieser beyden Parallelogramme vorstellt.

Da (nach § 116, I.) Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist

$$AB = CD \quad \text{und} \quad AB = FE,$$

also auch

$$CD = FE,$$

und wenn man zu beyden Seiten dieser Gleichung die Gröſse CF addirt:

$$CF = CE.$$

Überdieſs ist, da AC und AE Parallelogramme sind,

$$AD = BC \quad \text{und} \quad AF = BE,$$

also sind auch (§. 108, I.) die beyden Dreyecke DAF und CBE unter sich gleich.

Nennt man daher F den Flächenraum, den das Viereck $ABED$ einschliefst, so ist

$$F - DAF = F - CBE,$$

oder es ist die Fläche des Parallelogramms $ABEF$ gleich der Fläche des Parallelogramms $ABCD$, d. h. beyde Parallelogramme sind *äquivalent*.

Dasselbe findet man auch, wenn der Punct F auf C, oder auch, wenn er zwischen C und D fällt.

I. Da das Rechteck (§. 81.) nur ein besonderer Fall des Parallelogramms ist, so sind auch alle Rechtecke äquivalent, die unter sich, oder auch die mit einem gegebenen Parallelogramm gleiche Basis und Höhe haben.

II. Da endlich jedes Parallelogramm durch seine Diagonale in zwey gleiche Dreyecke getheilt wird (§. 116.), so ist auch jedes Dreyeck ABC oder ABD äquivalent der Hälfte des Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 31), das mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe hat.

§. 118. (Ausmessung des Parallelogramms.) Sey $ABCD$ (Fig. 33) ein Rechteck, dessen Seiten $AB = CD$ und $AD = BC$ sind. Wenn sich die beyden Seiten AB und AD durch irgend eine kleinere Linie $Ab = Ad$ genau ausmessen lassen, so wird man, wenn man das Quadrat $Abcd$ construirt, dieses Quadrat so oft auf die Seite AB legen können, als diese Seite AB die kleinere Ab in sich enthält. Dadurch erhält man das Rechteck $ABdn$, und dieses Rechteck wird sich wieder so oft auf die Seite AD legen lassen, als diese Seite AD die kleinere Ad in sich enthält.

Demnach enthält die Fläche des Rechtecks $ABCD$ das Quadrat $Abcd$ der kleineren Linie Ab so oft in sich, als das Product $AB \times AD$ Einheiten in sich enthält, wenn man die beyden Seiten AB und AD als Zahlen betrachtet, deren Einheit die kleinere Linie Ab vorstellt.

I. Wenn aber die beyden Seiten AB und AD unter sich incommensurabel sind (§. 30, I.), so werden sie sich durch irgend eine gewählte Einheit $Ab = Ad$ nicht mehr beyde zugleich genau ausmessen lassen, also wird auch das angezeigte Verfahren der Auf- und Nebeneinanderlegung der kleinen Quadrate die gesuchte Fläche des Rechtecks $ABCD$ nie vollkommen erschöpfen, oder es wird dabey immer noch ein dadurch nicht ausgemessener Theil, ein Rest dieser Fläche $ABCD$ übrig bleiben. Allein nichts hindert uns, in diesem Falle die zur Einheit zu wählende Linie Ab noch kleiner zu machen, und dadurch auch jenen Rest immer mehr und mehr zu vermindern, so zwar, daſs er endlich kleiner wird als jede andere noch angebliche Gröſse, oder daſs er so viel als völlig verschwindet, so daſs daher das erwähnte Verfahren auch auf diesen Fall angewendet werden kann.

II. Diesem gemäſs wird also die *Fläche eines Rechtecks* durch das Product seiner beyden Seiten, oder durch das Product $B.H$ seiner Basis B in seine Höhe H ausgedrückt werden, wo man wieder diese beyden Geraden B und H als Zahlen betrachtet, so daſs die zwey Linien B und H eine andere gegebene kleinere Linie so oft in sich enthalten, als diese Zahlen selbst Einheiten enthalten, indem die kleinere Linie als die Einheit der Linien betrachtet wird.

III. Demnach ist also auch die *Fläche eines Quadrats*, dessen Seite A ist, gleich AA oder gleich A^2.

IV. Eben so wird auch die *Fläche eines Parallelogramms*, dessen Basis B und Höhe H ist (nach §. 117, I.), gleich demselben Producte BH seyn.

V. Die *Fläche eines Dreyecks* aber wird gleich dem halben Producte seiner Basis B in seine Höhe H, oder die Fläche des Dreyecks wird gleich $\frac{1}{2}BH$ seyn, wie sofort aus §. 117, II. folgt.

VI. Endlich werden sich auch die Flächen zweyer Parallelogramme oder zweyer Dreyecke wie die Producte der Basis in die Höhen derselben verhalten.

Ist nämlich F die Fläche, B die Basis und H die Höhe des einen, und bezeichnet F', B', H' dieselben Gröſsen für das andere Parallelogramm, so hat man

$$F : F' = BH : B'H',$$

also auch, wenn $B = B'$ ist:

$$F : F' = H : H',$$

und wenn die Höhe $H = H'$ ist:

$$F : F' = B : B'.$$

§. 119. (Regelmäſsige Polygone.) Da sich alle Polygone durch Diagonalen auf Dreyecke zurückführen lassen, und da wir in dem folgenden Capitel die allgemeine Berechnung dieser Polygone näher zu betrachten Gelegenheit haben werden, so wollen wir uns hier auf die Untersuchung der *regelmäſsigen Polygone*, d. h. derjenigen Vielecke beschränken, deren Seiten und Winkel alle unter sich gleich sind.

Jedes regelmäſsige Polygon, wie $ABCDEF$ (Fig. 34), hat in seinem Innern einen Punct O, der von allen Scheiteln A, B, C, . . . des Polygons gleich weit entfernt ist, und der daher, analog mit dem Kreise, der *Mittelpunct* des Polygons genannt wird. Denn halbirt man die gleichen Winkel A, B, C, . . . durch die Linien AO, BO, CO, . . . so sind die so entstehenden Dreyecke ABO, BCO, CDO, . . . alle *gleichschenklig*, weil sie die Winkel an ihrer Basis AB, BC, CD, . . . gleich haben (§. 110.). Dieselben Dreyecke sind überdieſs unter sich *gleich*, weil sie alle Seiten mit den beyden ihnen anliegenden Winkeln gleich haben (§. 108, III.), also ist auch $AO = BO = CO$... und diese letzten Linien werden der *Halbmesser* (Radius) des Polygons genannt, den wir durch r bezeichnen wollen.

Daraus ſolgt sofort, daſs jedes regelmäſsige Polygon in einen Kreis desselben Radius so *eingeschrieben* werden kann, daſs die Scheitel des Polygons in die Peripherie des Kreises fallen — und daſs eben so jedes Polygon einem Kreise so *umschrieben* werden kann, daſs alle Seiten in ihrem mittleren Puncte die Peripherie des Kreises berühren (§. 115.).

§. 120. (Winkel und Fläche des regelmäſsigen Polygons.) Ist $AOB = 2\alpha$ der Winkel des Polygons an seinem Mittelpuncte O, und ist eben so

$$ABC = BCD = CDE \ldots = 2\beta$$

der Winkel des Polygons am Umfange desselben, oder ist 2β der Winkel je zweyer nächsten Seiten des Polygons, so hat man, wenn n die Anzahl der Seiten AB, BC, CD, . . . desselben ist:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} \quad \text{und} \quad \beta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Da ferner ein Loth OM aus dem Mittelpuncte O auf eine dieser Seiten sowohl die Seite als auch den Winkel AOB halbirt (§. 110.), so ist dieses Loth oder die Höhe des Dreyecks AOB gleich

$$OM = r \operatorname{Cos} \alpha = r \operatorname{Sin} \beta,$$

wo wieder r den Halbmesser OA des Polygons bezeichnet.

Eben so ist auch jede Seite des Polygons oder die Basis des erwähnten Dreyecks ABC gleich

$$AB = 2r \operatorname{Sin} \alpha = 2r \operatorname{Cos} \beta,$$

slso ist auch die Fläche (§. 118, V.) dieses Dreyecks gleich

$$r^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha,$$

und daher die Fläche F des ganzen Polygons von n Seiten:

$$F = nr^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha = \tfrac{1}{2} nr^2 \operatorname{Sin} 2\alpha = \tfrac{1}{2} nr^2 \operatorname{Cos} 2\beta,$$

oder endlich, wenn man den obigen Werth von α oder β substituirt:

$$F = \tfrac{1}{2} nr^2 \operatorname{Sin} \frac{360^\circ}{n}.$$

§. 121. (Bestimmung der Seiten des regelmäſsigen Polygons.) Nach dem Vorhergehenden ist für ein Polygon von n Seiten

$$\alpha = \frac{180}{n} \text{ und } \beta = 90 - \alpha.$$

Man hat daher für ein regelmäſsiges Polygon von

3 Seiten	$n=3$,	$\alpha=60^\circ$,	$\beta=30^\circ$,	und daher	$\operatorname{Cos} 3\beta = 0$,
4 »	$n=4$,	$\alpha=45^\circ$,	$\beta=45^\circ$,	» »	$\operatorname{Sin} 4\beta = 0$,
5 »	$n=5$,	$\alpha=36^\circ$,	$\beta=54^\circ$,	» »	$\operatorname{Cos} 5\beta = 0$,
6 »	$n=6$,	$\alpha=30^\circ$,	$\beta=60^\circ$,	» »	$\operatorname{Sin} 6\beta = 0$ u. f.

Nennt man aber x die Seite des regelmäſsigen Polygons, und setzt man den Halbmesser r desselben gleich der Einheit, so ist, nach §. 120:

$$x = 2 \operatorname{Cos} \beta.$$

Vergleicht man damit die Ausdrücke, welche wir oben (§. 98.) für die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen gegeben haben, so hat man (wenn man a. a. O. statt x die Gröſse β, also auch statt q die Gröſse $2 \operatorname{Cos} \beta$, d. h. die Gröſse x setzt)

für das regelmäſsige Dreyeck . . . $\operatorname{Cos} 3\beta = 0$ oder

$$x^2 - 3 = 0,$$

für das Viereck . . . $\sin 4\beta = 0$ oder

$$x^2 - 2 = 0,$$

für das Fünfeck . . . $\cos 5\beta = 0$ oder

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0,$$

und eben so erhält man auch für das regelmäfsige Polygon von

6 Seiten . . . $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$,

7 » . . . $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$,

8 » . . . $x^6 - 6x^4 + 10x^2 - 4 = 0$,

9 » . . . $x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = 0$,

10 » . . . $x^8 - 8x^6 + 21x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ u. s. f.,

und aus diesen Gleichungen wird man, durch Auflösung (§. 68. bis 70.) derselben, den Werth einer Seite x des regelmäfsigen Polygons, in Theilen des Halbmessers desselben ausgedrückt, bestimmen können. Wir wollen hier nur einige derselben in Kürze näher betrachten.

I. Für das regelmäfsige Dreyeck $ACEA$ (Fig. 34) hat man

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm\sqrt{3},$$

das doppelte Zeichen, da man von dem Anfangspuncte A eben sowohl nach C, als auch rückwärts nach E gehen kann, um das Polygon zu verzeichnen.

Da für das Dreyeck $\alpha = 60$ und $x = 2 \sin\alpha$ ist, so hat man auch

$$\sin 60 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \cos 60 = \sqrt{1 - \sin^2 60} = \tfrac{1}{2},$$

also auch (§. 87, VI.)

$$\sin 30 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos 30 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

geschlossene Ausdrücke für die Sinus und Cosinus dieser Winkel, die wir oben (§. 104.) nur durch unendliche Reihen gegeben haben.

II. Für das Viereck ist eben so

$$x = \pm\sqrt{2},$$

also ist auch, da $\alpha = 45^0$ ist:

$$\sin 45 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

III. Für das Fünfeck ist

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach §. 68, I. auf, so findet man

$$x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}},$$

also einen vierfachen Werth für x, deren je zwey unter sich gleich sind. Diese Doppelwerthe sind:

der kleinere . . . $x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = 2 \operatorname{Sin} 36^\circ$, und

der größere . . . $x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = 2 \operatorname{Sin} 72^\circ$.

Theilt man daher die Peripherie eines Kreises in fünf gleiche Theile, und bezeichnet die Theilungspuncte durch 1, 2, 3, 4 und 5, so gehört der kleinere Werth von x für die Seite des Fünfecks, dessen Scheitel in den Puncten 1, 2, 3, 4 und 5 liegen, der größere Werth von x aber gehört für dasjenige Fünfeck, welches entsteht, wenn man die Puncte 13, 35, 52, 24 und 41 durch gerade Linien verbindet. Vielecke der letzten Art, die zwey oder mehrmal um die Peripherie des Kreises gehen, werden, nach ihrer Gestalt, *sternförmige* Polygone genannt.

Aus diesen Ausdrücken von x folgt zugleich

$\operatorname{Sin} 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ und $\operatorname{Sin} 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

IV. Für das Sechseck ist

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0,$$

welche Gleichung auch so ausgedrückt werden kann:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0,$$

daher sie auch den *beyden* Gleichungen gleichgeltend ist:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{und}$$

$$x^2 - 3 = 0.$$

Die zweyte gehört, nach Nro. I., für das Dreyeck, das man erhält, wenn man von den Theilpuncten 1, 2, 3, . . . 6 des Sechsecks die Puncte 13, 35 und 51 verbindet. — Die erste aber gibt $x = 1$ für die Seite des gewöhnlichen Sechsecks, die also dem Halbmesser gleich ist, daher man auch hat

$$\operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} 30 = \frac{1}{2},$$

wie zuvor.

Eben so läßt sich die obige Gleichung des Zehnecks, die drey Factoren hat, in folgende drey Gleichungen auflösen:

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0,$$
$$x^2 + x - 1 = 0,$$
$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die erste derselben gehört für das oben (Nro. III.) betrachtete Fünfeck. Die zweyte gibt

$$x = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 2 \operatorname{Sin} 18^\circ,$$

also die Seite des gewöhnlichen Zehnecks, wenn man die zehn Theilpuncte 1, 2, 3, . . . 10 des Kreises in ihrer natürlichen Folge 12, 23, 34, . . . mit einander verbindet. Die dritte endlich gibt

$$x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 2 \operatorname{Sin} 54^\circ,$$

oder die Seite des sternförmigen Zehnecks, das man durch die Verbindung der Puncte 14, 47, 7.10, 10.13 u. f. erhält.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf die übrigen Polygone fortsetzen.

Bemerken wir noch, dafs alle Seiten dieser Polygone den Halbmesser derselben gleich der Einheit voraussetzen. Will man sich von dieser Voraussetzung befreyen, die nur der grössern Einfachheit wegen eingeführt worden ist, so wird man blofs (nach §. 71.) in den vorhergehenden Ausdrücken statt x die Gröfse $\frac{x}{r}$ setzen, wenn r den Halbmesser des Polygons oder des dem Polygone umschriebenen Kreises bezeichnet. So wird z. B. die obige Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

für das gewöhnliche Zehneck in folgende übergehen:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{x}{r} - 1 = 0 \quad \text{oder}$$
$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

in welcher auch alle Glieder dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, und für die Seite dieses Zehnecks wird man haben

$$x = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

§. 122. (Verdoppelung der Seiten des Polygons.) Um aus der Seite eines regelmäfsigen Polygons von n Seiten, die Seite eines von $2n$, $4n$, $8n$, . . . Seiten zu finden, verlängere man das Loth OM (Fig. 34) des $n$seitigen Polygons $ABCD$ . . ., bis es die Peripherie des umschriebenen Kreises in N trifft, und verbinde diesen Punct N mit A und B durch gerade Linien, so ist jede dieser Geraden AN, NB, . . . die Basis eines gleichschenkligen Dreyeckes AON, NOB, . . . und zugleich die Seite eines regelmäſsigen Polygons von $2n$ Seiten.

Ist dann $AB = x$ die Seite des Polygons von n Seiten, und $AN = NB = x'$ die Seite des Polygons von $2n$ Seiten, so hat man, um x' aus x zu finden, die Gleichungen

$$x = 2r \operatorname{Sin} \alpha \quad \text{und}$$
$$x' = 2r \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen statt $\operatorname{Sin}\alpha$ die Gröſse $2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha$, und eliminirt dann aus beyden Gleichungen die Gröſse $\frac{1}{2}\alpha$, so erhält man

$$x'^4 - 4r^2 x'^2 + r^2 x^2 = 0,$$

und diese Gleichung gibt x' durch x, oder umgekehrt.

Löst man diese Gleichung auf und setzt wieder, der Kürze wegen, den Radius $r = 1$, so erhält man

$$x' = \sqrt{2 - \sqrt{2^2 - x^2}}$$

für die gesuchte Seite des Polygons von $2n$ Seiten.

I. Daraus folgt sofort, daſs die Seite eines Polygons von

$4n$ Seiten gleich ist $x'' = \sqrt{2 - \sqrt{2^2 - x'^2}}$,

$8n$ » » » $x''' = \sqrt{2 - \sqrt{2^2 - x''^2}}$,

$16n$ » » » $x^{\text{IV}} = \sqrt{2 - \sqrt{2^2 - x'''^2}}$ u. f.

Substituirt man diese Werthe von $x'\, x''\, x'''$ . . . in einander, so erhält man z. B. für die Seite x^{IV} des Polygons von $16n$ Seiten

$$x^{\text{IV}} = \sqrt{[2 - \sqrt{[2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2^2 - x^2}))}]}]}.$$

§. 123. (Aus dem einem Kreise eingeschriebenen Polygon das ihm umschriebene zu finden.) Ist ABC (Fig. 34) das eingeschriebene, und abc das umschriebene Polygon von derselben Seitenzahl, so hat man, da die Gerade bN sowohl als auch BM auf ON senkrecht steht, in den zwey rechtwinkligen Dreyecken OBM und ObN

$$BM = \tfrac{1}{2}x = r \operatorname{Sin}\alpha \quad \text{und}$$
$$Nb = \tfrac{1}{2}X = r \operatorname{Tang}\alpha,$$

wenn $x = AB$ die Seite des innern, und $X = ab$ die des äussern Polygons bezeichnet.

Da aber, nach §. 95, I.

$$\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{\mathrm{Tang}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{Tang}^2\,\alpha}}$$

ist, so erhält man durch Elimination der Gröfse α aus den beyden vorhergehenden Gleichungen:

$$X^2 . x^2 = 4 r^2 (X^2 - x^2),$$

also auch

$$X = \frac{2 r x}{\sqrt{4 r^2 - x^2}},$$

und eben so

$$x = \frac{2 r X}{\sqrt{4 r^2 + X^2}}.$$

§. 124. (Aehnlichkeit der Polygone.) Wenn man in irgend einem Polygon $ABCDE$ (Fig. 35) die Endpuncte A und B einer seiner Seiten AB, die wir die *Basis* nennen wollen, mit allen übrigen Winkeln C, D, E durch gerade Linien verbindet, so entstehen so viele Dreyecke an der Basis, als das Polygon Seiten hat, weniger zwey.

Nennen wir

A, B die Winkel an der Basis in dem Dreyecke ABC,
A', B' » » » » » » » » ABD,
A'', B'' » » » » » » » » ABE u. f.

Kennt man dann die Seite $AB = a$, so wie die genannten Winkel A, A', A'', ... und B, B', B'', ... so wird man, nach §. 109, alle diese Dreyecke, also auch die Seiten BC, CD, ... und die Diagonalen AD, BE, ... des Polygons durch Rechnung bestimmen können.

So hat man z. B. für die Seite BC den Ausdruck

$$BC = a \frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,(A + B)},$$

und eben so für die Diagonalen AC, AD, ...

$$AC = a \frac{\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,(A + B)}, \quad AD = a \frac{\mathrm{Sin}\,B'}{\mathrm{Sin}\,(A' + B')} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man demnach durch x irgend eine dieser Seiten, oder auch irgend eine dieser Diagonalen, so wird, wie aus den vorhergehenden Ausdrücken erhellt, die Gröſse $\frac{x}{a}$ eine bloſse Function der Winkel $A, A', A'', \ldots$ und $B, B', B'', \ldots$ seyn, oder man wird haben

$$\frac{x}{a} = f.(A, A', A'', \ldots B, B', \ldots).$$

Wenn man dann mit denselben Winkeln $A, A', \ldots B, B', \ldots$ aber mit einer andern Seite, z. B. mit der Seite $A\beta = a'$, ein zweytes Polygon $A\beta\gamma\delta\varepsilon$ verzeichnet, so werden (nach §. 83.) beyde Polygone einander *ähnlich* seyn. Nennt man aber x' die mit x homologe (gleichliegende) Seite oder Diagonale in dem zweyten Polygon, so wird man aus demselben Grunde auch die Gleichung haben

$$\frac{x'}{a'} = f.(A, A', A'', \ldots B, B', \ldots),$$

und aus diesen zwey Gleichungen folgt sofort

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'},$$

das heiſst: *in ähnlichen Figuren sind die homologen Seiten und überhaupt alle homologen Linien unter sich proportionirt.*

I. Es ist für sich klar, daſs das zweyte Polygon $A\beta\gamma\delta\varepsilon$ auch *auſser* der ersten Figur liegen kann, wenn nur die Winkel bey $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ mit denen bey $B, C, D, \ldots$ in dem ersten Polygon gleich groſs genommen werden. — Darauf gründen sich die Aufnahmen mit dem sogenannten *Meſstische* (§. 141.).

II. Sind überhaupt $a, b, c, \ldots$ die Seiten des einen, und $a', b', c', \ldots$ die homologen Seiten des anderen, jenem ähnlichen Polygons, so hat man

$$x : x' = a : a',$$
$$x : x' = b : b',$$
$$x : x' = c : c' \text{ u. f.},$$

also auch

$$x : x' = a + b + c + \ldots : a' + b' + c' + \ldots,$$

das heiſst: *die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie ihre homologen Linien.*

III. Eben so, wie man aus der Basis a und den an ihr liegenden Winkeln $A, A', \ldots B, B', \ldots$ alle Seiten der Dreyecke $ABC, ABD, \ldots$ berechnen kann, wird man auch die *Flächen* dieser Dreyecke durch Rechnung, also auch die Fläche des ganzen Polygons bestimmen. Nennt man daher F diese Fläche des Polygons, so wird auch die Gröfse

$$\frac{F}{x^2}$$

eine blofse Function jener erwähnten Gröfsen seyn, oder man wird haben

$$\frac{F}{x^2} = \varphi . (A, A', \ldots B, B', \ldots),$$

wo wieder φ das Zeichen der Function ist. Ganz auf dieselbe Weise wird man auch in einem zweyten, jenem ähnlichen Polygon haben:

$$\frac{F'}{x'^2} = \varphi . (A, A', \ldots B, B', \ldots),$$

woraus wieder folgt $\frac{F}{F'} = \frac{x^2}{x'^2}$,

das heifst: *die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Linien.*

IV. Um daher auf einer gegebenen Geraden $A\beta$, auch ausser der Figur $ABCDE$ (Fig. 35), eine dieser Figur ähnliche zu verzeichnen, theilt man die gegebene Figur durch Diagonalen in Dreyecke, und setzt dann auf $A\beta$ ein Dreyeck $A\beta\gamma$ ähnlich dem ABC; ferner auf $A\gamma$ ein Dreyeck $A\gamma\delta$ ähnlich dem ACD; dann auf $A\delta$ ein Dreyeck $A\delta\varepsilon$ ähnlich dem ADE u. f., so werden beyde Figuren einander ähnlich seyn.

V. Da alle regelmäfsigen Polygone, wenn sie dieselbe Seitenzahl haben, unter sich ähnliche Figuren sind, so wird der aufgestellte Satz auch von ihnen gelten, und eben so auch von jedem Kreise, dem das eingeschriebene regelmäfsige Polygon immer näher kömmt, je gröfser die Anzahl der Seiten desselben ist, so dafs also Kreise als regelmäfsige Polygone von unzählig vielen Seiten zu betrachten sind; daher auch die Peripherien zweyer Kreise sich wie ihre Durch- oder Halbmesser, und die Flächen derselben sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten. Da aber die Zahl 2π (§. 103.) die Peripherie eines Kreises bezeichnet, dessen Halbmesser die Einheit ist, so wird demnach für einen Kreis, dessen Halbmesser r ist, die Peripherie gleich $2r\pi$, und die Oberfläche desselben gleich $2r\pi\left(\frac{r}{2}\right) = r^2\pi$ seyn.

Neunzehntes Capitel.

Practische Geometrie.

§. 125. (Errichtung eines gleichschenkligen Dreyeckes auf einer gegebenen Geraden.) Indem wir nun zu den Anwendungen der vorhergehenden geometrischen Sätze übergehen, wie sie in der Geodäsie (Feldmessung) Statt haben, wollen wir zuerst die Auflösungen einiger hieher gehörenden Probleme vorausschicken.

Um auf einer gegebenen Geraden AC (Fig. 4) ein gleichschenkliges Dreyeck zu errichten, beschreibe man mittelst des *Zirkels* (dessen Kenntniſs und Gebrauch hier voransgesetzt wird) aus den beyden Endpuncten A und C mit einem willkürlichen Halbmesser (Öffnung des Zirkels) zwey Kreise, oder auch nur zwey kleine Kreisbogen, die sich irgendwo, in dem Puncte B, schneiden, und verbinde dann den Punct B mit A und C, so ist ABC das verlangte gleichschenklige Dreyeck.

Nimmt man die Öffnung des Zirkels gleich der gegebenen Linie AC, so erhält man ein gleichseitiges Dreyeck ABC.

Kleiner als $\frac{1}{2}AC$ aber kann man diese Öffnung nicht nehmen, weil sich sonst die Bogen nicht mehr schneiden würden, oder weil (§. 106, III.) in jedem Dreyecke die Summe zweyer Seiten gröſser seyn muſs, als die dritte.

§. 126. (Einen gegebenen Winkel ABC (Fig. 36) halbiren.) Man nehme $AB = AC$, ziehe BC, und errichte über BC (nach §. 125.) ein gleichschenkliges Dreyeck BDC, so halbirt die Gerade DA den Winkel BAC.

Durch neues Halbiren der Winkel BAD und DAC wird man den gegebenen Winkel BAC in 4, und eben so in 8, 16, 32, . . . gleiche Theile theilen.

Die Gründe für die Richtigkeit bey diesem und bey dem nächstfolgenden Verfahren folgen unmittelbar aus dem Vorhergehenden auf eine Weise, die zu einfach ist, als daſs sie hier besonders angeführt werden sollte.

§. 127. (Eine gegebene Gerade BC (Fig. 36) halbiren.) Man beschreibe über ihr ein gleichschenkliges Dreyeck BCD (nach §. 125.), und halbire dann den Winkel D (nach §. 126) durch die Linie DE, so ist $BE = EC$. — Oder auch: man beschreibe über und unter der gegebenen Geraden BC ein gleichschenkliges Dreyeck BCD und BAC, und verbinde die Puncte A und D durch die Linie AD, welche letzte die BC in E halbirt.

§. 128. (Durch einen gegebenen Punct C in, oder C' auſser einer Geraden MN (Fig. 37) auf dieser Geraden ein Loth errichten.) Man beschreibe aus C oder C' mit einem willkürlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die Gerade MN in zwey Puncte A und B schneidet, und errichte über AB ein gleichschenkligen Dreyeck ABD, so ist $DC'C$ das gesuchte Loth.

§. 129. (An dem Endpuncte B (Fig. 38) einer Geraden AB, ohne sie zu verlängern, ein Loth errichten.) Man beschreibe aus irgend einem Puncte O mit dem Halbmesser OB einen Kreis so, daſs derselbe die Linie AB irgendwo, z. B. in a schneide, ziehe dann den Durchmesser aOD und verbinde D mit B, so ist BD das gesuchte Loth (§. 112, I.).

Einfacher wird man dieſs auf bloſs mechanische Weise durch das *Winkelmaſs*, durch eine in Gestalt eines rechtwinkligen Dreyckes ausgeschnittene Platte von Holz oder Metall, wie ADC (Fig. 37) darstellen. Man prüft dasselbe, indem man die eine Seite AC desselben an eine mit Sorgfalt gezogene Gerade MN anlegt, und die Linie CD (mit einem Stifte) zieht; dann das Winkelmaſs so umlegt, daſs die Seite AC desselben nach CB in dieselbe Gerade MN fällt, wo dann die andere Seite CD des Winkelmaſses wieder genau auf die früher gezogene Gerade CD fallen muſs, wenn der Winkel ACD des Instruments in der That ein rechter ist.

§. 130. (Aus drey gegebenen Geraden ein Dreyeck construiren.) Ist BC (Fig. 23) eine dieser Geraden, so beschreibe man aus B mit der zweyten Geraden (die gleich AB ist) als Halbmesser einen Kreisbogen, und eben so mit der dritten Geraden (die gleich CA seyn soll) als Halbmesser aus C einen Kreisbogen; beyde Bogen schneiden sich in einem Puncte A, wo dann ABC das gesuchte Dreyeck ist.

Wegen §. 106, III. müssen von den drey Geraden zwey zusammen gröſser als die dritte seyn.

§. 131. (An einem gegebenen Punct A (Fig. 39) einer Linie MN einen Winkel von gegebener Gröſse (x) errichten.) Man ziehe in dem gegebenen Winkel $bac = x$ willkürlich die Gerade bc, wodurch man ein Dreyeck mit dem gegebenen Winkel x erhält. Dann nehme man auf der gegebenen Geraden MN die Linie $AC = ac$, und errichte über AC (nach §. 130.) mit den drey Seiten ac, ab und bc das Dreyeck ABC, so ist der Winkel $BAC = x$.

I. Einfacher erreicht man dasselbe, auf bloſs mechanische Weise, durch den sogenannten *Transporteur*, oder durch einen von einer Metallplatte ausgeschnittenen Halbkreis, dessen Peripherie in die einzelnen Grade getheilt ist.

II. Genauer aber noch durch den *Maſsstab* (§. 132.) mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln (§. 104.). Soll man z. B. einen Winkel von $50° 36'$ verzeichnen, so zeigen diese Tafeln, daſs die Tangente dieses Winkels gleich 1.2174 ist. Man nehme daher auf der Geraden AM (Fig. 40), in deren Puncte A dieser Winkel errichtet werden soll, mittelst des Maſsstabes die Linie $AB = 1000$ (oder genauer gleich 10000), errichte in B das Loth BD, und nehme auf diesem Lothe die Länge $BC = 1217$ (oder genauer gleich 12174), und ziehe dann die Gerade AC, so ist BAC der verlangte Winkel von $50° 36'$.

§. 132. (Verjüngter Maſsstab und Vernier.) Wenn man die Seite AD (Fig. 41) eines Rechteckes in eine Anzahl, z. B. in drey gleiche Theile AB, BC, CD, die einzelne *Zolle* vorstellen sollen, und einen dieser Theile CD wieder z. B. in vier gleiche Theile theilt, während die andere Seite DD' des Rechteckes etwa in fünf gleiche Theile getheilt wird, und wenn man dann die Parallelen und die Diagonalen III D', II r, I n, ..., wie die Zeichnung zeigt, zieht, so kann man durch eine solche Vorrichtung den Zoll nicht nur in seinem vierten, sondern selbst in seinem zwanzigsten Theile noch genau messen. So hat man z. B. wenn man mit einem Zirkel die Weite AC nimmt, die Länge von zwey Zollen, aber die Weite

AI beträgt $2\frac{1}{4}$ Zolle,
AII » $2\frac{2}{4}$ »
AIII » $2\frac{3}{4}$ »

und eben so ist auch die Weite

$$bm \text{ gleich } 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = 1\frac{16}{20} \text{ Zolle,}$$
$$an \text{ » } 2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = 2\frac{8}{20} \text{ »}$$
$$cr \text{ » } 0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{20} = \frac{14}{20} \text{ » u. f.,}$$

wie diefs alles für sich klar ist. Würde man die beyden Seiten CD und DD' in zehn gleiche Theile theilen, so würde man dadurch noch den hundertsten Theil eines Zolles angeben können u. f. Eine solche Vorrichtung wird ein verjüngter Mafsstab genannt, da die Linien AB, BC, CD, . . . eben so gut Zolle, als Fufse oder selbst Meilen bedeuten können, wenn man z. B. gröfsere Theile der Oberfläche der Erde durch eine Zeichnung von geringem Umfange im Kleinen darstellen will.

Sey eben so der Theil OX einer Geraden oder auch eines Kreisbogens AB (Fig. 42) in 10 gleiche Theile, z. B. in dem letzten Falle in 10 Minuten getheilt, so dafs also jedes Intervall OI, III, IIIII, . . . eine Minute betrage.

Neben, oder hier unter ihm, sey der concentrische Kreisbogen 0.10 angebracht, der sich an dem festen Bogen $O.X$ vor- und rückwärts bewegen läfst. Dieser letzte Kreisbogen 0 10 betrage aber in seiner Länge nur eben so viel, als 9 Intervalle des oberen Bogens, und sey dem ungeachtet ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt, 01, 12, 23, . . ., so dafs also jeder Theil des unteren Bogens nur $\frac{9}{10}$ eines oberen Theiles, d. h. nur $\frac{9}{10}$ Minute oder 54 Secunden beträgt. Legt man daher die beyden Bogen so neben einander, dafs die ersten Theilstriche Oo coincidiren oder eine einzige Gerade bilden, so wird die Distanz der beyden Theilstriche I und 1 der beyden Bogen gleich 6 Secunden; die Distanz der Striche II und 2 gleich 12 Secunden, die der III und 3 gleich 18 Secunden seyn u. s. f., so dafs man daher mit einer solchen Vorrichtung noch Winkel von 6 Secunden messen, oder daſs man damit gröſsere Winkel bis auf 6 Secunden genau bestimmen wird, obschon der obere Kreis selbst nur in einzelne Minuten getheilt ist. — Diese sinnreiche Einrichtung wird *Vernier* genannt.

§. 133. (Durch einen gegebenen Punct M (Fig. 43) mit einer gegebenen Geraden ab eine Parallele ziehen.) Man ziehe durch den Punct M die Gerade MC willkürlich, so daſs sie die ab in irgend einem Puncte C schneide, und mache dann (nach dem Vorhergehenden) den Winkel x gleich dem Winkel y, so ist AC die gesuchte Parallele.

§. 134. (Eine Gerade AD (Fig. 44) in eine gegebene Anzahl Theile theilen, die ein gegebenes Verhältniſs unter sich haben.) Sey das gegebene Verhältniſs das der Linien Ab, bc und cd. — Man setze die gegebene Gerade AD unter irgend einen nicht zu kleinen Winkel an einem der Endpuncte A der Geraden $Abcd$, verbinde die beyden anderen Endpuncte d und D, und ziehe durch b und durch c (nach §. 133.) die mit CD parallelen Geraden bB und cC, so sind B und C die gesuchten Theilungspuncte der Linie AD.

Will man die gegebene Gerade AD in eine gegebene Anzahl *gleicher* Theile theilen, so nehme man auf einer anderen Geraden AN die willkürlichen, aber gleichen Theile $Ab = bc = cd, \ldots$, und verfahre wie zuvor.

§. 135. (Zu drey gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionale finden.) Man trage auf dem Schenkel AN (Fig. 44) eines willkürlichen Winkels die erste Linie $Ab = a$, auf den zweyten Schenkel AD die zweyte Linie $AB = b$, und wieder auf den ersten Schenkel die dritte Linie $bc = c$, verbinde die Puncte b und B, und ziehe durch c mit bB die Parallelen cC, so ist BC die gesuchte vierte Proportionale (§. 37. und 107, III.).

§. 136. (Zwischen zwey Geraden AP und PB (Fig. 45) von gegebener Gröſse eine mittlere geometrische Proportionale (§. 38, I.) finden.) Man beschreibe über der Summe AB der zwey gegebenen Geraden als Durchmesser, einen Halbkreis AMB, und errichte in ihm auf BA durch den Punct P das Loth PM, so ist PM die gesuchte mittlere Proportionale zwischen AP und PB, oder es ist (§. 92, II. und §. 112, I.)

$$AP : PM = PM : PB.$$

§. 137. (Ein Quadrat verzeichnen, das der Summe von zwey gegebenen Quadraten gleich ist.) Sind a und b (Fig. 46) die Seiten der zwey gegebenen Quadrate, so stelle man sie in einem ihrer Endpuncte rechtwinklig zusammen, und verbinde dann ihre anderen Endpuncte durch eine Gerade x, so ist

$$x^2 = a^2 + b^2,$$

also auch x die Seite des gesuchten Quadrats.

Setzt man an den Endpunct der Linie x eine dritte Gerade c rechtwinklig an, so ist die Linie y, welche die Endpuncte der Geraden x und c verbindet, oder so ist

$$y^2 = x^2 + c^2, \quad \text{also auch}$$
$$y^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

oder y ist die Seite eines Quadrats, das der Summe von drey anderen Quadraten gleich ist.

Zieht man eben so d senkrecht auf y, so ist

$$z^2 = y^2 + d^2, \quad \text{also auch}$$
$$z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

oder z ist die Seite eines Quadrats, das vier anderen Quadraten gleich ist u. f. Für $a = b = c = d = 1$ hat man

$$x = \sqrt{2}, \; y = \sqrt{3}, \; z = \sqrt{4} = 2 \text{ u. s. w.}$$

Da die Flächen aller ähnlichen Figuren sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten (§. 124, III. V.), so wird man in dem Vorhergehenden statt den Linien a, b, c, ... auch die homologen Seiten von ähnlichen Figuren, z. B. die Seiten oder die Halbmesser von regelmäſsigen Polygonen oder auch die Halbmesser verschiedener Kreise substituiren können, und dadurch Polygone oder Kreise erhalten, deren Fläche gleich ist der Summe der Flächen von 2, 3, 4, ... anderen ähnlichen Polygone oder der Summe der Flächen von eben so viel Kreisen.

§. 138. (Theilung eines Parallelogramms in vier andere.) Wenn man in einem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 47) durch irgend einen Punct der Diagonale AC zu den beyden Seiten des Parallelogrammes Parallelen zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die beyden a und a', durch welche die Diagonale nicht geht, unter sich gleich sind.

Denn da die Diagonale des Parallelogramms halbirt, so ist

das Dreyeck $ABC = ADC$,

und eben so ist $m = m'$

und $n = n'$,

also ist auch

$$ABC - m - n = ADC - m' - n';$$

das heifst, die Parallelogramme, durch welche die Diagonale AC nicht geht, sind gleich.

§. 139. (Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, das mit jenem dieselbe Fläche hat.) Sey ABC (Fig. 48) das gegebene Dreyeck. Halbire AB in E, und ziehe durch C die Parallele CF mit AB, und durch E und B zwey willkürliche, aber unter sich parallelen Linien ED und BF, so ist das Dreyeck ABC äquivalent (§. 83.) dem Parallelogramme $BDEF$, da beyde Figuren dieselbe Länge haben, und da die Basis des Parallelogramms die Hälfte der Basis des Dreyeckes ist.

§. 140. (Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel A und eine gegebene Seite a hat.) Sey das gegebene Dreyeck ABC (Fig. 49). Man nehme bey der vorhergehenden Verzeichnung den Winkel $BED = A$, und verlängere die in E halbirte Linie AB, bis $BH = a$ ist, und ziehe durch H die mit DE oder BF parallele Gerade NHK, durch C die mit AB parallele CK, und durch K und B die Gerade KB, die der verlängerteu DE in L begegnet, so entsteht ein Parallelogramm $DLKN$, das durch die Diagonale KL und durch die Gerade EH in vier andere Parallelogramme getheilt wird, von welchen (nach §. 138.)

die beyden EF und BN unter sich und mit dem gegebenen Dreyecke ABC äquivalent sind, und von welchen das letzte BN den gegebenen Winkel $BMN = A$, und die gegebene Seite $BH = MN = a$ hat.

I. Demnach läſst sich auch jede Figur in ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite verwandeln, da man jede Figur durch Diagonalen in Dreyecke theilen, und das erwähnte Verfahren für jedes einzelne Dreyeck der Figur ausführen kann. Die so erhaltenen einzelnen Parallelogramme werden dann, mit den gleichen Winkeln an einander gestellt, das gesuchte, der Figur äquivalente Parallelogramm geben.

II. Nimmt man den gegebenen Winkel A gleich einem rechten an, so läſst sich auch jede Figur in ein Rechteck von einer gegebenen Seite verwandeln.

III. Um endlich auch jedes Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 31) in ein *Quadrat* zu verwandeln, suche man zwischen der Basis $AB = b$ und der Höhe $DM = h$ des Parallelogramms (nach §. 136.) die mittlere geometrische Proportionale x, so ist x die Seite des gesuchten Quadrats, das dem gegebenen Parallelogramme äquivalent ist, da man hat:

$$b : x = x : h,$$

oder

$$bh = x^2.$$

---

§. 141. (Der Meſstisch.) Ehe wir nun zu den eigentlichen Problemen der Geodäsie übergehen, wird es angemessen seyn, die vorzüglichsten, besonders die für die Winkelmessungen auf dem Felde bestimmten Instrumente, ihrer Einrichtung und ihrem Gebrauche nach, hier kurz anzuführen.

Der *Meſstisch* (Fig. 50) besteht aus einer ebenen, mit Papier bespannten Tafel, die auf einem Fuſsgestelle in jeder Richtung horizontal befestigt werden kann. A ist die erwähnte Tafel; x, x', x'' sind die drey Füſse des Gestells, die unten mit eisernen Spitzen versehen, und an ihrem oberen Ende an dem Cylinder B so befestiget sind, daſs sie verschiedene Stellungen gegen einander einnehmen können, um dadurch die Tafel A auf jedem Fuſsboden in eine horizontale oder überhaupt in eine gegebene Lage zu bringen. Bey n ist eine sogenannte Schraube ohne Ende, die man dem Getriebe B des Cylinders durch den Druck einer Stahlfeder nähert, damit die Schraube in das Gewinde eingreifen, und dadurch die Tafel A in ihrer Lage um die verticale Axe np oder Bp etwas gedreht werden kann. An dem unteren Theile des Cylinders B sind noch drey Arme o, o′, o″ angebracht, durch deren jeden eine Schraube geht, deren oberstes Ende man, durch Drehung des Handgriffs p, p', p'', der unteren Seite der Tafel A sanft nähern kann, um dadurch dieser Tafel eine dreyfache, sichere Unterlage zu geben.

Eine nähere Beschreibung und weitere Vorschriften über den Gebrauch dieses einfachen Instruments findet man, z. B. in *J. J. Mayer's* Unterricht zur pract. Geometrie, Vol. I. Cap. VII., oder in *Netto's* Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meſstisch. Berlin 1822.

Hier wird es genügen, zu bemerken, daſs man auf diesem Tische um einen gegebenen (etwa durch eine in den Tisch eingesteckte Nadel bezeichneten) Punct ein Lineal dreht, um dasselbe nach den verschiedenen Puncten der Umgegend zu richten, wo man dann diese Richtungen des Lineals auf dem Tische mit einer Bleyfeder bezeichnet, und dadurch die Winkel erhält, welche diese Richtungen, in dem gegebenen Punct, unter sich bilden. Dieses Lineal ist an seinen beyden Endpuncten mit zwey kleinen, in ihrer Mitte durchbrochenen, Rechtecken (oder mit sogenannten *Dioptern*) versehen, um durch die Öffnungen derselben die Puncte der Umgegend genauer fixiren zu können. — Anwendungen dieses Instruments werden wir sogleich weiter unten kennen lernen.

§. 142. (Der Theodolit.) Dieses vorzüglichste Instrument der Geodäten besteht in seinen wesentlichsten Theilen aus einer horizontalen Scheibe AB (Fig. 51), und aus einem mit einem Fernrohre CDE verbundenen verticalen Kreise FG. Die horizontale Scheibe läſst sich um ihre fixe verticale Axe K, und der verticale, mit dem Fernrohre fest verbundene Kreis läſst sich um seine horizontale Axe CH drehen, so daſs demnach, durch diese doppelte Drehung, das Fernrohr auf jeden Punct in und über dem Horizont gestellt werden kann.

Diese horizontale Axe CH ruht auf vier, in der Zeichnung sichtbaren Stützen, die an ihrem unteren Ende mit dem horizontalen Kreise *AB* fest verbunden sind, und sich daher zugleich mit diesem Kreise bewegen. Das Fernrohr *CDE* aber ist in seiner Mitte *D* unter einem rechten Winkel so gebrochen, daſs ein im Innern des Rohrs, bey *D*, aufgestellter Planspiegel, die von dem Gegenstande auf das Objectivglas *E* fallenden Strahlen in der Richtung *CD* auf das Ocular *C*, und von da in das Auge des Beobachters bey *C* reflectirt. Durch diese Einrichtung sieht also das Auge alle Gegenstände, welche Höhe über dem Horizonte sie auch haben mögen, durch das Fernrohr immer in der horizontalen Richtung *CH*.

Das ganze Instrument ruht auf einem Dreyfuſs, der an seinen Enden von drey starken Schrauben getragen wird, deren Mütter mit ihren conischen Enden in den Boden, auf welchen das Instrument gestellt wird, fest eingreifen. Zur Schonung dieser stählernen Endspitzen stellt man sie auf kleine, tellerförmige Unterlagen *c*, *d*, *e*, die an ihrer oberen Seite kleine Vertiefungen haben, in welche jene Spitzen genau passen.

An der unteren Seite dieses Dreyfuſses ist eine dreyarmige Stahlfeder (von welcher man zwey Arme zu beyden Seiten von *b* sieht) durch drey Schrauben befestiget (von welchen zwey bey *f* und *g* sichtbar sind). Auf der Mitte dieser Stahlfeder ruht die eigentliche verticale Axe *ba* des Horizontalkreises *AB*, welche Axe von dem hohlen, an den Dreyfuſs befestigten Cylinder *K* umgeben ist.

Beyde Kreise, der horizontale *AB* und der verticale *FG*, sind an ihrem Rande in Grade und Theile des Grades getheilt, und über diesen Theilungen ist ein fixer metallener Arm (die *Alhidade*), in der Richtung der Halbmesser dieser Kreise, befestiget, der an seinem äuſsersten Endpuncte, bey *m* und *n*, einen *Vernier* (§. 132.) trägt, um dadurch die Stellung der beyden Kreise genau angeben zu können. Die eine dieser Alhidaden *m* ist an dem erwähnten hohlen Cylinder *K* bey *a* befestigt, und die andere *n* wird durch ein an dem Horizontalkreise *AB* angebrachtes Gestelle *pq* getragen.

Um mit diesem Instrumente einen Gegenstand zu beobachten, dreht man den horizontalen Kreis in seinen Cylinder *K*, bis der Gegenstand in die Verticalebene des Höhenkreises *FG* kömmt, und dreht dann diesen Höhenkreis sammt seinem Fernrohre, bis der Gegenstand in dem Felde des Fernrohrs, und zwar in dem Durchschnitte der beyden Kreuzfäden erscheint, die in dem Brennpuncte dieses Fernrohrs ausgespannt sind. In dieser Lage gibt die Alhidade *m* des Kreises *AB* die horizontale, und die Alhidade *n* des Kreises *FG* die verticale Richtung des Gegenstandes auf dem getheilten Rande der beyden Kreise an.

§. 143. (Rectification des Theodoliten.) Ehe man aber mit einem solchen Instrumente zu den Beobachtungen übergeht, mufs es zuerst in allen seinen Theilen berichtiget oder *rectificirt* werden.

I. Zu diesem Zwecke mufs zuerst der untere Kreis *AB* horizontal, oder was dasselbe ist, seine (auf die Ebene dieses Kreises schon von dem Mechaniker genau senkrecht gestellte) Axe *ab* mufs vertical gestellt werden. Diefs geschieht mittelst einer Wasserwage (Libelle), die man auf die horizontale Drehungsaxe *CH* aufstellt, nachdem man diese Axe nahe in die Richtung von zwey der drey untersten, grofsen Fufsschrauben des Instruments gebracht hat.

Man bringt nämlich, durch Drehung der einen dieser zwey Fufsschrauben, die Luftblase der Libelle an einen bestimmten Theilpunct, z. B. an den Punct 10 der Glasröhre Dann wendet man den Kreis *AB* nahe um 180 Grade, so dafs die Axe *CH* wieder nahe mit denselben zwey Fufsschrauben parallel wird. Ist die Blase, bey dieser zweyten Stellung des Instruments, nicht mehr bey dem früheren Theilpuncte 10, sondern z. B. bey 18, so bringt man sie, durch eine jener zwey Fufsschrauben, auf das Mittel jener zwey Zahlen, also hier auf 14, da $\frac{1}{2}(10 + 18) = 14$ ist.

Dann dreht man den Kreis *AB* blofs um 90 Grade weiter, so dafs die Axe *CH* jetzt durch die *dritte* jener Fufsschrauben geht, und bringt auch hier, aber *blofs* mittelst der Bewegung dieser dritten Schraube, die Blase wieder auf den letzten Theilstrich 14.

Dadurch hat man das Instrument dahin gebracht, dafs die Libelle in allen Lagen des Kreises *AB*, immer denselben Theilpunct 14 zeigt, zum Zeichen, dafs dieser Kreis nun selbst horizontal ist.

Gewöhnlich wird man, wenn der anfängliche Fehler des Kreises *AB* zu grofs ist, dieses Verfahren einige Mal wiederholen müssen, wodurch dann der Fehler bald sehr klein wird und endlich gänzlich verschwindet.

Will man dann auch, nach hergestellter Horizontalität dieses Kreises, die Libelle selbst noch genau rectificiren, so wird man nur, mittelst der eigenen Correctionsschraube dieser Libelle, die Luftblase derselben genau auf die Mitte der Glasröhre, oder auf den Theilstrich Null zurückführen, obschon diefs nicht nothwendig ist, da es schon, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, genügt, wenn die Luftblase, für den horizontalen Stand der Libelle, nicht zu weit von der Mitte der Glasröhre entfernt ist.

II. Um dann auch die Drehungsaxe *CH* des Verticalkreises *FG* horizontal (und sonach diesen Verticalkreis selbst genau senkrecht auf den Horizont) zu stellen, wird man (bey unveränderter Lage des unteren Kreises *AB*), dieselbe Libelle zuerst in einer, und dann auch in der entgegengesetzten Lage auf dieser Axe *CH* aufstellen, so dafs *dasselbe* Ende der Libelle zuerst nach *C*, und dann nach *H* zu stehen kömmt. Steht die Blase, in beyden Lagen der Libelle, bey verschiedenen Theilstrichen, z. B. bey 12 und 18, so wird man sie wieder auf das Mittel $\frac{1}{2}(12+18)=15$ bringen, und zwar (mittelst eigener dazu bestimmten Correctionsschrauben) durch Verlängerung oder Verkürzung der oben erwähnten vier Stützen, auf welchen die Endpuncte *C* und *H* dieser Axe ruhen. — Auch diese Operation wird man, wenn es nöthig ist, wiederholen, bis der noch übrige Fehler unmerklich wird.

III. Um endlich auch das Fadenkreuz im Brennpuncte des Fernrohrs gehörig zu stellen, richtet man dieses Kreuz auf einen weit entfernten und scharf begrenzten Gegenstand, und bewegt dabey das Ocular des Fernrohrs (in der für dasselbe bestimmten Röhre) so lange vor- oder rückwärts, bis der Gegenstand vollkommen deutlich erscheint.

Sieht man dann das Fadenkreuz undeutlich, so rückt man auch dieses Kreuz so lange vor oder zurück, bis dasselbe ganz scharf und schwarz erscheint, oder bis es den Punct des Gegenstandes, auf den man es gestellt hat, nicht mehr verläfst, wenn man auch das Auge vor dem Ocular hin und her bewegt.

Dadurch ist das Fadenkreuz in den Brennpunct des Fernrohrs gebracht.

Um dann den verticalen Faden desselben in der That genau vertical zu stellen, wird man diesen Faden, durch ein sanftes Bewegen des Fernrohrs in seiner Verticalebene, an einem scharf begrenzten Gegenstand, der ganzen Länge des Fadens nach, herabgehen lassen, und, wenn der Faden bey dieser Bewegung den Gegenstand verläſst, ihn um seinen Mittelpunct (durch eine eigens dazu bestimmte Schraube an dem Ocularende des Fernrohrs) drehen, bis dieser Fehler nicht mehr bemerkt wird. Dadurch ist nun auch der andere Faden horizontal geworden, da derselbe schon von dem Künstler auf den ersten senkrecht gestellt ist.

Um endlich noch denselben verticalen Faden des Kreuzes so zu stellen, daſs die durch ihre und durch die Mitte des Objectivs E gehende Ebene, senkrecht auf der Drehungsaxe CH (oder, was dasselbe ist, parallel mit dem Verticalkreise FG) wird, bringe man diesen Faden auf einen wohlbegrenzten Gegenstand und lese die Alhidade m des Horizontalkreises AB ab. Nehmen wir an, man habe so den Winkel $36^\circ 48' 20''$ gefunden. Dann dreht man diesen Kreis und mit ihm das Fernrohr genau um 180 Grade, wozu eine zweyte Lesung des Kreises AB das Mittel gibt, und bringt, in dieser zweyten Lage des Instruments, das Fernrohr, durch Umdrehung desselben in seiner Ebene, wieder auf den Gegenstand zurück. Wenn in dieser zweyten Lage die Alhidade m nicht genau um 180 Grade mehr, als zuvor, also nicht $216^\circ 48' 20''$, sondern z. B. $216^\circ 47' 50''$, also $30''$ zu viel zeigt, so verbessert man die Stellung des Kreises um die *Hälfte* dieses Fehlers, oder man stellt ihn auf $216^\circ 48' 5''$, und bringt dann (durch eine eigene an dem Fernrohre bey C angebrache kleine Schraube) den Faden genau auf den beobachteten Gegenstand zurück, so daſs die eine Hälfte des Fehlers durch Verrückung des Kreises, und die andere durch Verrückung des Fadens verbessert wird.

IV. Noch muſs bemerkt werden, daſs der Künstler nur selten denjenigen Punct des Verticalkreises, welcher dem Horizonte oder dem Zenith entspricht, durch 0° oder 90° bezeichnet hat, sondern daſs er diese Bestimmung des Anfangspuncts der Zählung dem Beobachter zu überlassen pflegt. Um diesen Punct zu finden, wird man denselben Gegenstand zweymal, mit umgewendetem Instrumente, beobachten, so daſs zuerst der Verticalkreis *FG* z. B. rechts und dann links von dem Beobachter steht, wenn der Gegenstand in beyden Beobachtungen an dem horizontalen Faden des Fernrohrs erscheint. Das Mittel aus den beyden Lesungen der Alhidade *n* des Verticalkreises wird den *höchsten* Punct dieses Kreises, oder denjenigen Punct geben, auf welchen der Kreis gestellt werden muſs, damit die Axe des Fernrohrs genau vertical oder gegen das Zenith gerichtet ist, so daſs daher auch der um 90 Grad vor oder nach ihm stehende Punct der gesuchte Horizontalpunct des Kreises *FG* seyn wird, von welchem anzufangen man alle beobachteten *Höhen* der Gegenstände zu zählen hat.

§. 144. (Höhen- und Azimutalkreis.) Ähnlich in Einrichtung und Gebrauch ist das in Fig. 52 abgebildete, mehr zu astronomischen Beobachtungen bestimmte, vorzüglich in England gebräuchliche Instrument. Man sieht auch hier den horizontalen Kreis *AB* (der auch Azimutalkreis genannt wird), und den verticalen Kreis *FG*, das Fernrohr *CE*, die beyde Kreise verbindende verticale Säule *K*, und das dreyfüſsige Gestelle, auf welchem das ganze Instrument ruht. Der Verticalkreis hat zwey einander gegenüberstehende Vereine *n* und *n*, und eine Druckschraube *D*, durch welche er an die Säule *K* so befestiget werden kann, daſs ihm mittelst der Micrometerschraube *L* noch eine kleine Bewegung in seiner Verticalebene verstattet ist, um den schon nahe auf das Object gestellten horizontalen Faden des Fernrohrs ganz genau auf dasselbe zu bringen. Eben so hat der Azimutalkreis drey Verniere bey *m*, *m* und *m*, und auch bey *d* und *l* seine Druck- und Micrometerschraube, mittelst welcher der Säule *K* sammt dem an ihr befestigten Verticalkreis noch etwas im Horizonte verschoben werden kann, während sich, wenn die Druckschraube *d* offen oder gelöst ist, Säule und Kreis im Horizonte frey drehen läſst. Eine ähnliche Schraube sieht man in *N*, durch welche der an das Fuſsgestelle befestigte Azimutalkreis selbst, und mit ihm demnach auch die Säule *K* und der Verticalkreis *FG*, noch einige Grade in horizontaler Richtung verstellt werden kann. Bey *M* sieht man das eine Ende der

Libelle, die an der Säule *K* befestiget ist, und die, wie bey dem Theodoliten, zur horizontalen Einstellung des Azimutalkreises *AB* dient, wodurch zugleich die darauf senkrecht gebaute Axe *K* und der mit dieser Axe parallel gestellte Kreis *FG* eine verticale Lage erhält. Bey *B*, *F* und *G* endlich sieht man die Loupen (Miscope), die sich über die ganze Peripherie ihrer Kreise bewegen lassen, und zur Ablesung der feinen Striche der Eintheilung dienen, welche an dem Rande der beyden Kreise angebracht ist. — Die Rectification dieses Instruments ist von der für den Theodoliten angegebenen nicht wesentlich verschieden *).

§. 145. (Höhenmessungen.) Gehen wir nun zu den mit diesen Instrumenten zu machenden Beobachtungen über, und beschäftigen wir uns unter diesen zuerst mit den Höhenmessungen.

Sey *AB* (Fig. 53) die gegebene Höhe, z. B. die eines Thurms, und *ACD* eine horizontale, auf *AB* senkrechte Gerade in dem Grunde, auf welchem der Thurm steht. Wenn man von dem Puncte *C* dieser Geraden zu dem Fuſspunct *A* des Thurms kommen kann, so messe man (mit der Meſskette oder der Meſsstange) die Linie *CA* und den Winkel $ACB = C$. Verzeichnet man dann, mittelst des verjüngten Maſsstabes (§. 132.) eine kleinere Gerade *ac*, die eben so viel Füſse vorstellt, als die auf dem Felde gemessene Linie *CA* in der That Fuſse hat, die also z. B. *n* Theile des Maſsstabes enthält, wenn die Länge *CA* gleich *n* Fuſs gefunden worden ist, und errichtet man an dem Endpuncte *a* derselben ein Loth (nach §. 129.), und an dem anderen Endpuncte *c* derselben einen Winkel *acb*, gleich dem beobachteten Winkel *C* (nach §. 131.), so wird die Figur *abc* der Zeichnung der Figur *ABC* auf dem Felde *ähnlich* seyn, und man wird daher nur die kleine Linie *ab* mit demselben Maſsstabe messen, wo dann, wenn dieselbe *m* Theile des Maſsstabes hat, auch sofort die gesuchte Höhe *AB* des Thurms auch *m* Fuſs betragen wird.

---

*) Der oben angezeigte Theodolit, wie er in dem k. k. polytechnischen Institute von Wien verfertiget wird, hat einen horizontalen Kreis von $7^8/_{10}$ Paris. Zoll, und einen verticalen von $5^8/_{10}$ Zoll im Durchmesser. Bey dem englischen Instrumente haben beyde Kreise einen Durchmesser von $3^2/_{10}$ Zoll, und beyde Instrumente werden in dem k. k. polytechnischen Institute von Wien, jenes für 280 fl. und dieses für 100 fl. österreich. Conv. Mzc. verfertiget.

I. Wir wollen künftig, der Kürze wegen, die Linien, wie ab und ac, und die Winkel, wie acb, in der Zeichnung oder auf dem Meſstische, welche auf dem Felde den Linien AB und AC, und dem Winkel ACB entsprechen, die diesen letzten Grössen *gemäſse* Linien und Winkel nennen. — Demnach wird man nur auf dem Papiere die Linie ac der AC, und den Winkel acb dem ABC gemäſs machen, um sofort auch die der gesuchten Höhe AB gemäſse Linie ab zu erhalten.

II. Genauer aber, als durch die sorgfältigste Zeichnung dieser Art, wird man diese Höhe AB durch *Rechnung* finden. Da man nämlich bereits die Linie AC und den Winkel ACB durch unmittelbare Beobachtung kennt, so hat man auch die gesuchte Höhe AB durch die Gleichung

$$AB = AC \, . \operatorname{Tang} C.$$

Ist z. B. $AC = 1000$ Fuſs und $C = 24^\circ 56' 50''$, so findet man $AB = 465.06875$ Fuſs.

Ganz eben so kann man auch verfahren, wenn man die Länge AC des Schattens, welchen der von der Sonne beschienene Thurm auf den Boden wirft, und überdieſs den Höhenwinkel $ACB = C$ der Sonne über dem Horizonte kennt. So weiſs man z. B. daſs die Höhe der Sonne am Mittag des 10. May zu Wien gleich $C = 59^\circ 24' 30''$ ist. Hat man daher die Länge des mittägigen Schattens eines Thurms $AC = 540$ Fuſs gefunden, so ist die Höhe desselben

$$AB = AC \, . \operatorname{Tang} C = 913.3934 \text{ Fuſs}.$$

III. Wenn man aber von keinem Puncte der horizontalen Ebene, auf welcher der Thurm steht, zu demselben kommen kann, weil z. B. ein Fluſs den Zutritt hindert, so wird man in dieser Ebene, nach irgend einer durch den Punct A gehenden Richtung, eine *Standlinie* (Basis) CD messen, und von den beyden Endpuncten C und D dieser Basis die Höhenwinkel $ACB = C$ und $ADB = D$ beobachten.

Dann könnte man wieder mittelst des verjüngten Maſsstabes das dem Dreyecke BCD *gemäſse* Dreyeck bcd verzeichnen, und von b auf die verlängerte Linie dc das Loth ba (nach §. 128.) herablassen, wo dann wieder dieses Loth, auf dem verjüngten Maſsstabe genommen, die der gesuchten Höhe BA des Thurms gemäſse Linie seyn wird.

Auch hier aber, wie überall, wird die Rechnung eine viel gröſsere Schärfe gewähren. Man hat nämlich (§. 109, III. Fall)

$$BC = CD \cdot \frac{\operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin}(C - D)} \quad \text{und} \quad AB = BC \cdot \operatorname{Sin} C,$$

so daſs man daher die gesuchte Höhe AB unmittelbar durch die Gleichung erhält:

$$AB = CD \cdot \frac{\operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin}(C - D)}.$$

Ex. Ist $CD = 967$ Fuſs, $ACB = C = 16^\circ 43' 5''$ und $ADB = D = 7^\circ 5' 13''$, so findet man

$$AB = 205.131 \text{ Fuſs}.$$

IV. Läſst sich endlich die Basis nicht in einer durch den Fuſspunct A des Thurms gehenden Richtung nehmen, wie in III. vorausgesetzt worden ist, so messe man auf dem den Thurm umgebenden horizontalen Boden in irgend einer anderen Richtung eine Basis CD (Fig. 54), und nehme von ihren beyden Endpuncten C und D, mit dem Theodoliten, die Winkel $ACD = C$ und $ADC = D$, so wie auch in einem dieser Endpuncte, z. B. in C, den Höhenwinkel $ACB = H$.

Dieſs vorausgesetzt, hat man wieder

$$AC = CD \cdot \frac{\operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin}(C + D)} \quad \text{und} \quad AB = AC \cdot \operatorname{Tang} H,$$

so daſs man daher für die gesuchte Höhe des Thurms erhält:

$$AB = CD \cdot \frac{\operatorname{Tang} H \cdot \operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin}(C + D)}.$$

Ex. Ist $CD = 650$ Fuſs, $C = 48^\circ 30'$, $D = 52^\circ 40'$ und $H = 36^\circ 20'$, so findet man

$$AB = 387.4688 \text{ Fuſs}.$$

§. 146. (Eine Distanz auf dem Felde messen, zu deren zwey Endpuncten man wohl gelangen, die man aber dem ungeachtet nicht unmittelbar nach ihrer ganzen Länge mit der Meſskette ausmessen kann.) Sey AB (Fig. 55) diese Distanz, zwischen deren zwey Endpuncten A und B z. B. ein Sumpf liegt, der die unmittelbare Messung der Linie AB unmöglich macht. Wenn es aber einen Punct C auf dem Felde gibt, von welchem aus man zu den beyden Endpuncten A und B gelangen kann, so messe man, mittelst der Meſskette, diese beyden Distanzen CA und CB.

Mit dem Meſstische. Man stelle den Meſstisch (§. 141.) über dem Puncte C auf. Sey c der Punct des Meſstisches, der genau über dem Puncte C des Bodens steht. Man lege das oben (§. 141.) erwähnte Diopterlineal an den Punct c, und drehe es um diesen Punct in die Richtungen cA und cB, bezeichne auf dem Meſstische diese Richtuugen durch die Linien $c\alpha$ und $c\beta$, und nehme dann auf den letzten Linien (mittelst des verjüngten Maſsstabes) die Längen ca und cb *gemäſs* den bekannten Distanzen CA und CB, so ist ab, auf den verjüngten Maſsstab genommen, die der AB gemäſse Linie, oder ab gibt, auf dem Maſsstabe, die gesuchte Länge AB.

Die Figur abc ist nämlich, durch das angezeigte Verfahren, der auf dem Felde gegebenen Figur ABC *ähnlich* geworden, also ist auch (§. 107.)

$$ca : ab = CA : AB,$$

wodurch die unbekannte Distanz AB gefunden wird.

Mit dem Theodoliten. Man messe, wie zuvor, die beyden Distanzen $BC = \alpha$ und $AC = \beta$, und mit dem Theodoliten den Winkel $ACB = C$.

Daraus könnte man wieder sofort, wie zuvor, ein dem Dreyecke ABC gemäſses Dreyeck abc verzeichnen, und aus dem letzten, mit dem verjüngten Maſsstabe, den wahren Werth der Seite ab oder AB finden.

Da es aber nicht zweckmäſsig wäre, so unvollkommene Methoden zu gebrauchen, während der Theodolit die Winkel mit so groſser Schärfe gibt, so wird es angemessener und genauer seyn, die gesuchte Distanz AB aus den drey Gröſsen α, β und C durch Rechnung aus der Gleichung zu bestimmen:

$$AB^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \operatorname{Cos} C.$$

Um diesen Ausdruck zur Rechnung mit Logarithmen bequemer zu machen, nehme man einen Hülfswinkel φ so an, daſs man hat

$$\operatorname{Tang}\varphi = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C}{\alpha - \beta} \cdot \sqrt{\alpha\beta},$$

so hat man

$$AB = \frac{\alpha - \beta}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Ex. Ist $BC = \alpha = 189.00$ Fuſs, $AC = \beta = 114.75$ Fuſs und $C = 107^\circ 48'$, so findet man

$$\varphi = 72^\circ 40' \text{ und}$$
$$AB = 249.29 \text{ Fuſs.}$$

§. 147. (Eine Distanz finden, zu deren einem Endpuncte man nur gelangen kann.) Nehmen wir nun an, daſs man von dem Puncte C (Fig. 56) wohl nach dem einen Endpuncte A der zu messenden Distanz AB, aber nicht zu dem anderen Endpuncte B gelangen kann.

Mit dem Meſstische. Man messe daher die Distanz CA, stelle dann den Meſstisch über C, so daſs der Punct c des Meſstisches genau über dem Punct C des Bodens stehe, und ziehe auf diesem Tische die Linie ca (mittelst des verjüngten Maſsstabes), der CA gemäſs, und auch die unbestimmte Gerade $c\beta$ nach dem Puncte B. Dann stelle man den Tisch über den Punct A so, daſs der bereits auf dem Tische verzeichnete Punct a genau über A, und die Linie ac nach C hin gerichtet sey. Man lege das Diopterlineal an den Punct a, richte es nach B und ziehe die unbegrenzte Gerade ab, welche die (schon früher gezogene) $c\beta$ irgendwo in b schneiden wird. Dadurch ist die Linie ab der gesuchten Distanz AB *gemäſs* gemacht, und die wahre Länge derselben kann daher, mittelst des verjüngten Maſsstabes, gefunden werden. — Es ist nämlich auch hier die Figur abc auf dem Tische der Figur ABC auf dem Felde ähnlich gemacht worden.

Mit dem Theodoliten. Nachdem man die Distanz $CA = \beta$ mit der Meſskette bestimmt, und an den Endpuncten C und A dieser Distanz die Winkel $ACB = C$ und $CAB = A$ mit dem Theodoliten gemessen hat, so erhält man sofort die gesuchte Distanz AB durch die Gleichung

$$AB = \beta \cdot \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}(A + C)}.$$

Ex. Ist $\beta = 738$ Fuſs, $A = 31^\circ 5' 0''$ und $C = 24^\circ 16' 13$, so findet man

$$AB = 368.734 \text{ Fuſs.}$$

§. 148. (Eine Distanz finden, zu deren keinem Endpuncte man gelangen kann.) Sey AB (Fig. 57) diese Distanz. Man messe in der Umgegend irgend eine Basis CD, stelle den Meſstisch an den einen Endpunct C dieser Basis, bemerke auf ihm den Punct c über C, und ziehe auf dem Tische die Länge cd in der Richtung nach D der gefundenen Basis CD *gemäſs*. Eben so ziehe man nach den Puncten A und B die in ihrer Länge unbestimmten Linien $c\alpha$ und $c\beta$.

Dann stelle man den Tisch auf den anderen Endpunct D der Basis, so daſs der bereits verzeichnete Punct d genau über D, und daſs die ebenfalls schon gezogene Linie dc nach C hin gerichtet sey. Endlich ziehe man noch von c nach A und B hin unbestimmte gerade Linien, welche die bereits verzeichneten Linien $c\alpha$ in a und $c\beta$ in b schneiden, so ist ab die der gesuchten Distanz AB gemäſse Gerade, weil auch hier die beyden Figuren $abcd$ und $ABCD$ einander ähnlich sind.

Mit dem Theodoliten. Man messe, wie zuvor, mit der Meſskette die Basis $CD = \alpha$, und beobachte, mit dem Theodoliten, an den beyden Endpuncten dieser Basis die Winkel

$$ACD = C, \quad BDC = D,$$
$$BCD = c, \quad ADC = d.$$

Dieſs vorausgesetzt, kennt man in dem Dreyecke ACD die Seite α, und die zwey ihr anliegenden Winkel C und d, so daſs man daher (nach §. 109, Fall III.) auch die Seiten AC und AD finden kann. — Eben so kennt man in dem Dreyecke BCD die Seite α, und ihre anliegenden Winkel D und c, woraus man also, wie zuvor, auch die Seiten BC und BD findet. Endlich kennt man in dem Dreyecke ABC, durch die vorhergehende Rechnung, die Seiten AC und BC, nebst ihrem eingeschlossenen Winkel $ACB = C - c$ [oder auch in dem Dreyecke ABD die Seiten AD und BD nebst ihrem eingeschlossenen Winkel $ADB = D - d$], so daſs man daher (nach §. 109, II.) auch die gesuchte Distanz AB durch Rechnung bestimmen kann.

Man hat nämlich, wenn man der Kürze wegen

$$AC = x \quad \text{und} \quad BC = y \quad \text{setzt:}$$

$$x = \frac{\alpha \operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin}(C + d)}, \quad y = \frac{\alpha \operatorname{Sin} D}{\operatorname{Sin}(D + c)},$$

$$\text{und} \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos}(C - c)}.$$

Ex. Ist $\alpha = 750$ Fuſs und

$$C = 110^\circ 0', \quad D = 117^\circ 30',$$
$$c = 37^\circ 40', \quad d = 38^\circ 20',$$

so erhält man

$$x = 886.090,\ y = 1584.023,$$

und daher

$$AB = 1562.807 \text{ Fufs.}$$

§. 149. (Berechnung eines Polygons.) Jedes Polygon läfst sich durch Diagonalen in Dreyecke zerlegen. Sind dann die nöthigen Winkel und wenigstens eine Seite dieser Dreyecke gegeben, so lassen sich dieselben nach den Vorschriften des §. 109. berechnen, wodurch demnach auch das Polygon vollständig bestimmt seyn wird.

Um diefs sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey in dem Sechsecke $AA'A''A'''A^{\text{IV}}A^{\text{V}}$ (Fig. 58) blofs die Seite $AA' = 450$, und überdiefs die folgenden Winkel durch Messung gefunden worden:

In dem Dreyecke

$$\begin{array}{llll}
AA'A'' & \ldots\ A = 86^0\,10'\,20'' & \ldots\ A' = 54^0\ 5'\,30'', \\
A'A''A''' & \ldots\ A' = 70\ \ 6\ 10 & \ldots\ A'' = 67\ 15\ \ 0, \\
A''A'''A^{\text{IV}} & \ldots\ A'' = 75\ 20\ 10 & \ldots\ A''' = 63\ 24\ 40, \\
A'''A^{\text{IV}}A^{\text{V}} & \ldots\ A''' = 58\ 36\ 50 & \ldots\ A^{\text{IV}} = 72\ 45\ 10.
\end{array}$$

Diefs vorausgesetzt, soll nun das Sechseck selbst in allen seinen Theilen durch Rechnung bestimmt werden. Man kann sich dazu wieder der Ausdrücke des §. 109, III. Fall bedienen, wodurch man erhalten wird:

Dreyeck $AA'A''$

$$A'' = 39^0\,44'\,10'' \ldots AA'' = 570.166$$
$$A'A'' = 702.377,$$

Dreyeck $A'A''A'''$

$$A''' = 42\ 38\ 50 \ldots A'A''' = 956.088$$
$$A''A''' = 974.856,$$

Dreyeck $A''A'''A^{\text{IV}}$

$$A^{\text{IV}} = 41\ 15\ 10 \ldots A''A^{\text{IV}} = 1322.081$$
$$A'''A^{\text{IV}} = 1430.282,$$

Dreyeck $A'''A^{\text{IV}}A^{\text{V}}$

$$A^{\text{V}} = 48\ 38\ \ 0 \ldots A'''A^{\text{V}} = 1820.089$$
$$A^{\text{IV}}A^{\text{V}} = 1626.924.$$

I. Das hier angezeigte Verfahren gibt zugleich das beste Mittel, eine Gegend, eine Provinz, selbst ein ganzes Land in einer Zeichnung, oder auf einer sogenannten *Karte* darzustellen; ein Mittel, das dem gewöhnlichen Verfahren mit dem Meſstische weit vorzuziehen ist. Hat man nämlich in der zu vermessenden Gegend irgend eine einzige Gerade AA' (die *Basis* des Dreiecknetzes) gemessen, und dann die Winkel dieser Dreyecke durch den Theodoliten bestimmt, und daraus, wie oben, die Seiten dieser Dreyecke berechnet, so wird man, in der zu entwerfenden Zeichnung, die Gerade AA', mittelst des Maſsstabes, durch eine dieser Geraden *gemäſse* Linie AA' darstellen, und aus ihren Endpuncten A und A', als aus Mittelpuncten, mit den jenen gefundenen Seiten AA'' und $A'A''$ gemäſsen Halbmessern zwey Kreisbogen beschreiben, die sich in einem Puncte A'' schneiden, der, mit A und A' verbnnden, das gesuchte Dreyeck $AA'A''$ der Zeichnung gibt. Beschreibt man dann eben so aus A' und A'' mit den Halbmessern $A'A'''$ und $A''A'''$ zwey Kreisbogen, so werden diese sich in einem Puncte A''' schneiden, der mit A' und A'' verbunden, das zweyte Dreyeck der Zeichnung gibt. Eben so wird man das dritte Dreyeck $A''A'''A^{\text{IV}}$ aus den beyden Puncten A'' und A''' und so fort alle übrigen Dreyecke verzeichnen und in die Karte legen können, wodurch man endlich ein vollständiges und getreues Bild der ganzen Gegend erhält.

II. Dadurch ist zugleich der *Umfang* des Sechseckes gegeben, der nämlich gleich

$$AA' + A'A''' + A'''A^{\text{V}} + A^{\text{IV}}A^{\text{V}} + A''A^{\text{IV}} + AA'',$$

oder gleich

$$6745.348 \text{ Toisen}$$

ist, wenn die oben gegebene Seite AA', wie zuvor, 450 Toisen beträgt.

Um die *Oberfläche* des Sechseckes zu erhalten, wird man die Flächen der einzelnen Dreyecke suchen. Da in dem ersten Dreyecke $AA'A''$ das Loth von A'' auf AA', oder da die *Höhe* dieses Dreyeckes über der Basis AA' gleich

$$AA'' \operatorname{Sin} A \quad \text{oder auch gleich} \quad A'A'' \operatorname{Sin} A'$$

ist, so hat man für die Fläche dieses Dreyeckes (§. 118, V.)

$$F = \tfrac{1}{2} AA' \,.\, AA'' \operatorname{Sin} A = \tfrac{1}{2} AA' \,.\, A'A'' \operatorname{Sin} A'.$$

Eben so erhält man für die Fläche des zweyten Dreyeckes $A'A''A'''$

$$F' = \tfrac{1}{2} A'A''.\ A'A''' \operatorname{Sin} A' = \tfrac{1}{2} A'A'''.\ A''A''' \operatorname{Sin} A'''$$

u. s. f. für alle übrigen. Die Summe aller dieser Flächen oder die gesuchte Fläche des Sechseckes wird gleich

2178536 Quadrattoisen

gefunden werden.

III. Zieht man noch durch den ersten Punct A des Sechseckes eine Gerade $AB'B''\ldots$, die mit der ersten Seite AA' den Winkel $A'AB' = 50^0\,48'\,20''$ bildet, und läſst man dann von den Scheiteln der Dreyecke auf diese Gerade AB^{v} die Lothe $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, ... herab, so lassen sich diese Lothe sowohl, als auch die Orte B', B'', B''', ... ihrer Fuſspuncte in der Geraden AB^{v} aus dem Vorhergehenden durch Rechnung bestimmen.

Zuerst sind nämlich die Winkel ω', ω'', ω'''..., unter welchen die Gerade AB^{v} von den Seiten $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{iv}$ und $A^{iv}A^{v}$ geschnitten wird, aus den gegebenen Winkeln dieser Dreyecke, und aus dem Winkel $A'AB' = \alpha = 50^0\,48'\,20''$ leicht zu finden. Man erhält für das aufgestellte Beyspiel

$$\begin{aligned}
\omega' &= 75^0\ \ 6'\,10'',\\
\omega'' &= 37\ \ 38\ \ 50,\\
\omega''' &= 78\ \ 56\ \ 30,\\
\omega^{iv} &= 28\ \ 18\ \ 20.
\end{aligned}$$

Sind so diese Gröſsen bekannt, so findet man die übrigen AB', $A'B'$, $B'\omega'$, ... durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
AB' &= AA' \operatorname{Cos}\alpha, & B''\omega' &= A''\omega' \operatorname{Cos}\omega',\\
A'B' &= AA' \operatorname{Sin}\alpha, & A''B'' &= A''\omega' \operatorname{Sin}\omega',\\
B'\omega' &= A'B' \operatorname{Cotang}\omega', & B''\omega'' &= A''B'' \operatorname{Cotang}\omega'',\\
A'\omega' &= A'B' \operatorname{Cosec}\omega', & A''\omega'' &= A''B'' \operatorname{Cosec}\omega'',\\
A''\omega' &= A'A'' - A'\omega', & A'''\omega'' &= A''A''' - A''\omega'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'''\omega'' &= A'''\omega'' \operatorname{Cos}\omega'',\\
A'''B''' &= A'''\omega'' \operatorname{Sin}\omega'',\\
B'''\omega''' &= A'''B''' \operatorname{Cotang}\omega''',\\
A'''\omega''' &= A'''B''' \operatorname{Cosec}\omega''',\\
A^{iv}\omega''' &= A'''A^{iv} - A'''\omega''' \text{ u. f.},
\end{aligned}$$

wo das Gesetz des Fortgangs dieser Ausdrücke auch für ein Polygon von mehr als sechs Seiten für sich klar ist.

So findet man in unserem Beyspiele

$$AB' = 284.379,$$
$$A'B' = 348.753,$$
$$B'\omega' = 92.778 \text{ u. f.}$$

Allein das folgende Verfahren wird auf einem noch einfacheren Wege zu demselben Zwecke führen.

§. 150. (Bestimmung der Lage der Hauptpuncte eines Polygons.) Wenn in einem Polygon $AA'A''A'''\ldots$ (Fig. 59) bloſs aus einer Seite AA' und aus den Winkeln, welche diese Seiten AA', $A'A''$, $A''A'''$, ... unter sich bilden, nach dem, was in dem vorhergehenden §. 119. gesagt worden ist, auch die übrigen Seiten durch Rechnung gefunden worden sind, so ist es oft noch angemessener und selbst zuweilen nothwendig, die Lage der Scheitelpuncte A', A'', A''', ... dieser Winkel zu kennen, wie dieſs z. B. bey der Aufnahme der Gegend eines Landes der Fall ist, wo A', A'', A''', ... ausgezeichnete Puncte, Berg- oder Thurmspitzen u. f. dieser Gegend bezeichnen, deren Oberfläche hier als eine Ebene angenommen wird.

Zu diesem Zwecke wird man in dem ersten Puncte A nach irgend einem mittleren Puncte C visiren und den Winkel $CAA' = \alpha$ beobachten, welchen diese Distanz CA mit der ersten, unmittelbar gemessenen Seite AA' des Polygons bildet. Gewöhnlich wählt man für diese Linie AC die *Mittagslinie* (oder den Meridian) des ersten Puncts A, wo dann der Winkel $CAA' = \alpha$ das *Azimut* des zweyten Puncts A' genannt wird.

Läſst man dann von den Puncten A', A'', A''', ... die Lothe $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, ... auf die Mittagslinie AC herab, so wird man die Lage der Puncte A', A'', A''', ... gegen die bekannte Mittagslinie kennen, wenn man für jeden dieser Puncte die erwähnten Lothe $A'B'$, $A''B''$, ... und die Distanz der Fuſspuncte B', B'', ... dieser Lothe in der Mittagslinie AC von dem ersten Punct A kennt.

Man nennt diese Distanzen AB', AB'', AB''', ... die *Abscissen*, und jene Lothe $B'A'$, $B''A''$, $B'''A'''$, ... die *Ordinaten* der gesuchten Puncte A', A'', A''', ..., und bezeichnet gewöhnlich jene durch x, und diese durch y. Beyde zusammen werden auch die *Coordinaten* dieser Puncte genannt.

Wir wollen nun sehen, wie man diese Coordinaten der Puncte A', A'', A''', . . . eines Polygons finden kann, wenn die Seiten desselben, und die Winkel, welche diese Seiten unter sich bilden (nach §. 149.) bekannt sind.

Nennen wir, wie zuvor, α den Winkel CAA' der ersten Seite AA' des Polygons mit der Mittagslinie AC des ersten Puncts A. Sey eben so

$\alpha' = AA'A''$ der Winkel der Seiten AA' und $A'A''$,
$\alpha'' = A'A''A'''$ » » » » $A'A''$ » $A''A'''$,
$\alpha''' = A''A'''A^{IV}$ » » » » $A''A'''$ » $A'''A^{IV}$ u. f.,

so sieht man sofort, daſs der Winkel der Mittagslinie
mit der verlängerten zweyten Seite $A''A' = \alpha + \alpha' - 180^0$,
» » » dritten » $A'''A'' = \alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180$,
» » » vierten » $A^{IV}A''' = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180$

ist u. s. f., und daſs man daher die folgenden einfachen Gleichungen hat:

$$AB' = AA' \operatorname{Cos} \alpha,$$
$$B'B'' = A'A'' \operatorname{Cos}(\alpha + \alpha' - 180),$$
$$B''B''' = A''A''' \operatorname{Cos}(\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180) \text{ etc.}$$

und

$$A'B' = AA' \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$A''B'' = A'A'' \operatorname{Sin}(\alpha + \alpha' - 180),$$
$$A'''B''' = A''A''' \operatorname{Sin}(\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180) \text{ etc.}$$

Nennt man daher $x = AB^{(n)}$ die Abscisse, und $y = A^{(n)}B^{(n)}$ die Ordinate irgend eines Punctes $A^{(n)}$ des Polygons, so hat man für die beyden Coordinaten dieses Punctes die Ausdrücke

$$x = AA' \operatorname{Cos} \alpha,$$
$$+ A'A'' \operatorname{Cos}(\alpha + \alpha' - 180),$$
$$+ A''A''' \operatorname{Cos}(\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180),$$
$$+ A'''A^{IV} \operatorname{Cos}(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180) \text{ etc.}$$

und

$$y = AA' \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$+ A'A'' \operatorname{Sin}(\alpha + \alpha' - 180),$$
$$+ A''A''' \operatorname{Sin}(\alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180),$$
$$+ A'''A^{IV} \operatorname{Sin}(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180) \text{ etc.};$$

und man sieht, daſs man durch diese beyden Gleichungen nicht bloſs die Coordinaten des genannten Punctes $A^{(n)}$, sondern auch zugleich die aller vorhergehenden Puncte A', A'', A''', ... bis $A^{(n-1)}$ erhält.

Bemerken wir noch, daſs man in der Zeichnung der Fig. 59 alle Puncte A', A'', A''', ... auf *derselben* Seite der Mittagslinie AC, der gröſseren Einfachheit wegen, angenommen hat, und daſs man daher, wenn einer dieser Puncte auf die andere, dem Azimute α entgegengesetzte Seite von AC fällt, auch den von AC abgewendeten Winkel der beyden Seiten, oder daſs man in diesem Falle statt dem Winkel α', α'', α''', ... die Ergänzung desselben zu 360° nehmen muſs.

Um das Vorhergehende auf das in §. 119. gegebene Beyspiel anzuwenden, hat man für das Polygon der Fig. 59 die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha &= CAA' = 50^\circ 48' 20'', \\ \alpha' &= AA'A'' = 54\ \ 5\ 30, \\ \alpha'' &= 360 - A'A''A''' = 292\ 45\ \ 0, \\ \alpha''' &= A''A'''A^{IV} = 63\ 24\ 40, \\ \alpha^{IV} &= 360 - A'''A^{IV}A^{V} = 287\ 14\ 50; \end{aligned}$$

so daſs demnach ist:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' - 180 &= 284^\circ 53' 50'', \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' - 2.180 &= 37\ 38\ 50, \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' - 3.180 &= 281\ \ 3\ 30, \\ \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{IV} - 4.180 &= 28\ 18\ 20. \end{aligned}$$

Da man aber die Seite AA', $A'A''$, $A''A'''$, ... des Polygons bereits aus §. 149. kennt, so hat man sofort für die gesuchten Coordinaten der Puncte A', A'', A''', ..., die wir in derselben Ordnung durch ξ, ξ', ξ'', ... und durch v, v', v'', ... bezeichnen wollen, die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{rlr|rlr} \xi = & AB' = & 284.379 & v = & A'B' = & 348.753 \\ & B'B'' = & 180.572 & & & -\ 678.769 \\ \xi' = & AB'' = & 464.951 & v' = & A''B'' = & -\ 330.016 \\ & B''B''' = & 771.878 & & & 595.440 \\ \xi'' = & AB''' = & 1236.829 & v'' = & A'''B''' = & 265.424 \\ & B'''B^{IV} = & 274.340 & & & -\ 1403.726 \\ \xi''' = & AB^{IV} = & 1511.169 & v''' = & A^{IV}B^{IV} = & -\ 1138.302 \\ & B^{IV}B^{V} = & 1432.395 & & & 771.444 \\ x = & AB^{V} = & 2943.564 & y = & A^{V}B^{V} = & -\ 366.858, \end{array}$$

wo die Zeichen — der Ordinaten, welche Zeichen unmittelbar aus den vorhergehenden trigonometrischen Ausdrücken für x und y hervorgehen, anzeigen, dafs diese Ordinaten auf der dem Azimut α entgegengesetzten Seite der Mittagslinie AC liegen.

I. Wenn auf diese Weise die Coordinaten aller Puncte der Gegend bekannt sind, so wird man sie noch bequemer, als durch die blofsen Dreyecke selbst nach §. 149, I., und zwar blofs mittelst eines verjüngten Mafsstabes, auf dem Papiere, ihrer Lage gemäfs, verzeichnen, oder man wird die Gegend in eine *Karte* bringen können.

II. Bemerken wir noch, dafs, wenn die Anzahl der Puncte $A, A', A'', \ldots$ sehr grofs ist, sich mehrere Hülfsmittel darbiethen, um die bey solchen gröfseren Operationen leicht möglichen Irrthümer zu vermeiden. So wird man z. B. um der in §. 149. gemessenen Winkel sicher zu seyn, nicht blofs in jedem Dreyecke zwey, sondern alle drey Winkel desselben messen, deren Summe dann, wenn die Beobachtungen gut sind, zwey rechten Winkeln gleich seyn müssen. — Zur Prüfung der berechneten Seiten des Polygons wird man nicht blofs die eine Seite AA' an dem einen Endpuncte der Vermessung, sondern auch noch eine zweyte, z. B. $A^{\text{iv}}A^{\text{v}}$ an dem anderen Endpuncte derselben, unmittelbar mit dem Mafsstabe, messen, die daher mit der nach §. 149. aus der ersten Seite AA' durch Rechnung gefundenen Seite $A^{\text{iv}}A^{\text{v}}$ übereinstimmen mufs. — Die Coordinatenberechnung des gegenwärtigen §. 150. endlich kann man auch dadurch prüfen, dafs man von A nach A^{v} auf der linken Seite der Mittagslinie, wie vorhin auf der rechten, fortgeht. So hat man z. B. wenn hier die Winkel, welche früher durch $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ bezeichnet wurden, nun durch $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ ausgedrückt werden, in unserem Beyspiele

$$\beta = BAA'' = 35^\circ 22' 0'',$$
$$\beta' = AA''A''' = 106\ 59\ 10,$$
$$\beta'' = 360 - A''A'''A^{\text{v}} = 237\ 58\ 30 \text{ u. f.};$$

also auch

$$\beta + \beta' - 180 = 322^\circ 21' 10'',$$
$$\beta + \beta' + \beta'' - 2.180 = 20\ 19\ 40 \text{ u. f.}$$

Setzt man daher wieder

$$x = AA'' \operatorname{Cos}\beta$$
$$+ A''A''' \operatorname{Cos}(\beta + \beta' - 100),$$
$$+ A'''A^{\text{iv}} \operatorname{Cos}(\beta + \beta' + \beta'' - 2.100),$$

und

$$y = AA'' \operatorname{Sin}\beta$$
$$+ A''A''' \operatorname{Sin}(\beta + \beta' - 180),$$
$$+ A'''A^{IV} \operatorname{Sin}(\beta + \beta' + \beta'' - 2.100) \text{ etc.};$$

so erhält man

$$\xi = AB'' = 464.951 \qquad v = A''B'' = 330.016$$
$$B''B''' = 771.878 \qquad\qquad - 595.440$$
$$\xi' = AB''' = 1236.829 \qquad v' = A'''B''' = -265.424 \text{ etc.}$$

wie zuvor, wo jetzt die auf der rechten Seite von AC liegenden Puncte negative Ordinaten haben.

III. So wie man aber in dem Vorhergehenden die Lage der Orte A', A'', A''', . . . gegen den ersten Beobachtungspunct A, und gegen die Mittagslinie AC dieses Punctes, durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y bestimmt hat, so kann man diese Lage auch durch die Entfernung r jener Orte von dem ersten Puncte A, und durch den Winkel φ bestimmen, welche diese Entfernung r mit der Mittagslinie AC bildet. Man hat nämlich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und wenn so die Distanz $r = AA''' = AA^{IV} = AA^{V}$, . . . bekannt ist, so findet man den Winkel φ aus

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{y}{r} \quad \text{oder} \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{x}{r},$$

oder endlich auch aus

$$\operatorname{Tang}\varphi = \frac{y}{x}.$$

§. 151. (Aus drey ihrer Lage nach bekannten Orten, und aus den Winkeln, welche die Distanz dieser Orte, aus einem vierten Orte gesehen, an diesem letzten Orte bilden, die Lage dieses vierten Ortes gegen jene drey finden.) Seyen A, B und C (Fig. 60) die drey bekannten Orte, und $AB = a$, $BC = b$, so wie der Winkel $ABC = \alpha$ gegebene Gröfsen.

Sey D der vierte Ort, an welchem man, mit dem Theodoliten, die Winkel $ADB = \beta$ und $BDC = \gamma$ beobachtet hat. — Man bestimme die Lage dieses vierten Orts D gegen die drey ersten A, B, C.

Sey der unbekannte Winkel $BAD = x$. Man setze der Kürze wegen die Summe der drey bekannten Winkel $\alpha + \beta + \gamma = \delta$.

Da die vier Winkel eines jeden Vierecks zusammen genommen 360 Grade betragen, so ist

$$x + \delta + BCD = 360 \quad \text{oder}$$
$$BCD = 360 - (\delta + x).$$

Dieſs vorausgesetzt, hat man in dem Dreyecke ABD

$$BD = \frac{a \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} \beta},$$

und eben so in dem Dreyecke BCD

$$BD = \frac{b \operatorname{Sin} (360 - (\delta + x))}{\operatorname{Sin} \gamma} = - \frac{b \operatorname{Sin} (\delta + x)}{\operatorname{Sin} \gamma}.$$

Setzt man beyde Werthe von BD einander gleich, so erhält man (§. 94, Gleichung C)

$$\frac{a \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} \beta} = - \frac{b}{\operatorname{Sin} \gamma} (\operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} x);$$

und daher, wenn man durch $\operatorname{Cos} x$ dividirt:

$$\operatorname{Tang} x = \frac{- b \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \delta}{a \operatorname{Sin} \gamma + b \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \delta}.$$

Um diesen Ausdruck zur Rechnung mit Logarithmen bequemer zu machen, sey

$$\operatorname{Tang} y = \frac{b \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \delta}{a \operatorname{Sin} \gamma},$$

so hat man

$$\operatorname{Tang} x = - \frac{\operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} y}{\operatorname{Sin} (\delta + y)}.$$

Kennt man aber auf diese Weise den Winkel x, so findet man auch die Distanzen des vierten Puncts D von den drey ersten durch die Gleichungen

$$AD = \frac{a \operatorname{Sin} (\beta + x)}{\operatorname{Sin} \beta},$$
$$BD = \frac{a \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} \beta},$$
$$CD = \frac{- b \operatorname{Sin} (\alpha + \beta + x)}{\operatorname{Sin} \gamma}.$$

Liegt der Punct B zwischen der Distanz AC und dem unbekannten Puncte D, oder liegt er in B', so muſs man für α nicht den Winkel $AB'C = \alpha'$, sondern das Supplement von α' zu 360 Graden, oder man muſs den *äuſseren* Winkel der beyden Seiten AB' und $B'C$ nehmen, weil nur dieser, nicht aber der innere, mit den drey übrigen Winkeln des Vierecks $AB'CD$ zusammen 360 Grade macht. Die verschiedenen Lagen des gesuchten Puncts D auſser oder auch in dem Dreyecke ABC ergeben sich von selbst durch die Beobachtung der Zeichen der vorhergehenden trigonometrischen Ausdrücke.

Als Beyspiel zu dieser in der Geodäsie wichtigen Aufgabe seyen die gegebenen Gröſsen

$$a = 1153.70, \quad b = 849.430 \text{ Fuſs},$$
$$\alpha = 112^\circ 25', \quad \beta = 27^\circ 31', \quad \gamma = 19^\circ 14'.$$

Dieſs vorausgesetzt, findet man aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\delta = 159^\circ 10', \quad y = 20^\circ 9' 56''.74,$$
$$\text{und} \quad x = 95^\circ 25' 42''.4;$$

und damit erhält man für die drey gesuchten Distanzen

$$AD = 3095.60,$$
$$BD = 2485.95,$$
$$CD = 2121\,56 \text{ Fuſs}.$$

Zwanzigstes Capitel.

Linien im Raume und Ebenen.

Einfachste Körper.

§. 152. (Erklärungen.) Nach der oben (§. 79, I.) gegebenen Erklärung der Ebene wird eine gerade Linie, von welcher *zwey* Puncte in einer Ebene liegen, *ganz* in diese Ebene fallen. Da aber dann die Ebene, in welcher diese Gerade liegt, noch um diese Gerade, als um eine Axe, gedreht werden kann, so wird die Lage einer Ebene nicht durch zwey, sondern erst durch *drey* Puncte bestimmt, wenn dieselben nicht in einer einzigen Ebene liegen. Demnach wird die Lage einer Ebene gegeben seyn, wenn sie durch die beyden Schenkel eines gegebenen Winkels, wenn sie durch die drey Scheitelpuncte eines gegebenen Dreyecks, oder wenn sie durch zwey gegebene parallele Linien geht.

Zweyer Flächen Durchschnitt ist eine Linie, und bey zwey Ebenen eine gerade Linie. — Haben zwey Ebenen, nach allen Seiten verlängert, keinen Durchschnitt, so sind sie parallel.

Eben so heiſst auch die Gerade einer Ebene parallel, wenn beyde, verlängert, sich nie begegnen.

§. 153. (Lothe auf Ebenen.) Seyen AC und BC (Fig. 61) zwey ihrer Lage nach im Raume gegebene gerade Linien, die sich in dem Puncte C schneiden. Durch diese Geraden gehe die Ebene FG, so daſs also auch diese Ebene (nach §. 152.) gegeben ist.

Ist dann eine dritte Gerade CM senkrecht auf die beyden ersten CA und CB, so ist diese Gerade CM offenbar auch senkrecht auf der Ebene ABC, also auch senkrecht auf *alle* Geraden, die man durch den Punct C dieses Lothes in der Ebene ziehen kann, d. h. eine auf CA und CB senkrechte Gerade CM ist auch senkrecht auf der ganzen durch den Winkel ACB gelegten und nach allen Seiten erweiterten Ebene.

In einem Puncte C einer Ebene FG kann man nur Ein Loth auf dieser Ebene errichten. Denn wenn zwey möglich sind, so lege man durch beyde, z. B. durch CM und Ca, eine Ebene, welche verlängert die Ebene FG in CA schneiden soll, so wird der Winkel $MCA = aCA = 90^0$ seyn, was unmöglich ist, da der Theil nicht seinem Ganzen gleich seyn kann.

Eben so läſst sich auch aus einem Puncte M auſser einer Ebene nur Ein Loth auf diese Ebene fällen. Denn wäre z. B. MC und MA senkrecht auf die Ebene FG, also auch, nach dem Vorhergehenden, beyde senkrecht auf die sie verbindende Gerade CA, so würde das Dreyeck CMA zwey rechte Winkel haben, was nicht seyn kann.

Eben so folgt, daſs, da das Loth MC von einem Puncte M auf eine Gerade CA oder CB (nach §. 106, III.) kürzer ist, als alle anderen schiefen Linien MA, MB, . . . daſs das Loth MC zugleich die kürzeste Distanz des Punctes M von der Ebene FG ist, und daher das eigentliche Maſs dieser Distanz des Punctes von der Ebene vorstellt.

§. 154. (Neigung der Ebenen gegen einander.) Sey MC (Fig. 62) ein Loth auf die Ebene Cab, und ab eine in dieser Ebene liegende unbegrenzte Gerade. Wenn man von dem Fuſspuncte C dieses Lothes in der Ebene eine Senkrechte CD auf jene Gerade ab zieht, und die Puncte D und M durch die Gerade DM verbindet, so wird auch MD senkrecht auf ab stehen.

Denn nimmt man von dem Puncte D auf der Geraden ab die Linie $DA = DB$, so ist auch (§. 110.) $CA = CB$, und daher in den beyden rechtwinkligen Dreyecken ACM und BCM (§. 108, II.) die Seite $MA = MB$, also ist auch das Dreyeck AMB gleichschenklig, und da, nach der Annahme, die Basis AB dieses Dreyecks AMB in D halbirt wird, so ist auch (§. 110.) MD senkrecht auf AB.

I. Ist daher AD senkrecht auf DC, so ist auch AD senkrecht auf DM, und daher (§. 153.) auch AD senkrecht auf die Ebene DCM.

II. Unter allen Winkeln CAM, CBM, . . . ist der Winkel CDM (der beyden Lothe MD und CD auf AB) der *gröſste*.

Denn für diesen letzten Winkel $CDM = D$ hat man

$$\operatorname{Sin} D = \frac{MC}{MD} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tang} D = \frac{MC}{CD},$$

und für jeden andern Winkel $CAM = A$ ist

$$\operatorname{Sin} A = \frac{MC}{MA} \quad \text{und} \quad \operatorname{Tang} A = \frac{MC}{CA}.$$

Aber nach §. 106, III. ist MA gröſser als MD, und eben so CA gröſser als CD, also ist auch §. 94, D. der Winkel D gröſser als jeder andere Winkel A.

III. Aus diesem Grunde nimmt man den Winkel $CDM = D$ für das *Maſs der Neigung* der beyden Ebenen ABC und ABM an, d. h. die Neigung zweyer Ebenen ist der Winkel der beyden Geraden DC und DM, welche durch irgend einen Punct D der Durchschnittslinie ab der beyden Ebenen, jede in einer dieser zwey Ebenen, auf diese Durchschnittslinie senkrecht gezogen werden.

Wenn daher eine dritte Ebene CDM auf die Durchschnittslinie ab zweyer gegebenen Ebenen ABC und ABM senkrecht gestellt wird, so ist der Winkel CDM (der Durchschnittslinien DC und DM jener Ebene mit den zwey gegebenen Ebenen) zugleich die *Neigung* der beyden gegebenen Ebenen gegen einander. Daher stehen auch zwey Ebenen auf einander senkrecht, wenn der erwähnte Winkel CDM ein rechter ist.

§. 155. (Neigung der Linien gegen Ebenen.) Die von dem Lothe MC (Fig. 62) gleich weit entfernten Linien MA, MB sind gleich. Denn in den bey C rechtwinkligen Dreyecken MCA und MCB ist die Seite MC gemeinschaftlich, und wegen der gleichen Entfernung sind auch die Winkel CMA und CMB einander gleich, also ist auch die Seite $MA = MB$ und der Winkel $CAM = CBM$.

Aus diesem Grunde nennt man *Neigung einer Linie MA gegen eine Ebene ACB* den Winkel MAC, welchen diese Linie MA mit einer Linie AC bildet, die in dieser Ebene durch A und durch den Fuſspunct C des Lothes MC geht, das von irgend einem Puncte M der Linie MA auf die Ebene ACB gefällt worden ist. Auch ist dieser Winkel MAC der gröſste unter allen Winkeln, welche die gegebene Linie MC mit irgend einer anderen in dieser Ebene liegenden Geraden, z. B. mit AB, bilden kann.

§. 156. (Lage paralleler Geraden zu einer gegebenen Ebene.) Ist MC (Fig. 62) senkrecht auf die gegebene Ebene ACB, so ist auch jede mit MC parallele Gerade ND senkrecht auf dieser Ebene. Denn eine durch diese beyden Parallelen gelegte Ebene schneidet die gegebene Ebene in CD. Sey daher AD senkrecht auf CD, so ist auch (§. 154.) AD senkrecht auf die Ebene $MCDN$, also der Winkel ADN ein rechter. Da aber MC senkrecht auf CD, und DN mit CM parallel ist, so ist auch der Winkel CDN ein rechter, und daher die Gerade DN senkrecht auf DC sowohl, als auch auf DA, also ist auch (§. 154, III.) DN senkrecht auf die gegebene Ebene ACB.

§. 157. (Winkel der Lothe von einem Puncte auf zwey Ebenen.) Ist MC (Fig. 61) senkrecht auf der gegebenen Ebene ACB oder FG, so ist auch jede durch MC gelegte Ebene, wie MCA, senkrecht auf dieselbe gegebene Ebene FG. Denn sey CA der Durchschnitt dieser zwey Ebenen, und sey, in der Ebene FG, die Gerade $C\alpha$ senkrecht auf CA. Da nach der Voraussetzung die Gerade MC senkrecht auf der Ebene FG ist, so ist sie auch (§, 153.) senkrecht auf jede der Linien CA und $C\alpha$, oder es ist $MC\alpha = 90^\circ$. Aber dieser Winkel (der beyden Lothe MC und αC auf den Durchschnitt CA der Ebenen MCA und FG) ist, nach §. 154, III., die *Neigung* dieser beyden Ebenen, also stehen auch, da $MC\alpha = 90$ ist, beyde Ebenen auf einander senkrecht.

I. Man lege durch MC noch eine zweyte Ebene MCB, so wird demnach diese Ebene MCB ebenfalls senkrecht auf der Ebene FG stehen. Man ziehe wieder $C\beta$ senkrecht auf CB, so steht $C\beta$ senkrecht auf der Ebene MB, so wie $C\alpha$ senkrecht auf der Ebene MA steht.

Nimmt man dann von den beyden rechten Winkeln αCA und βCB den Winkel βCA weg, so hat man

$$\text{Winkel } \alpha C\beta = ACB,$$

oder die Neigung zweyer Ebenen ist gleich dem Winkel der zwey

Lothe, die von irgend einem Puncte A der Durchschnittslinie dieser Ebenen auf diesen Ebenen errichtet werden.

II. Man ziehe von irgend einem Puncte N der Ebene FG die Gerade NA mit αC, und eben so die Gerade NB mit βC parallel, so wird auch (§. 156.) NA auf der Ebene MA, und NB auf der Ebene MB senkrecht stehen; und eben so werden auch die Geraden NA auf CA, und NB auf CB senkrecht seyn. Da aber in den beyden rechtwinkligen Dreyecken ADN und BDC die Winkel an D (nach §. 84, E.) unter sich gleich sind, so ist auch

$$\text{der Winkel } BNA = ACB,$$

also ist auch, da ACB gleich $\alpha C \beta$, d. h. gleich der Neigung der beyden Ebenen MCA und MCB ist, die Neigung zweyer Ebenen gleich dem Winkel ANB der zwey Lothe, die aus irgend einem Puncte N auf diese Ebenen herabgelassen werden.

§. 158. (Einfachste von Ebenen begrenzte Körper.) Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun zur Erklärung der einfachsten Körper über.

Prisma (Fig. 63) heiſst ein Körper, der zwischen zwey gleichen und parallelen Grundflächen ABC und abc, und zwischen so viel Parallelogrammen Ac, Cb, Ba eingeschlossen ist, als die Grundflächen Seiten haben.

Parallelepiped (Fig. 64) ist ein Prisma, dessen beyde gleiche und parallele Grundflächen, so wie die Seitenflächen, Parallelogramme sind, also ein von sechs Parallelogrammen eingeschlossener Raum, deren je zwey gegenüberstehende gleich und parallel sind. Stehen die Seitenflächen senkrecht auf ihren Grundflächen, so heiſst das Parallelepiped *senkrecht* oder *rechtwinklig*, sonst aber *schief*.

Würfel oder *Kubus* ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen sechs Seiten alle gleich groſse Quadrate sind (Fig. 65).

Pyramide (Fig. 66) ist ein Körper, der von einer Grundfläche ABC, die ein Polygon bildet, und von so viel in einem Puncte D auſser der Grundfläche sich vereinigenden Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen ist. Prismen und Pyramiden werden, nach der Zahl ihrer Seitenflächen, in 3, 4, 5, . . . seitige eingetheilt, und diejenigen geraden Linien AD, *BD*, *CD*, welche diese Seitenflächen verbinden, heiſsen die *Kanten* dieser Körper.

Alle bisher angeführten Körper werden auch *Polyëder* (vielseitige Körper) genannt, und unter ihnen sind die, welche durchaus von gleichen regelmäſsigen Polygonen unter gleichen Winkeln begrenzt sind, *regelmäſsige Polyëder*, deren es aber nur fünf verschiedene gibt, nämlich:

das *Tetraëder*, von vier,
das *Octaëder*, von acht, und
das *Icosaëder*, von zwanzig (gleichen und gleichseitigen) Dreyecken begrenzt; ferner
das *Hexaëder* (oder den oben erwähnten Kubus), das von sechs gleichen Quadraten, und endlich
das *Dodecaëder*, das von zwölf gleichen regelmäſsigen Fünfecken eingeschlossen ist.

§. 159. (Cylinder, Kegel und Kugel.) Der *Cylinder* (Fig. 67) entsteht, wenn eine Gerade *AB* mit einem ihrer Puncte *A* in einer gegebenen krummen Linie *Amn* fortgeht, und dabey einer anderen festen Geraden *CD*, der *Axe* des Cylinders, immer parallel bleibt.

Der *Kegel* (oder Conus) *ABD* (Fig. 68) entsteht, wenn eine Gerade *AD* mit einem ihrer Puncte *A* in einer gegebenen krummen Linie *Amn* fortgeht, und dabey immer durch einen festen Punct *D*, den *Scheitel* des Kegels, geht.

Ist die krumme Linie (Fig. 67 und 68) ein Kreis, dessen Mittelpunct *C* ist, so heiſsen Cylinder und Kegel *von kreisförmiger Basis*, und die Gerade *CD* ist die Axe derselben. Steht überdieſs diese Axe senkrecht auf der Ebene des Kreises, so heiſsen Cylinder und Kegel *senkrecht*, sonst aber *schief*.

Höhe aller der bisher genannten Körper nennt man die senkrechte Distanz zweyer einander gegenüberstehenden parallelen Grundflächen, oder, bey Pyramiden und Kegeln, die senkrechte Distanz des Scheitels *D* (Fig. 66, 68) von der Grundfläche.

Kugel oder *Sphäre* ist ein von einer krummen Fläche ringsum eingeschlossener Raum, dessen Puncte alle von einem innern Puncte, den *Mittelpunct* der Kugel, gleich weit entfernt sind. Diese Entfernung wird der *Halbmesser* (Radius) der Kugel genannt. Die Kugel entsteht daher durch die Bewegung eines Halbkreises um seinen Durchmesser.

§. 160. (Parallelepipede von gleichem Volum.) Parallelepipede von gleicher Basis und Höhe haben auch gleiches Volum, d. h. sie schliefsen gleich grofse körperliche Räume ein, oder sie sind äquivalent.

Seyen $ABCD$ (Fig. 69) und $a\beta\delta c$ zwey parallele Ebenen. Die zwischen ihnen enthaltenen Parallelepipede

$$AdBc \text{ und } A\delta B\gamma$$

haben eine gemeinschaftliche Grundfläche $ABCD$, und, da sie zwischen zwey parallelen Ebenen liegen, auch *dieselbe Höhe*. Diefs vorausgesetzt, wird man (ganz wie in §. 117. bey ganz ähnlich liegenden Parallelogrammen) leicht zeigen, dafs das zwischen denselben Ebenen enthaltene Prisma $ACac\alpha\gamma$ gleich dem Prisma $BDbd\beta\delta$ ist. Nimmt man von jedem dieser beyden Körper das Prisma

$$MNbd\alpha\gamma$$

weg, und addirt dafür zu jedem derselben das Prisma

$$MNABCD,$$

so folgt, dafs die beyden Parallelepipede

$$AdBc \text{ und } A\delta B\gamma$$

äquivalent sind.

Dasselbe findet man auch, wenn der Punct γ in d, oder auch, wenn γ zwischen die Puncte c und d fällt.

Verlängert man dann in derselben Ebene $ac\beta\delta$ die Geraden $\gamma\alpha$ und $\delta\beta$, und nimmt man $\gamma'\alpha' = \gamma a$ und $\delta'\beta' = \delta\beta$, so ist auch $\gamma\delta = \gamma'\delta'$ und $\alpha\beta = \alpha'\beta'$. Verbindet man endlich die Puncte $A\alpha'$ und $B\beta'$ . . . unter sich durch gerade Linien, so entsteht ein drittes Parallelepiped

$$A\delta'B\gamma',$$

welches, nach dem so eben Gesagten, dem zweyten $A\delta B\gamma$ äquivalent ist; und da dieses zweyte bereits dem ersten $AdBc$ äquivalent gefunden wurde, so sind auch alle drey unter sich äquivalent, d. h. Parallelepipede von gleicher Basis und gleicher Höhe haben auch gleiches Volum.

§. 161. (Ausmessung des Volums eines Parallelepipeds.) Wenn sich die drey Kanten AB, AC und AD eines *rechtwinkligen* Parallelepipeds $ABDF$ (Fig. 70) durch eine kleinere Linie $A\beta$ vollkommen ausmessen lassen, so nehme man

$$A\beta = A\gamma = A\delta,$$

und errichte über der Linie $A\beta$ den Würfel $A\beta\delta\varepsilon$. Dieser Würfel wird sich so oft auf die erste Kante AB legen lassen, als $A\beta$ in AB enthalten ist, und eben so oft auf die zweyte Kante AC und auf die dritte AD, als wieder $A\beta$ in AC und in AD enthalten ist.

Ist daher die Seite $A\beta$ des Würfels z. B. a mal in AB, b mal in AC, und c mal in AD enthalten, so wird das Volum des ganzen rechtwinkligen Parallelepipeds eine Anzahl von

$$a.b.c$$

dieser kleinen Würfel enthalten, also auch abc Kubikzolle oder abc Kubikfuſse u. f. enthalten, wenn die Seite $A\beta$ des Würfels einen Zoll, oder einen Fuſs u. f. beträgt.

Wenn daher die drey Kanten AB, AC und AD als Zahlen a, b, c betrachtet werden, deren Einheit die kleine Linie $A\beta$ ist, so drückt das dreyfache Product abc das Volum des Parallelepipeds aus. Man nennt AB die *Länge*, AC die *Breite*, und AD die *Höhe* des rechtwinkligen Parallelepipeds, und das Volum desselben ist daher gleich dem Producte dieser drey *Dimensionen* des Körpers.

Da überdieſs der Flächeninhalt der Basis $ABCE$ (nach §. 118.) gleich ist dem Producte ab der beyden ersten Dimensionen, so ist auch das Volum des senkrechten Parallelepipeds gleich dem Producte der Basis in die Höhe desselben.

I. Da endlich, nach §. 160, Parallelepipeda von gleicher Basis und Höhe auch äquivalent sind, so ist überhaupt das Volum eines jeden Parallelepipeds gleich dem Producte der Basis in seine Höhe.

II. Also wird auch für den Würfel, dessen Seitenkante a ist, das Volum desselben gleich a^3 seyn.

Das Vorhergehende setzt voraus, daſs sich alle drey Kanten des Parallelepipeds durch eine kleinere Linie $A\beta$ vollkommen ausmessen lassen. Wenn aber diese drey Seiten unter sich incommensurabel sind, so wird man, wie in §. 118, I. zeigen, daſs dieser Fall sich immer auf den vorhergehenden zurückführen läſst, wenn man nur die Linie $A\beta$ kleiner nimmt, als jede andere noch angebbare Gröſse.

§. 162. (Ausmessung des Prismas und der Pyramide.) Wenn man in den beyden Grundflächen eines Parallelepipeds (Fig. 64) die Diagonalen AC und ac zieht, so werden dadurch diese Grundflächen (§. 116) halbirt, und da diese Diagonalen mit den beyden Kanten Aa und Cc des Parallelepipeds in derselben Ebene liegen, so wird auch das Parallelepiped selbst durch diese Ebene $AaCc$ halbirt, d. h. in zwey äquivalente dreyseitige Prismen ACb und ACd getheilt, welche beyde dieselbe Höhe mit dem Parallelepiped, aber nur die Hälfte der Basis derselben zu ihrer Basis haben. Daraus folgt, daſs das Volum eines dreyseitigen Prismas gleich ist dem Producte der Basis dieses Prismas in die Höhe desselben.

Da sich aber auch die Basis jedes anderen mehrseitigen Prismas durch Diagonalen in Dreyecke theilen läſst, so wird überhaupt das Volum jedes Prismas gleich dem Producte seiner Basis in die Höhe desselben seyn.

I. Eben so wird auch das Volum einer Pyramide gleich irgend einem Theile des Volums desjenigen Prismas seyn, das mit der Pyramide gleiche Basis und Höhe hat. Sey B die Basis und H die Höhe dieses Prismas, so wird demnach das Volum der Pyramide gleich $x.BH$ gesetzt werden können, wo x irgend einen noch unbekannten Factor bezeichnet, welchen wir nun näher bestimmen wollen.

Sey in dem senkrechten dreyseitigen Prisma (Fig. 63) $AbBC$ die Kante $AC = ac = a$ und $BD = b$ das Loth von B auf AC, oder auch $bd = b$ das Loth von b auf ac. Endlich sey $Aa = Bb = Cc = c$ die Distanz der beyden Grundflächen des Prismas. — Dieſs vorausgesetzt, wird eine Ebene durch die drey Puncte B a und c das Prisma in zwey Pyramiden theilen, nämlich in die dreyseitige $abcB = \text{I}$, und in die vierseitige $ACacB = \text{II}$.

Für die erste dieser zwey Pyramiden ist die Basis $B = \frac{1}{2}ab$ und die Höhe $H = c$. — Für die zweyte aber ist die Basis $B = ac$ und die Höhe $H = b$, so daſs wir demnach, unserer oben angenommenen Bezeichnung zu Folge, haben werden für das Volum

der Pyramide I . . . $x \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c$,

» » II . . . $x \cdot ac \cdot b$.

Da aber die Summe dieser zwey Pyramiden gleich dem gegebenen Prisma, und da das Volum dieses Prismas, nach dem Vorhergehenden, gleich dem Producte der Basis in die Höhe desselben, oder gleich $\frac{1}{2} ab \cdot c$ ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2} ab \cdot c = x \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c + x \cdot ac \cdot b,$$

oder wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch abc dividirt:

$$x = \frac{1}{3},$$

d. h. das Volum einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Volums eines Prismas, das dieselbe Basis und Höhe hat, selbst wenn diese Basis nicht dreyseitig, und beyde Körper nicht senkrecht (§. 159.) sind, oder das Volum jeder Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Products der Basis in die Höhe derselben.

II. Die *Oberfläche* eines Prismas oder einer Pyramide aber, die Basis derselben ungezählt, ist offenbar gleich der Summe der Flächen der diese Körper begrenzenden Seiten, die bey dem Prisma Parallelogramme, und bey der Pyramide Dreyecke sind. Haben daher alle diese Parallelogramme oder Dreyecke dieselbe Höhe h, und nennt man b die Summe der die Basis begrenzenden Kanten, so ist (§. 118.)

die Oberfläche des Prismas gleich . . . bh,

und die der Pyramide gleich . . . . . $\frac{1}{2} bh$.

§. 163. (Ausmessung des Cylinders und des Kegels.) Da sich bey senkrechten Cylindern und Kegeln mit kreisförmiger Basis diese Basis (nach §. 124.) als ein regelmäſsiges Polygon von unzählig vielen Seiten betrachten läſst, so kann man das Vorhergehende auch unmittelbar auf diese beyden Körper anwenden.

Ist nämlich r der Halbmesser der kreisförmigen Basis, also auch (§. 124, V.) $2r\pi$ die Peripherie und $r^2\pi$ die Fläche dieser Basis, so hat man

für das Volum des Cylinders den Ausdruck . $r^2 \pi \cdot h = r^2 h \pi$,

und für das Volum des Kegels . . . . $r^2 \pi \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3} r^2 h \pi$.

Die Seitenfläche des Cylinders aber, ohne die beyden Grundflächen, oder die sogenannte Mantelfläche des Cylinders, wird gleich $2 r h \pi$, und eben so die Mantelfläche des Kegels gleich $r k \pi$ seyn, wo $k = \sqrt{r^2 + h^2}$ die Seitenlinie oder die Kante, und h die Höhe des Kegels bezeichnet.

I. Ist $D a b$ (Fig. 68.) dieser Kegel, in welchem der Halbmesser der Basis $a c = b c = r$ und die Kante $a D = b D = k$ ist, und erweitert man alle diese Kanten um dieselbe Gröſse $a A = b B$, so erhält man einen zweyten Kegel $A B D$, für welchen wir den Halbmesser der Basis $A C = B C = R$ und die Kante $A D = B D = K$ annehmen wollen.

Da die Mantelfläche des ersten Kegels gleich $r k \pi$, also auch die des zweyten gleich $R K \pi$ ist, so hat man, wenn man beyde von einander subtrahirt, für die Mantelfläche x des *abgestumpften Kegels* $A B b a$ den Ausdruck

$$x = (R K - r k) \cdot \pi.$$

Setzt man aber die Kante dieses abgestumpften Kegels $A a = K - k = m$, so hat man, wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke $A C D$ und $a c D$:

$$K = \frac{m R}{R - r} \quad \text{und} \quad k = \frac{m r}{R - r},$$

so daſs man daher für die gesuchte Mantelfläche des abgestumpften Kegels erhält

$$x = \frac{(R^2 - r^2)}{R - r} \cdot m \pi,$$

oder, da $R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$ ist:

$$x = (R + r) \cdot m \pi.$$

§. 164. (Verhältnisse ähnlicher Polyëder.) Zwey Polyëder sind ähnlich, wenn ihre in derselben Ordnung auf einander folgenden Seitenflächen ähnliche Figuren bilden.

Seyen $A B C O$ und $a b c O$ (Fig. 71) zwey ähnliche Pyramiden mit dreyseitigen Grundflächen. Seyen G und g diese Grundflächen, und $O D = H$, $O d = h$ die Lothe, die man von ihren Scheiteln O auf diese Grundflächen herabgelassen hat. Endlich wollen wir noch das Volumen dieser Pyramiden durch V und v bezeichnen.

Da der gegebenen Erklärung ähnlicher Pyramiden zu Folge die Grundflächen derselben ähnliche Figuren sind, so hat man (§. 124.)

$$G : g = AB^2 : ab^2,$$

wo man statt $\frac{AB}{ab}$ auch das Verhältnifs jeder zwey anderen homologen Kanten, z. B. $\frac{AC}{ac}$, $\frac{OA}{oa}$, $\frac{H}{h}$ u. f. substituiren kann.

Daraus folgt sofort, dafs die Grundflächen, also auch je zwey andere homologe Seitenflächen, also auch die *ganzen Oberflächen* zweyer ähnlicher Pyramiden sich verhalten, wie die Quadrate ihrer homologen Linien.

I. Wählt man das letzte der oben erwähnten Verhältnisse, so hat man

$$G : g = H^2 : h^2.$$

Multiplicirt man aber diese Proportion durch die folgende

$$\tfrac{1}{3}H : \tfrac{1}{3}h = H : h,$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{3}GH : \tfrac{1}{3}gh = H^3 : h^3,$$

also auch, da $V = \frac{1}{3}GH$ und $v = \frac{1}{3}gh$ ist:

$$V : v = H^3 : h^3,$$

oder die Volumina zweyer ähnlichen Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder überhaupt wie die Würfel ihrer homologen Seiten.

II. Da sich aber alle ähnliche Polyëder in solche ähnliche und ähnlich liegende dreyseitige Pyramiden auflösen lassen, so seyen V und v die zwey ersten dieser Partialpyramiden der beyden Polyëder, und A, a zwey homologe Linien derselben, z. B. die zwey Kanten, welche diese Pyramiden mit den zweyten ihnen zunächst anliegenden Partialpyramiden V' und v' verbinden. Seyen eben so B und b die zwey Kanten, welche diese zweyten Pyramiden mit den ähnlichen nächstfolgenden dritten verbinden, und C, c die Kanten, welche diese dritten Pyramiden mit den ihnen anliegenden vierten verbinden u. f., so hat man nach dem Vorhergehenden

$$V : v = A^3 : a^3,$$
$$V' : v' = B^3 : b^3,$$
$$V'' : v'' = C^3 : c^3 \text{ u. f.}$$

Da aber, wegen der Ähnlichkeit der beyden Polyëder, die Proportionen bestehen:

$$B : b = A : a,$$
$$C : c = A : a \text{ u. f.},$$

so hat man auch

$$V : v = A^3 : a^3,$$
$$V' : v' = A^3 : a^3,$$
$$V'' : v'' = A^3 : a^3 \text{ u. f.},$$

und daher

$$V + V' + V'' + \ldots : v + v' + v'' + \ldots = A^3 : a^3,$$

woraus sofort folgt, dafs in ähnlichen Polyëdern die Volumina derselben sich verhalten, wie die Würfel ihrer homologen Linien, während sich, nach dem unmittelbar Vorhergehenden, die Oberflächen dieser Polyëder wie die Quadrate ihrer homologen Linien verhalten.

III. Dasselbe wird sich auch auf ähnliche, von krummen Flächen begrenzte Körper anwenden lassen. So werden aller Kugeln Oberflächen sich wie die Quadrate, und ihre Volumina wie die Würfel ihrer Halbmesser verhalten.

Ein und zwanzigstes Capitel.

Das Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel, oder sphärische Trigonometrie.

---

§. 165. (Erklärungen.) So wie wir in dem Vorhergehenden das Dreyeck, in welches sich alle anderen Polygone auflösen lassen, mit besonderer Sorgfalt betrachtet haben, so werden wir auch hier, wo wir uns mit der Bestimmung der Polyëder und der übrigen Körper beschäftigen, vor allen die *dreyseitige Pyramide* näher untersuchen, da in diese, als in den einfachsten aller Körper, jeder andere Körper aufgelöst werden kann, so dafs uns daher die nähere Kenntnifs dieser Pyramide zur Untersuchung der Polyëder und überhaupt aller Körper eben so nützlich seyn wird, als es die des Dreyecks zur Bestimmung der ebenen Figuren gewesen ist.

Jede solche dreyseitige Pyramide, wie $ABCO$ (Fig. 72), deren drey Kanten OA, OB, OC wir hier, gleich den Schenkeln eines Winkels, unbegrenzt annehmen, enthält *sechs* Bestimmungsstücke, nämlich erstens die drey Winkel, welche die Kanten unter sich bilden, und dann die drey Winkel, unter welchen die drey, durch je zwey jener Kanten gelegten Ebenen, oder unter welchen die drey Seitenflächen der Pyramide gegen einander geneigt sind.

Wir wollen die drey ersten dieser Bestimmungsstücke die *Seiten*, und die drey anderen die *Winkel* der Pyramide nennen, und jene (wie oben §. 87, II. für das Dreyeck) durch α, β, γ, diese aber durch A, B, C bezeichnen, so dafs man hat für die Seiten der Pyramide

$$BOC = \alpha,$$
$$AOC = \beta,$$
$$AOB = \gamma,$$

und für die Neigungswinkel der drey Ebenen

an AO den Winkel A,
» BO » » B,
» CO » » C.

I. Diefs vorausgesetzt, wollen wir uns in dem Scheitel O dieser Pyramide zugleich den Mittelpunct einer Kugel vorstellen, deren unbestimmten Halbmesser wir für die Einheit annehmen, so dafs die drey Kanten OA, OB, OC der Pyramide die Oberfläche jener Kugel in den drey Puncten A, B, C treffen, welche Puncte demnach von dem Mittelpuncte O alle um dieselbe Gröfse, um den Halbmesser der Kugel, entfernt sind. Die Oberfläche dieser Kugel wird daher von den drey Seitenflächen der Pyramide

oder von der Ebene AOB in dem Kreisbogen AB,
von AOC » » » AC,
und von BOC » » » BC

geschnitten werden, und diese Kreisbogen werden sämmtlich solchen Kreisen, deren Mittelpunct O mit dem der Kugel zusammenfällt, oder sie werden sogenannten *gröfsten Kreisen* der Kugel angehören, so dafs auch ihre Halbmesser, wie jener der Kugel selbst, der Einheit gleich sind.

Dadurch entsteht demnach auf der Oberfläche der Kugel ein von drey Bogen gröfster Kreise dieser Kugel eingeschlossener Raum ABC, den man ein *sphärisches Dreyeck* zu nennen pflegt. Die *Seiten* dieses Dreyecks oder die erwähnten Kreisbogen sind (nach §. 84, *H.*) die Mafse der Winkel, welche die Kanten der Pyramide unter sich bilden, oder sie sind die Mafse der Seiten der Pyramide, so dafs man daher für diese Seiten des sphärischen Dreyeckes die mit den vorigen Gröfsen α, β, γ gleichbedeutenden Bezeichnungen hat:

$$BC = \alpha, \quad AC = \beta \quad \text{und} \quad AB = \gamma.$$

Wenn man ferner in dem Puncte A der Kugelfläche, zu dem Kreisbogen AB sowohl, als auch zu dem Bogen AC eine Tangente zieht, so steht (nach §. 115.) jede dieser Berührungslinien in dem Puncte A senkrecht auf dem Halbmesser OA, d. h. senkrecht auf der Durchschnittslinie OA der beyden Ebenen AOB und AOC, also ist auch der Winkel dieser zwey Berührungslinien, und daher auch der Winkel, welchen die beyden Kreisbogen AB und AC unter sich in dem Puncte A bilden (nach

§. 154, III.), gleich dem Winkel der beyden Ebenen AOB und AOC, d. h. gleich demjenigen *Winkel* der Pyramide, den wir oben durch A bezeichnet haben.

Dasselbe wird auch von den beyden andern Winkeln B und C der Kreisbogen ABC und ACB gelten, von welchen der erste gleich dem Winkel B, und der zweyte gleich dem Winkel C der Pyramide ist, so daſs man daher für die drey Winkel des sphärischen Dreyecks wieder die vorhergehenden Bezeichnungen

$$BAC = A, \quad ABC = B \quad \text{und} \quad ACB = C$$

haben wird, die wir, wie oben für das ebene Dreyeck, auch hier und in der Folge für das sphärische beybehalten wollen.

§. 166. (Grundgleichung des sphärischen Dreyecks.) Lassen wir von dem Puncte C (Fig. 72) in der Ebene COA auf die Gerade OA ein Loth Ca herab, und errichten wir durch diesen Punct a in der Ebene AOB auf dieselbe Gerade OA wieder ein Loth ab, so daſs demnach die beyden Linien aC und ab in dem Puncte a auf den Durchschnitt OA der beyden Ebenen BOA und COA senkrecht stehen. Dieſs vorausgesetzt, wird der Winkel Cab, welchen diese beyden Lothe unter sich bilden (nach §. 154, III.), gleich dem Neigungswinkel der beyden erwähnten Ebenen seyn, oder es wird der Winkel

$$Cab = CAB = A$$

seyn, und man wird daher in den zwey ebenen Dreyecken Cab und OCb (nach §. 91.) die beyden Gleichungen haben

$$Cb^2 = ab^2 + aC^2 - 2ab \cdot aC \cdot \text{Cos}\, A \quad \text{und}$$
$$Cb^2 = 1 + bO^2 - 2bO \cdot \text{Cos}\, \alpha.$$

Allein es ist auch, der vorhergehenden Erklärung unserer Verzeichnung gemäſs:

$$ab = aO \cdot \text{Tang}\, \gamma,$$
$$aC = aO \cdot \text{Tang}\, \beta,$$
$$bO = \frac{aO}{\text{Cos}\, \gamma} \quad \text{und}$$
$$aO = CO\, \text{Cos}\, \beta = \text{Cos}\, \beta.$$

Substituirt man diese Werthe in den beyden obigen Gleichungen, und setzt dann die beyden Ausdrücke von Cb einander gleich, so erhält man

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,A,$$

und diese Gleichung gibt den Winkel A des sphärischen Dreyecks, wenn die drey Seiten α, β, γ desselben bekannt sind.

Durch dasselbe Verfahren, auf die beyden andern Puncte A und B angewendet, oder auch, durch die bloſse bereits oben (§. 91, II.) erwähnte Verwechslung der Zeichen, wird man auch die beyden analogen Ausdrücke für $\text{Cos}\,B$ und $\text{Cos}\,C$ erhalten, so daſs man demnach die drey Gleichungen hat:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,A \\ \text{Cos}\,\beta = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,B \\ \text{Cos}\,\gamma = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,C \end{array}\right\} \ldots (\text{A}),$$

und dieſs ist die gesuchte Fundamentalgleichung des sphärischen Dreyecks, aus welcher sich alle übrigen ableiten lassen, wie wir sogleich näher sehen werden.

§. 167. (Weitere Gleichungen des sphärischen Dreyecks.) Da man für jeden Winkel A die Gleichung hat:

$$\text{Sin}^2 A = 1 - \text{Cos}^2 A,$$

so gibt die erste der Gleichungen (A)

$$\text{Sin}^2 A = 1 - \left(\frac{\text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma}{\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma}\right)^2.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, und setzt der Kürze wegen

$$M^2 = \frac{1 + 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Cos}^2\alpha - \text{Cos}^2\beta - \text{Cos}^2\beta}{\text{Sin}^2\alpha\,\text{Sin}^2\beta\,\text{Sin}^2\gamma},$$

so findet man sofort

$$\text{Sin}\,A = M\,.\,\text{Sin}\,\alpha;$$

und eben so, durch die bloſse Verwechslung der Zeichen, wodurch der für $\alpha\beta\gamma$ symmetrische Ausdruck von M offenbar nicht geändert wird:

$$\text{Sin}\,B = M\,.\,\text{Sin}\,\beta \quad \text{und}$$
$$\text{Sin}\,C = M\,.\,\text{Sin}\,\gamma.$$

Eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Gröſse M, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,\beta = \text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,\alpha \\ \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,\gamma = \text{Sin}\,C\,\text{Sin}\,\alpha \\ \text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,\gamma = \text{Sin}\,C\,\text{Sin}\,\beta \end{array}\right\} \ldots (\text{B}),$$

oder in jedem sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Seiten.

I. Von denselben drey Gleichungen (A) geben die beyden ersten, wenn man dabey die Gleichungen (B) berücksichtiget:

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\gamma\ \text{Sin}\,B\ \text{Cotang}\,A,$$
$$\text{Cos}\,\beta = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\gamma\ \text{Cos}\,B.$$

Eliminirt man aus diesen zwey Gleichungen die Gröſse $\text{Cos}\,\beta$, so erhält man

$$\text{Cotang}\,A\ \text{Sin}\,B = \text{Cotang}\,\alpha\ \text{Sin}\,\gamma - \text{Cos}\,\gamma\ \text{Cos}\,B \ \ldots \ (\text{C})$$

mit den beyden analogen für $\text{Cotang}\,B\ \text{Sin}\,C$ und $\text{Cotang}\,C\ \text{Sin}\,A$.

II. Eben so gibt die erste und dritte der Gleichungen (A)

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\beta\ \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,C\ \text{Cotang}\,A,$$
$$\text{Cos}\,\gamma = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta\ \text{Cos}\,C,$$

woraus man wieder, durch Elimination von $\text{Cos}\,\gamma$, erhält

$$\text{Cotang}\,A\ \text{Sin}\,C = \text{Cotang}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta - \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,C \ \ldots \ (\text{D})$$

mit den beyden analogen Gleichungen für $\text{Cotang}\,B\ \text{Sin}\,A$ und $\text{Cotang}\,C\ \text{Sin}\,B$.

III. Endlich gibt die zweyte der Gleichungen (C) verbunden mit (D):

$$\text{Cotang}\,B\ \text{Sin}\,C = \frac{\text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B} - \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,C,$$
$$\text{Cotang}\,A\ \text{Sin}\,C = \frac{\text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A} - \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,C,$$

woraus man, durch Elimination von $\text{Cos}\,\beta$, erhält

$$\text{Cos}\,A = \text{Sin}\,B\ \text{Sin}\,C\ \text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}\,B\ \text{Cos}\,C \ \ldots \ (\text{E})$$

mit den zwey analogen Gleichungen für $\text{Cos}\,B$ und $\text{Cos}\,C$.

§. 168. (Umbildung der vorhergehenden Ausdrücke.) Die Gleichungen (A) bis (E) enthalten die vorzüglichsten Ausdrücke, deren man sich bey der Auflösung (§. 109.) der sphärischen Dreyecke, oder in der *sphärischen Trigonometrie*, bedient. Zur bequemern Berechnung mit Logarithmen kann man ihnen, wie oben (§. 106.) mit denen für die ebene Trigonometrie geschehen ist, andere Gestalten geben.

I. So gibt die erste der Gleichungen (A)

$$1 + \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma} \quad \text{und}$$

$$1 - \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos}(\beta-\gamma) - \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma}.$$

Nach §. 96. ist aber

$$1 + \operatorname{Cos} x = 2 \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} x,$$
$$1 - \operatorname{Cos} x = 2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} x \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} y = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(y+x) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(y-x),$$

also ist auch

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma}} \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma}} \end{aligned}\right\} \ldots (F),$$

und durch dasselbe Verfahren erhält man auch aus der ersten der Gleichungen (E) die beyden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}} \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}} \end{aligned}\right\} \ldots (G).$$

II. Wichtiger noch ist folgende Verwandlung, zu welcher wir den Weg nur kurz anzeigen.

Die Gleichung (C) gibt

$$\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin} C = \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}\gamma,$$

und analog

$$\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}\gamma,$$

woraus man durch Addition und Subtraction findet

$$(\operatorname{Cos}\alpha \pm \operatorname{Cos}\beta) \operatorname{Sin} C = (1 \pm \operatorname{Cos}\gamma) \operatorname{Sin}(B \pm A) \ldots (1).$$

Sucht man eben so aus der Gleichung (D) den Werth von $\operatorname{Cos} A \operatorname{Sin}\gamma$ und $\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}\gamma$, durch α, β und C ausgedrückt, so erhält man

$$(\operatorname{Cos} A \pm \operatorname{Cos} B) \operatorname{Sin}\gamma = (1 \mp \operatorname{Cos} C) \operatorname{Sin}(\beta \pm \alpha) \ldots (2).$$

Endlich ist noch, wie unmittelbar aus den Gleichungen (B) folgt:

$$(\operatorname{Sin} A \pm \operatorname{Sin} B) \operatorname{Sin}\gamma = (\operatorname{Sin}\alpha \pm \operatorname{Sin}\beta) \operatorname{Sin} C \ldots (3).$$

Verwandelt man in den Gleichungen (1), (2) und (3) die Summen und Differenzen der Sinus und Cosinus (nach §. 96.) in die Producte derselben, so erhält man sechs Gleichungen, deren Combinationen unter einander zu vielen anderen interessanten Gleichungen führen, von welchen wir hier nur die vier folgenden auszeichnen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C \\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C \\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C \\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C \end{array}\right\} \ldots (\mathrm{H}).$$

III. Dividirt man von diesen Gleichungen (H) die zwey ersten oder letzten durch einander, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{Cotang}\,\tfrac{1}{2}C \\ \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{Cotang}\,\tfrac{1}{2}C \end{array}\right\} \ldots (\mathrm{I}),$$

und eben so erhält man auch

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma \\ \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma \end{array}\right\} \ldots (\mathrm{K}).$$

IV. Endlich kann man auch noch mehrere der Gleichungen des §. 167. durch Einführung von Hülfsgröſsen zur Rechnung bequemer machen. Nimmt man z. B. in der Gleichung (D) den Hülfswinkel φ so an, daſs man hat

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \mathrm{Tang}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,C,$$

so findet man daraus die Cotangente von A, durch die Gröſsen α, β und C ausgedrückt, auf folgende Art:

$$\mathrm{Cotang}\,A = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta-\varphi)}{\mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Tang}\,C}.$$

§. 169. (Differentialausdrücke der vorhergehenden Gleichungen.) Wenn man von den sechs Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreyecks zwey derselben constant annimmt, und irgend eine der vier anderen um eine gegebene, sehr kleine Gröſse ändert, so wird man die Änderungen, welche dadurch die übrigen Bestimmungsstücke erleiden, auf folgende Weise finden.

Es sey z. B. in dem Dreyecke ABC (Fig. 73), in welchem die beyden Seiten β und γ dieselben bleiben sollen, der Winkel $CAB = A$ um die Gröſse $BAB' = dA$ geändert worden, so daſs das gegebene Dreyeck ABC in das folgende $AB'C$ übergeht, wo $AB = AB' = \gamma$ ist, so wird man die Änderung $d\alpha$, welche dadurch die Seite $BC = \alpha$ erfahren hat, durch die Differentiation der ersten der Gleichungen (A) erhalten, oder man wird haben

$$d\alpha \operatorname{Sin}\alpha = dA \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma,$$

oder einfacher, mit Berücksichtigung der Gleichungen (B):

$$\frac{d\alpha}{dA} = \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}\gamma.$$

Sucht man eben so die Änderung dB des Winkels B, die einer gegebenen Änderung dC des Winkels C entspricht, unter derselben Voraussetzung, daſs die beyden Seiten β und γ unverändert bleiben, so gibt die dritte der Gleichungen (B)

$$dB \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}\gamma = dC \operatorname{Cos} C \operatorname{Sin}\beta,$$

also auch

$$dB = dC \,.\, \operatorname{Tang} B \operatorname{Cotang} C.$$

Führt man dieſs für alle vorkommenden Fälle aus, so erhält man folgende, in vielen Fällen nützliche Tabelle.

I. Ist β und γ constant, so hat man

$$\frac{d\alpha}{dA} = \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}\gamma, \quad \frac{dB}{dC} = \operatorname{Tang} B \operatorname{Cotang} C,$$

$$\frac{d\alpha}{dC} = -\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Tang} B,$$

$$\frac{d\alpha}{dB} = -\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Tang} C, \quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C},$$

$$\frac{dA}{dC} = -\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos} B}.$$

II. Ist der Winkel A und eine der ihm anliegenden Seiten γ constant, so ist eben so

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \operatorname{Cos} C, \quad \frac{d\alpha}{dB} = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cotg} C, \quad \frac{d\alpha}{dC} = -\operatorname{Tang}\alpha \operatorname{Cotg} C,$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin} C}, \quad \frac{d\beta}{dC} = -\frac{\operatorname{Tang}\alpha}{\operatorname{Sin} C}, \quad \frac{dC}{dB} = -\operatorname{Cos}\alpha.$$

III. Sind zwey Winkel B und C constant, so ist

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\operatorname{Tang}\beta}{\operatorname{Tang}\gamma}, \quad \frac{d\beta}{dA} = \frac{\operatorname{Cotang}\gamma}{\operatorname{Sin} A}, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\alpha},$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}\gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\alpha}, \quad \frac{dA}{d\gamma} = \operatorname{Sin} A \operatorname{Tang}\beta.$$

IV. Ist endlich ein Winkel A und die ihm gegenüberstehende Seite α constant, so hat man

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\operatorname{Tang}\beta}{\operatorname{Tang}B},\quad \frac{d\beta}{d\gamma} = -\frac{\operatorname{Cos}B}{\operatorname{Cos}C},\quad \frac{d\beta}{dC} = -\frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Tang}B\operatorname{Cos}\gamma},$$
$$\frac{d\gamma}{dC} = \frac{\operatorname{Tang}\gamma}{\operatorname{Tang}C},\quad \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{\operatorname{Tang}\beta\operatorname{Cos}C}{\operatorname{Sin}B},\quad \frac{dB}{dC} = -\frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\gamma}.$$

§. 170. (Vergleichung der Ausdrücke des sphärischen und des ebenen Dreyecks.) Nimmt man die Seiten eines sphärischen Dreyecks gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es verzeichnet ist, sehr klein an, so kann man die dasselbe begrenzenden Bogen als gerade Linien, also auch das sphärische Dreyeck als ein ebenes betrachten. Die Gleichungen (A)...(K) des sphärischen Dreyecks werden demnach die Gleichungen (A...F des §. 106.) des ebenen Dreyecks als bloſse specielle Fälle in sich enthalten. In der That, setzt man z. B. die Seiten α, β, γ des sphärischen Dreyecks unendlich klein, also auch (nach §. 102, 104.)

$$\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Tang}\alpha = \alpha \quad\text{und}\quad \operatorname{Cos}\alpha = 1,$$

so gibt die erste der Gleichungen (B)

$$\beta\operatorname{Sin}A = \alpha\operatorname{Sin}B,$$

übereinstimmend mit der Gleichung (B) des §. 106.

Eben so gibt die Gleichung (C) und (D) des §. 167.

$$\operatorname{Cotang}A\operatorname{Sin}B = \frac{\gamma}{\alpha} - \operatorname{Cos}B \quad\text{und}$$
$$\operatorname{Cotang}A\operatorname{Sin}C = \frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{Cos}C,$$

also auch

$$\operatorname{Tang}A = \frac{\alpha\operatorname{Sin}B}{\gamma - \alpha\operatorname{Cos}B} = \frac{\alpha\operatorname{Sin}C}{\beta - \alpha\operatorname{Cos}C},$$

übereinstimmend mit der Gleichung (F) des §. 106, u. s. f.

I. Dasselbe wird auch von den Differentialausdrücken des §. 169. gelten. So hat man in einem ebenen Dreyecke, wenn die Seiten β und γ constant bleiben:

$$\frac{d\alpha}{dA} = \gamma\operatorname{Sin}B,\quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\alpha}{\beta\operatorname{Cos}C} \text{ u. f.}$$

§. 171. (Auflösung der sphärischen Dreyecke.) Aus den Gleichungen (A)...(K) des §. 168. sieht man, daſs wenn von den sechs Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreyecks drey gegeben sind, die drey anderen durch Rechnung bestimmt werden können. Wir wollen daher, wie oben (§. 109.) für das ebene Dreyeck, auch die hier vorkommenden Fälle für das sphärische nach der Ordnung aufzählen.

I. Fall. Wenn die drey Seiten α, β, γ eines sphärischen Dreyecks gegeben sind.

Dann findet man irgend einen der drey Winkel, z. B. A, durch die Gleichung (A)

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma},$$

oder auch, bequemer zur Rechnung, $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A$ oder $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A$ durch die Gleichungen (F).

II. Fall. Wenn die drey Winkel A, B, C gegeben sind.

Dann findet man irgend eine Seite, z. B. α, durch die Gleichung (E)

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C},$$

oder bequemer $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha$ oder $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha$ durch die Gleichungen (G).

III. Fall. Wenn zwey Seiten α, β mit dem eingeschlossenen Winkel C gegeben sind.

Dann findet man A, B und γ durch die Gleichungen

$$\operatorname{Cotang} A = \frac{\operatorname{Cotang}\alpha \operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C},$$

$$\operatorname{Cotang} B = \frac{\operatorname{Cotang}\beta \operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C},$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C.$$

I. Bequemer zur Rechnung sind für diesen Fall die Gleichungen (H), wenn man alle drey Gröſsen A, B und γ zugleich bestimmen will.

II. Sucht man bloſs die beyden Winkel A und B, so wird man die Gleichungen (F) wählen.

III. Sucht man endlich bloſs einen dieser Winkel, z. B. B und die Seite γ, so hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin} B &= \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin} C \\ \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos} B &= \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C \\ \operatorname{Cos}\gamma &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C \end{aligned}\right\},$$

wo die Division der beyden ersten Gleichungen den Werth von

Tang B gibt, und wo man dann, wenn B bekannt ist, den Werth von γ aus jeder dieser drey Gleichungen bestimmen kann.

IV. Dieselben drey Gleichungen lassen sich auch, zur Rechnung mit Logarithmen, in bloſsen Factoren auf folgende Weise darstellen:

$$\text{Tang}\,\varphi = \text{Cos}\,C\,\text{Tang}\,\beta,$$

$$\text{Cotang}\,B = \frac{\text{Sin}\,(\alpha - \varphi)}{\text{Sin}\,\varphi\,\text{Tang}\,C},$$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,(\alpha - \varphi)}{\text{Cos}\,\varphi},$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\psi = \text{Cos}\,C\,\text{Tang}\,\alpha,$$

$$\text{Cotang}\,A = \frac{\text{Sin}\,(\beta - \psi)}{\text{Sin}\,\psi\,\text{Tang}\,C},$$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,(\beta - \psi)}{\text{Cos}\,\psi}.$$

IV. Fall. Wenn zwey Winkel A, B und die eingeschlossene Seite γ gegeben ist.

Dann findet man α, β und C durch die Gleichungen

$$\text{Cotang}\,\alpha = \frac{\text{Cotang}\,A\,\text{Sin}\,B + \text{Cos}\,B\,\text{Cos}\,\gamma}{\text{Sin}\,\gamma},$$

$$\text{Cotang}\,\beta = \frac{\text{Cotang}\,B\,\text{Sin}\,A + \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,\gamma}{\text{Sin}\,\gamma},$$

$$\text{Cos}\,C = \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B.$$

I. Bequemer zur Rechnung sind die Gleichungen (H), wenn man alle drey Gröſsen α, β und C sucht, oder die Gleichungen (K), wenn man bloſs die beyden Seiten α und β sucht.

II. Sucht man endlich bloſs eine dieser Seiten β und den Winkel C, so hat man, wie zuvor, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\,C\,\text{Sin}\,\beta &= \text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,\gamma \\ \text{Sin}\,C\,\text{Cos}\,\beta &= \text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B \\ \text{Cos}\,C &= \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B \end{aligned}\right\}.$$

III. Oder endlich zur Rechnung mit Logarithmen:

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Cotang}\,B}{\text{Cos}\,\gamma},$$

$$\text{Cotang}\,\beta = \frac{\text{Cos}\,(A - \varphi)}{\text{Tang}\,\gamma\,\text{Cos}\,\varphi},$$

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,B\,\text{Sin}\,(A - \varphi)}{\text{Sin}\,\varphi},$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\psi = \frac{\text{Cotang}\,A}{\text{Cos}\,\gamma},$$

$$\text{Cotang}\,\alpha = \frac{\text{Cos}\,(B-\psi)}{\text{Tang}\,\gamma\ \text{Cos}\,\psi},$$

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,A\ \text{Sin}\,(B-\psi)}{\text{Sin}\,\psi}.$$

V. Fall. Wenn zwey Seiten α, β und einer der gegenüberstehenden Winkel, z. B. A, gegeben ist.

Dann findet man B durch die Gleichung

$$\text{Sin}\,B = \frac{\text{Sin}\,A\ \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,\alpha},$$

und wenn so B bekannt ist, auch C und γ durch die Gleichungen (I) und (K), oder durch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B)}\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Sucht man bloſs den Winkel C, so hat man

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Cotang}\,A}{\text{Cos}\,\beta},$$

$$\text{Cos}\,(C-\varphi) = \frac{\text{Tang}\,\beta\ \text{Cos}\,\varphi}{\text{Tang}\,\alpha},$$

und eben so, wenn man bloſs die Seite γ sucht:

$$\text{Tang}\,\psi = \text{Cos}\,A\ \text{Tang}\,\beta,$$

$$\text{Cos}\,(\gamma-\psi) = \frac{\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\psi}{\text{Cos}\,\beta}.$$

VI. Fall. Wenn zwey Winkel A und B und eine der ihnen gegenüberstehenden Seiten, z. B. α, gegeben ist.

Dann findet man β, C und γ durch die Gleichungen:

$$\text{Sin}\,\beta = \frac{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A},$$

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B)}\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Sucht man bloſs den Winkel C, so ist

$$\text{Cotang}\,\varphi = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Tang}\,B,$$

$$\text{Sin}\,(C-\varphi) = \frac{\text{Cos}\,A\ \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,B},$$

und wenn man bloſs die Seite γ sucht:

$$\text{Tang}\,\psi = \text{Cos}\,B\ \text{Tang}\,\alpha,$$

$$\text{Sin}\,(\gamma-\psi) = \frac{\text{Tang}\,B\ \text{Sin}\,\psi}{\text{Tang}\,A}.$$

§. 172. (Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreyecke.) Aus dem Vorhergehenden lassen sich sofort auch die Ausdrücke für solche sphärische Dreyecke ableiten, in welchen einer der drey Winkel gleich einem rechten ist. Solche Dreyecke werden *rechtwinklige* genannt. Wir nehmen im Folgenden den Winkel $A = 90^0$ an.

I. Fall. Ist A, β und γ gegeben, so hat man sofort, wenn man in §. 171. den Winkel $A = 90$ setzt:

$$\text{Tang}\,B = \frac{\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\gamma},$$

$$\text{Tang}\,C = \frac{\text{Tang}\,\gamma}{\text{Sin}\,\beta},$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta\ \text{Cos}\,\gamma.$$

II. Fall. Wenn A, α und β gegeben ist:

$$\text{Sin}\,B = \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,\alpha},$$

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Tang}\,\beta}{\text{Tang}\,\alpha},$$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta}.$$

III. Fall. Wenn A, B und β gegeben ist:

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,B},$$

$$\text{Sin}\,\gamma = \frac{\text{Tang}\,\beta}{\text{Tang}\,B},$$

$$\text{Sin}\,C = \frac{\text{Cos}\,B}{\text{Cos}\,\beta}.$$

IV. Fall. Wenn A, C und β gegeben ist:

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{\text{Tang}\,\beta}{\text{Cos}\,C},$$

$$\text{Tang}\,\gamma = \text{Sin}\,\beta\ \text{Tang}\,C,$$

$$\text{Cos}\,B = \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,C.$$

V. Fall. Wenn A, B und a gegeben ist:

$$\operatorname{Sin}\beta = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}B,$$
$$\operatorname{Tang}\gamma = \operatorname{Tang}\alpha \operatorname{Cos}B,$$
$$\operatorname{Tang}C = \frac{\operatorname{Cotang}B}{\operatorname{Cos}\alpha}.$$

VI. Fall. Wenn A, B, C gegeben ist:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cotang}B \operatorname{Cotang}C,$$
$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{\operatorname{Cos}B}{\operatorname{Sin}C},$$
$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{\operatorname{Cos}C}{\operatorname{Sin}B}.$$

§. 173. (Berechnung der sphärischen Dreyecke.) Wir wollen nun den Gebrauch der vorhergehenden Ausdrücke durch Beyspiele zu erläutern suchen.

Ehe wir aber diese Berechnungen vornehmen, wollen wir einige, diesen Gegenstand überhaupt betreffende Bemerkungen voraussenden.

I. Erstens bedarf es wohl keiner Erinnerung, daſs man auf die Zeichen der trigonometrischen Functionen in den verschiedenen Quadranten ihrer Winkel gehörig Rücksicht nehmen muſs, wozu man sich am bequemsten der Gleichungen des §. 94, Nr. *B.* und *C.* bedienen wird.

II. Zweytens ist es bey der Berechnung der Hülfswinkel und überhaupt aller derjenigen Gröſsen, die nicht die gesuchten Endresultate unmittelbar enthalten [wie z. B. die Gröſsen $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$ aus den Gleichungen (I) des §. 168, durch welche man erst die unmittelbaren Werthe von A und von B durch Addition und Subtraction jener zwey Gröſsen erhalten will], am einfachsten und auch für alle Fälle genügend, diese Winkel *stets in dem ersten Quadranten*, aber mit dem der trigonometrischen Function entsprechenden Zeichen, zu nehmen, und dann mit dem so angenommenen Hülfswinkel die Rechnung bis zu ihrer Beendigung fortzuführen, wobey man, wie schon in §. 64, B. erinnert wurde, die Logarithmen der negativen Zahlen, um Irrungen zu vermeiden, mit einem N bezeichnen kann.

III. Drittens kann man annehmen, daſs in jedem sphärischen Dreyecke keine Seite gröſser als 180 Grade ist; denn wenn auch solche Dreyecke möglich sind, deren Seiten die halbe Peripherie der Kugel übersteigen, so werden die Ergänzungen dieser Seiten zu 360 Graden immer ein Nebendreyeck auf der Kugel geben, dessen Seiten kleiner als 180^0 sind, und das man daher statt des gegebenen Dreyecks berechnen und daraus dieses gegebene leicht ableiten wird. In der That gebraucht man die sphärischen Dreyecke gewöhnlich, um durch sie die Lage eines bestimmten Punctes auf der Oberfläche der Kugel anzugeben. Will man aber z. B. die Lage irgend eines Punctes B (Fig. 74) gegen den festen Kreis $ACA'C'$ angeben, oder will man den dritten Punct B des Dreyecks ACB durch die Entfernung CB desselben von dem fixen Punct C, und durch den Winkel ACB dieser Entfernung mit dem fixen Kreise CAC' bestimmen, so wird es offenbar genügen, diese Entfernung CB oder die Seite des Dreyecks ACB nicht gröfser als 180 Grade anzunehmen, aber dafür den Winkel C des Dreyecks von 0 bis 360^0 wachsen zu lassen, um auf diese Weise *alle* Puncte der Kugel, und zwar *keinen derselben mehr als einmal* zu umfassen.

IV. Endlich wollen wir noch bemerken, dafs es zwischen je drey Puncten A, B, C (Fig. 74) auf der Oberfläche der Kugel immer *zwey* Dreyecke, der anderen hier nicht zu erwähnen, gibt, nämlich erstens das gewöhnlich betrachtete Dreyeck ABC, und zweytens jenes, dessen Fläche die Fläche des ersten zur ganzen Kugelfläche ergänzt, oder dasjenige, welches übrig bleibt, wenn man von der Oberfläche der ganzen Kugel das erste Dreyeck wegnimmt. Beyde Dreyecke haben ganz dieselben Seiten, aber die Winkel des einen sind die Ergänzungen der Winkel des anderen zu vier rechten Winkeln. Die sämmtlichen vorhergehenden analytischen Ausdrücke des sphärischen Dreyecks bleiben aber selbst in Beziehung auf ihre Zeichen unverändert dieselben, wenn man in ihnen statt den Winkeln A, B und C ihre Ergänzungen zur ganzen Peripherie oder $360 - A$, $360 - B$ und $360 - C$ setzt, und dabey die Seiten α, β, γ des Dreyecks ungeändert läfst, so dafs also alle jene Formeln eben so gut für das gewöhnliche, als für das *Supplementardreyeck* desselben gehören.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir nun zu der ausführlichen Berechnung eines Dreyecks selbst übergehen.

Wenn in einem Dreyecke folgende zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind:

$$\alpha = 105^\circ\ 23'\ 50'',$$
$$\beta = 13^\circ\ 25'\ 54'',$$
$$C = 5^\circ\ 42'\ 20'',$$

und wenn man vorerst nur einen der beyden anderen Winkel, z. B. den Winkel A dieses Dreyecks kennen lernen will, so hat man nach §. 171, Fall III:

$$\text{Tang}\,\psi = \text{Tang}\,\alpha\ \text{Cos}\,C \quad \text{und}$$

$$\text{Tang}\,A = \frac{\text{Sin}\,\psi\ \text{Tang}\,C}{\text{Sin}\,(\beta - \psi)}.$$

Diefs gibt sofort

$$\begin{aligned} \log \text{Tang}\,\alpha &= 0.5600459\,N \\ \log \text{Cos}\,C &= \underline{9.9978431} \\ \log \text{Tang}\,\psi &= 0.5578890, \end{aligned}$$

und daher, da der erste dieser Logarithmen, also auch der letzte, zu einer negativen Zahl gehört:

$$\psi = -\ 74^\circ\ 31'\ 47''.2$$

Aber es war $\beta = \underline{13^\circ\ 25'\ 54''.0}$

also ist auch $\beta - \psi = 87^\circ\ 57'\ 41''.2.$

Mit diesen Werthen von ψ und $\beta - \psi$ erhält man, da der Sinus eines negativen Winkels ψ ebenfalls negativ ist:

$$\begin{aligned} \log \text{Sin}\,\psi &= 9.9839730\,N \\ \log \text{Tang}\,C &= \underline{8.9996142} \\ &\ 8.9835872 \\ \log \text{Sin}\,(\beta - \psi) &= \underline{9.9997251} \\ \log \text{Tang}\,A &= 8.9838621, \end{aligned}$$

und daher $A = -\ 5^\circ\ 30'\ 12''.9.$

Um nun in dem Endresultate der Rechnung, in welchem man die negativen Winkel zu vermeiden und sie durch ihre gleichbedeutenden positiven zu ersetzen pflegt, den Quadranten, in welchen der Winkel A fallen mufs, zu bestimmen, so hat man (nach §. 94, C)

$$\text{Tang}\,(180 + x) = \text{Tang}\,(360 + x) = \text{Tang}\,x,$$

also ist auch der Winkel

entweder	180	oder	360
	−5 30 12.9		−5 30 12.9
	174 29 47.1		354 29 47.1,

so daſs daher der gesuchte Winkel A entweder in den II^ten^ oder IV^ten^ Quadranten fällt. Welcher von diesen beyden Fällen in der That Statt hat, wird man leicht aus einer der anderen Gleichungen des §. 166. und 167., z. B. aus der Gleichung (B) des §. 167:

$$\operatorname{Sin} A = \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} \gamma},$$

selbst ohne eigentliche Berechnung derselben entscheiden können. Da nämlich $C = 5^\circ 42' 20''$ im ersten Quadranten liegt, also Sin C positiv ist, und da alle Seiten eines Dreyeckes kleiner als 180°, also auch Sin α sowohl, als Sin γ eine positive Gröſse ist, so muſs auch Sin A positiv seyn, oder der Winkel A muſs in den I^sten^ oder II^ten^ Quadranten fallen. Nach dem Vorhergehenden kann er aber nur in den II^ten^ oder IV^ten^ Quadranten fallen, also fällt er in den II^ten^, und man hat daher

$$A = 174^\circ 29' 47''.1.$$

Nach dieser vorläufigen Bestimmung des Winkels A wollen wir nun das gegebene Dreyeck vollständig auflösen, und uns dazu der Gleichungen (H) des §. 168. bedienen.

Mit den oben gegebenen Werthen von α, β und C findet man

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 59^\circ 24' 52'', \quad \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 45^\circ 58' 58'',$$
$$\text{und} \quad \tfrac{1}{2} C = 5^\circ 42' 20'';$$

und damit geben die erwähnten Gleichungen (H)

$$\left.\begin{aligned} \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\gamma &= 9.8413679 \\ \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\gamma &= 8.4035339 \\ \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\gamma &= 9.8562695 \\ \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\gamma &= 8.6319037 \end{aligned}\right\}.$$

Die Division der beyden ersten und der zwey letzten dieser Ausdrücke gibt

$$\log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}(A+B) = 1.4378340,$$
$$\log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = 1.2243658.$$

Dieſs gibt sofort

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(A+B) &= 87^\circ 54' 36''.87 \\ \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(A-B) &= 86 \;\; 35 \;\; 10.19 \end{aligned}\right\}.$$

Da aber die beyden letzten Logarithmen zu positiven Zahlen gehören, so werden die zwey Winkel $\tfrac{1}{2}(A+B)$ und $\tfrac{1}{2}(A-B)$

entweder dem I[sten] oder auch dem III[ten] Quadranten angehören, so daſs man demnach auch haben könnte:

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(A+B) = 267^\circ 54' 36''.87 \\ \tfrac{1}{2}(A-B) = 266\ \ 35\ \ 10.19\end{array}\right\}.$$

Welcher von diesen beyden Fällen in der That Statt hat, wird sich sogleich aus irgend einer der vorhergehenden vier Gleichungen entscheiden, bey welcher wir (nach der obigen Bemerkung I.) die Werthe von $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$, wie wir sie zuerst gefunden haben, nämlich im ersten Quadranten mit ihren Zeichen, beybehalten. — Von diesen vier Gleichungen gibt z. B.

die erste und die letzte

$$\begin{array}{rlrl} & 9.8413679 & & 8.6319037 \\ \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A+B) = & 9.9997110 & \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A-B) = & 8.7748631 \\ \hline \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\gamma = & 9.8416569 & \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\gamma = & 9.8570406. \end{array}$$

Da nun $\frac{1}{2}\gamma$ (nach der Bemerkung III.) nie gröſser als 90°, also auch $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\gamma$ und $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\gamma$ nie negativ seyn kann, so muſs $\frac{1}{2}(A+B)$ sowohl, als auch $\frac{1}{2}(A-B)$ im I[sten], nicht aber im III[ten] Quadranten genommen werden, so daſs man demnach in der That haben wird:

$$\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(A+B) = 87^\circ 54' 36''.87, \\ \tfrac{1}{2}(A-B) = 86\ \ 35\ \ 10.19.\end{array}$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken die Summe und die Differenz, so erhält man für die wahren Werthe der beyden Winkel A und B

$$\begin{array}{l} A = 174^\circ 29' 47''.06, \\ B = \ \ \ 1\ \ 19\ \ 26.68; \end{array}$$

wo dann zugleich der so eben gefundene Werth

$$\log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\gamma = 9.8416569$$

für die gesuchte Seite γ gibt:

$$\tfrac{1}{2}\gamma = 46^\circ 0' 52''.5 \quad \text{oder} \quad \gamma = 92^\circ 1' 45''.0.$$

Zur Prüfung der ganzen Rechnung kann man auch noch diesen Werth von γ aus der zweyten der obigen Gleichungen, oder aus

$$\log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\gamma = 9.8570406$$

suchen, der mit dem vorhergehenden übereinstimmen muſs.

Übrigens hätte man sich auch schon, wie oben, aus den beyden einfachen Gleichungen

$$\operatorname{Sin} A = \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}\gamma} \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}\gamma},$$

ohne eigentliche Berechnung derselben, überzeugen können, dafs die Werthe von A und B nur in den Isten oder IIten Quadranten fallen, da $\operatorname{Sin} C$, nach dem gegebenen Werthe von C, und da die Sinus der Seiten α, β, γ, für alle Werthe dieser Seiten, immer positiv sind, also auch $\operatorname{Sin} A$ und $\operatorname{Sin} B$ selbst positiv seyn mufs.

Wir erhalten demnach als Endresultat der Berechnung dieses Dreyeckes

$$\begin{aligned} A &= 174^\circ 29' 47''.06, \\ B &= 1\ \ 19\ 26.68, \\ \gamma &= 92\ \ \ 1\ 45.0. \end{aligned}$$

Sey für ein zweytes Beyspiel der Winkel C und die beyden ihn einschliefsenden Seiten α, β, wie folgt, gegeben:

$$\begin{aligned} C &= 218^\circ\ \ 7' 57''.9, \\ \alpha &= 23\ \ 27\ 42.6, \\ \beta &= 86\ \ 36\ 26.7. \end{aligned}$$

Damit erhält man durch die Gleichungen des §. 171. Fall III. Nr. IV.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Cos} C &= 9.8957441\, N \\ \log \operatorname{Tang} \beta &= 1.2270841 \\ \log \operatorname{Tang} \varphi &= 1.1228282; \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi &= -\ 85^\circ 41' 24''.11 \\ \alpha &= 23\ \ 27\ 42.6 \\ \alpha - \varphi &= 109\ \ \ 9\ \ 6.71. \end{aligned}$$

Ist so φ bekannt, so erhält man B und γ durch

$$\begin{array}{llll} \log \operatorname{Sin}(\alpha - \varphi) = 9.9752720 & & \log \operatorname{Cos}(\alpha - \varphi) = 9.5159707\, N \\ \log \operatorname{Cotang} C \ \ = 0.1051173 & & \log \operatorname{Cos} \beta \qquad = 8.7721541 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0.0803893 & & \qquad\qquad\qquad\quad 8.2881248 \\ \log \operatorname{Sin} \varphi \qquad = 9.9987701\, N & & \log \operatorname{Cos} \varphi \qquad = 8.8759419 \\ \log \operatorname{Cotang} B \ \ = 0.0816192 & & \log \operatorname{Cos} \gamma \qquad = 9.4121829 \\ \quad B = -\ 39^\circ 38' 50''.9 & & \quad \gamma = -\ 75^\circ 1' 43''.4. \end{array}$$

Da $\operatorname{Cos}\gamma$ negativ ist, so liegt γ im zweyten Quadranten, oder es ist

$$\gamma = 104^\circ 58' 16''.6.$$

Der Winkel B aber liegt entweder im IIten oder IVten Quadranten. Um zwischen diesen zwey Quadranten zu entscheiden, ist

$$\text{Sin}\, B = \frac{\text{Sin}\, C}{\text{Sin}\, \gamma} \cdot \text{Sin}\, \beta;$$

und da $\text{Sin}\, \beta$ und $\text{Sin}\, \gamma$ positiv, $\text{Sin}\, C$ aber negativ ist, so ist auch $\text{Sin}\, B$ negativ, oder B liegt im IVten Quadranten, oder es ist

$$B = 320^{0}\, 21'\, 9''1.$$

Um endlich noch den Winkel A zu finden, hat man

$$\text{Sin}\, A = \frac{\text{Sin}\, \alpha\, \text{Sin}\, C}{\text{Sin}\, \gamma}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\log \text{Sin}\, \alpha &= 9.6000337 \\
\log \text{Sin}\, C &= \underline{9.7906268\, N} \\
& 9.3906605 \\
\log \text{Sin}\, \gamma &= \underline{9.9850020} \\
\log \text{Sin}\, A &= 9.4056585,
\end{aligned}$$

und daher

$$A = -\, 14^{0}\, 44'\, 34''6;$$

so daſs daher A in den IIIten oder IVten Quadranten fällt. Berechnet man aber, bloſs in zwey Decimalstellen, die Gleichung (D) des §. 167., oder

$$\text{Cotang}\, A = \frac{\text{Cotang}\, \alpha\, \text{Sin}\, \beta - \text{Cos}\, \beta\, \text{Cos}\, C}{\text{Sin}\, C},$$

so findet man $\text{Cotang}\, A$ negativ, so daſs daher A im IVten Quadranten liegt, oder daſs man hat:

$$A = 345^{0}\, 15'\, 25''.4.$$

Wir erhalten daher für die drey gesuchten Bestimmungsstücke unseres Dreyeckes

$$\begin{aligned}
A &= 345^{0}\, 15'\, 25''.4, \\
B &= 320\;\; 21\;\;\; 9.1, \\
\gamma &= 104\;\; 58\;\; 16.6.
\end{aligned}$$

Will man dieses Dreyeck durch Zeichnung darstellen, so sieht man sofort, daſs es nicht das gewöhnlich so betrachtete Dreyeck ABC, sondern das *Supplementardreyeck* desselben, oder daſs es derjenige Raum ist, der übrig bleibt, wenn man die Fläche des gewöhnlichen Dreyeckes von der ganzen Kugelfläche subtrahirt, wie in der obigen Bemerkung IV. gesagt worden ist.

Als weitere Beyspiele zur Übung kann man die folgenden anwenden:

$$\alpha = 23^\circ 27' 59''.26, \quad A = 23^\circ 33' 4''.67,$$
$$\beta = 98\ 47\ 25.0, \quad B = 97\ 25\ 15.45,$$
$$\gamma = 96\ 21\ 56.28, \quad C = 85\ 43\ 45.3.$$

Eben so hat man für ein anderes Dreyeck

$$\alpha = 23^\circ 27' 34''.58, \quad A = 17^\circ\ 3' 55''.90,$$
$$\beta = 73\ 28\ 30.83, \quad B = 44\ 58\ 3.55,$$
$$\gamma = 89\ 49\ 37.71, \quad C = 132\ 30\ 38.86.$$

§. 174. (Eigenschaften des sphärischen Dreyecks.) Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir die vorzüglichsten Eigenschaften der sphärischen Dreyecke, wie sie aus den vorhergehenden Gleichungen (A) . . . (E) des §. 167. leicht abgeleitet werden können, hier kurz zusammen stellen.

I. Der Durchschnitt der Kugel mit einer Ebene ist, wie bereits oben (§. 165, I.) gesagt wurde, ein *Kreis*, und zwar ein *gröſster Kreis* der Kugel, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunct der Kugel geht.

Die beyden Endpuncte P und Q (Fig. 74) des auf einem gröſsten Kreise ABA' senkrechten Durchmessers PQ der Kugel, sind die *Pole* dieses gröſsten Kreises sowohl, als auch aller kleineren mit ABA' parallelen Kreise, wie CcC', welche letzte deſshalb *Parallelkreise* von ABA' genannt werden. Jeder Pol steht von allen Puncten der Peripherie eines jeden dieser Kreise gleich weit ab, und bey dem gröſsten Kreise beträgt dieser Abstand, für beyde Pole, einen rechten Winkel oder den vierten Theil der Peripherie eines gröſsten Kreises.

II. Legt man durch den Pol P eines gröſsten Kreises ABA' zwey andere gröſste Kreise PCA und Pca, so verhalten sich die zwischen ihnen enthaltenen Bogen $A'a$ des gröſsten Kreises und $C'c$ des Parallelkreises, wie die Halbmesser aO und co dieser beyden Kreise. Ist aber a der Halbmesser der Kugel, oder ist $OA' = a$ der Halbmesser eines gröſsten Kreises, und $Oo = b$ der Abstand der Mittelpuncte beyder Kreise, welcher Abstand auf den Ebenen dieser Kreise senkrecht steht, so ist der Halbmesser $C'o = c$ des Parallelkreises

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ oder es ist}$$
$$c = a \operatorname{Sin} PC = a \operatorname{Cos} A'C';$$

so daſs man daher auch für die beyden erwähnten Bogen das Verhältniſs hat:

$$\frac{C'c}{A'a} = \operatorname{Sin} PC = \operatorname{Cos} A'C.$$

Legt man aber durch zwey Puncte C' und c der Oberfläche der Kugel einen gröſsten Kreis, dessen Ebene demnach durch den Mittelpunct O der Kugel geht, so wird der zwischen C' und c enthaltene Bogen des gröſsten Kreises immer kleiner seyn, als der durch dieselben Puncte gehende Bogen $C'c$ des Parallelkreises, wie man sofort sieht, wenn man beyde Bogen sich um ihre gemeinschaftliche geradlinige Chorde $C'c$ drehen läſst, wo dann der Weg des Bogens des gröſsten Kreises *zwischen* dem des kleineren Kreises und zwischen der Chorde liegen, also, als der von diesem Bogen eingeschlossene, auch der kleinere Bogen, seyn wird. Demnach ist zwischen zwey Puncten der Kugel der kürzeste Weg gleich dem Bogen des durch diese Puncte gelegten gröſsten Kreises.

III. Zwey gröſste Kreise einer Kugel halbiren sich: ein gröſster und ein kleinerer Kreis aber, oder zwey kleinere Kreise halbiren sich nicht.

Der Winkel zweyer gröſster Kreise ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Ebenen.

IV. Wenn sich zwey gröſste Kreise PA' und Pa in dem Puncte P schneiden, und wenn man auf ihnen, von dem Puncte P aus, die Bogen

$$PA' = Pa = 90^\circ$$

nimmt, so steht der durch die Puncte A' und a geführte gröſste Kreis $A'aBA$ senkrecht auf jenen beyden, und P ist der Pol dieses dritten Kreises, so wie zugleich der Bogen $A'a$ das Maſs des Winkels $A'Pa$ ist.

Jeder gröſste Kreis, der durch den Pol eines anderen gröſsten Kreises geht, steht auf diesem anderen senkrecht und umgekehrt.

V. In einem gleichschenkligen sphärischen Dreyecke sind die Winkel an der Basis gleich und umgekehrt. — Die Summe zweyer Seiten eines sphärischen Dreyecks ist gröſser, als die dritte Seite. Die Summe der drey Seiten desselben aber ist kleiner, als die Peripherie des gröſsten Kreises der Kugel. — In jedem sphärischen Dreyecke steht die gröſsere Seite dem gröſseren Winkel gegenüber und umgekehrt. — Der äuſsere Winkel (§. 85, IV.) eines solchen Dreyecks ist kleiner, als die Summe der beyden entgegengesetzten inneren Winkel.

VI. Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 74) eine Seite, z. B. AC zu 360^0 ergänzt, so entsteht dadurch ein anderes Dreyeck, dessen Seiten AB, AC und $AQA'C$ sind. Die Flächen beyder Dreyecke zusammen geben die *Oberfläche der Halbkugel*, und für beyde Dreyecke sind die oben (§. 167.) gegebenen Gleichungen (A) . . . (E) selbst in ihren Zeichen ganz dieselben, wie man sieht, wenn man in ihren zwey Seiten α und γ ungeändert läſst, die dritte Seite β in $360 - \beta$, und die drey Winkel A, B, C in $180 - A$, $360 - B$ und $180 - C$ verwandelt. Dieselbe Bemerkung hat auch, wie wir (aus §. 173, Anmerk. IV.) gesehen haben, für dasjenige Dreyeck Statt, welches die Fläche des gewöhnlich betrachteten Dreyeckes zur *Oberfläche der ganzen Kugel* ergänzt.

VII. Statt dem Dreyecke ABC (Fig. 74) könnte man auch das Dreyeck BCA' berechnen, in welchem die Lage der drey Ebenen dieselbe ist, wo aber zwey Seiten die Ergänzungen zu 180^0 von den Seiten des ersten Dreyeckes ABC sind. Dasselbe gilt von dem Dreyecke ABC' und von dem Dreyecke $A'BC'$, so daſs demnach auf der Halbkugel vier, und auf der ganzen Kugelfläche acht Dreyecke durch dieselben drey in dem Mittelpuncte der Kugel sich schneidenden Ebenen entstehen, daher auch für alle diese Dreyecke die Gleichungen (A) . . . (E) des §. 167. unverändert dieselben bleiben.

VIII. In dem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 75) sey

A' der Pol von dem gröſsten Kreise BC,
B' » » » » » AC,
C' » » » » » AB,

so wird auch zugleich

A der Pol von $B'C'$,
B » » » $A'C'$,
C » » » $A'B'$

seyn. Weiter ist, nach dem Vorhergehenden,

$$Bb' = bC = 90,$$

also auch $Bb' + bC = 180;$

oder was dasselbe ist:

$$BC + bb' = 180.$$

Allein bb' ist gleich dem Winkel A', also ist auch

$$\left.\begin{aligned} BC &= 180 - A' \\ \text{und eben so}\quad AC &= 180 - B' \\ AB &= 180 - C' \end{aligned}\right\};$$

und ganz eben so erhält man auch

$$\left.\begin{aligned} A &= 180 - B'C' \\ B &= 180 - A'C' \\ C &= 180 - A'B' \end{aligned}\right\},$$

so dafs es also für jedes gegebene Dreyeck ABC ein Polardreyeck $A'B'C'$ Statt hat, in welchem die Winkel die Complemente der Seiten von jenem, und die Seiten die Complemente der Winkel von jenen zu 180^0 sind. Es ist aber leicht zu sehen, dafs alle vorhergehenden Gleichungen $(A) \ldots (E)$ des sphärischen Dreyeckes keine Änderungen, selbst nicht in ihren Zeichen erleiden, wenn man in ihnen statt A, B, C die Gröfsen $180-\alpha$, $180-\beta$, $180-\gamma$, und statt α, β, γ die Gröfsen $180-A$, $180-B$, $180-C$ substituirt.

Das Vorhergehende zeigt die grofse Mannigfaltigkeit der Combinationen, die man zwischen den Bogen der gröfsten Kreise aufstellen kann, die durch drey gegebene Puncte der Oberfläche einer Kugel gehen.

§. 175. (Verbindungen mehrerer Ebenen oder Kreise unter einander.) Betrachten wir nun noch die Verbindungen, welche mehr als drey Ebenen, die alle durch den Mittelpunct einer Kugel gehen, unter einander eingehen.

Seyen $A'AA''$, $B'BB''$ und $C'CC''$ (Fig. 76) drey Bogen eines gröfsten Kreises, die sich in den Puncten A, B, C schneiden, und durch diese Durchschnittspuncte ein Dreyeck ABC bilden, dessen Winkel, nach der bisher angenommenen Bezeichnung, A, B, C, und dessen Seiten $BC=\alpha$, $AC=\beta$ und $AB=\gamma$ sind.

Sey ferner a der Pol des *ersten* Kreises AA', b des *zweyten* BB' und c des *dritten* Kreises CC', so wird, nach dem Vorhergehenden, in dem Polardreyecke abc der Bogen ab verlängert auf den ersten und zweyten, und eben so der Bogen ac auf den ersten und dritten, und endlich der Bogen bc auf dem zweyten und dritten Kreise senkrecht stehen, und die Winkel und Seiten dieses Polardreyeckes werden folgende Bezeichnung erhalten:

Winkel	$bac = \beta$	und Seite	$ab = A$,
»	$bca = \alpha$	» »	$bc = B$,
»	$abc = 180 - \gamma$	» »	$ac = 180 - C$.

Ganz eben so wird auch

A der Pol des erweiterten Kreises ab,
B » » » » » bc,
C » » » » » ac

seyn, und die Kreise Aa, Ab werden auf ab; Bb, Bc auf bc, und Cc, Ca auf ac senkrecht stehen.

Wir wollen diesen Kreis $abB'A'a$ den *vierten*, und endlich den durch die Puncte a und A gezogenen gröſsten Kreis aAD den *fünften* nennen.

Demnach stehen die drey gröſsten Kreise I, IV und V unter einander senkrecht, wie dieſs z. B. in der mathematischen Geographie oder auf dem Erdglobus der Fall ist, wenn der Kreis I den Äquator, und wenn die beyden Kreise IV und V diejenigen Meridiane vorstellen, die durch die geographischen Längenpuncte von 90^0 und 180^0 gehen. Nehmen wir daher diese drey Kreise I, IV und V als fest, oder als die ihrer Lage nach gegebenen Kreise an, und suchen wir die Lage der beyden anderen Ebenen II und III gegen jene drey fixen Ebenen zu bestimmen.

I. Sey zuerst die Lage des Kreises III gegen II, d. h. sey die Neigung B dieser Kreise gegen einander und die Entfernung $AB = \gamma$ ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes B von dem fixen Puncte A gegeben. Kennt man überdieſs noch den Winkel A der beyden ersten Ebenen I und II gegen einander, so findet man die drey Gröſsen α, β und C, durch welche die Lage des Kreises III gegen I bestimmt wird, durch folgende Ausdrücke (§. 168, Gleich. H), die unmittelbar aus der Auflösung des Dreyeckes ABC oder des Polardreyeckes abc desselben folgen:

$$\text{Cos}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}=\text{Cos}\frac{A+B}{2}\,\text{Cos}\frac{\gamma}{2},$$
$$\text{Sin}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}=\text{Cos}\frac{A-B}{2}\,\text{Sin}\frac{\gamma}{2},$$
$$\text{Cos}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2}=\text{Sin}\frac{A+B}{2}\,\text{Cos}\frac{\gamma}{2},$$
$$\text{Sin}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2}=\text{Sin}\frac{A-B}{2}\,\text{Sin}\frac{\gamma}{2};$$

und durch dieselben Gleichungen kann man auch A, B und γ finden, wenn α, β und C bekannt ist; d. h. man kann durch sie umgekehrt die Lage des Kreises III gegen II bestimmen, wenn die Lage des III gegen I die gegebene ist.

II. Ehe wir nun weiter gehen, müssen wir zuerst die Werthe der verschiedenen Bogen, die durch den Durchschnitt der Kreise auf der Kugel entstehen, näher bestimmen.

Der Kürze wegen wollen wir die Neigung des Kreises III

gegen den festen Kreis I durch A',
» » » » IV » B',
» » » » V » C',

und eben so die Entfernung des Durchschnittspunctes B der Kreise II und III

von dem Durchschnitte C der III und I durch α',
» » » » » III » IV » β',
» » » » » III » V » γ'

bezeichnen, so daſs man demnach hat:

Winkel $A' = A'CC'$,
» $B' = A'CC'' = A'C''C$,
» $C' = CED = aEC''$;
Bogen $\alpha' = BC$,
» $\beta' = BC'$,
» $\gamma' = BE$.

Man sieht, daſs, der angenommenen Bezeichnung gemäſs, $\alpha' = \alpha$ und $A' = 180 - C$ ist, und daſs überdieſs, wie man sich leicht überzeugt, auch die Bogen

$CE = \gamma' - \alpha'$, $A''c = C'$,
$CC' = 180 + \alpha' - \beta'$, $Ac = B'$,
$C''E = \beta' - \gamma$,

und die Winkel

$$A c b = \beta',$$
$$A' c b = 180 - \gamma'$$

sind; und daſs endlich, da der Punct A der Pol des Kreises IV ist, alle aus A auf diesen Kreis gezogenen Bogen $A A'$, AB', Aa,... den vierten Theil der Peripherie betragen, und auf diesem Kreise IV senkrecht stehen.

III. Dieſs vorausgesetzt, nehmen wir nun an, daſs, wie in dem letzten Fall der Nr. I., die Gröſse α, β und C, das heiſst, daſs die Lage des Kreises III gegen I gegeben sey, und daſs man daraus die Lage von III gegen die drey festen Ebenen I, IV und V bestimmen soll, oder mit anderen Worten, daſs man die sechs Gröſsen $A'B'C'$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ durch die drey gegebenen Gröſsen α, β und C ausdrücken soll.

Zu diesem Zwecke hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke $C A' C'$, nach §. 172.:

$$\text{Tang}\,(\beta' - \alpha) = \frac{\text{Cotang}\,\beta}{\text{Cos}\,C},$$
$$\text{Cos}\,B' = \text{Sin}\,\beta\;\text{Sin}\,C.$$

Eben so ist in dem Dreyecke ACE

$$\text{Tang}\,(\gamma' - \alpha) = -\frac{\text{Tang}\,\beta}{\text{Cos}\,C},$$
$$\text{Cos}\,C' = -\text{Cos}\,\beta\;\text{Sin}\,C;$$

und endlich in dem Dreyecke ABC, wie zuvor,

$$\alpha' = \alpha \quad \text{und}$$
$$A' = 180 - C;$$

und dadurch sind die sechs gesuchten Gröſsen auf die angegebene Weise bestimmt.

IV. Wenn aber die Lage des Kreises III gegen II, oder wenn die Gröſsen A, B und γ als gegebene vorausgesetzt werden, so erhält man dieselben sechs Gröſsen, welche die Lage von III gegen die drey festen Kreise I, IV und V bestimmen, durch folgende Ausdrücke.

In dem Dreyecke $BB'C$ ist $BC = 180 - \beta'$, $BB' = 90 - \gamma$ und $BB'N = 90^\circ$; also auch

$$\text{Tang}\,\beta' = -\frac{\text{Cotang}\,\gamma}{\text{Cos}\,B},$$

$$\text{Sin}\,B' = \frac{\text{Cos}\,\gamma}{\text{Sin}\,\beta} \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}\,B' = \text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,B.$$

Eben so hat man in dem Dreyecke ABE die Winkel $BAE = 90 + A$, $AEB = 180 - C'$, und die Seiten $AB = \gamma$ und $BE = \gamma'$; also auch

$$\text{Tang}\,\gamma' = \frac{\text{Sin}\,\gamma}{\text{Cos}\,B\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Tang}\,A\,\text{Sin}\,B},$$
$$\text{Sin}\,C' = \frac{\text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,\gamma}{\text{Sin}\,\gamma'} \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}\,C' = -\,\text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\gamma.$$

Endlich ist in dem Dreyecke ABC der Winkel $ACB = 180 - A'$, und die Seite $BC = \alpha'$; also auch

$$\text{Tang}\,\alpha' = \frac{\text{Sin}\,\gamma}{\text{Cotang}\,A\,\text{Sin}\,B + \text{Cos}\,B\,\text{Cos}},$$
$$\text{Sin}\,A' = \frac{\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,\gamma}{\text{Sin}\,\alpha'} \quad \text{und}$$
$$\text{Cos}\,A' = \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\gamma,$$

oder kürzer, es ist $\alpha' = \alpha$ und $A' = 180 - C$, wie zuvor.

Um auf diese Ausdrücke ein Beyspiel anzuwenden, nehmen wir an, dafs die Ebene III gegen II durch folgende Werthe von A, B und γ gegeben sey:

$$A = 23^{\circ}\,27'\,57''.0,$$
$$B = 7\;\;0\;\;8.9,$$
$$\gamma = 45\;\;56\;\;48.0.$$

Sucht man daraus zuerst die Lage derselben Ebene III gegen I, oder sucht man die Gröfsen α, β und C, so findet man, nach den oben (in I.) angeführten Gleichungen:

$$\alpha = 36^{\circ}\,30'\,28''.5,$$
$$\beta = 10\;\;29\;\;40.6,$$
$$C = 151\;\;14\;\;48.6.$$

Bestimmt man dann die gesuchte Lage der Ebene III gegen die drey festen Ebenen I, IV und V, so erhält man, wenn man die Gleichungen in Nr. III. oder IV. zu Grunde legt:

$$\alpha' = 36^{\circ}\,30'\,28''.5 \quad \text{und} \quad A' = 28^{\circ}\,45'\,11''.3,$$
$$\beta' = 135\;\;43\;\;56.2 \quad » \quad B' = 84\;\;58\;\;24.7,$$
$$\gamma' = 48\;\;26\;\;19.3 \quad » \quad C' = 61\;\;46\;\;17.0.$$

Bemerken wir noch, dafs zwischen diesen sechs Gröfsen $\alpha' A' \ldots$ mehrere schöne Relationen bestehen, die man leicht aus den Dreyecken DEC', ACE, CAC, ... ableiten wird, und von welchen ich der Kürze wegen nur einige, zur Übung in solchen Untersuchungen, hier anführe:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} A' &= \operatorname{Sin}(\beta'-\gamma') \operatorname{Sin} B' \operatorname{Sin} C' \\ \operatorname{Cos} B' &= \operatorname{Sin}(\gamma'-\alpha') \operatorname{Sin} C' \operatorname{Sin} A' \\ \operatorname{Cos} C' &= \operatorname{Sin}(\alpha'-\beta') \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} B' \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cotang}(\alpha'-\beta') &= -\operatorname{Cotang} A' \operatorname{Cotang} B' \\ \operatorname{Cotang}(\beta'-\gamma') &= -\operatorname{Cotang} B' \operatorname{Cotang} C' \\ \operatorname{Cotang}(\gamma'-\alpha') &= -\operatorname{Cotang} C' \operatorname{Cotang} A' \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cotang}(\alpha'-\beta') \operatorname{Cotang}(\gamma'-\alpha') &= \operatorname{Cos}^2 A' \\ \operatorname{Cotang}(\beta'-\gamma') \operatorname{Cotang}(\alpha'-\beta') &= \operatorname{Cos}^2 B' \\ \operatorname{Cotang}(\gamma'-\alpha') \operatorname{Cotang}(\beta'-\gamma') &= \operatorname{Cos}^2 C' \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\alpha'-\beta') &= \operatorname{Sin}(\gamma'-\alpha') \operatorname{Sin}(\gamma'-\beta') \operatorname{Sin}^2 C' \\ \operatorname{Cos}(\beta'-\gamma') &= \operatorname{Sin}(\alpha'-\beta') \operatorname{Sin}(\alpha'-\gamma') \operatorname{Sin}^2 A' \\ \operatorname{Cos}(\gamma'-\alpha') &= \operatorname{Sin}(\beta'-\gamma') \operatorname{Sin}(\beta'-\alpha') \operatorname{Sin}^2 B' \end{aligned}\right\}.$$

Zwey und zwanzigstes Capitel.

Gleichungen der geraden Linie.

A. Gerade Linie in einer gegebenen Ebene.

§. 176. (Gleichung der geraden Linie.) Es ist bereits oben (§. 150.) gezeigt worden, daſs man den Ort eines Punctes M (Fig. 77) in einer gegebenen Ebene kennt, wenn die zwey senkrechten Abstände MP und MQ dieses Punctes von zwey ebenfalls unter sich senkrechten, aber ihrer Lage nach gegebenen geraden XX' und YY', in dieser Ebene liegenden Linien bekannt ist, und daſs von diesen Abständen die eine $MQ = AP = x$ die *Abscisse*, die andere $MP = QA = y$ die *Ordinate*, beyde zusammen aber die *Coordinaten* des Punctes M genannt werden, während man die beyden fixen Geraden XX' und YY' die *Axen der Coordinaten*, und ihren Durchschnittspunct A den *Anfang der Coordinaten* zu nennen pflegt.

Nimmt man in einem der vier Quadranten, in welche die unbegrenzte Ebene durch die Coordinatenaxe getheilt wird, nimmt man z. B. in dem ersten Quadranten XAY beyde Coordinaten x und y positiv an, so ist in dem zweyten YAX' die Abscisse x, in dem dritten $X'AY'$ die Abscisse x und zugleich die Ordinate y, und in dem vierten Quadranten $Y'AX$ endlich wieder bloſs die Ordinate y negativ, wie aus der bloſsen Stellung dieser Linien in den vier Quadranten von selbst hervorgeht.

Dieſs vorausgesetzt, sey $CDMM' \ldots$ eine gerade Linie, zu deren Puncten M, M', M', . . .

die Abscissen AP, AP', AP'', . . . und überhaupt x,

und die Ordinaten PM, PM', PM'', . . . und überhaupt y

gehören. Aus dem Begriffe der geraden Linie geht hervor, daſs für jeden dieser Puncte das Verhältniſs der beyden geraden Linien

$$\frac{PM}{CP}, \frac{P'M'}{CP'}, \frac{P''M''}{CP''}, \ldots$$

immer dasselbe bleibt. — Nennen wir a dieses constante Verhältniſs, und heiſsen wir eben so B die ebenfalls constante Distanz AC, so wird man, da $CP = B + AP$, $CP' = B + AP$, $CP'' = B + AP''$. . . ist, die vorhergehenden Verhältnisse alle durch die gemeinsame Gleichung

$$\frac{y}{B + x} = a \quad \text{oder} \quad y = ax + aB$$

ausdrücken können; und da dieser Ausdruck alle Puncte der Linie CM umfaſst, so wird er das analytische Symbol, oder er wird die *Gleichung der geraden Linie* CM seyn.

Statt der beständigen Gröſsen aB kann man auch eine einfachere Constante b einführen, so daſs man daher für die Gleichung der geraden Linie den Ausdruck hat:

$$y = ax + b \ldots (1).$$

I. Aus der Entstehung dieser Gleichung (1) folgt, daſs erstens die Constante $a = \frac{PM}{CP} = \frac{P'M'}{CP'} \ldots$ die trigonometrische Tangente (§. 90.) des Winkels XCM ist, unter welcher die Gerade CM gegen die Abscissenaxe XX' geneigt ist; und daſs zweytens die Constante b gleich der Distanz AD des Anfangspuncts A der Coordinaten von dem Durchschnittspuncte D der Geraden CM mit der Ordinatenaxe YY' ist, da für $x = 0$ die Ordinate $y = b$ wird.

Setzt man eben so in der Gleichung (1) die Ordinate $y = 0$, so erhält man

$$x = -\frac{b}{a}$$

für die Distanz AC des Anfangspunctes A von dem Durchschnittspuncte C der Geraden mit der Abscissenaxe XX'.

II. Da sonach durch die Constante a die Neigung der Geraden gegen die feste Abscissenaxe, und durch die Constante b ein Punct der Ebene auſser dieser Axe, durch welchen die Gerade geht, bestimmt wird, so wird auch durch die Gleichung (1) die Lage der Geraden CM in dieser Ebene vollständig bestimmt.

Bezeichnen a und b an sich positive Gröſsen, so gehört in (Fig. 77, A.) die Gleichung

$y = ax + b$ für die Lage BD der Geraden,
$y = ax - b$ » » » CE » »

$$y = -ax + b \text{ für die Lage } CD \text{ der Geraden.}$$
$$y = -ax - b \quad » \quad » \quad » \quad BE \quad » \quad »$$

III. Ist in der Gleichung (1) die Gröſse $b = 0$, so hat man

$$y = ax$$

für die allgemeine Gleichung jeder Geraden, die durch den Anfangspunct A der Coordinaten geht, da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

IV. Ist aber in derselben Gleichung die Gröſse $a = 0$, so hat man

$$y = b$$

für die Gleichung einer Geraden, die parallel mit der Axe der x ist, und die von dieser Axe um die senkrechte Distanz b absteht.

V. Eben so ist auch

$$x = c$$

die Gleichung einer Geraden, die parallel mit der Axe der y ist, und die von dieser Axe um die Gröſse c absteht.

VI. Aus IV. und V. folgt, daſs die zwey Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = A \\ y = B \end{array}\right\} .$$

zusammen genommen die *Gleichungen eines Punctes* sind, dessen Abstand von der Axe der y gleich A, und von der Axe der x gleich B ist. Die erste derselben gehört nämlich für eine mit y, und die zweyte für eine mit x parallele Gerade. Wenn man daher *beyde zusammen*, oder wenn man beyde Gleichungen als *coexistirend* betrachtet, so betrachtet man eigentlich nur das, was beyden Linien gemeinschaftlich ist, d. h. den *Durchschnittspunct* derselben.

§. 177. (Bestimmung des Durchschnittspunctes zweyer Geraden.) Sey die Gleichung der ersten der gegebenen Geraden

$$y = ax + b \ldots (1),$$

und die der zweyten

$$y = a'x + b' \ldots (2).$$

Wir wollen hier und in der Folge diese Geraden selbst, der Kürze wegen, die Linien (1) und (2) nennen.

Da für den Durchschnittspunct dieser zwey Geraden die Abscissen x sowohl, als auch die Ordinate y, in den beyden vorhergehenden Gleichungen, *dieselben* Werthe haben müssen, so werden wir diese Coordinaten auch einander gleich setzen, und dann, aus diesen zwey Gleichungen (nach §. 67.) die entsprechenden Werthe der Coordinaten x und y des gesuchten Durchschnittspunctes bestimmen können. Man erhält so

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ und } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

I. Ist $a' = a$, so wird x sowohl als auch y unendlich groſs, oder die beyden Linien (1) und (2) schneiden sich nie, sind also parallel, übereinstimmend mit §. 176, I., da a und a' die Neigungen der Geraden gegen die Axe der x, und daher beyde Neigungen dieselben sind.

II. Also ist auch überhaupt

$$y = ax + B$$

die Gleichung einer mit (1) parallelen Geraden, und in dieser Gleichung ist die Constante B willkürlich, weil es in der That unzählige Linien gibt, die mit der Geraden (1) parallel sind.

III. Ist n die Neigung der Geraden (1) gegen die Abscissenaxe, also auch $a = \text{Tang}\, n$, so hat man

$$\text{Tang}\,(90^0 + n) = - \text{Cotang}\, n = - \frac{1}{a};$$

also ist auch überhaupt

$$y = - \frac{1}{a} x + B$$

die Gleichung einer auf (1) senkrecht stehenden Geraden, und in ihr ist ebenfalls die Gröſse B willkürlich.

§. 178. (Gleichung einer Geraden, die durch zwey gegebene Puncte geht.) Seyen $x'y'$ die Coordinaten des einen, und $x''y''$ die des anderen gegebenen Punctes, und sey die Gleichung der gesuchten Geraden

$$y = Ax + B,$$

in welcher also die Werthe von A und B, den aufgestellten Bedingungen gemäſs, bestimmt werden sollen.

Da diese Gerade durch den ersten der gegebenen Puncte gehen soll, dessen Coordinaten $x'y'$ sind, so hat man auch die

Bedingungsgleichnng

$$y' = Ax' + B \ldots (a).$$

Eliminirt man aus den beyden vorhergehenden Gleichungen irgend eine der beyden Constanten A oder B, z. B. die letzte, so erhält man den Ausdruck

$$y - y' = A(x - x');$$

und dieſs ist die Gleichung einer Linie, die durch den Punct geht, dessen Coordinaten x' und y' sind. In ihr ist die Gröſse A noch willkürlich. Setzt man in ihr $A = a$, so erhält man

$$y - y' = a(x - x') \ldots (b)$$

für die Gleichung einer Geraden, die durch den Punct $(x'y')$ geht, und mit der Linie (1) parallel ist. Setzt man aber in ihr $A = -\frac{1}{a}$, so erhält man

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

für die Gleichung einer Geraden, die durch den Punct $(x'y')$ geht, und auf der Linie (1) senkrecht steht.

Soll überdieſs die zuerst angenommene Gerade auch noch durch den zweyten Punct gehen, dessen Coordinaten x'', y'' sind, so hat man, wie zuvor, die Bedingungsgleichung

$$y'' = Ax'' + B \ldots (c).$$

Die beyden Gleichungen (a) und (c) reichen hin, die Werthe der zwey unbekannten Gröſsen A und B zu bestimmen. Man erhält so

$$A = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad \text{und} \quad B = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''},$$

und wenn man diese Werthe in der oben aufgestellten Gleichung

$$y = Ax + B$$

substituirt, so erhält man

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

für die gesuchte Gleichung der durch beyde Puncte gehenden Geraden. In ihr sind die Gröſsen x und y die veränderlichen oder sogenannten laufenden Coordinaten, während die anderen $x'y'$ und $x''y''$ constante Gröſsen bezeichnen.

I. Sind M' und M'' (Fig. 77) diese zwey gegebenen Puncte, deren Coordinaten

$$AP' = x' \quad \text{und} \quad AP'' = x'',$$
$$P'M' = y' \quad » \quad P''M'' = y''$$

sind, so hat man, wenn man durch den Punct M' die Gerade $M'N$ parallel mit der Axe der x zieht, und wenn man in dem rechtwinkligen Dreyecke $M'M''N$ die Distanz $M'M''$ der zwey gegebenen Puncte gleich Δ setzt:

$$\Delta^2 = M'N^2 + M''N^2,$$

oder

$$\Delta = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}.$$

§. 179. (Bestimmung des Winkels zweyer gegebenen Geraden.) Seyen die Gleichungen (1) und (2) die der zwey gegebenen Geraden. Führt man beyde Linien, mit sich selbst parallel, fort, bis sie durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, so werden, in diesem letzten Zustande, ihre Gleichungen seyn:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax \\ y = a'x \end{array}\right\};$$

und dadurch ist der Winkel (1.2), den diese Geraden unter sich bilden, nicht verändert worden.

Nennt man nun, analog mit der eingeführten Bezeichnung, $(1.x)$ und $(1.y)$ die Winkel, welche die Gerade (1) mit der Axe der x und der y bildet, und eben so $(2.x)$ und $(2.y)$ die Winkel der Geraden (2) mit der Axe der x und y, so hat man, nach §. 177.:

$$a = \text{Tang}(1.x) \quad \text{und} \quad a' = \text{Tang}(2.x).$$

Allein da man zwischen diesen Winkeln auch die Gleichung hat:

$$(1.2) = (2.x) - (1.x),$$

so ist auch

$$\text{Tang}(1.2) = \text{Tang}\left[(2.x) - (1.x)\right],$$

oder nach §. 101.:

$$\text{Tang}(1.2) = \frac{\text{Tang}(2.x) - \text{Tang}(1.x)}{1 + \text{Tang}(2.x)\,\text{Tang}(1.x)},$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von Tang$(1.x)$ und Tang$(2.x)$ substituirt:

$$\text{Tang}\,(1\,.\,2) = \frac{a' - a}{1 + a'a},$$

wofür man auch die Ausdrücke (§. 95, I.) nehmen kann:

$$\text{Sin}\,(1\,.\,2) = \frac{a' - a}{\sqrt{1 + a'^2}\,.\,\sqrt{1 + a^2}} \quad \text{oder}$$

$$\text{Cos}(1\,.\,2) = \frac{1 + a'a}{\sqrt{1 + a'^2}\,.\,\sqrt{1 + a^2}}.$$

I. Sind beyde Linien (1) und (2) zu einander parallel, so ist Tang$(1\,.\,2) = 0$, oder es ist

$$a' - a = 0, \quad \text{also auch} \quad a' = a$$

wie zuvor (§. 177, I.).

Sind sie aber auf einander senkrecht, so ist Tang$(1\,.\,2)$ unendlich groſs, also auch

$$1 + a'a = 0 \quad \text{oder} \quad a' = -\frac{1}{a}$$

wie oben (§. 177, III.).

§. 180. (Umformung der Gleichung der geraden Linie.) Bemerken wir noch, zum Schlusse dieses Gegenstandes, daſs man der Gleichung der geraden Linie, die überhaupt eine Gleichung des ersten Grades (§. 34, I.) ist, auch noch andere Gestalten geben kann. Wählt man z. B. dafür die Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \ldots (\alpha),$$

so drücken hier die Constanten α und β die Entfernungen des Anfangspunctes A von denjenigen zwey Puncten C und D (Fig. 77) aus, in welchen die Axen der x und der y von der Geraden CM geschnitten wird. Vergleicht man diese Form mit der vorhergehenden

$$y = ax + b,$$

so sieht man, daſs man in allen bisher aufgestellten Ausdrücken nur

$$-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{statt} \quad a, \quad \text{und}$$
$$\beta \quad \text{»} \quad b$$

setzen wird, um die analogen, der letzten Form entsprechenden Ausdrücke zu erhalten. So wird z. B. der Cosinus des Winkels der beyden Geraden, deren Gleichungen sind:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \text{ und } \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 1,$$

durch die Gleichung gegeben werden:

$$\text{Cos}(1.2) = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \text{ u. s. w.}$$

I. Auch kann man jeden Punct M der Geraden $CMM' \ldots$ durch seine Distanz $MB = r$ von irgend einem Puncte B, der z. B. in der Axe der x liegt, und durch den Winkel $MBX = \varphi$ bestimmen, den jene Distanz BM mit der Axe der x bildet. Man pflegt r den *Radius Vector*, und die beyden veränderlichen Grössen r und φ die *Polarcoordinaten* des Punctes M, so wie B den *Pol* derselben zu nennen.

Ist $AB = c$ die gegebene Distanz des Pols B von dem Anfangspuncte A der rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$, so hat man

$$x = c + r \text{ Cos}\varphi \text{ und}$$
$$y = r \text{ Sin}\varphi.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der Gleichung

$$y = ax + b$$

der Geraden (1), so erhält man für die Polargleichung derselben den Ausdruck

$$r \text{ Sin}\varphi = ac + b + ar \text{ Cos}\varphi,$$

oder auch

$$r = \frac{ac + b}{\text{Sin}\varphi - a \text{ Cos}\varphi}.$$

Für $c = 0$ liegt der Pol im Anfangspuncte A der rechtwinkligen Coordinaten, und dann hat man für die Gleichung der Geraden

$$r = \frac{b}{\text{Sin}\varphi - a \text{ Cos}\varphi}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke den Winkel $\varphi = 0$, so erhält man $r = AC = -\frac{b}{a}$, und eben so gibt $\varphi = 90$ den Werth von $r = AD = b$, wie zuvor.

B. Gerade Linie im Raume.

§. 181. (Bestimmung eines Punctes im Raume.) Wie wir im Vorhergehenden die Lage eines Punctes in einer gegebenen Ebene durch seine senkrechten Abstände von *zwey* fixen, in derselben Ebene unter sich senkrechten gegebenen Linien bestimmt haben, so werden wir auch den Ort eines Punctes im Raume überhaupt kennen, wenn uns die senkrechten Abstände desselben von *drey* gegebenen festen, und unter sich senkrechten Ebenen bekannt sind.

Sey $APQMa$ (Fig. 78) ein rechtwinkliges Parallelepiped. Erweitert man die drey Seiten APp, Aqa und $APQq$ desselben unbegrenzt nach allen ihren Richtungen, so entstehen die drey erwähnten, unter sich senkrechten Ebenen, die sich je zwey in den Linien $X'AX$, $Y'AY$, $Z'AZ$, und die sich alle drey in dem gemeinschaftlichen Puncte A schneiden.

Sey der senkrechte Abstand irgend eines Punctes M
von der Ebene Aqa, oder sey $Mm = AP = x$,
» » » APp, » » $Mp = PQ = y$,
» » » APQ, » » $MQ = mq = z$.

Man nennt diese Gröfsen x, y, z die senkrechten *Coordinaten* des Punctes M; die festen, ihrer Lage nach gegebenen Geraden XAX', YAY', ZAZ' die *Coordinatenaxen;* die erwähnten, durch diese Axen gehenden drey senkrechten Ebenen die *coordinirten Ebenen,* und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct A den Anfang der Coordinaten.

I. Läfst man von irgend einem Puncte ein Loth auf eine gerade Linie oder auf eine Ebene herab, so heifst der Fufspunct dieses Lothes, in welchem dasselbe die gerade Linie oder die Ebene trifft, die *Projection* jenes Punctes auf diese gerade Linie oder auf diese Ebene. Eben so wird man die Projection einer Geraden auf eine andere Gerade erhalten, wenn man von den Endpuncten der ersten auf die andere Lothe herabfallen läfst. Fällt man von den beyden Endpuncten einer geraden Linie, oder von allen Puncten einer krummen Linie, auf eine gegebene Ebene Lothe herab, so erhält man auf gleiche Weise die Projection jener geraden oder krummen Linie in der gegebenen Ebene, und eben so wird man auch von irgend einer Figur die Projection derselben in einer Ebene haben, wenn man von allen Puncten des Umfangs der Figur auf diese Ebene Lothe herabläfst.

Demnach ist von dem Puncte M, dessen Coordinaten x, y, z sind,

P, q und a die Projection auf die Axe der x, y und z, so wie
Q, p » m » » » » Ebene » xy, xz und yz.

Von der Distanz AM aber dieses Punctes M von dem Anfangspuncte der Coordinaten ist
$AP = x$, $Aq = y$, $Aa = z$ die Projection auf die Axe der x, y und z, und eben so sind die Diagonalen der Parallelogramme, die das erwähnte Parallelepiped begrenzen, oder eben so sind

$$AQ, \quad Ap \text{ und } Am$$

in derselben Ordnung die Projectionen derselben Distanz AM auf die coordinirte Ebene der xy, der xz und der yz.

II. Durch die absolute Gröſse der drey Coordinaten x, y, z wird allerdings die *Entfernung* des Punctes M von den drey festen coordinirten Ebenen, aber noch nicht die *Lage* dieses Punctes, oder die *Seite* dieser Ebene bestimmt, auf welcher der Punct steht. Um auch noch diese Lage auszudrücken, wird man diese Coordinaten auf der einen Seite einer jeden der drey Ebenen negativ annehmen, wenn man sie auf der anderen positiv vorausgesetzt hat. Nimmt man z. B. in der Zeichnung der Figur 78 die x, y, z nach der Richtung der Geraden AX, AY, AZ positiv, so werden sie nach den entgegengesetzten Richtungen AX', AY', AZ' negativ seyn, so daſs demnach von den acht Octanten, in welche der unbegrenzte Raum um den Punct A durch die drey coordinirten Ebenen getheilt wird, der Octant XYZ alle drey Coordinaten positiv, der Octant $X'YZ$, $XY'Z$ und XYZ' aber nur eine dieser Coordinaten, $X'Y'Z$, $X'YZ'$ und $XY'Z'$ aber zwey, und der Octant $X'Y'Z'$ endlich alle drey Coordinaten negativ hat.

§. 182. (Gleichungen der Geraden im Raume.) Da von einer Geraden AM im Raume die Projection auf irgend eine Ebene (z. B. die Projection Ap in der Ebene der xz) wieder eine Gerade ist, so wird die Gleichung dieser Projection in der Ebene der xz, nach §. 176, III., die Form haben:

$$x = az;$$

und eben so wird von ihrer Projection Am in der Ebene der yz die Gleichung seyn:

$$y = bz;$$

wo a, b constante Gröſsen sind, deren Bedeutung aus §. 176.

bekannt ist, wo nämlich a und b die Tangenten des Neigungswinkels dieser Proportionen Ap und Am mit den Axen der x und der y sind.

Dieſs setzt voraus, daſs die Gerade AM, daſs also auch jede der beyden Projectionen, durch den Anfangspunct A der Coordinaten geht. Ist dieſs nicht der Fall, so werden (nach §. 176.) die allgemeinen Gleichungen dieser beyden Projectionen seyn:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

I. Es ist klar, daſs durch diese zwey Projectionen, oder, was dasselbe ist, daſs durch diese zwey Gleichungen der Projectionen irgend einer Geraden in zweyen der drey coordinirten Ebenen, *die Lage dieser Geraden im Raume vollständig bestimmt wird.*

Sucht man aber noch die Projection derselben Geraden in der dritten Ebene der xy, so hat man für die Gleichung derselben, wenn man aus den beyden vorhergehenden Gleichungen die Gröſse z eliminirt:

$$ay - bx = a\beta - \alpha b.$$

II. Sind in den Gleichungen (1) die Gröſsen $a = b = 0$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \end{aligned}\right\}$$

für eine mit der Axe der z parallele Gerade, die von der Ebene yz um die Gröſse α, und von der Ebene xz um β absteht. Ist auch noch $\alpha = \beta = 0$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

für die Gleichungen der Axe der z selbst.

§. 183. (Parallele und solche Gerade, die durch gegebene Puncte gehen.) Nennen wir der Kürze wegen diejenige Gerade, zu welcher die obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

gehören, die Linie (1), und eben so sollen auch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots (2)$$

für eine andere Linie, die wir (2) nennen, gehören.

Da zwey Gerade im Raume unter sich parallel sind, wenn ihre Projectionen in zwey coordinirten Ebenen unter sich parallel sind, und umgekehrt, so folgt sofort aus §. 177, I., daſs die zwey Linien (1) und (2) parallel seyn werden, wenn die zwey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$a' = a \quad \text{und} \quad b' = b;$$

so daſs demnach die Gleichungen einer mit (1) parallelen Linie seyn werden:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + A \\ y = bz + B \end{array}\right\},$$

wo A und B noch unbestimmt bleiben.

I. Soll diese mit (1) parallele Gerade auch noch durch den gegebenen Punct, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, gehen, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x' = az' + A \\ y' = bz' + B \end{array}\right\};$$

und diese, mit den beyden vorhergehenden verbunden, geben für die mit (1) parallele, durch den gegebenen Punct gehende Gerade die Gleichungen

$$x - x' = a(z - z'),$$
$$y - y' = b(z - z').$$

(Vergl. §. 178, Gleichung (b)).

II. Um den Durchschnittspunct der beyden Geraden (1) und (2) zu finden, wird man (wie in §. 177.) die Werthe xyz in den vier Gleichungen (1) und (2) unter sich gleich annehmen, wo man dann, durch die Elimination dieser drey Gröſsen aus jenen vier Gleichungen erhält:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'};$$

und diese Bedingungsgleichung muſs Statt haben, damit sich die beyden Linien schneiden können.

Ist $a = a'$ und $b = b'$, so hat die vorhergehende Gleichung keine Bedeutung mehr, weil dann (nach dem Vorhergehenden) die beyden Linien parallel sich, und sich nicht schneiden.

III. Sucht man die Gleichungen einer Geraden, die durch zwey gegebene Puncte geht, von welchen der erste die Coordinaten $x'y'z'$, und der zweyte die $x''y''z''$ hat, so wird man die zwey Gleichungen (1) noch mit den vier folgenden verbinden:

$$\left.\begin{array}{l} x' = az' + \alpha \\ y' = bz' + \beta \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x'' = az'' + \alpha \\ y'' = bz'' + \beta \end{array}\right\}.$$

Eliminirt man dann aus diesen sechs Gleichungen die vier Gröſsen a, b, α und β, so erhält man für die Gleichungen der gesuchten Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = \dfrac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \\ y - y' = \dfrac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \end{array}\right\},$$

wo x, y und z die laufenden Coordinaten der gesuchten Geraden bezeichnen (vergl. §. 178.).

§. 184. (Distanz zweyer Puncte im Raume.) Seyen M und M' (Fig. 79) zwey im Raume gegebene Puncte, und $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ die Coordinaten des ersten, so wie $AP' = x'$, $P'Q' = y'$, $Q'M' = z'$ die des zweyten Punctes. Man suche die Distanz $MM' = \Delta$ dieser zwey Puncte.

Man ziehe Qp und Mm mit AX, pm mit AZ und mn mit AY parallel, so hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke $MM'm$

$$MM' \text{ oder } \Delta = \sqrt{Mn^2 + nM'^2},$$

und eben so in dem rechtwinkligen Dreyecke Mnm

$$Mn^2 = Mm^2 + mn^2,$$

also ist auch

$$\Delta = \sqrt{Mm^2 + mn^2 + nM'^2}.$$

Man hat aber, in Folge der angeführten Verzeichnung,

$$\begin{aligned} Mm &= AP' - AP = x' - x, \\ mn &= PQ' - PQ = y' - y, \\ nM' &= Q'M' - QM = z' - z, \end{aligned}$$

also ist auch die gesuchte Distanz

$$\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Läſst man aber von den beyden Endpuncten M und M' der Distanz Δ Lothe auf die Axen der x, y und z herab, so sind diejenigen Stücke dieser Axen, welche zwischen den Fuſspuncten jener Lothe enthalten sind, oder so sind die *Projectionen* (§. 181, I.) der Distanz Δ auf diese Axen

$$\begin{aligned} &\text{der } x \ldots PP' = x' - x, \\ &\text{»} \ \ y \ldots Q'p = y' - y, \\ &\text{»} \ \ z \ldots M'm = z' - z. \end{aligned}$$

Demnach ist das Quadrat einer jeden geraden Linie gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey willkürlichen, aber unter sich senkrechten Linien: eine wesentliche Erweiterung des oben (§. 92.) angeführten Pythagoräischen Theorems.

I. Eben so erhält man auch für die Distanz $AM = R$ des ersten Punctes M von dem Anfangspuncte A der Coordinaten, da für den letzten Punct die Gröſsen $x'y'z'$ verschwinden:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und eben so für die Distanz $AM' = R'$ des zweyten Punctes:

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

§. 185. (Winkel zweyer gegebenen Geraden.) Um den Winkel, welchen die zwey Geraden (1) und (2) unter sich bilden, zu finden, kann man dieselben zuerst unter sich parallel fortrücken, bis sie beyde durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen. In diesem Zustande verschwinden in den Gleichungen derselben die Constanten α, α' und β, β', ohne daſs dadurch die Neigung der Linien gegen einander geändert wird, so daſs daher die Gleichungen dieser zwey Geraden die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} x &= az \\ y &= bz \end{aligned}\right\} \ldots (1) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} x &= a'z \\ y &= b'z \end{aligned}\right\} \ldots (2).$$

Nimmt man dann auf jeder der beyden letzten Geraden einen Punct, dessen Entfernung von dem Anfange der Coordinaten für die erste Gerade gleich r' und für die zweyte gleich r'' ist, und nennt man $x'y'z'$ die Coordinaten des ersten, und $x''y''z''$ die des zweyten Punctes, so wird man für die Distanz Δ dieser zwey Puncte (nach §. 184.) den Ausdruck haben:

$$\Delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2.$$

Allein für dieselbe Distanz hat man auch (nach §. 91, Gleichung (A)), wenn man den gesuchten Winkel, welchen die beyden Geraden (1) und (2) unter sich bilden, durch (1.2) bezeichnet:

$$\Delta^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \operatorname{Cos}(1.2).$$

Setzt man diese beyden Ausdrücke von Δ^2 einander gleich, und bemerkt man, daſs (nach §. 184, I.)

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{und}$$
$$r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

ist, so erhält man:

$$r'r''.\operatorname{Cos}(1.2) = x'x'' + y'y'' + z'z'' \dots \text{(a)}.$$

Da man aber aus dem Vorhergehenden hat:

$$x' = az' \quad \text{und} \quad x'' = a'z'',$$
$$y' = bz' \quad \text{»} \quad y'' = b'z'',$$

und daher auch

$$r'^2 = (1 + a^2 + b^2).z'^2,$$
$$r''^2 = (1 + a'^2 + b'^2).z''^2,$$

so erhält man, wenn man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung (a) substituirt, für den gesuchten Winkel (1.2) der Linien (1) und (2) den folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{Cos}(1.2) = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,.\,\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

I. Sind daher die beyden Linien (1) und (2) unter sich parallel, so ist $\operatorname{Cos}(1.2) = 1$, und dann geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2) = (1 + aa' + bb')^2,$$

die man auch so schreiben kann:

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2 = 0.$$

Da aber die Summe von Quadraten, als immer positive Gröſsen, nur dann verschwinden kann, wenn jedes dieser Quadrate für sich gleich Null ist, so hat man

$$a = a' \quad \text{und} \quad b = b',$$

übereinstimmend mit §. 183.

II. Sind endlich die beyden Geraden (1) und (2) auf einander senkrecht, so hat man $\operatorname{Cos}(1.2) = 0$, also ist auch

$$1 + aa' + bb' = 0$$

die Bedingung des gegenseitigen senkrechten Standes der beyden

Geraden. Allein bey diesem Stande können die Linien im Raume noch immer neben einander fortgehen, ohne sich zu schneiden. Sollen sie daher nicht bloſs auf einander senkrecht seyn, sondern sich auch in der That schneiden, so wird man (nach §. 183, II.) die beyden Bedingungsgleichungen haben:

$$1 + aa' + bb' = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'}.$$

§. 186. (Winkel einer gegebenen Geraden mit den drey coordinirten Axen.) Nach dem Vorhergehenden (§. 182, II.) sind die Gleichungen der Axe der z

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}.$$

Sucht man daher den Winkel $(1.z)$ der Linie (1) mit der Axe der z, so wird man nur in dem obigen Ausdruck für Cos (1.2) die beyden Gröſsen a' und b' gleich Null setzen, wodurch man erhält:

$$\text{Cos}\,(1.z) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Eben so erhält man auch für den Winkel der Linie (1) mit der Axe der y und der x

$$\text{Cos}\,(1.y) = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \text{Cos}\,(1.x) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Auf dieselbe Weise hat man auch für die Winkel der Linie (2) mit den drey Axen der Coordinaten

$$\text{Cos}\,(2.z) = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad \text{Cos}\,(2.y) = \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},$$

$$\text{Cos}\,(2.x) = \frac{a}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

I. Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werth von Cos (1.2), so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$\text{Cos}\,(1.2) = \text{Cos}\,(1.x)\,\text{Cos}\,(2.x) + \text{Cos}\,(1.y)\,\text{Cos}\,(2.y) + \text{Cos}\,(1.z)\,\text{Cos}\,(2.z).$$

II. Nach §. 183, I. sind die Gleichungen einer Geraden, die durch den gegebenen Punct, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind, geht:

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= a(z - z') \\ y - y' &= b(z - z') \end{aligned}\right\}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$a = \frac{\text{Cos}(1 . x)}{\text{Cos}(1 . z)} \quad \text{und} \quad b = \frac{\text{Cos}(1 . y)}{\text{Cos}(1 . z)};$$

also lassen sich die Gleichungen einer durch einen gegebenen Punct (x', y', z') gehenden Geraden auch so darstellen:

$$\left.\begin{aligned} (x-x')\,\text{Cos}(1 . z) &= (z-z')\,\text{Cos}(1 . x) \\ (y-y')\,\text{Cos}(1 . z) &= (z-z')\,\text{Cos}(1 . y) \\ \text{und} \quad (x-x')\,\text{Cos}(1 . y) &= (y-y')\,\text{Cos}(1 . x) \end{aligned}\right\}.$$

III. Man bemerke noch, daſs von diesen drey Winkeln jeder schon durch die beyden anderen gegeben ist, da man zwischen ihnen die Bedingungsgleichung hat:

$$\text{Cos}^2(1 . x) + \text{Cos}^2(1 . y) + \text{Cos}^2(1 . z) = 1,$$

und eben so

$$\text{Cos}^2(2 . x) + \text{Cos}^2(2 . y) + \text{Cos}^2(2 . z) = 1.$$

§. 187. (Verschiedene Ausdrücke der Coordinaten eines Punctes.) Nach §. 181. ist der Ort eines Punctes M (Fig. 78) im Raume gegeben, wenn seine drey senkrechten Abstände $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$ von den drey coordinirten Ebenen der yz, xz und der xy gegeben sind.

Diese Abstände können aber auf verschiedene Weise gegeben seyn. Nennt man z. B. $AM = r$ die Distanz des Punctes M von dem Anfange A der Coordinaten, und sind

$$XAM = \alpha, \quad YAM = \beta, \quad ZAM = \gamma$$

die Winkel dieser Distanz mit den positiven Hälften AX, AY, AZ der Coordinatenaxen, so hat man sofort

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{Cos}\,\alpha \\ y &= r\,\text{Cos}\,\beta \\ z &= r\,\text{Cos}\,\gamma \end{aligned}\right\} \ldots (\text{a}).$$

In diesem Ausdrucke wird man die Gröſse r immer positiv, und die Winkel α, β, γ immer zwischen 0° und 180° nehmen, um in der That *alle* Puncte des Raumes, und *keinen mehr als ein Mal* zu umfassen (vergl. §. 173, III.). So wird z. B. der Winkel

$ZAM = \gamma$ kleiner oder gröfser als 90^0, also auch $\text{Cos}\,\gamma$ positiv oder negativ seyn, wenn der Punct M über oder unter der coordinirten Ebene XAY der xy liegt.

Auch zwischen diesen drey Winkeln α, β, γ hat dieselbe Bedingungsgleichung, wie §. 186, III., Statt. Da nämlich

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, so hat man auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von x, y, z substituirt:

$$\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1.$$

I. Von dieser Distanz $AM = r$ ist AQ die Projection in der Ebene der xy. Nennt man δ den Winkel XAQ dieser Projection mit der Axe der x, so hat man

$$AP = AQ\,\text{Cos}\,\delta \quad \text{und} \quad PQ = AQ\,\text{Sin}\,\delta,$$

so wie

$$AQ = r\,\text{Sin}\,\gamma \quad \text{und} \quad QM = Aa = r\,\text{Cos}\,\gamma,$$

so dafs demnach die Coordinaten x, y, z folgende Ausdrücke erhalten:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,\delta \\ y &= r\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\delta \\ z &= r\,\text{Cos}\,\gamma \end{aligned}\right\} \ldots \text{(b)};$$

und hier wird der Winkel δ von der Geraden AX immer in derselben Richtung von 0^0 bis 360^0, der Winkel γ aber, wie zuvor, nur von 0^0 bis 180^0 gezählt.

II. Eben so ist PM oder Am die Projection der Distanz $AM = r$ auf die Ebene der yz. Nennt man also ε den Winkel $MPQ = mAq$ dieser Projection mit der Axe der y, so hat man wieder

$$PQ = PM\,\text{Cos}\,\varepsilon, \quad QM = PM\,\text{Sin}\,\varepsilon,$$

und

$$PM = r\,\text{Sin}\,\alpha, \quad AP = r\,\text{Cos}\,\alpha,$$

und daher auch

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{Cos}\,\alpha \\ y &= r\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\varepsilon \\ z &= r\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \ldots \text{(c)},$$

wo wieder der Winkel $XAM = \alpha$ von der fixen Geraden AX immer in derselben Richtung von 0 bis 360, der Winkel $QPM = \varepsilon$ aber nur von 0^0 bis 180^0 gezählt wird.

Drey und zwanzigstes Capitel.
Gleichung der Ebene.

§. 188. (Bildung der Gleichung einer Ebene.) Nach der oben (§. 79, I.) gegebenen Erklärung einer *Ebene*, kann sie auch als eine nach allen Richtungen ausgedehnte Reihe von Puncten betrachtet werden, deren jeder von zwey anderen, aufser der Ebene liegenden, festen Puncten gleich weit absteht.

Sey FmG (Fig. 80) ein Theil dieser Ebene, A und B die zwey festen aufser ihr liegenden Puncte, und endlich O derjenige Punct der Ebene, in welcher sie von der durch A und B gehenden Geraden AOB getroffen wird. Dann soll also, für jeden anderen Punct M der Ebene, die Distanz $MA = MB$, und daher auch, da O ebenfalls ein Punct dieser Ebene ist, auch $OA = OB$ seyn, so dafs also die erwähnte Gerade AOB von der Ebene halbirt wird, und zugleich auf dieser Ebene senkrecht steht.

Nimmt man den unserer freyen Wahl überlassenen Anfangspunct der Coordinaten, durch welche wir die Lage der Ebene im Raume bestimmen wollen, in dem ersten jener zwey festen Puncte, oder in A an, und nennt man

$$AC = \alpha, \quad CD = \beta \quad \text{und} \quad DB = \gamma$$

die den drey durch A gehenden fixen Coordinatenaxen AX, AY, AZ parallelen Coordinaten des zweyten Punctes B, so wie

$$AP = x, \quad PQ = y \quad \text{und} \quad QM = z$$

die veränderlichen Coordinaten irgend eines Punctes M der erwähnten Ebene, so hat man für die Distanz MA des Punctes M von dem ersten festen Puncte (§. 184, I.)

$$MA = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

und eben so für die Distanz MB des Punctes M von dem zweyten festen Puncte (§. 184.)

$$MB = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, beyde Distanzen für alle Puncte der Ebene unter sich gleich seyn sollen, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2,$$

oder wenn man die drey letzten Quadrate auflöst:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

und da dieser Ausdruck für *alle* Puncte der Ebene gilt, so ist er auch der allgemeine Ausdruck für die Lage aller dieser Puncte, oder er ist die *Gleichung der Ebene.*

I. Da α, β, γ beständige Gröſsen sind, so kann man der letzten Gleichung immer die Form geben:

$$Lx + My + Nz = 1,$$

wo L, M, N wieder constante Gröſsen bezeichnen.

§. 189. (Ebenen, die auf den coordinirten Ebenen senkrecht stehen.) Ist in der vorletzten Gleichung des §. 188. die Gröſse $\gamma = 0$, so liegt die Linie AB, welche die zwey festen Puncte verbindet, in der Ebene der xy; also steht dann auch die Ebene FMG auf der Ebene der xy senkrecht. Daraus folgt, daſs die Gleichung einer auf xy senkrechten Ebene die Form hat:

$$Lx + My = 1;$$

und eben so ist

$$Lx + Nz = 1 \quad \text{oder} \quad My + Nz = 1$$

die Gleichung einer auf xz oder auf yz senkrechten Ebene.

I. Vergleicht man dieſs mit dem, was oben (§. 182.) von den beyden Gleichungen einer Geraden im Raume gesagt worden ist, so sieht man, daſs von diesen Gleichungen

$$x = az + \alpha \ldots \text{(a)},$$
$$y = bz + \beta \ldots \text{(b)},$$

die erste (a), allein genommen, für eine auf xz senkrechte, und die zweyte (b) für eine auf yz senkrechte Ebene gehört, und daſs daher beyde, zusammen genommen oder als coexistirend betrachtet, für den Durchschnitt der beyden Ebenen (a) und (b), das heiſst, für die gerade Linie gehören, die wir oben durch (1) bezeichnet haben. Der Durchschnitt der Ebene (a) mit xz aber ist das, was oben die Projection der Linie (1) in xz genannt worden ist, und eben so ist auch der Durchschnitt der Ebene (b) mit yz die Projection von (1) in der coordinirten Ebene der yz.

II. Sind aber *zwey* der Coordinaten α, β, γ gleich Null, oder ist z. B. $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, so fällt die Gerade AB ganz in die Axe der x, woraus folgt, daſs

$$x = A$$

für eine auf der Axe der x senkrecht stehende Ebene gehört, und daſs eben so

$$y = B \quad \text{oder} \quad z = C$$

eine auf y oder auf z senkrechte Ebene bezeichnen, wo A, B, C constante Gröſsen sind, die den Abstand dieser Ebenen von den drey coordinirten Ebenen der yz, xz und xy ausdrücken.

Also ist auch, wenn diese Abstände verschwindend angenommen werden,

$x = 0$ die Gleichung der coordinirten Ebene der yz,
$y = 0$ » » » » » » xz,
$z = 0$ » » » » » » xy.

III. Jede einzelne Gleichung, wie

$$Lx + My + Nz = 1$$

gehört daher für irgend eine *Ebene*. Verbindet man sie aber mit einer anderen Gleichung:

$$L'x + M'y + N'z = 1,$$

so gehören beyde, zusammen betrachtet, für den Durchschnitt zweyer Ebenen, d. h. für eine *gerade Linie*. Verbindet man sie noch mit einer dritten Gleichung:

$$L''x + M''y + N''z = 1,$$

so gehören alle drey, zusammen betrachtet, für den gemeinschaftlichen Durchschnitt dreyer Ebenen, d. h. für einen *Punct*.

Die Ebene wird daher durch eine einzige, die Gerade im Raume durch zwey, und der Punct endlich durch drey Gleichungen gegeben.

Wenn aber irgend ein Gegenstand durch mehr als eine Gleichung ausgedrückt wird, so ist keine dieser Gleichungen absolut nothwendig, und derselbe Gegenstand kann auch durch eine eben so groſse Anzahl von willkürlichen Combinationen jener Gleichungen ausgedrückt werden. So lassen sich z. B. für zwey sich schneidenden Ebenen diese Ebenen, also auch ihre Gleichungen, willkürlich ändern, ohne daſs dadurch ihre Durchschnittslinie, die hier allein gesucht wird, geändert werden darf.

Von allen den verschiedenen Stellungen aber, die man den zwey, sich um ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie drehenden Ebenen, oder die man jenen beyden Gleichungen geben kann, sind offenbar diejenigen die einfachsten jene, die man erhält, wenn man aus diesen Gleichungen nach und nach eine der drey Coordinaten x, y, z eliminirt, wodurch man drey andere Gleichungen der Form

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$
$$x = cy + \gamma$$

erhält, die, nach dem Vorhergehenden, jede für sich eine Ebene ausdrückt, die auf einer der drey coordinirten Ebenen der xz, yz und xy senkrecht steht, und von welcher daher je zwey, zusammen genommen, den Durchschnitt dieser Ebenen oder die *gerade Linie* geben werden. Eliminirt man eben so aus drey Gleichungen zwischen x, y und z nach und nach je zwey der drey Coordinaten x, y, z, so erhält man drey Gleichungen der Form

$$x = A, \quad y = B \quad \text{und} \quad z = C,$$

die daher, jede für sich, eine auf yz, xz und xy senkrechte Ebene geben, während alle drey zusammen genommen, für den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser drey Ebenen, d. h. für einen Punct gehören.

IV. Bemerken wir noch, daſs in den zwey Gleichungen einer Linie

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\}$$

je zwey der drey Coordinaten immer eine Function der dritten sind, so daſs, wenn z. B. die Gröſse z gegeben ist, dadurch auch schon die beyden anderen Coordinaten x und y bestimmt werden. Bey der einzigen Gleichung

$$Lx + My + Nz = 1$$

einer Ebene aber ist jede einzelne Coordinate eine Function der beyden anderen, da hier immer zwey derselben gegeben oder willkürlich angenommen werden müssen, um dadurch auch die dritte zu bestimmen.

§. 190. (Anderer Ausdruck der Gleichung einer Ebene.) Da die Ebene, deren Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad \text{oder}$$
$$Lx + My + Nz = 1$$

ist, nach dem Vorhergehenden, auf der Mitte O derjenigen Geraden AOB (Fig. 80) senkrecht steht, die den Anfangspunct A der Coordinaten mit dem Puncte B verbindet, dessen Coordinaten α, β, γ sind, so hat man, wenn R die halbe Distanz $OA = OB$ dieser beyden Puncte A und B genannt wird (nach §. 184, I.)

$$(2R)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Nennt man aber A, B, C die Winkel, welche diese Distanz $AB = 2R$ in derselben Ordnung mit den Axen der x, y, z bildet, so hat man in dem bey C rechtwinkligen Dreyecke ACB

$$\alpha = 2R \,.\, \text{Cos}\, A,$$

und eben so

$$\beta = 2R \,.\, \text{Cos}\, B,$$
$$\gamma = 2R \,.\, \text{Cos}\, C.$$

Substituirt man diese Werthe von α, β, γ in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, und bemerkt, daſs nach §. 186, III.

$$\text{Cos}^2 A + \text{Cos}^2 B + \text{Cos}^2 C = 1$$

ist, so erhält man

$$x \,.\, \text{Cos}\, A + y \,.\, \text{Cos}\, B + z \,.\, \text{Cos}\, C = R$$

eine andere allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, in welcher also $R = AO$ die senkrechte Distanz der Ebene von dem Anfangspuncte A der Coordinaten bezeichnet.

I. Nennt man überdieſs p, q, r die Entfernungen derjenigen drey Puncte von dem Anfangspuncte A, in welcher die Ebene von den Axen der x, y, z geschnitten wird, so hat man

$$p = \frac{R}{\text{Cos}\, A}, \quad q = \frac{R}{\text{Cos}\, B}, \quad r = \frac{R}{\text{Cos}\, C};$$

also auch, wenn man diese Werthe in der letzten Gleichung der Ebene substituirt:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

oder auch

$$qr \,.\, x + pr \,.\, y + pq \,.\, z = pqr$$

eine dritte merkwürdige Form der Gleichung einer Ebene.

§. 191. (Zusammenhang der Größsen A, B, C und L, M, N.) Wenn man die beyden erhaltenen Ausdrücke für die Gleichung einer Ebene

$$x \operatorname{Cos} A + y \operatorname{Cos} B + z \operatorname{Cos} C = R,$$

und

$$Lx + My + Nz = 1$$

unter sich vergleicht, so erhält man sofort

$$L = \frac{1}{R} \operatorname{Cos} A, \quad M = \frac{1}{R} \operatorname{Cos} B, \quad N = \frac{1}{R} \operatorname{Cos} C.$$

Quadrirt und addirt man diese Werthe von L, M, N, und nimmt dabey auf die oben gegebene Bedingungsgleichung

$$\operatorname{Cos}^2 A + \operatorname{Cos}^2 B + \operatorname{Cos}^2 C = 1$$

Rücksicht, so erhält man

$$R = \frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

und durch diese Gleichung wird das Loth R von dem Anfange der Coordinaten auf die Ebene durch die Gröſsen L, M, N ausgedrückt.

Substituirt man diesen Werth von R in den vorhergehenden Ausdrücken von L, M und N, so erhält man

$$\operatorname{Cos} A = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\operatorname{Cos} B = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\operatorname{Cos} C = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

und diese Gleichungen geben die Werthe von A, B, C durch die Gröſsen L, M, N.

§. 192. (Winkel zweyer Ebenen.) Seyen die Gleichungen zweyer gegebenen Ebenen, wie zuvor,

$$Lx + My + Nz = 1 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)},$$

und

$$L'x + M'y + N'z = 1 \quad . \; . \; . \quad \text{(II)}.$$

Wir wollen sie, der Kürze wegen, die Ebene (I) und (II) nennen, und den Winkel, unter welchen sie gegen einander geneigt sind, durch (I.II) bezeichnen.

Behält man für die Ebene (I) die Bezeichnung der oben aufgestellten Gröſsen A, B, C und R bey, und nennt man, für die

Ebene (II), dieselben Gröſsen A', B', C' und R', so hat man für den Cosinus des Winkels, welchen die beyden Lothe R und R' aus dem Anfangspuncte der Coordinaten auf die Ebene (I) und (II) unter sich bilden, nach §. 186, I. den Ausdruck:

$$\operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} A' + \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} B' + \operatorname{Cos} C \operatorname{Cos} C'.$$

Allein dieser Winkel der beyden Lothe ist auch zugleich (§. 157, II.) der Winkel (I.II), unter welchem die beyden Ebenen (I) und (II) gegen einander geneigt sind, so daſs man daher für diesen Neigungswinkel der zwey Ebenen den Ausdruck hat:

$$\operatorname{Cos}(\mathrm{I.II}) = \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} A' + \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} B' + \operatorname{Cos} C \operatorname{Cos} C';$$

oder auch, wenn man die Werthe von $\operatorname{Cos} A$, $\operatorname{Cos} A'$, ... aus §. 191. substituirt:

$$\operatorname{Cos}(\mathrm{I.II}) = \frac{LL' + MM' + NN'}{\sqrt{L^2 + M^2 . N^2} . \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}}.$$

I. Stehen demnach die beyden Ebenen (I) und (II) auf einander senkrecht, so ist

$$LL' + MM' + NN' = 0,$$

und sind sie unter sich parallel, so hat man $\operatorname{Cos}(\mathrm{I.II}) = 1$, oder

$$(LM' - L'M)^2 + (LN' - L'N)^2 + (MN' - M'N)^2 = 0,$$

welche Gleichung, wie in §. 185, I., den drey folgenden gleichgeltend ist:

$$\frac{L}{M} = \frac{L'}{M'}, \quad \frac{L}{N} = \frac{L'}{N'}, \quad \frac{M}{N} = \frac{M'}{N'}.$$

§. 193. (Winkel einer gegebenen Ebene mit den drey coordinirten Ebenen.) Bezeichnen wir wieder, analog mit dem Vorhergehenden, durch $(\mathrm{I}.xy)$, $(\mathrm{I}.xz)$ und $(\mathrm{I}.yz)$ die Winkel der Ebene (I) mit der coordinirten Ebene der xy, xz und yz, so hat man, wenn man in der Gleichung der Ebene (II) die Gröſse $L' = M' = 0$ setzt:

$$Nz = 1 \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{N};$$

und diese Gleichung gehört, nach §. 189, II., für eine auf die Axe der z senkrechte, oder für eine mit xy parallele Ebene, mit welcher daher die Ebene (I) den genannten Winkel $(\mathrm{I}.xy)$ bildet. Es wird daher der vorhergehende Ausdruck von $\operatorname{Cos}(\mathrm{I.II})$ in den von $\operatorname{Cos}(\mathrm{I}.xy)$ übergehen, wenn man in jenem L' und M'

gleich Null setzt. Diefs gibt

$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,xy) = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

und ganz eben so erhält man auch

$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,xz) = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,yz) = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

I. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den oben (§. 191.) gefundenen Werthen von Cos A, Cos B und Cos C, so erhält man

$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,xy) = \text{Cos}\,C,$$
$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,xz) = \text{Cos}\,B,$$
$$\text{Cos}\,(\text{I}\,.\,yz) = \text{Cos}\,A;$$

und da, nach dem Vorhergehenden, die Bedingungsgleichung

$$\text{Cos}^2 A + \text{Cos}^2 B + \text{Cos}^2 C = 1$$

Statt hat, so hat man auch

$$\text{Cos}^2(\text{I}\,.\,xy) + \text{Cos}^2(\text{I}\,.\,xz) + \text{Cos}^2(\text{I}\,.\,yz) = 1.$$

II. Um noch den Winkel (I. 1) der Ebene (I) mit der geraden Linie (1) zu finden, so hat man für die Gleichungen der Linie (1), wenn sie mit sich selbst parallel durch den Anfangspunct der Coordinaten geführt wird:

$$x = az \quad \text{und} \quad y = bz.$$

Die Gleichungen einer durch denselben Anfangspunct, aber senkrecht auf die Ebene (I) geführten Geraden, das heifst, die Gleichungen des oben (§. 190.) erwähnten Lothes R sind (nach §. 186, II.)

$$x = z\frac{\text{Cos}\,A}{\text{Cos}\,C}, \quad y = z\frac{\text{Cos}\,B}{\text{Cos}\,C}.$$

Da nun der Winkel dieser beyden Geraden den gesuchten Winkel (I. 1) zu einem rechten Winkel ergänzt, so wird man den Winkel (I. 1) erhalten, wenn man in dem oben (§. 185.) gegebenen Ausdrucke für Cos (1.2) die Gröfse

$$(1\,.\,2) \text{ in } 90 - (\text{I}\,.\,1),$$

$$a' \text{ in } \frac{\text{Cos}\,A}{\text{Cos}\,C},$$

$$\text{und } b' \text{ in } \frac{\text{Cos}\,B}{\text{Cos}\,C}$$

verwandelt, wodurch man demnach für den gesuchten Winkel erhält:

$$\text{Sin}(\text{I}.1) = \frac{a \,\text{Cos}\, A + b \,\text{Cos}\, B + \text{Cos}\, C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

oder auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von $\text{Cos}\, A$, $\text{Cos}\, B$, $\text{Cos}\, C$ substituirt:

$$\text{Sin}(\text{I}.1) = \frac{aL + bM + N}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

III. Soll daher die Ebene (I) auf der Geraden (1) senkrecht stehen, so wird man in dem letzten Ausdrucke $\text{Sin}(\text{I}.1)$ gleich der Einheit setzen, wodurch man, wie zuvor, die drey Gleichungen erhält:

$$\frac{L}{N} = a, \quad \frac{M}{N} = b \quad \text{und} \quad \frac{M}{L} = \frac{b}{a}.$$

Man hat daher für eine Ebene, die auf der Geraden $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ senkrecht steht, die Gleichung

$$ax + by + z = P,$$

wo P irgend eine willkürliche constante Gröfse bezeichnet. — Und eben so hat man für eine Gerade, die auf der Ebene

$$Lx + My + Nz = 1$$

senkrecht steht, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{L}{N} z + \alpha \\ y &= \frac{M}{N} z + \beta \end{aligned}\right\},$$

wo α und β willkürliche constante Gröfsen bezeichnen.

IV. Soll endlich die Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 1$$

ist, mit der Geraden (1) parallel seyn, so ist $\text{Sin}(\text{I}.1) = 0$, und daher die Bedingungsgleichung dieses Parallelismus

$$aL + bM + N = 0.$$

Vier und zwanzigstes Capitel.

Krumme Linien des zweyten Grades.

---

§. 194. (Verwandlung der Coordinaten.) Sey die Lage des Punctes M (Fig. 81) in einer gegebenen Ebene gegen die zwey festen, in derselben Ebene unter sich senkrecht stehenden Geraden AX und AY, durch die mit diesen Axen parallelen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gegeben. Seyen eben so die Coordinaten $AB = a$ und $BC = b$ eines anderen Punctes C gegeben, und $CD = x'$, $DM = y'$ die Coordinaten des ersten Punctes M in Beziehung auf die zwey neuen Coordinatenaxen CX' und CY', die man durch den zweyten Punct C mit den beyden vorhergehenden Axen parallel gelegt hat.

Um die neuen Coordinaten $x'y'$ aus den alten xy oder umgekehrt zu finden, hat man die einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - a \\ y' = y - b \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x = a + x' \\ y = b + y' \end{array}\right\}.$$

Ist z. B. die Gleichung zwischen den ersten Coordinaten gegeben:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2 a^2 b y - 2 a b^2 x + a^2 b^2 = 0,$$

so erhält man, wenn man statt x die Gröſse $a + x'$, und statt y die Gröſse $b + y'$ substituirt, für die gesuchte und viel einfachere Gleichung zwischen den neuen Coordinaten:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

I. Legen wir jetzt, ohne den Anfangspunct A der Coordinaten zu ändern, durch denselben zwey andere ebenfalls unter sich senkrechte Coordinatenaxen AX' und AY' (Fig. 82), die mit den ersten Axen den Winkel $XAX' = YAY' = \alpha$ bilden, und sey, wie zuvor, $AP = x$, $PM = y$, und eben so $AQ = x'$ und $QM = y'$, wo wieder PM mit AY und QM mit AY' parallel, also PM auf AX, und QM auf AX' senkrecht ist.

$a^2(b+y)^2 + b^2(a+x)^2 - 2a^2b(b+y) - 2ab^2(a+x) + a^2b^2 = 0$

$a^2b^2 + 2a^2by + a^2y^2 + b^2a^2 + 2b^2ax + b^2x^2 + a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2a^2by +$ [illegible]

$= a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 = \frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2} = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Um auch hier die Abhängigkeit der beyden Coordinatenpaare zu erhalten, ziehe man die Gerade $AM = r$, so hat man, wenn man den Winkel $MAP = m$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \operatorname{Cos} m \\ y &= r \operatorname{Sin} m \end{aligned}\right\}, \text{ und eben so } \left.\begin{aligned} x' &= r \operatorname{Cos}(m - \alpha) \\ y' &= r \operatorname{Sin}(m - \alpha) \end{aligned}\right\}.$$

Löst man die beyden letzten Gleichungen (nach §. 94, Gleichung C) auf, und substituirt dann in ihnen statt $r \operatorname{Cos} m$ und $r \operatorname{Sin} m$ ihre Werthe aus den ersten Gleichungen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Sin}\alpha \\ y' &= y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Sin}\alpha \end{aligned}\right\},$$

und durch Invention dieser Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \operatorname{Cos}\alpha - y' \operatorname{Sin}\alpha \\ y &= x' \operatorname{Sin}\alpha + y' \operatorname{Cos}\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Auch durch diese Gleichungen wird man viele gegebene Ausdrücke zwischen x und y auf einfachere Formen zurückbringen, wie wir bald näher sehen werden.

II. Verbindet man die beyden vorhergehenden Veränderungen der Coordinaten, die des Anfangspunctes und die der Lage der Axen, mit einander, so erhält man für den Übergang der einen Coordinaten in die anderen die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x - a) \operatorname{Cos}\alpha + (y - b) \operatorname{Sin}\alpha \\ y' &= (y - b) \operatorname{Cos}\alpha - (x - a) \operatorname{Sin}\alpha \end{aligned}\right\},$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \operatorname{Cos}\alpha - y' \operatorname{Sin}\alpha \\ y &= b + x' \operatorname{Sin}\alpha + y' \operatorname{Cos}\alpha \end{aligned}\right\}.$$

§. 195. (Linien des zweyten Grades.) Jede Gleichung zwischen zwey veränderlichen Gröſsen x und y kann als der analytische Ausdruck einer in einer Ebene nach einem bestimmten Gesetze verzeichneten Linie betrachtet werden, da man für jeden Werth, den man der Abscisse x beylegt, durch diese Gleichung den entsprechenden Werth der Ordinate y, und somit denjenigen Punct der Linie findet, der zu diesen Coordinaten gehört.

Wenn man in einer algebraischen Gleichung des m^{ten} Grades statt x und y die in §. 194, II. aufgestellten Werthe substituirt, d. h. wenn man für die durch diese Gleichung repräsentirte Linie den Anfangspunct der Coordinaten sowohl, als auch die Lage der Coordinatenaxen willkürlich ändert, so wird dadurch, wie die erwähnten Ausdrücke zeigen, der Grad der algebraischen Gleichung *nicht* geändert, so dafs man daher mit Recht die verschiedenen Linien nach den Graden eintheilt, zu welchen ihre Gleichungen gehören.

Demnach wird die *gerade Linie*, deren Gleichung (§. 176.)

$$y = ax + b$$

des ersten Grades ist, selbst eine Linie des ersten Grades seyn. Alle anderen Linien, deren Gleichungen den ersten Grad übersteigen, sind keine geraden, sondern krumme Linien oder Curven.

Die allgemeine Gleichung des zweyten Grades, also auch die Gleichung der Linien des zweyten Grades, hat die Form

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf y auf, so erhält man

$$y = -\tfrac{1}{2}(Ax + C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2D)x + (C^2 - 4E)}.$$

Wenn in diesem Ausdrucke der Werth von x so grofs genommen wird, dafs von der Gröfse unter dem Wurzelzeichen das erste Glied

$$(A^2 - 4B)x^2$$

gröfser wird, als die Summe der beyden übrigen Glieder, was offenbar immer möglich ist, so wird dann die ganze Gröfse unter dem Wurzelzeichen positiv oder negativ, das heifst, der Werth von y wird reell oder imaginär seyn, je nachdem die Gröfse

$$A^2 - 4B$$

positiv oder negativ ist. Betrachten wir diese Fälle genauer.

I. Wenn $A^2 - 4B$ positiv ist, so wird es immer so grofse, positive und zugleich negative Werthe von x, ins Unendliche fort, geben, für welche die Ordinate y stets reell bleibt, oder die Curve wird sich, zu beyden Seiten der Axe der x sowohl als auch der y, in den unbegrenzten, endlosen Raum erstrecken. Die so entstehende Curve heifst *Hyperbel* (Fig. 83), wo MAN und mBn ihre endlosen Äste sind.

II. Wenn $A^2 - 4B$ negativ ist, so wird es immer positive und negative Werthe von x geben, für welche und über welche hinaus die Ordinaten y alle imaginär werden, oder die Curve wird auf allen Seiten um den Anfang der Coordinaten begrenzt, sie wird in einen endlichen Raum eingeschlossen seyn. Die so entstehende Curve heifst *Ellipse* (Fig. 84) $AMDBE$.

III. Ist endlich die Gröfse $A^2 - 4B = 0$ oder ist $A^2 = 4B$, so wird es immer entweder positive oder aber negative Werthe von x geben, zu welchen noch reelle Werthe von y gehören. Dann wird nämlich das Zeichen für die Gröfse unter dem Wurzelzeichen von dem zweyten Gliede $(AC - 2D)$ abhängen, und wenn dieses Glied positiv oder negativ ist, so wird auch für jenen Fall das positive, und für diesen das negative x ohne Ende wachsen können, ohne dafs y imaginär wird. Die so entstehende Curve wird sich demnach entweder blofs in der Richtung der positiven, oder blofs in der Richtung der negativen x in den unbegrenzten Raum ausdehnen, und diese Curve $M'AN'$ (Fig. 85) wird *Parabel* genannt.

§. 196. (Reduction der Gleichung dieser Curven auf eine einfachere Gestalt.) Wenn man in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung der Curven des zweyten Grades die Coordinatenaxen um einen willkürlichen Winkel α verändert, d. h. wenn man in dieser Gleichung (nach §. 194, I.)

statt x die Gröfse . . . $x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha$,
und statt y » » . . . $x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha$

substituirt, so findet man für den Factor des Gliedes xy den Ausdruck

$$(1 - B) \operatorname{Sin} 2\alpha - A \operatorname{Cos} 2\alpha.$$

Nimmt man daher den Winkel α so an, dafs man hat

$$\operatorname{Tang} 2\alpha = \frac{A}{1 - B},$$

was immer angeht, da die Tangente alle möglichen positiven und negativen Werthe annehmen kann, so verschwindet dadurch dieses Glied völlig, und die vorhergehende allgemeine Gleichung dieser Curven kann daher, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun, auf die einfachere Form

$$y^2 + Ax^2 + By + Cx + D = 0$$

gebracht werden, wo A, B, C und D wieder andere constante Gröſsen bezeichnen.

Verändert man in diesem Ausdrucke auch noch den Anfangspunct der Coordinaten, indem man (nach §. 194.)

$$x \text{ in } x + P,$$
$$\text{und } y \text{ in } y + Q$$

verwandelt, so erhält man

$$y^2 + Ax^2 + (B + 2Q)y + (C + 2AP)x$$
$$+ Q^2 + AP^2 + BQ + CP + D = 0.$$

Um zu sehen, ob man auch noch aus dieser Gleichung das in y multiplicirte, und das letzte oder constante Glied wegschaffen kann, indem man über die zwey neu eingeführten Werthe von P und Q diesem Zweck gemäſs disponirt, so wird man, wenn dieſs in der That angeht, die zwey Bedingungsgleichungen haben:

$$B + 2Q = 0 \text{ und}$$
$$Q^2 + AP^2 + BQ + CP + D = 0.$$

Die erste gibt

$$Q = -\tfrac{1}{2}B,$$

und wenn man diesen Werth von Q in der zweyten substituirt, so erhält man

$$P = -\frac{C}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{C^2 + AB^2 - 4AD}.$$

Diese Ausdrücke von P und Q zeigen aber, daſs man ihre Werthe immer, den beyden letzten Gleichungen gemäſs, ohne Anstand annehmen kann. Denn wenn auch z. B. die Gröſse $A = 0$ wäre, so wird dadurch P nicht unendlich groſs, sondern

$$P = -\frac{C}{2A} + \frac{C}{2A},$$

oder P wird in diesem Falle ebenfalls Null.

Daraus folgt demnach, daſs man die Gleichung der Curven des zweyten Grades, ohne ihre Allgemeinheit zu beeinträchtigen, auf folgende einfache Gestalt zurückführen kann:

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

wo p und q constante Gröſsen bezeichnen.

§. 197. (Nähere Betrachtung der letzten Gleichung.) Setzt man in der letzten Gleichung statt q die Gröſse

$-\frac{p}{a}$, wo a ebenfalls eine constante Gröſse bezeichnet, so erhält man für die allgemeine Gleichung der Curven des zweyten Grades

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

In dieser Gleichung wollen wir die Gröſse p immer positiv annehmen, während die Gröſse a alle möglichen positiven und negativen Werthe erhalten kann.

Bemerken wir zuerst, daſs schon die Form dieser Gleichung zeigt, daſs die durch sie ausgedrückten Curven in Beziehung auf die Axe der x symmetrisch liegen, so daſs für jeden Werth von x die Ordinate y, wenn sie anders reell ist, immer zwey gleich groſse, aber in ihrer Lage entgegengesetzte Werthe hat.

I. Vergleicht man ferner diesen Ausdruck mit der zuerst (§. 195) aufgestellten Gleichung dieser Curven, so sieht man, daſs $A = 0$ und $B = \frac{p}{a}$ ist, so daſs daher die Gleichung (A) gehören wird

für eine Hyperbel, wenn $A^2 - 4B$ positiv, d. h. wenn a negativ,
» » Ellipse, » $A^2 - 4B$ negativ, » » a positiv,
» » Parabel, » $A^2 - 4B$ gleich Null, » a unendlich groſs ist.

II. Führen wir noch zwey andere Constanten b und e ein, die von den bisher angenommenen a und p so abhängen, daſs man hat

$$b^2 = ap \quad \text{und} \quad a^2e^2 = a^2 - b^2,$$

also auch

$$p = a(1 - e^2) = b.\sqrt{1 - e^2}.$$

Dieſs vorausgesetzt, suchen wir zuerst denjenigen Punct der Axe der x, für welchen die Ordinate y gleich der Constante p wird. Setzt man nämlich in der Gleichung (A) die Gröſse $y = p$, so erhält man

$$x^2 - 2ax + ap = 0,$$

und dieſs gibt

$$x = a \pm ae$$

für den gesuchten doppelten Werth der Abscisse x.

Sucht man eben so den Werth von x, für welchen die Ordinate $y = b = \sqrt{ap}$ wird, so gibt die Gleichung (A)

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

so dafs man also für die gesuchte Abscisse x nur den einzigen Werth $x = a$ erhält.

III. Verlegt man dann den Anfangspunct der Coordinaten in den erstgefundenen Punct (Nr. II.) der Axe der x, für welchen $y = p$ wird, so wird man in der Gleichung (A) nach §. 194. statt x blofs die Gröfse $a(1-e)-x'$ substituiren, wodurch man erhält

$$y^2 = 2p(a - ae - x') - \frac{p}{a}(a - ae - x')^2$$

oder $$y^2 = pa(1-e^2) - 2pex' - \frac{px'^2}{a},$$

oder da $pa(1-e^2) = p^2$ und $\frac{p}{a} = 1 - e^2$ ist:

$$y^2 = p^2 - 2pex' - (1-e^2) \cdot x'^2,$$

das heifst

$$y^2 + x'^2 = (p - ex')^2.$$

Nennt man also r die Entfernung jedes Punctes der Curve von diesem neuen Anfangspuncte, oder ist $r^2 = x'^2 + y^2$, so hat man für die allgemeine Gleichung derselben den einfachen Ausdruck

$$r + ex' = p \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)},$$

oder auch, wenn man v den Winkel nennt, welchen der *Radius* r der Curve mit der Axe der x bildet, da $x' = r \operatorname{Cos} v$ ist:

$$r + er \operatorname{Cos} v = p,$$

oder endlich

$$r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos} v} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C)},$$

welches die Gleichung der Curve der zweyten Ordnung zwischen den Polarcoordinaten (§. 180, I.) r und v ist.

IV. Verlegt man endlich den Anfang der Coordinaten in den zweyten der oben (Nr. II.) erwähnten Puncte, für welchen $y = b$ ist, so hat man, wenn man in der Gleichung (A)

statt x die Gröfse $a - x''$,
und statt y » » y''

setzt, den einfachen Ausdruck

$$b^2 x''^2 + a^2 y''^2 = a^2 b^2,$$

oder auch

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (D),$$

welches die vierte Form der Gleichung dieser Curven ist. Nennt man auch hier ρ die Entfernung des Punctes der Curve von dem neuen Anfangspuncte der Coordinaten, und φ den Winkel, welchen ρ mit der Axe der x bildet, so hat man

$$x'' = \rho \operatorname{Cos} \varphi \quad \text{und} \quad y'' = \rho \operatorname{Sin} \varphi,$$

also auch, wenn man diese Ausdrücke in der Gleichung (D) substituirt:

$$\rho^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

oder

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun die erwähnten drey Classen dieser Curven für sich näher untersuchen.

§. 198. (Die Ellipse.) Da für die Ellipse, nach §. 197, I., die Gröſse a positiv, und da überhaupt

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{und}$$
$$a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

ist, so folgt, da p immer positiv angenommen wird, daſs $e < 1$ und $b < a$ seyn muſs. Demnach zeigt z. B. die Gleichung (A), daſs die Abscisse x nie negativ werden kann, und daſs die Curve ganz in dem Raume eingeschlossen ist, der den Abscissen $x = 0$ und $x = +2a$ angehört.

Ist aber (Fig. 84) $AP = x$ und $PM = y$, so hat man, wie sofort aus der Gleichung (A) folgt,

für die Abscisse x:	und für die analoge Ordinate y:
0	0,
$AF = a(1 - e)$	$\pm Fm = \pm p$,
$AC = a$	$\pm CD = \pm b$,
$AF' = a(1 + e)$	$\pm Fm' = \pm p$,
$AB = 2a$	0.

Es ist demnach $AC = BC$ und $CD = CE$, so wie $CF = CF'$, und man nennt

$AC = BC = a$ die *halbe groſse Axe* der Ellipse,
$CD = CE = b$ die *halbe kleine Axe*,

$Fm = F'm' = p$ den *halben Parameter*, und

$CF = CF' = ae$ die *Excentricität* dieser Curve, so wie

C der *Mittelpunct*, F und F' die beyden *Brennpuncte*, und A und B die beyden *Scheitel* derselben genannt werden — Für die Ellipse gelten die Gleichungen (A) . . . (E) unverändert.

Für die Gleichung (B) aber ist $FM = r$ und $CP = x'$.
(C) » » $FM = r$ » $AFM = v$.
(D) » » $CP = x''$ » $PM = y''$.
(E) » » $CM = \rho$ » $ACM = \varphi$.

I. Ist $FM = r$ und $F'M = r'$, so hat man in dem Dreyecke FMF', da der Winkel $F'FM = 180 - v$ ist:

$$r'^2 = r^2 + FF'^2 + 2r \, . \, FF' \, . \, \text{Cos}\, v,$$

oder da $FF' = 2ae$ und

$$\text{Cos}\, v = \frac{p - r}{er} = \frac{a(1 - e^2) - r}{er}$$

ist:

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4a(a - ae^2 - r),$$

das heiſst, man hat

$$r + r' = 2a,$$

oder die Summe der Entfernungen jedes Punctes M der Ellipse von den beyden Brennpuncten F und F' ist immer gleich der groſsen Axe $2a$ dieser Curve, wodurch man ein einfaches Mittel zur Verzeichnung derselben mittelst eines Fadens erhält, dessen Länge gleich $2a$, und dessen Endpuncte in F und F' befestiget werden.

II. Bisher fiel der Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct der Axe der x. Verlegt man ihn in irgend einen willkürlichen anderen Punct, und behält auch hier noch die frühere Richtung der Coordinatenaxen bey, die den Axen a und b der Ellipse parallel sind, so wird man, wenn A und B die auf diese neuen Axen bezogenen Coordinaten des Mittelpunctes C der Ellipse sind, in der Gleichung (D)

die Gröſse x'' in $x'' - A$,
und » » y'' » $y'' - B$

verwandeln, wodurch man für die allgemeine Gleichung der Curve erhält

$$\left(\frac{x'' - A}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'' - B}{b}\right)^2 = 1.$$

§. 199. (Der Kreis, als besonderer Fall der Ellipse.) Setzt man in den Gleichungen (A)...(D) die Gröſse $a = b$ oder $e = 0$, so erhält man z. B. aus der Gleichung (D)

$$x''^2 + y''^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Gleichung zeigt, daſs in der durch sie bezeichneten Curve die Distanz $\sqrt{x''^2 + y''^2}$ jedes Punctes derselben von dem Anfange der Coordinaten immer gleich der constanten Gröſse a ist. Diese Curve ist daher der *Kreis*, dessen Halbmesser a ist, und dessen Mittelpunct im Anfange der Coordinaten liegt.

Eben so gibt die Gleichung (A), da für unsern besondern Fall $p = a$ ist:

$$y^2 = 2ax - x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

eine andere bekannte Gleichung des Kreises, wo der Anfang der Coordinaten in irgend einem Puncte des Umfangs, und wo die Axe der x in einem Durchmesser des Kreises liegt. Ist R die Distanz jedes Punctes des Umfangs von diesem Anfangspuncte, und ist θ der Winkel der R mit der Axe der x, so hat man

$$x = R \operatorname{Cos} \theta \quad \text{und} \quad y = R \operatorname{Sin} \theta,$$

also auch, wenn man diese Werthe von x und y in der letzten Gleichung (2) substituirt:

$$R = 2a \operatorname{Cos} \theta \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für die dritte Gleichung des Kreises.

Sind endlich A und B die mit x'' und y'' parallelen Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises, dessen Halbmesser a ist, so hat man für die allgemeine Gleichung desselben, wenn man in dem letzten Ausdrucke des §. 198. die Gröſse $a = b$ setzt:

$$(x'' - A)^2 + (y'' - B)^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Diese vier Gleichungen sind als eben so viele allgemeine analytische Ausdrücke des Kreises zu betrachten, aus deren jeder man daher auch die oben (§. 111, 112 u. f.) aufgestellten Eigenschaften dieser Curve wird ableiten können.

§. 200. (Die Hyperbel.) Da nach dem Vorhergehenden die Gleichungen (A)...(D) für einen negativen Werth der Gröſse a die Hyperbel geben, und da allgemein für die Curven des zweyten Grades

$$b^2 = ap \quad \text{und} \quad a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

ist, wo p eine immer positive Gröſse bezeichnet, so wird man auch in jenen Gleichungen

statt b^2 die Gröſse $-b^2$,

und daher auch

$$a^2 e^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad p = a(e^2 - 1)$$

setzen, um die Ausdrücke für die Hyperbel zu erhalten, in welchen dann wieder a, b, p positive Gröſsen und $e > 1$ ist. Diese Gleichungen der Hyperbel sind daher (Fig. 83)

für $AP = x$, $PM = y$ . . . . . . $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$ . . . . (A'),

» $FP = x$, $FM = r$ . . . . . . $r + ex' = p$ . . . . . . (B'),

» $FM = r$, $PFM = v$ . . . . . $r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos} v}$ . . . . (C'),

» $CP = x''$, $PM = y''$ . . . . . $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ . . . . (D').

Man sieht z. B. aus der letzten Gleichung (D'), daſs von $x'' = 0$ bis $x'' = \pm a$ die Ordinaten y'' imaginär sind, und daſs für gröſsere, positive und negative Abscissen die immer reellen Ordinaten ins Unendliche wachsen und stets zwey, nur durch ihre Zeichen verschiedene Werthe haben.

$$\text{Für } x'' = \pm a = \begin{cases} CA \\ CB \end{cases} \text{ ist } y'' = 0, \text{ und}$$

$$\text{für } x'' = \pm ae = \begin{cases} CF \\ CF' \end{cases} \text{ ist } y'' = p = \frac{b^2}{a},$$

und man nennt auch hier $CA = CB = a$ die halbe groſse Axe; $Fm = F'm' = p$ den halben Parameter; $b = \sqrt{ap}$ die halbe kleine Axe, die aber auch gröſser als a seyn kann; $CF = CF' = ae$ die Excentricität, so wie C den Mittelpunct, F und F' die Brennpuncte, und A und B die Scheitel der Hyperbel.

I. Um die halbe Axe b in der Zeichnung darzustellen, so ist sie die Ordinate y'' der Hyperbel für die Abscisse $x'' = CP = a\sqrt{2}$. Beschreibt man daher aus dem Scheitel A, als Mittelpunct, mit dem Halbmesser $CF = ae$ einen Kreis, so wird dieser Kreis ein durch C auf AB errichtetes Loth in zwey Puncten E und E' schneiden, so daſs $CE = CE' = b$ ist, weil man in dem rechtwinkligen Dreyecke CAE hat

$$CE = \sqrt{AE^2 - CA^2} = \sqrt{a^2 e^2 - a^2} = a\sqrt{e^2 - 1} = b.$$

II. Setzt man die Distanz irgend eines Punctes M der Hyperbel von den beyden Brennpuncten

$$FM = r \quad \text{und} \quad F'M = r',$$

so hat man

$$r^2 = (x'' - CF)^2 + y''^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = (x'' + CF)^2 + y''^2.$$

Da aber $CF = ae$, und nach der Gleichung (D')

$$y''^2 = (e^2 - 1)(x''^2 - a^2)$$

ist, so gehen die zwey vorhergehenden Gleichungen in folgende über

$$r = ex'' - a \quad \text{und} \quad r' = ex'' + a,$$

wovon die Differenz ist

$$r' - r = 2a,$$

so daſs demnach der Unterschied der beyden Distanzen r und r' für jeden Punct der Hyperbel gleich der groſsen Axe $2a$ derselben ist. (Vergl. §. 198, I.)

III. Daraus entspringt folgende Verzeichnung dieser Curve. — Man nehme auf der verlängerten groſsen Axe irgend einen Punct H, und beschreibe zwey Kreise, einen aus F' mit dem Halbmesser BH, und den anderen aus F mit dem Halbmesser AH, so wird der Durchschnitt der beyden Kreise in der Hyperbel liegen, da man hat

$$F'M = BH \quad \text{und} \quad FM = AH,$$

also auch

$$F'M - FM = BH - AH = AB = 2a.$$

IV. Die obige Gleichung (D') kann auch so geschrieben werden:

$$y'' = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x''^2}},$$

und in dieser Gestalt zeigt sie, daſs, je gröſser die Abscisse x'' ist, desto näher die Ordinate an den Werth

$$y = \pm \frac{bx}{a}$$

kömmt. Die letzte Gleichung gehört aber für ein System von zwey geraden Linien, die durch den Anfang C der Coordinaten gehen, und die mit der Axe CP der x einen Winkel α bilden, dessen Tangente für die eine Gerade gleich $\frac{b}{a}$, und für die andere gleich $-\frac{b}{a}$ ist.

Errichtet man also in dem Scheitel A und B der Hyperbel ein Loth $Aa = Bb = b$ auf die grofse Axe, und zieht man die Geraden aCb' und $bC'a'$, so werden sich die vier Äste der Hyperbel diesen Geraden desto mehr nähern, je gröfser $\pm x$ ist, ohne sie aber je in der That zu erreichen. Diese beyden Geraden werden die *Asymptoten* der Hyperbel genannt.

Da $\text{Tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$ ist, so ist auch $\text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{e}$. Zieht man daher die Linie AD parallel mit der Asymptote Cb, so sind in dem Dreyecke ADa die Winkel an A und a, so wie in dem Dreyecke ADC die Winkel an A und C einander gleich, also ist auch $AD = aD = CD$.

Man hat aber

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\text{Sin}\,ACD}{\text{Sin}\,ADC} = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,(180 - 2\alpha)} = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,2\alpha} = \frac{1}{2\,\text{Cos}\,\alpha},$$

also ist auch

$$\frac{AD}{AC} = \tfrac{1}{2}e,$$

oder endlich, da $AC = a$ ist:

$$AD^2 = \tfrac{1}{4}a^2e^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

und man nennt dieses Quadrat von AD die *Potenz der Hyperbel.*

V. Für $a = b$ ist der Winkel $\alpha = 45^\circ$, und die Asymptoten stehen auf einander senkrecht, in welchem Falle die Hyperbel *gleichseitig* genannt wird. Für sie geht die Gleichung (D') in folgende über:

$$x''^2 - y''^2 = a^2.$$

Ist Mq parallel mit der Asymptote Ca' und $Cq = \xi$, $qM = v$, so hat man nach §. 194, I., da $\alpha = 45^\circ$, also auch $\text{Sin}\,\alpha = \text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist:

$$x'' = \frac{v + \xi}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{v - \xi}{\sqrt{2}},$$

und daher, wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke substituirt:

$$\xi v = \tfrac{1}{2}a^2$$

für die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel.

§. 201. (Die Parabel.) Da die vorhergehenden Gleichungen (A) ... (D), für ein unendlich groſses a, der Parabel angehören, so hat man für sie (Fig. 85)

für $AP = x$, $PM = y$ die Gleichung $y^2 = 2px$ . . . . (A''),

» $FP = x'$, $MF = r$ » » $r + x' = p$ . . . (B''),

» $MF = r$, $AFM = v$ » » $r = \frac{p}{2 \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} v}$ . . (C''),

und für diese Curve ist die oben eingeführte Gröſse:

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = 1.$$

Auch für sie wird der Punct A der Scheitel, F der Brennpunct, und $FM = p$ der halbe Parameter genannt.

I. Da $AP + PF = AF$ oder da $x + x' = \frac{1}{2} p$ ist, so gibt die Gleichung (B'')

$$r = \tfrac{1}{2} p + x',$$

woraus sofort folgende Verzeichnung der Parabel abgeleitet werden kann. — Man nehme auf der Axe der x die Gröſse $AB = AF = \frac{1}{2} p$, und errichte auf dieser Axe in willkürlichen Puncten P, P', . . . derselben senkrechte Linien. Dann beschreibe man aus F als Mittelpunct mit den Halbmessern BP, BP', . . . Kreise. Schneidet der erste dieser Kreise das Loth durch P in M und N, und schneidet der zweyte das Loth durch P' in M' und N', . . . so sind M, N, M', N', . . . Puncte der Parabel.

Fünf und zwanzigstes Capitel.

Andere krumme Linien.

§. 202. (Die Neil'sche Parabel.) Indem wir von den unzähligen übrigen krummen Linien nur einige der vorzüglichsten hier kurz anführen, betrachten wir unter diesen zuerst die *cubische* (oder wie sie auch nach *Neil*, der sie einer der ersten untersucht hat, genannt wird), die *Neil'sche Parabel*. Ihre Gleichung des dritten Grades ist

$$y^3 = a x^2$$

und ihre Gestalt MAM' (Fig. 86), wo hier und in der Folge immer AX und AY die coordinirte Axe von x und y, und wo $AP = x$, $PM = y$ ist. Sie erstreckt sich von dem Anfangspuncte A der Coordinaten, zu beyden Seiten der Axe der y, aber nur auf einer Seite der Axe der x, in zwey endlose Äste.

§. 203. (Die Ellipsoide.) Diese der Ellipse ähnliche Curve (daher sie diesen Namen trägt) $BMNC$ (Fig. 87) hat die Eigenschaft, daſs für jeden Punct M derselben das Product $MF \cdot MF'$ der Distanzen desselben von zwey festen Puncten F und F' immer einer constanten Gröſse gleich ist.

Ist $FF' = 2a$ die Entfernung der zwey festen Puncte F und F', und ist $MF \cdot MF' = b^2$, wo a und b constante Gröſsen bezeichnen, so hat man, wenn der Anfangspunct A der Coordinaten in der Mitte zwischen F und F' liegt, und wenn wieder $AP = x$, $PM = y$ ist:

$$FM^2 = (a-x)^2 + y^2 \quad \text{und}$$
$$F'M^2 = (a+x)^2 + y^2,$$

also ist auch die Gleichung der Ellipsoide:

$$b^4 = [(a+x)^2 + y^2] \cdot [(a-x)^2 + y^2],$$

oder auch, nach einer einfachen Reduction:

$$x^2 + y^2 + a^2 = \sqrt{4a^2x^2 + b^4},$$

also die Curve des vierten Grades.

Die Ellipsoide ändert mit den Werthen ihrer Constanten a und b ihre Form.

Für $b > a$ hat sie die Gestalt der Fig. 87, so lange zugleich $b > a\sqrt{2}$ ist.

Ist aber $b > a$ und zugleich $b < a\sqrt{2}$, so nimmt sie die Gestalt der Fig. 88 an.

Ist $b = a$, so geht sie in die Gestalt der Fig. 89 über, wo $AB = AC = a\sqrt{2}$ ist.

Ist endlich $b < a$, so besteht die Curve aus zwey abgesonderten Ovalen, oder die zwey Schleifen der Fig. 89 trennen sich bey A so, daſs der Zwischenraum bey A gleich $2\sqrt{a^2 - b^2}$ wird, und daſs die Entfernung ihrer zwey äuſsersten Puncte $BC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Für den erwähnten besonderen Fall der Fig. 89, wo $a = b$ ist, heiſst diese Curve die *Lemniscate* oder die *Schleiſenlinie*, deren Gleichung daher ist

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

§. 204. (Die Astrois.) Wenn eine Gerade von gegebener Länge a sich so bewegt, daſs ihre beyden Endpuncte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben, so wird die Curve, welche durch die auf einander folgenden nächsten Durchschnittspuncte dieser beweglichen Geraden geht, die *Astrois* (sternförmige Curve) genannt. Ihre Gestalt $BDCE$ ist Fig. 90 verzeichnet, und für ihre Gleichung findet man

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wo $AP = x$, $PM = y$, und wo die beyden senkrechten Durchmesser $BC = DE = 2a$ sind. Diese Curve gehört demnach zum sechsten Grade.

I. Mit ihr nahe verwandt und auch von derselben Gestalt ist die Curve, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ist, und die man die *Evolute der Ellipse* nennt. Wir werden später (§. 212.) auf sie zurück kommen.

§. 205. (Die Logistik.) Gehen wir nun zu denjenigen Curven über, deren Gleichungen transcendente Gröſsen enthalten, und die deſshalb selbst transcendente Curven genannt werden. Eine der einfachsten derselben ist die *Logistik* oder die logarithmische Linie, deren Gleichung

$$x = a^y \quad \text{oder} \quad \log x = y \,.\, \log a,$$

und deren Gestalt Fig. 91 verzeichnet erscheint, wo $AP = x$ und $PM = y$ ist.

Für $x = AB = 1$ ist $y = 0$. Sey $AC = a$ und die mit der Axe der x parallele Gerade $CD = b$, also a die zu der Abscisse b gehörende Ordinate, so ist auch

$$b = a^a \quad \text{oder} \quad \log b = a \log a.$$

Substituirt man diesen Werth von

$$\log a = \frac{1}{a} \log b$$

in der zweyten der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$\log x = \frac{y}{a} \log b,$$

oder einfacher

$$x^a = b^y,$$

eine andere Gleichung der Logistik.

Ist endlich $AC = a = 1$ und $CD = b = e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man für den einfachsten Ausdruck der Gleichung dieser Curven

$$y = \log x \quad \text{oder} \quad x = e^y.$$

§. 206. (Die Kettenlinie.) Wenn ein vollkommen biegsamer Faden in zwey seiner Puncte A und B (Fig. 92) befestiget und dann der Einwirkung der Schwere überlassen wird, so nimmt der zwischen diesen Puncten liegende Faden die Gestalt der Kettenlinie (Chainette) $AMDB$ an, deren Gleichung ist

$$y = a \log \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

wo D der unterste oder von der horizontalen Geraden AB am weitesten entfernte Punct der Curve, und wo $DP = x$, $PM = y$ und a eine constante Gröſse ist.

Da sich diese Gleichung auch auf folgende zwey Arten ausdrücken läfst:

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a} \quad \text{und}$$

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x + \sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x - \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, so hat man auch, wenn man die beyden letzten Ausdrücke addirt:

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2}{a}(a + x)$$

für eine andere Gleichung dieser Curve.

§. 207. (Die Cyclois.) Wenn ein Kreis HML (Fig. 93) auf einer Geraden AB rollt, so beschreibt ein gegebener Punct M der Peripherie desselben die Cyclois $AMDB$.

Ist $AP = x$, $PM = y$ und O der Mittelpunct des Kreises, dessen Halbmesser a ist, und nennt man t den Bogen HM, also auch $\frac{t}{a}$ den Winkel HOM, so hat man, da der Bogen HM der Geraden AH, die er früher bedeckte, gleich ist, die beyden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x &= t - a \operatorname{Sin} \frac{t}{a} \\ y &= a\left(1 - \operatorname{Cos} \frac{t}{a}\right) \end{aligned}\right\},$$

oder auch, wenn man der Kürze wegen $t = av$, also v gleich dem Winkel HOM setzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(v - \operatorname{Sin} v) \\ y &= a(1 - \operatorname{Cos} v) \end{aligned}\right\}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröfse v, so erhält man

$$x = a \operatorname{Arc Cos}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

für die Gleichung der Cyclois.

I. Ist D der höchste Punct der Curve, also auch CD gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, und setzt man $DP' = x'$ und $P'M = y'$, so hat man

$$x' = 2a - y \quad \text{und} \quad y' = a\pi - x,$$

wo $\pi = 3.14159\ldots$ und $a\pi = AC$ die halbe Peripherie des erzeugenden Kreises bezeichnet. Dadurch gehen die vorigen Gleichungen in folgende über:

$$x' = a\left(1 + \operatorname{Cos}\frac{t}{a}\right),$$
$$y' = a\pi - t + a\operatorname{Sin}\frac{t}{a},$$

oder wenn man $\pi - v = \omega$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(1 - \operatorname{Cos}\omega) \\ y' &= a(\omega + \operatorname{Sin}\omega) \end{aligned}\right\},$$

und wenn man endlich auch aus diesen zwey Gleichungen die Gröfse ω eliminirt:

$$y' = a \operatorname{Arc Cos}\left(1 - \frac{x'}{a}\right) + \sqrt{2ax' - x'^2},$$

eine zweyte Gleichung der Cyclois.

§. 208. (Die Spiralen.) Wenn man eine Curve, deren Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, in eine Spirale verwandeln will, so kann man sich die Abscissenaxe derselben nach der Peripherie eines Kreises gekrümmt und auf demselben gleichsam aufgewunden vorstellen, wobey die Ordinaten y ihre frühere senkrechte Stellung gegen die neue Abscissenaxe, d h. gegen die Peripherie des Kreises beybehalten. Ist der Halbmesser dieses Kreises die Einheit, so wird man nur, in der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y, die Abscisse x in den Winkel v, und alle um diese Einheit verminderten Ordinaten y in den Radius r verwandeln, um sofort die Polargleichung der entsprechenden Spirale zu erhalten.

I. So hat man für eine gerade Linie, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und die mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen Tangente $\frac{1}{2\pi}$ ist, die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten

$$x = 2\pi . y.$$

Nimmt man damit die angezeigte Verwandlung vor, so erhält man sofort

$$v = 2\pi . r$$

für die Polargleichung der *Archimedischen Spirale*, die Fig. 94 abgebildet ist.

Wenn sich um den Mittelpunct C des Kreises ABD der Halbmesser, den wir gleich der Einheit annehmen, gleichförmig dreht, und wenn sich zugleich in diesem Halbmesser ein Punct M ebenfalls gleichförmig und so bewegt, daſs immer der Radius $CM = r$ zu dem Halbmesser $CA = 1$ des Kreises sich verhalte, wie der Kreisbogen $AB = v$ zu der ganzen Peripherie 2π dieses Kreises, so hat man

$$r : 1 = v : 2\pi,$$

oder es ist

$$v = 2\pi . r,$$

wie zuvor, und daher der so bestimmte Punct M ein Punct dieser Spirale. Diese Gleichung zeigt, daſs die Spirale, nach dem ersten ganzen Umlauf des Halbmessers, den Kreis in A schneidet, und daſs sie dann in unzähligen, immer gröſseren Windungen um den Kreis geht. Da man den Bogen v auch negativ, von A nach D nehmen kann, so besteht diese Curve noch aus einer zweyten Spirale, die der vorigen gleich und ähnlich ist, aber eine entgegengesetzte Lage hat.

II. Eben so hatten wir oben (§. 205.) für die Logistik, wenn man die Coordinaten x und y unter sich verwechselt, die Gleichung

$$x = \log y,$$

also ist auch

$$v = \log r$$

die Gleichung der logarithmischen Spirale (Fig. 95), wo $r = CM$ und wo v der Winkel der r mit einer durch den Pol C gehenden festen Geraden CA ist. Für $r = CA = 1$ ist $v = 0$, so daſs also diese Spirale in unzähligen Windungen für wachsende positive Winkel v sich von dem Mittelpuncte C entfernt, und eben so für abnehmende oder negative Winkel ACm sich dem Mittelpuncte C immer mehr nähert.

III. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist (§. 200, V.)

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2,$$

und daher wird auch die Spirale, deren Polargleichung

$$r . v = a$$

ist, die *hyperbolische Spirale* genannt. Sie ist Fig. 96 verzeichnet, wo $CM = r$ und $XCM = v$ ist. Nimmt man MP senkrecht auf CX, so hat man

$$MP = CM \operatorname{Sin} \nu = \frac{a}{\nu} . \operatorname{Sin} \nu.$$

Für $\nu = 0$ ist (§. 102.) aber $\frac{\operatorname{Sin} \nu}{\nu} = 1$, also auch $MP = a$. Ist daher auch $CA = a$ senkrecht auf CX, und zieht man durch A eine mit CX parallele Gerade AB, so ist AB die Asymptote der Spirale. Für negative Werthe von ν gibt es noch einen zweyten ähnlichen endlosen Ast dieser Curve, der gegen die andere Seite AB' der Asymptote eben so liegt, wie jene gegen AB, und beyde gehen in unzähligen, immer kleinern Windungen um den Mittelpunct C.

Keppler

Sechs und zwanzigstes Capitel.

Berührungen der Curven.

---

§. 209. (Differentialien der Coordinaten der Curven.) So wie wir oben (§. 124, V.) den Kreis als ein regelmäſsiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet haben, so werden wir auch jede in einer Ebene verzeichnete Curve, wie auch schon im Eingange des zehnten Capitels §. 47, III. gesagt worden ist, als irgend ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten, und diese unendlich kleinen Seiten gleichsam als die Elemente ansehen können, aus welchen diese Curve besteht.

Sey NMQ (Fig. 97) eine solche Curve, und MM', $M'M''$ zwey nächstliegende Elemente derselben. Sey AX die Abscissenaxe, A der Anfang der Coordinaten, und AN, PM, $P'M'$, ... senkrecht auf AX. Man ziehe durch die beyden nächsten Puncte M und M' die Gerade $TMM'c$, und nehme Ma und $M'b$ mit AX parallel.

Nennen wir wieder $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten des Punctes M, und setzen wir $PP' = P'P'' \ldots = dx$ für die unendlich kleine Änderung, oder für das constante (§. 55, I.) Differential, der Abscisse x. Bezeichnet man nun die Ordinaten der dem M nächstfolgenden Puncte

$P'M'$ durch y',
$P''M''$ » y'' u. f.,

so ist der im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Unterschied der beyden ersten Ordinaten gleich $M'a$, so wie der Unterschied der beyden letzten gleich $M''b$. Wir wollen jenen durch dy, und diesen durch dy' bezeichnen, so daſs man hat

$$M'a = dy = y' - y \quad \text{und}$$
$$M''b = dy' = y'' - y'.$$

Dieſs vorausgesetzt, hat man für die Differenz dieser beyden Gröſsen dy und dy', das heiſst, für das *zweyte Differential*

d^2y der Ordinate $PM = y$ den Ausdruck

$$d^2y = dy' - dy = y'' - 2y' + y,$$

oder auch

$$d^2y = M''b - M'a.$$

Da aber die durch die beyden ersten Puncte M und M' gezogene Gerade TMM' die Ordinate $P''M''$ in dem Puncte c schneidet, so sind die beyden rechtwinkligen Dreyecke $MM'a$ und $M'bc$ gleich und ähnlich, also ist auch $bc = M'a$, und daher

$$d^2y = M''b - bc \quad \text{oder} \quad d^2y = M''c,$$

d. h. die kleine Linie $M''c$ ist das Bild des zweyten Differentials der Ordinate y.

Demnach erhalten wir für die dritte Ordinate $P''M''$ den Ausdruck

$$y'' = PM + aM' + bM'',$$

oder da $PM = y$, $aM' = bc = dy$ und $cM'' = d^2y$ ist:

$$y'' = y + 2dy + d^2y.$$

I. Da die Curve in der Zeichnung der Fig. 97 gegen die Abscissenaxe AX convex erscheint, so ist auch das zweyte Differential $M''c = d^2y$ positiv. Ist aber die Curve gegen AX concav, so fällt der Punct M'' derselben zwischen die Puncte b und c, und d^2y wird negativ, wie man in Fig. 97, A sieht.

§. 210. (Tangenten und Normalen der Curven.)

Wenn die Gerade TM (Fig. 97) bloſs durch zwey nächste Puncte M und M' der Curve geht, ohne diese Curve in der ersten Nähe dieser Puncte zu schneiden, wie dieſs in §. 209. vorausgesetzt worden ist, so hat die Gerade TM mit der Curve bloſs ein Element MM' gemeinschaftlich, und heiſst in diesem Zustande die *Tangente* (oder die Berührungslinie) der Curve für den Punct M. Diese Tangente drückt demnach gleichsam die *Richtung* aus, welche der diese Curve beschreibende Punct, während seiner Bewegung, in dem Puncte M hat, und man sieht, daſs es nicht ohne Interesse für die Kenntniſs einer krummen Linie seyn wird, diese Richtung ihrer Krümmung für jeden Punct derselben zu erhalten.

Eben so wird eine auf diese Tangente in dem Berührungspuncte M derselben errichtete senkrechte Gerade MR die *Nor-*

male der Curve für den Punct M genannt. Auch pflegt man die Entfernung der Durchschnittspuncte dieser zwey Geraden mit der Axe der x von dem Puncte P, oder

die Linie PT die *Subtangente*,

und die Linie PR die *Subnormale*

der Curve für denselben Punct M zu nennen.

I. Diefs vorausgesetzt, wollen wir nun die Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve suchen.

Diese Gleichung wird, da sie einer geraden Linie angehört, die Form haben (§. 176.)

$$y' = ax' + b,$$

wo x' und y' die veränderlichen oder die laufenden Coordinaten für jeden Punct dieser Geraden, und wo a und b constante Grössen seyn werden, die wir zu bestimmen haben.

Sey die Gleichung der gegebenen Curve zwischen den Coordinaten x und y ausgedrückt, die sich mit den vorhergehenden Coordinaten x' und y' auf dieselben Axen und auf denselben Anfangspunct beziehen.

Da die Tangente durch einen bestimmten Punct M der Curve gehen soll, dessen Coordinaten wir überhaupt x und y genannt haben, so wird man die Bedingungsgleichung haben:

$$y = ax + b \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da aber diese Gerade, wenn sie in der That Tangente zur Curve in dem Puncte M seyn soll, auch noch durch den nächstfolgenden Punct M', oder da sie durch das Element MM' der Curve gehen soll, von welchem die Coordinaten des letzten Punctes M' sind

$$x + dx \quad \text{und} \quad y + dy,$$

so mufs auch noch diese zweyte Bedingungsgleichung

$$y + dy = a(x + dx) + b \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Statt haben. Zieht man von dieser Gleichung (2) die erste (1) ab, so erhält man

$$dy = a dx,$$

und diese ist offenbar das Differential der Gleichung (1). Wir haben daher die zwey einfachen Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} y = ax + b \\ \text{und} \quad dy = a dx \end{array}\right\},$$

und diese reichen hin, die gesuchten Werthe der beyden Constanten a und b, unserer Aufgabe gemäſs, zu bestimmen.

Wir erhalten nämlich

$$a = \frac{dy}{dx} \quad \text{und}$$

$$b = y - \frac{x\,dy}{dx}.$$

Substituirt man daher diese Werthe von a und b in der oben angenommenen Gleichung

$$y' = ax' + b,$$

so erhält man für die gesuchte *Gleichung der Tangente* den Ausdruck

$$y' - y = (x' - x)\frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \quad \text{(A)}.$$

II. Daraus folgt auch sofort (nach §. 177, III.) für die auf die Tangente in dem Berührungspuncte M derselben senkrechte Normale MR die Gleichung

$$y' - y = -(x' - x)\frac{dx}{dy} \quad . \; . \; . \quad \text{(B)}.$$

III. Setzt man in den beyden Gleichungen (A) und (B) die Gröſse $y' = 0$, um denjenigen Punct T oder R zu erhalten, in welchem die Tangente oder die Normale die Abscissenaxe schneidet, so erhält man

für die Subnormale $PR = x' - x = \frac{y\,dy}{dx}$,

und für die Subtangente $PT = x' - x = -\frac{y\,dx}{dy}$

das negative Zeichen, da T und R auf verschiedene Seiten des Punctes P fallen.

IV. Dieselben Ausdrücke wird man auch aus der Bemerkung ableiten, daſs die Dreyecke TPM, PMR und MaM' unter sich ähnlich sind. Setzt man nämlich, wie zuvor, $Ma = dx$, $M'a = dy$, und noch der Kürze wegen

$$MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

so hat man

$$TP : PM = Ma : M'a$$

oder

$$\text{Subtangente } TM = \frac{y\,dx}{dy},$$

wie zuvor, und eben so findet man auch

$$\text{Subnormale } MR = \frac{y\,dy}{dx},$$

so wie

$$MT = \frac{y\,ds}{dy} \text{ und } MR = \frac{y\,ds}{dx}.$$

V. Nennt man endlich noch ω den Winkel MTA, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so hat man

$$\operatorname{Tang}\omega = \frac{dy}{dx},$$

also auch

$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{dy}{ds} \text{ und } \operatorname{Cos}\omega = \frac{dx}{ds}.$$

Ex. Für die Ellipse hat man die Gleichung (§. 198.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0,$$

und daher

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \operatorname{Tang}\omega = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

so wie

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Man erhält demnach für die Gleichung der Tangente der Ellipse zwischen den veränderlichen Coordinaten x' und y' den Ausdruck

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

und eben so für die Gleichung der Normale

$$\frac{x(y' - y)}{a^2} = \frac{y(x' - x)}{b^2}.$$

Ferner ist die

$$\text{Subtangente} = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

$$\text{Subnormale} = -\frac{b^2 x}{a^2},$$

$$\text{Tangente } MT = \frac{1}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2},$$

$$\text{Normale } MR = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Man sieht daraus z. B. daſs die Tangente der Ellipse in den beyden Endpuncten A und B (Fig. 84) der groſsen Axe senkrecht auf AB, und in den beyden Endpuncten D und E der kleinen Axe parallel mit AB ist, und daſs diese Tangente unter dem Winkel von 45 Graden gegen AB geneigt ist für diejenigen Puncte der Ellipse, zu welchen die Coordinaten gehören:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ und } y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Setzt man in den vorhergehenden Ausdrücken die Gröſse $a=b$, so erhält man die analogen Werthe für den *Kreis*, für welchen daher die Normale immer gleich dem Halbmesser des Kreises ist, während die Tangente auf diesem Halbmesser senkrecht steht. (Vergl. §. 115.) Setzt man aber statt a und b die Gröſse $-a$ und $b\sqrt{-1}$, so erhält man die analogen Ausdrücke für die *Hyperbel*.

Ist TMt (Fig. 84) die Tangente der Ellipse in M, so ist

$$FT = \text{Subtang} + FP = \frac{a^2}{x} - x + (x - ae) = \frac{a}{x}(a - ex),$$

und eben so auch

$$F'T = \frac{a}{x}(a + ex),$$

wo $ae = CF = CF'$ die Excentricität der Ellipse bezeichnet.

Aber die Gleichung (B) des §. 197, III. gibt

$$r = p - ex',$$

oder da $p = a(1-e^2)$ und $x' = x - ae$ ist:

$$r = FM = a - ex,$$

und eben so, da (nach §. 198, I.) $FM' = r' = 2a - r$ ist:

$$r' = F'M = a + ex,$$

so daſs man demnach hat

$$FT = \frac{ar}{x} \text{ und } F'T = \frac{ar'}{x},$$

woraus folgt

$$\frac{FT}{r} = \frac{F'T}{r'}.$$

Da aber $\frac{FT}{r} = \frac{\text{Sin}\, FMT}{\text{Sin}\, T}$ und $\frac{F'T}{r'} = \frac{\text{Sin}\, F'Mt}{\text{Sin}\, T}$ ist, so ist auch

$$FMT = F'Mt,$$

oder die Winkel der Tangente mit den beyden Radien FM und $F'M$ sind für jeden Punct der Ellipse unter sich gleich. Dasselbe hat auch für die Hyperbel Statt. Für die Parabel aber findet man (Fig. 85), dafs der Winkel FMT gleich dem Winkel tMQ ist, wenn durch den Punct M die Gerade MQ mit der Abscissenaxe AP parallel gezogen wird. Auf diese Eigenschaften dieser drey Curven gründet sich bekanntlich die Anwendung derselben zu Brennspiegeln und Reverberen.

§. 211. (Krümmungskreise der Curven.) Wie wir in dem Vorhergehenden diejenige Gerade gesucht haben, die durch *zwey* nächste Puncte einer gegebenen Curve geht, so werden wir nun auch eine solche Linie bestimmen können, die *drey* nächste Puncte mit der gegebenen Curve gemein hat. Zu dieser Linie wird sich vorzüglich der *Kreis* eignen, da derselbe, nach §. 111, I. durch drey Puncte seiner Gröfse und Lage nach vollkommen bestimmt wird.

Sind α und β die den laufenden Coordinaten x' und y' parallelen Coordinaten des Mittelpunctes dieses Kreises, und ist ρ der Halbmesser desselben, so hat man für die allgemeine Gleichung des Kreises (§. 199, Gleichung (4))

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \rho^2 \quad . \; . \; . \quad (1),$$

in welcher man daher die drey Gröfsen α, β und ρ, den Bedingungen des Problems gemäfs, bestimmen soll.

Wenn nun wieder die Gleichung der gegebenen Curven zwischen den, den vorigen analogen Coordinaten x und y ausgedrückt ist, so soll der Kreis, jenen Bedingungen gemäfs, durch drey nächste Puncte der Curve gehen, deren Coordinaten sind:

des ersten . . . . x und y,
des zweyten . . . . $x + dx$ » $y + dy$,
des dritten (nach §. 209.) . $x + 2dx + d^2x$ » $y + 2dy + d^2y$.

Substituirt man diese Werthe statt x' und y' in der Gleichung (1), so erhält man drey Bedingungsgleichungen, aus welchen man daher die drey unbekannten Gröfsen α, β, ρ bestimmen wird. Man wird aber, wie in §. 210, I. bemerken, dafs diese drey Bedingungsgleichungen den gewöhnlichen Differentialgleichungen des Ausdrucks (1), das heifst, den drey Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 = 0 \\ (x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0 \\ (x-\alpha)\,d^2x + (y-\beta)\,d^2y + dx^2 + dy^2 = 0\end{array}\right\} \ldots \text{(I)}$$

gleichgeltend sind. Denn bezeichnet man die erwähnten drey Bedingungsgleichungen der Kürze wegen durch A, B und C, so ist $B - A$ die zweyte, und $A - 2B + C$ die dritte der Gleichungen (I), wenn man, nach dem oben (§. 47.) aufgestellten Princip dieser Rechnungsart, die höheren Differentialien gegen die niederen wegläſst.

Sucht man nun aus diesen drey Gleichungen (I) die Werthe von α, β und ρ auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination (§. 67, I.), so erhält man, wenn man wieder der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - x = -\dfrac{ds^2.\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ \beta - y = +\dfrac{ds^2.\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ \rho = \dfrac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}\end{array}\right\} \ldots \text{(C).}$$

Durch diese drey Gröſsen α, β und ρ ist daher derjenige Kreis vollkommen bestimmt, der mit der gegebenen Curve *zwey* nächste Elemente gemeinschaftlich, oder der, wie man sich auch auszudrücken pflegt, mit dieser Curve eine *Berührung der zweyten Ordnung* hat, während die in §. 210. betrachtete Tangente mit dieser Curve nur eine Berührung der ersten Ordnung eingeht. Aus dieser Ursache schlieſst sich auch dieser Kreis viel inniger an die Curve an, als die Tangente, und sein Halbmesser gibt gleichsam das *Maſs der Krümmung* der Curve in jedem ihrer Puncte an, während die Tangente nur die *Richtung* ihrer Krümmung anzeigt, daher auch dieser Kreis der *Krümmungskreis* der Curve genannt wird.

Man sieht, wie sich dasselbe Verfahren auch auf Berührungen der dritten und höheren Ordnungen fortsetzen läſst.

I. In dem Vorhergehenden ist, der gröſsern Allgemeinheit wegen, kein erstes Differential als constant vorausgesetzt worden. Da aber, nach §. 55, I. eines derselben constant angenommen werden mufs, so kann man dafür z. B. das Differential dx wählen, wodurch $d^2x = 0$ wird, wodurch die Gleichungen (C) in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - x &= -\frac{ds^2\,dy}{dx\,d^2y} \\ \beta - y &= \frac{ds^2}{d^2y} \\ \rho &= \frac{ds^3}{dx\,d^2y} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(C').$$

Will man aber, was ebenfalls angeht, die Gröfse dy constant setzen, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \alpha - x &= \frac{ds^2}{d^2x} \\ \beta - y &= -\frac{ds^2\,dx}{dy\,d^2x} \\ \rho &= -\frac{ds^3}{dy\,d^2x} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(C'').$$

Wollte man endlich das zusammengesetzte Differential $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als constant annehmen, so hätte man

$$d\,.\,(dx^2 + dy^2) = 0 \quad \text{oder}$$
$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0, \quad \text{also auch}$$
$$dx^2.\,d^2x = dy^2.\,d^2y,$$

so dafs daher die Gleichungen (C) unter dieser Voraussetzung in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - x &= \frac{ds^2\,d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2} \\ \beta - y &= \frac{ds^2\,d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2} \\ \rho &= \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(C''').$$

Ex. I. Für die Parabel (§. 201.) hat man die Gleichung

$$y^2 = 2ax,$$

also ist auch

$$dy = \frac{a\,dx}{y}, \quad ds = \frac{dx}{y}\sqrt{a^2 + y^2} \quad \text{und}$$

$$d^2y = -\frac{a^2\,dx^2}{y^3},$$

wenn dx constant angenommen wird. Damit geben die Gleichungen (C′)

$$\alpha - x = \frac{1}{a}(a^2 + y^2),$$

$$\beta - y = -\frac{y}{a^2}(a^2 + y^2),$$

$$\rho = -\frac{1}{a^2}(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für den Scheitel z. B. der Parabel, wo $x = y = 0$ ist, erhält man aus den letzten Gleichungen

$$\alpha = a,$$

$$\beta = 0 \quad \text{und}$$

$$\rho = -a,$$

wo das negative Zeichen von a anzeigt, daſs die Curve in diesem Puncte gegen die Abscissenaxe concav ist (§. 209, I.).

Ex. II. Für die Cyclois werden wir, wenn man ihr die erste der in §. 207. angeführten Gleichungen zu Grunde legt, und der Kürze wegen

$$1 - \frac{y}{a} = \operatorname{Cos}\varphi, \quad \text{also auch}$$

$$d\varphi = \frac{dy}{a \operatorname{Sin}\varphi} = \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

setzt, den Ausdruck erhalten:

$$x = a\varphi - \sqrt{2ay - y^2},$$

und davon ist das Differential

$$dx = a\,d\varphi - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

oder, wenn man den vorhergehenden Werth von $d\varphi$ substituirt:

$$dx = \frac{a\,dy - (a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

das heiſst

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

welches daher die Differentialgleichung der Cyclois ist.

Nimmt man von ihr wieder das Differential, und setzt dx constant, so erhält man

$$d^2y = -\frac{a\,dy^2}{2ay - y^2},$$

so wie auch

$$ds^2 = \frac{2a\,dy^2}{2a - y}.$$

Mit diesen Werthen findet man aus den Gleichungen (A), (B) und (C′) für die Cyclois

$$\text{Subtang} = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \qquad \text{Tang} = y\sqrt{\frac{2a}{2a - y}},$$

$$\text{Subnorm} = \sqrt{2ay - y^2}, \qquad \text{Norm} = \sqrt{2ay},$$

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2},$$

$$\beta = -y,$$

$$\rho = 2\sqrt{2ay}.$$

Man sieht daraus, daſs der Halbmesser ρ des Krümmungskreises der Cyclois gleich ist der doppelten Normale für denselben Punct.

Zieht man ferner die beyden Sehnen MH und ML (Fig. 93) des erzeugenden Kreises, so hat man, nach der bekannten Gleichung des Kreises (§. 199, Gleichung 2), da $PM = HK = y$ ist:

$$MK^2 = 2ay - y^2.$$

Da aber $MH^2 = MK^2 + y^2$ ist, so hat man auch

$$MH = \sqrt{2ay},$$

oder diese Sehne MH des erzeugenden Kreises ist zugleich die Normale der Cyclois für den Punct M, und da die Tangente jeder Curve auf der Normale senkrecht steht, der Winkel HML aber, als ein Winkel im Halbkreise (§. 112, I.), gleich 90° ist, so ist auch die andere Sehne ML die Tangente der Cyclois in dem Puncte M.

§. 212. (Evoluten der Curven.) Da die Coordinaten α und β des Mittelpunctes des Krümmungskreises Functionen der beyden Coordinaten x und y der gegebenen Curve sind, so werden auch umgekehrt x und y Functionen von α und β seyn. In der That werden sich diese Gröſsen α und β ändern, wenn die Abscisse x der gegebenen Curve geändert wird, oder wenn man von einem Puncte dieser Curve zu dem nächstfolgenden übergeht, und die Aufeinanderfolge aller dieser Mittelpuncte der verschiedenen Krümmungskreise einer gegebenen Curve werden wieder eine andere Curve bilden, die man die *Evolute* (oder die Abgewickelte) der gegebenen Curve nennt, während umgekehrt die gegebene Curve selbst die *Evolvente* der anderen genannt wird.

Sind MN, mn, $m'n'$, ... (Fig. 98) die Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve Mmm' ..., so ist der Ort aller Mittelpuncte ihrer Krümmungskreise, oder so ist die Curve Nnn' ... die Evolute der gegebenen Curve, wo $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten der Evolvente Mmm', und $AQ = \alpha$, $QN = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolute Nnn' sind.

Zwischen diesen vier Gröſsen x, y, α und β haben aber die drey vorhergehenden Gleichungen (I) des §. 211. Statt, von welchen die zwey letzten, für $dx = \text{Const}$, sind:

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0,$$

$$(y - \beta)\,d^2y + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Verbindet man damit die ebenfalls in x und y ausgedrückte Gleichung der gegebenen Curve oder der Evolvente, so wird man, wenn man aus diesen drey Gleichungen die zwey Gröſsen x und y eliminirt, eine Gleichung zwischen den hier als veränderlich angenommenen Gröſsen α und β erhalten, welche Gleichung daher für die gesuchte Evolute gehören wird.

Ex. I. Für die Parabel haben wir in §. 211, Ex. I. erhalten

$$\alpha - x = \frac{1}{a}(a^2 + y^2),$$

$$\beta - y = -\frac{y}{a^2}(a^2 + y^2),$$

und aus ihnen folgt sofort

$$\alpha - x = a + 2x,$$

$$\beta = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a}}.$$

Eliminirt man aber aus diesen zwey Gleichungen die Gröſse x, so erhält man

$$\beta^2 = \frac{8}{27a}(\alpha - a)^3,$$

oder wenn man der Kürze wegen setzt

$$\tfrac{2}{3}(\alpha - a) = v \quad \text{und} \quad \beta = \xi,$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute

$$\varrho^3 = a \cdot \xi^2,$$

die daher die *Neil*'sche Parabel ist (§. 202.).

Ex. II. Für die Cyclois haben wir oben (§. 211.) erhalten

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2} \text{ und}$$
$$\beta = -y,$$

also auch

$$x = \alpha - 2\sqrt{-22a\beta - \beta^2} \text{ und}$$
$$y = -\beta,$$

wo (Fig. 93) $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten der Evolvente AMD, und wo $AQ = \alpha$, $Qm = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolute Amd sind,

Substituirt man diese Werthe von x und y in der Gleichung

$$x = a \,.\, \text{Arc Cos}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

der Cyclois (§. 207.), so erhält man für die Evolute dieser Curve

$$\alpha = a \,.\, \text{Arc Cos}\left(1 + \frac{\beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2},$$

die also wieder dieselbe Cyclois, nur in verkehrter Lage gegen die Abscissenaxe AB ist, indem bey der Evolvente AMD die Spitze in A und der Scheitel in D, bey der Evolute Amd aber der Scheitel in A und die Spitze in d ist.

Dasselbe hätte man auch schon aus der obigen Bemerkung schliefsen können, dafs der Krümmungshalbmesser $\rho = Mm$ gleich der doppelten Normale oder gleich der doppelten Sehne MH des erzeugenden Kreises ist, wie sich denn auch aus den vorhergehenden Ausdrücken (§. 211, Gleichung I) leicht zeigen läfst, dafs überhaupt für jede Curve der Krümmungsmittelpunct mit dem Durchschnitte der Normalen zweyer nächsten Puncte der Curve identisch ist.

Ex. III. Für die Ellipse hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sucht man daraus die Werthe von dy, d^2y und ds, so erhält man, wenn man diese Werthe in den Gleichungen (C') des §. 211. unter der Voraussetzung von $dx = \text{Const}$ substituirt, für α und β die Ausdrücke:

$$\alpha = \frac{(a^2-b^2)}{a^4} \cdot x^3,$$

$$\beta = -\frac{(a^2-b^2)}{b^4} \cdot y^3,$$

also auch

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{a^2-b^2}} \text{ und } \frac{y}{b} = -\sqrt[3]{\frac{b\beta}{a^2-b^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ in der ursprünglichen Gleichung der Ellipse, so erhält man

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder wenn man alle Glieder dieses Ausdrucks durch

$$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$$

multiplicirt:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute $BDCE$ (Fig. 90) der Ellipse $bdce$. (Vergl. §. 204, I.)

§. 213. (Die vorhergehenden Ausdrücke durch Polarcoordinaten.) Bisher haben wir die Berührungen der Curven durch rechtwinklige Coordinaten xy ausgedrückt. Um dieselben auch durch Polarcoordinaten (§. 180, I.) auszudrücken, seyen (Fig. 99) diese senkrechten Coordinaten

$$AP = x, \quad PM = y,$$

und sey eben so

$$\text{der Radius } AM = r,$$
$$\text{und der Winkel } XAM = v,$$

also r und v die Polarcoordinaten desselben Punctes M der Curve MN, so daſs man daher hat

$$x = r \operatorname{Cos} v \quad \text{und} \quad y = r \operatorname{Sin} v.$$

Sey ferner TM die Tangente und MR die Normale der Curve für den Punct M. Zieht man durch den Anfangspunct A der Coordinaten eine auf den Radius AM senkrechte Gerade, welche die Tangente TM in T' und die verlängerte Normale MR in R'

schneidet, so nennt man, für Polarcoordinaten, von den beyden Theilen der erwähnten Geraden $T'R'$

den ersten AT' die Subtangente,

und den zweyten AR' die Subnormale

der Curve für den Punct M.

Um diese beyden Functionen auf eine einfache Weise zu bestimmen, beschreibe man aus dem Anfangspuncte A mit dem Halbmesser $AM = r$ einen kleinen Kreisbogen, der den nächstfolgenden Radius Am der Curve in dem Puncte a schneidet, so ist $Aa = AM = r$ und daher $am = dr$, so wie der Winkel MAm, wenn man auf sein Zeichen nicht achtet, gleich dv, also auch der Kreisbogen Ma selbst gleich $r\,dv$. Diefs vorausgesetzt, kann man das unendlich kleine Dreyeck Mam als ein rechtwinkliges, geradliniges Dreyeck betrachten, das den beyden endlichen Dreyecken MAT' und AMR' ähnlich ist, und in welchem die Hypotenuse

$$Mm = \sqrt{dr^2 + r^2\,dv^2}$$

ist, für welchen Ausdruck wir wieder, der Kürze wegen, ds setzen wollen, so dafs man demnach folgende Proportionen hat:

$$T'A : MA = Ma : ma \quad \text{oder} \quad T'A = \frac{r^2\,dv}{dr},$$

$$R'A : MA = ma : Ma \quad » \quad R'A = \frac{dr}{dv},$$

$$T'M : MA = Mm : ma \quad » \quad T'M = \frac{r\,ds}{dr},$$

$$R'M : MA = Mm : Ma \quad » \quad R'M = \frac{ds}{dv}.$$

Es ist daher

die Subtangente $T'A = \dfrac{r^2\,dv}{dr}$,

und die Subnormale $R'A = \dfrac{dr}{dv}$.

I. Um eben so den Krümmungshalbmesser ρ durch Polarcoordinaten auszudrücken, so hat man, wenn man die vorhergehenden Gleichungen

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,v \quad \text{und} \quad y = r\,\mathrm{Sin}\,\rho$$

differentiirt:

$$dx = dr\,\mathrm{Cos}\,v - r\,dv\,\mathrm{Sin}\,v,$$
$$dy = dr\,\mathrm{Sin}\,v + r\,dv\,\mathrm{Cos}\,v,$$

und wenn man auch von diesen Ausdrücken wieder das Differential in Beziehung auf $dv = \text{Const}$ oder $d^2v = 0$ nimmt:

$$d^2x = d^2r \operatorname{Cos} v - 2\,dr\,dv \operatorname{Sin} v - r\,dv^2 \operatorname{Cos} v,$$
$$d^2y = d^2r \operatorname{Sin} v + 2\,dr\,dv \operatorname{Cos} v - r\,dv^2 \operatorname{Sin} v.$$

Substituirt man aber diese Werthe in dem vorhergehenden (§. 211, Gleichung C) Ausdrucke von

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

so erhält man sofort

$$\rho = -\frac{(dr^2 + r^2dv^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2dv^3 + 2\,dr^2dv - r\,dv\,d^2r}.$$

§. 214. (Curven von doppelter Krümmung.) Bisher haben wir nur solche krumme Linien betrachtet, die durchaus in einer und derselben Ebene liegen, und die man daher auch *ebene Curven* zu nennen pflegt. Es kann aber auch solche krumme Linien geben, deren je zwey nächste Elemente immer in verschiedenen Ebenen liegen. Wenn z. B. auf einem Cylinder von kreisförmiger Basis ein vollkommen biegsamer Faden in der Richtung der gewöhnlichen Schraubengänge aufgewunden wird, so wird sich dieser Faden nicht bloſs in einer auf die Axe des Cylinders senkrechten Ebene um denselben winden, sondern auch zugleich immer mehr von der Basis dieses Cylinders sich entfernen, und demnach in jedem seiner Puncte eine doppelte Bewegung in einer horizontalen und zugleich in einer vertikalen Richtung annehmen.

Sey ANM' (Fig. 100) ein solcher Cylinder, dessen Seitenlinien auf der Ebene der xy senkrecht stehen. Die Basis desselben sey ein Kreis NAN' in derselben Ebene, dessen Mittelpunct C, und dessen Halbmesser $CA = a$ auf dem Durchmesser NN' senkrecht steht. Wird auf der Oberfläche dieses Cylinders ein Faden AMM' . . . so aufgewunden, daſs die senkrechte Entfernung MQ jedes Punctes M des Fadens von der Basis dem Kreisbogen AQ proportional ist, so fälle man von dem Puncte Q das Loth QP auf den Durchmesser NN', und man hat, wenn der Winkel $ACQ = v$ ist:

$$CP = x = a \operatorname{Sin} v \quad \text{und} \quad PQ = y = a \operatorname{Cos} v,$$

so wie endlich

$$QM = z = b \cdot av,$$

wo b irgend eine Constante bezeichnet.

Eliminirt man die Gröſse v aus diesen drey Gleichungen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ z &= ab \,.\, \text{Arc Sin} \frac{x}{a} \\ \text{und} \quad z &= ab \,.\, \text{Arc Cos} \frac{y}{a} \end{aligned}\right\}$$

für die Projectionen der *Schraubenlinie* $AMM' \ldots$ in den drey coordinirten Ebenen. Von diesen drey Gleichungen ist jede eine Folge der beyden andern.

Man sieht daraus, daſs jede Curve von doppelter Krümmung durch *zwey* Gleichungen ausgedrückt wird, deren jede, wie bey der geraden Linie im Raume (§. 181.), eigentlich die Gleichung ihrer Projection in einer der drey coordinirten Ebenen darstellt. Da aber jede Gleichung, isolirt betrachtet (nach §. 189, III.), für irgend eine Fläche gehört, so wird man auch jene zwey Gleichungen, wenn sie zusammen betrachtet werden, als den analytischen Ausdruck für den Durchschnitt von zwey krummen Flächen ansehen können.

Um noch ein anderes Beyspiel einer Curve von zweyfacher Krümmung anzuführen, so haben wir oben (§. 189, I.) gesehen, daſs die Gleichung

$$x = az + \alpha$$

für eine auf der coordinirten Ebene der xz senksechte, so wie

$$y = bz + \beta$$

für eine auf yz senkrechte Ebene gehört.

Wenn man nämlich in der Ebene der xz die Gerade, deren Gleichung $x = az + \alpha$ ist, verzeichnet, und wenn man dann, durch alle Puncte dieser Geraden, auf dieselbe Ebene der xz senkrechte Linien errichtet, so wird die Aufeinanderfolge aller dieser Lothe diejenige Ebene bilden, welche durch die Gleichung $x = az + \alpha$ vorgestellt wird, und dasselbe gilt auch von den Lothen auf der Ebene der yz, die man durch die in dieser Ebene gezogene Gerade, deren Gleichung $y = bz + \beta$ ist, errichtet.

Ganz auf dieselbe Weise wird also auch die Gleichung

$$y^2 = ax$$

einen auf der Ebene der xy senkrechten Cylinder vorstellen, dessen Basis eine in dieser Ebene liegende Parabel des Parameters a ist, so wie

$$z^2 = by$$

wieder einen auf der Ebene yz senkrechten Cylinder bezeichnet, dessen Basis eine in derselben Ebene liegende Parabel des Parameters b ist. Beyde Gleichungen zusammen genommen aber

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = ax \\ z^2 = by \end{array}\right\}$$

gehören für die Curve von doppelter Krümmung, in welcher sich diese zwey parabolischen Cylinder durchschneiden.

§. 215. (Tangente einer Curve von doppelter Krümmung.) Auch diese Curven lassen sich, wie die ebenen, als Polygone von unendlich kleinen Seiten betrachten, nur mit dem Unterschiede, daſs bey jenen diese Seiten nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen, so daſs also auch hier die Tangente der Curve nichts anderes, als die Verlängerung irgend einer Seite des erwähnten Polygons seyn wird.

Nennt man daher x, y, z die Coordinaten des Anfangspunctes M einer dieser unendlich kleinen Seiten, und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten des Endpunctes m derselben, so wie auch $Mm = ds$ den Abstand dieser beyden Puncte M und m von einander, wo demnach (§. 184.) diese Seite

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ist, so werden die Gröſsen dx, dy, dz nichts anderes, als die Projectionen (§. 184.) der Seite ds auf die drey coordinirten Axen der x, y, z seyn. Sind also α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Curve in dem Puncte M mit den drey coordinirten Axen der x, y, z bildet, so hat man (§. 181, I.)

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \operatorname{Cos}\beta = \frac{dy}{ds},\quad \operatorname{Cos}\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Allein die Gleichungen einer geraden Linie im Raume, die durch einen gegebenen Punct (dessen Coordinaten x, y, z sind) geht, und die mit den Axen der x, y, z in derselben Ordnung die Winkel α, β, γ bildet, sind (§. 186, II.):

$$(y-y')\,\mathrm{Cos}\,\alpha = (x-x')\,\mathrm{Cos}\,\beta,$$
$$(z-z')\,\mathrm{Cos}\,\alpha = (x-x')\,\mathrm{Cos}\,\gamma,$$
$$(z-z')\,\mathrm{Cos}\,\beta = (y-y')\,\mathrm{Cos}\,\gamma,$$

wo $x'y'z'$ die laufenden Coordinaten der Linie, und wo xyz, so wie $\alpha\beta\gamma$ als constante Gröſsen zu betrachten sind, die für jeden bestimmten Punct der Curve von doppelter Krümmung (durch die Gleichung dieser Curve zwischen xyz) gegeben sind.

Substituirt man daher in diesen Gleichungen die vorhergehenden Werthe von $\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\mathrm{Cos}\,\beta$ und $\mathrm{Cos}\,\gamma$, so erhält man für die gesuchten Gleichungen der Tangente einer Curve von doppelter Krümmung die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = (x-x')\dfrac{dy}{dx} \\ z - z' = (x-x')\dfrac{dz}{dx} \\ z - z' = (y-y')\dfrac{dz}{dy} \end{array}\right\} \ldots \text{(D)},$$

von deren jede eine unmittelbare Folge der beyden andern ist.

I. Nach §. 193, III. steht die Ebene, deren Gleichung ist

$$ax + by + z = P,$$

auf der Geraden senkrecht, deren Gleichungen sind

$$x = az + \alpha \quad \text{und} \quad y = bz + \beta.$$

Setzt man daher

$$a = \frac{dx}{dz} \quad \text{und} \quad b = \frac{dy}{dz},$$

so erhält man

$$(x-x')\,dx + (y-y')\,dy + (z-z')\,dz = 0 \ldots \text{(E)}$$

für die Gleichung einer Ebene (zwischen den veränderlichen Coordinaten $x'y'z'$), die durch den Punct xyz geht und senkrecht auf der Tangente der Curve von doppelter Krümmung steht.

Ex. Für die oben angeführte Schraubenlinie hat man

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{ab}{x},$$

so daſs daher die Gleichungen der Tangente der Schraubenlinie sind:

$$\left.\begin{aligned} y - y' &= -(x - x')\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ z - z' &= (x - x')\frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ z - z' &= -(y - y')\frac{ab}{x} \end{aligned}\right\};$$

und eben so hat man für die Gleichung einer Ebene, die durch den Punct xyz dieser Curve geht und senkrecht auf derselben steht:

$$(x - x')y - (y - y')x + (z - z')ab = 0 \quad \text{oder}$$
$$ab(z - z') = x'y - xy'.$$

§. 216. (Tangirende Ebenen.) Zum Beschluſs dieses Gegenstandes wollen wir noch die Gleichungen derjenigen Ebene suchen, welche eine gegebene Fläche in einem bestimmten Puncte berührt.

Es ist bereits oben (§. 189, IV.) gesagt worden, daſs in der Gleichung einer Ebene, und eben so überhaupt in der Gleichung einer Fläche zwischen x, y und z, immer zwey dieser drey Coordinaten, z. B. x und y, gegeben oder willkürlich angenommen werden müssen, um dadurch die dritte z zu bestimmen. Da diese beyden ersten Gröſsen x und y durch keine weitere Relation unter sich verbunden sind, so wird man auch die eine derselben verändern können, während die andere ungeändert bleibt. Auf diese Weise kann demnach die Gröſse z auf zwey verschiedene Arten variiren, nämlich in Beziehung auf x sowohl, als auch in Beziehung auf y. Nimmt man daher von der gegebenen Gleichung einer Fläche das Differential von z bloſs in Beziehung auf x, so erhält man das *partielle Differential* $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, so wie man das *partielle Differential* $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ erhält, wenn man dieselbe Gleichung bloſs in Beziehung auf z und y differentiirt, und dabey die Gröſse x als constant betrachtet.

Diese partiellen Differentialien sind für die geometrische Analysis von der gröſsten Wichtigkeit, daher sie hier durch Einschlieſsung in Klammern von den bisher betrachteten gewöhnlichen Differentialien unterschieden werden.

Der Kürze wegen wollen wir diese partiellen Differentialien

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

setzen, so daſs daher die Differentialgleichung einer jeden Fläche immer die Form haben wird:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Da aber die Gröſsen x und y, also auch ihre Änderungen dx und dy von einander ganz unabhängig sind, so wird jede solche Gleichung eigentlich zwey andern Gleichungen äquivalent seyn, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

oder, was dasselbe ist:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \quad \text{und} \quad dz = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Ist M (Fig. 101) ein Punct der gegebenen Fläche, und legt man durch denselben zwey mit xz und yz parallele Ebenen $MQ'Q''$ und MPR, und legt man eben so durch einen nächsten Punct N' derselben Fläche zwey den vorigen parallele Ebenen $N'R'R''$ und $N'P'R'$, so wird die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = p$$

derjenigen Curve MM' angehören, in welcher die Ebene $MQ'Q''$ die Fläche schneidet, so wie die Gleichung

$$\frac{dz}{dy} = q$$

für die Curve MN gehört, in welcher die Ebene MPR die Fläche schneidet.

In der ersten dieser Gleichungen ist $dz' = Q'M' - QM$, und in der zweyten ist $dz'' = RN - QM$, oder dort ist das *partielle* Differential von dz

$$dz' = p\,dx, \quad \text{und hier ist es} \quad dz'' = q\,dy;$$

beyder Summe $dz' + dz''$ aber, oder das *vollständige* Differential von z ist

$$dz = R'N' - QM = p\,dx + q\,dy.$$

I. Jede Gleichung zwischen drey veränderlichen Gröſsen x, y, z, von welchen je zwey, z. B. x und y, unabhängig sind, hat demnach zu ihrem Differential *zwey* Gleichungen, aber zwischen partiellen Differentialien.

Ist z. B. die Gleichung einer Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben, so ist ihre partielle Differentialgleichung in Beziehung auf z und x:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{c^2 x}{a^2 z},$$

und in Beziehung auf z und y:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

II. Sey nun

$$z' = Ax' + By' + C$$

die Gleichung einer Ebene, welche eine Fläche, deren Gleichung zwischen x, y und z gegeben ist, in einem Puncte derselben berühren soll.

Da diese Ebene durch den bestimmten Punct M der Fläche, dessen Coordinaten xyz sind, gehen soll, so wird ihre Gleichung die Form haben:

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)},$$

und in ihr sind demnach die beyden Gröſsen A und B, der Bedingung unserer Aufgabe gemäſs, noch zu bestimmen. Die letzte Ebene soll nämlich auch noch durch alle anderen Puncte N, M', N', ... der Fläche gehen, die dem ersten Puncte M zunächst liegen, also muſs auch die letzte Gleichung noch bestehen, wenn man in ihr statt xyz die Gröſsen $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ setzt, wodurch man, wie oben (§. 210, I. und §. 211.), die Gleichung erhält

$$dz = A dx + B dy.$$

Die allgemeine Gleichung jeder Oberfläche ist aber

$$dz = p dx + q dy,$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ die aus der gegebenen Gleichung der Fläche bekannten Functionen von x, y und z sind.

Setzt man die beyden letzten Ausdrücke von dz einander gleich, so erhält man

$$(A - p) dx + (B - q) dy = 0,$$

und da dieser letzte Ausdruck für *alle* Richtungen, die man von dem Puncte M zu irgend einem ihm nächsten Puncte nehmen kann, oder da er für *alle* Verhältnisse gelten soll, die man zwischen den beyden unabhängigen Grösen dx und dy aufstellen will, so wird dieser Ausdruck den beyden folgenden gleichgeltend seyn:

$$A - p = 0 \quad \text{und} \quad B - q = 0,$$

$$\text{oder} \quad A = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Substituirt man daher die gefundenen Werthe von A und B in der vorhergehenden Gleichung (a), so erhält man für die gesuchte *Gleichung der tangirenden Ebene:*

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \ldots \quad (F),$$

oder auch

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Ex. Für die oben (Nr. I.) betrachtete Fläche, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, hat man, wenn man die dort angeführten Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in der Gleichung (F) substituirt, für die tangirende Ebene derselben die Gleichung

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

wo $x' y' z'$ die laufenden Coordinaten der Ebene bezeichnen.

III. Wenn man die Gleichung (F) mit der folgenden

$$Lx + My + Nz = 1,$$

die wir oben (§. 192, I.) durch (I) bezeichnet haben, vergleicht, und wenn man f, g, h die Neigungen der tangirenden Ebene gegen die drey coordinirten Ebenen der xy, xz und yz nennt, so erhält man (nach §. 193.), wenn man

$$\frac{L}{N} \text{ in } -p \quad \text{und} \quad \frac{M}{N} \text{ in } -q$$

verwandelt, für f, g, h folgende Werthe:

$$\operatorname{Cos} f = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{Cos} g = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{Cos} h = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

IV. Man nennt diejenige Gerade, die in einem gegebenen Puncte der Fläche auf dieser Fläche senkrecht steht, die *Normale* der Fläche. Da diese Normale auch auf der durch diesen Punct gehenden tangirenden Ebene senkrecht stehen muſs, so hat man (nach §. 193, III.) für die Gleichungen dieser Normale

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + p(z' - z) = 0 \\ y' - y + q(z' - z) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (G).$$

Nennt man endlich f', g', h' die Winkel, welche diese Normale mit den coordinirten Axen der x, y, z bildet, so hat man (nach §. 186.)

$$\operatorname{Cos} f' = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{Cos} g' = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{Cos} h' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

also auch

$$\operatorname{Cos} f' = \operatorname{Cos} h,$$
$$\operatorname{Cos} g' = \operatorname{Cos} g,$$
$$\operatorname{Cos} h' = \operatorname{Cos} f.$$

So hat man für die in dem letzten Beyspiele aufgestellte Fläche, da für sie

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \quad \text{und} \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

ist, für f, g, h folgende Ausdrücke:

$$\operatorname{Cos} f = \frac{a^2 b^2 z}{m},$$

$$\operatorname{Cos} g = -\frac{a^2 c^2 y}{m},$$

$$\operatorname{Cos} h = -\frac{b^2 c^2 x}{m},$$

wo der Kürze wegen

$$m = \sqrt{b^4 c^4 x^2 + a^4 c^4 y^2 + a^4 b^4 z^2}$$

oder

$$m = a^2 b^2 c^2 . \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

gesetzt worden ist.

Sieben und zwanzigstes Capitel.
Erzeugung der Flächen.

---

§. 217. (Cylindrische Flächen.) Wir wollen nun, wie wir in Cap. XXIV. und XXV. die vorzüglichsten Curven betrachtet haben, auch die Gleichungen der am meisten vorkommenden krummen Flächen untersuchen.

Die *cylindrischen Flächen*, mit welchen wir diese Betrachtungen beginnen, entstehen (nach §. 159.), wenn eine Gerade im Raume sich so bewegt, dafs sie einer anderen festen Geraden, der Axe des Cylinders, immer parallel bleibt. In dieser allgemeinen Definition der cylindrischen Flächen wird über die Basis des Cylinders nichts festgesetzt, daher dieselbe auch eine jede willkürliche krumme Linie, selbst von doppelter Krümmung, seyn kann.

Um die allgemeine Gleichung dieser Flächen zu finden, seyen

$$\left.\begin{aligned} x &= az + A \\ y &= bz + B \end{aligned}\right\}$$

die Gleichungen der erwähnten festen Geraden, welcher die bewegliche Gerade stets parallel bleiben soll, so werden die Gleichungen dieser beweglichen Geraden (nach §. 183.) seyn:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\};$$

so dafs die Coefficienten von z in beyden Gleichungen *dieselben*, und zwar dieselben *constanten* Gröfsen sind, während die zwey anderen Gröfsen α und β von einer Lage der beweglichen Geraden zur anderen variiren.

Wir wollen diese Gerade, durch deren Bewegung die cylindrische Fläche entsteht, die *erzeugende Linie*, und diejenige krumme Linie, durch welche jene während ihrer Bewegung geht, und durch welche diese Bewegung gleichsam geleitet wird, die *leitende Curve* nennen.

Wenn man von irgend einem Puncte der auf diese Weise erzeugten cylindrischen Oberfläche zu einem anderen nächstfolgenden Puncte dieser Fläche so übergeht, und dabey immer in *derselben* Lage der erzeugenden Linie bleibt, so werden die beyden Gröſsen α und β für beyde Puncte auch denselben Werth behalten, oder sie werden beyde constant seyn, und auch constant bleiben für alle Puncte des Cylinders, die in einer und derselben Lage der erzeugenden Geraden enthalten sind. — Wenn man aber, von demselben ersten Puncte, zu einem solchen nächstfolgenden Puncte der cylindrischen Fläche übergeht, der einer anderen Lage der erzeugenden Geraden angehört, so werden auch beyde Gröſsen α und β *zugleich* geändert werden.

Daraus folgt, daſs die beyden Gröſsen α und β, oder was dasselbe ist, daſs die zwey Gröſsen

$$x - az \quad \text{und} \quad y - bz$$

beyde zugleich constant, und auch zugleich veränderlich sind, daſs sie demnach eine von der anderen abhängen, oder daſs jede von ihnen eine Function der anderen seyn wird. Bezeichnen wir demnach wieder die Function überhaupt durch f, so hat man die Gleichung

$$y - bz = f.(x - az) \ldots (A);$$

und da die Eigenschaft, welche durch diese Gleichung ausgedrückt wird, allen Cylindern gemein und für diese Flächen charakteristisch ist, so wird auch (A) die allgemeine Gleichung der Cylinder seyn.

I. Wenn man die Oberfläche eines Cylinders durch die coordinirte Ebene der xy schneidet, so wird man, da die Gleichung dieser Ebene (nach §. 189, II.) $z = 0$ ist, für die so entstehende krumme Linie des Durchschnitts beyder Flächen die zwey Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{r} z = c, \\ y - bz = f(x - az) \end{array}\right\}.$$

Da aber diese Curve ganz in der Ebene der xy liegt, also eine ebene Curve ist, so werden sich diese zwey Gleichungen, die nach §. 182. für eine Curve im Raume nothwendig sind, hier auf die einzige Gleichung

$$y = f(x)$$

zurückführen lassen, und diese in der Ebene der xy liegende Curve wird (nach §. 189, III.) die *Projection* in xy von derjenigen Curve seyn, durch welche die erzeugende Gerade während ihrer Bewegung geht, d. h. sie wird die Projection der *leitenden Curve* in der Ebene der xy seyn.

II. Eben so wird man für die Projection der leitenden Curve in der Ebene der xz die Gleichung $bz = f(x - az)$, und für die Projection derselben in der Ebene der yz die Gleichung

$$y - bz = f(az)$$

haben. Die leitende Curve selbst, die ganz in der Oberfläche des Cylinders liegt, wird im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung, wie z. B. die Schraubenlinie seyn, die wir bereits oben (§. 214.) betrachtet haben.

§. 218. (Bestimmung der individuellen cylindrischen Fläche, von welcher die Gleichungen der erzeugenden und der leitenden Linie gegeben sind.) Seyen, wie zuvor, die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\},$$

und die Gleichungen der leitenden Curve

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= 0 \end{aligned}\right\},$$

wo U sowohl als V bestimmte Functionen von x, y, z sind.

Um daraus die Gleichungen des auf diese Weise entstehenden Cylinders zu finden, wird man das allgemeine Functionszeichen f der Gleichung (A) so zu bestimmen haben, daſs es dem gegebenen speciellen Falle entspricht, oder daſs es den Bedingungen dieser besonderen Aufgabe genug thut.

I. Wenn man nämlich auf irgend eine Art dahin gelangt, diese Function, z. B. $f(\alpha)$ bloſs durch ihre Stammgröſse α (nebst anderen constanten Gröſsen a, b, c, . . .), in einer Gleichung darzustellen, so wird man, aus dieser Gleichung, den Werth von $f(x)$ durch α finden, und daher die dem gegebenen speciellen Falle gemäſse Function f bestimmen können.

Allein eine solche Gleichung zwischen α und $f(\alpha)$ erhält man immer, wenn man aus den vorhergehenden vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} x - az = \alpha, \\ y - bz = f(\alpha) \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{r} U = 0 \\ V = 0 \end{array}\right\},$$

welche Gleichungen für jeden Punct der cylindrischen Fläche zu gleicher Zeit Statt haben, die drey Gröſsen x, y und z eliminirt. Das Resultat dieser Elimination wird zugleich die oben erwähnte Gleichung zwischen α und $f(\alpha)$ seyn, und sie wird uns zeigen, auf welche Weise die erwähnte Function $f(\alpha)$ von α abhängen muſs, um dem speciellen Falle unseres Problemes zu genügen.

II. Ein Beyspiel wird dieſs sogleich deutlich machen.

Sey die leitende Curve eine in der Ebene der xy verzeichnete Ellipse, deren halbe groſse und kleine Axe A und B, und deren Coordinaten des Mittelpuncts M und N sind, so daſs man also für die zwey Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ in unserem gegenwärtigen speciellen Falle die Ausdrücke haben wird (§. 198, II.)

$$\left.\begin{array}{c} z = 0, \\ \left(\frac{x - M}{A}\right)^2 + \left(\frac{y - N}{B}\right)^2 = 1 \end{array}\right\}.$$

Verbindet man damit die beyden vorigen Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\left.\begin{array}{r} x - az = \alpha, \\ y - bz = f(\alpha) \end{array}\right\},$$

so findet man, wenn man aus diesen vier Gleichungen die drey Gröſsen x, y und z eliminirt:

$$\left(\frac{\alpha - M}{A}\right)^2 + \left(\frac{f(\alpha) - N}{B}\right)^2 = 1;$$

und dieſs ist die Gleichung, welche die gesuchte Abhängigkeit der Function $f(\alpha)$ von ihrer Stammgröſse α gibt.

Substituirt man in ihr für α und $f(\alpha)$ die vorhergehenden Werthe von $y - az$ und $y - bz$, so erhält man

$$\left(\frac{x - az - M}{A}\right)^2 + \left(\frac{y - bz - N}{B}\right)^2 = 1 \ldots (\mathrm{I});$$

und dieſs ist die gesuchte Gleichung der cylindrischen Fläche, deren Basis die gegebene Ellipse in der Ebene der xy, und deren Axe diejenige Gerade ist, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und deren Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} x = az \\ y = bz \end{array}\right\}$$

sind.

III. Setzt man in der Gleichung (I) die Gröſse $M = N = 0$, so liegt der Mittelpunct der Ellipse im Anfangspuncte der Coordinaten.

Ist $a = 0$, so ist die immer durch den Mittelpunct der Ellipse gehende Axe des Cylinders parallel mit der Ebene der yz; ist $b = 0$, so ist sie parallel mit der Ebene der xz; ist $a = b$, so bildet diese Axe mit den Coordinaten der x und y denselben Winkel, und ist endlich $a = b = 0$, so liegt die Axe des Cylinders in der Coordinatenaxe der z.

Setzt man noch $A = B$, so ist die leitende Curve ein Kreis des Halbmessers A, und die Gleichung

$$(x - az - M)^2 + (y - bz - N)^2 = A^2$$

gehört für einen auf der Ebene der xy schief stehenden Cylinder mit kreisförmiger Basis.

IV. Ist AM (Fig. 78) eine durch den Anfang A der Coordinaten mit der erzeugenden Geraden parallele Linie, so sind ihre Gleichungen

$$x = az \quad \text{und} \quad y = bz.$$

Ist aber $MAZ = \gamma$ der Winkel dieser Geraden mit der Axe der z, und ist eben so $XAQ = \delta$ der Winkel der Projection AQ derselben Geraden AM in der Ebene der xy mit der Axe der x, so hat man, nach §. 187, I.,

$$x = \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos}\delta, \quad y = \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta \quad \text{und} \quad z = \operatorname{Cos}\gamma;$$

also auch, wenn man diese Werthe von x, y, z in den beyden vorhergehenden Gleichungen substituirt:

$$a = \operatorname{Tang}\gamma \operatorname{Cos}\delta \quad \text{und} \quad b = \operatorname{Tang}\gamma \operatorname{Sin}\delta,$$

so daſs daher die letzte Gleichung der Nr. III. für den Cylinder mit kreisförmiger Basis (wenn A der Halbmesser dieses Kreises ist, und wenn der Mittelpunct desselben zugleich im Anfange der Coordinaten liegt, also $M = N = 0$ ist), in den folgenden Ausdruck übergeht:

$$(x - z \operatorname{Tang}\gamma \operatorname{Cos}\delta)^2 + (y - z \operatorname{Tang}\gamma \operatorname{Sin}\delta)^2 = A^2.$$

Liegt die Axe AM dieses Cylinders in der Ebene der xz, so ist $\delta = 0$, und daher die vorhergehende Gleichung

$$(x - z \operatorname{Tang}\gamma)^2 + y^2 = A^2.$$

Liegt diese Axe in der Ebene der yz, so ist $\delta = 90^0$ und

$$x^2 + (y - z \operatorname{Tang}\gamma)^2 = A^2.$$

Liegt endlich diese Axe AM in der coordinirten Axe AZ der z, oder steht der erwähnte Cylinder auf der Ebene der xy senkrecht, so ist $\gamma = 0$, und man hat für die Gleichung dieses Cylinders

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

§. 219. (Anderer Ausdruck für die Gleichung der cylindrischen Flächen.) Aus der oben gegebenen Definition dieser Flächen folgt, dafs die diese Flächen tangirende Ebene in jeder ihrer Lagen mit der erzeugenden Geraden stets parallel seyn wird. Führt man aber diese Gerade sowohl, als auch diese tangirende Ebene, jede mit sich selbst parallel fort, bis beyde durch den Anfang der Coordinaten gehen, so sind die Gleichungen der Geraden

$$x = az \quad \text{und} \quad y = bz,$$

und eben so ist dann auch die Gleichung der tangirenden Ebene (nach §. 216, II.)

$$z = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Gröfsen die partiellen Differentialien der Fläche in Beziehung auf z, x und auf z, y sind (vergl. § 216.).

Soll aber diese Ebene mit der erzeugenden Geraden parallel seyn, so wird man, nach §. 193, IV., die Bedingungsgleichung haben:

$$a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1 \; . \; . \; . \; (\mathrm{A}');$$

und diefs ist demnach eine eben so allgemeine Gleichung der cylindrischen Flächen, als die vorhergehende endliche Gleichung (A).

I. Wenn daher irgend eine gegebene Gleichung auf die Form (A) oder (A′) gebracht werden kann, so wird diese Gleichung immer für einen Cylinder gehören. Diefs ist z. B. der Fall mit der Gleichung

$$(x - az)\,y = c^2,$$

oder mit ihrem partiellen Differential

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{a},$$

die für einen Cylinder gehört, dessen Basis oder dessen *leitende*

Curve in der Ebene der xy eine gleichseitige Hyperbel (§. 200, V.) ist. Die Gleichung dieser Hyperbel ist

$$xy = c^2,$$

und ihr Mittelpunct liegt in dem Anfange der Coordinaten, ihre Axe aber liegt in der Ebene der xz und bildet mit der Axe der z einen Winkel, dessen Tangente gleich a ist; daher in den allgemeinen Gleichungen (A) und (A′) die Gröſse b für diesen speciellen Fall gleich Null ist.

II. Allein dieselbe partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{a}$$

erhält man auch für jede andere Curve in der Ebene der xy, die man dem Cylinder als *leitende Curve* zu Grunde legt. Ist z. B. die Gleichung dieser Curve

$$z = 0 \text{ und } y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

und verbindet man diese Ausdrücke mit den zwey Gleichungen

$$x - az = \alpha \text{ und } y = f(\alpha)$$

der erzeugenden Geraden, die hier, wegen $b = 0$, der Ebene der xz parallel vorausgesetzt wird, so erhält man, wenn man das in §. 218, I. angezeigte Verfahren auf die vorhergehenden vier Gleichungen anwendet, für die endliche Gleichung des so entstehenden Cylinders

$$y = A + B(x - az) + C(x - az)^2 + D(x - az)^3 + \ldots,$$

und davon ist das partielle Differential in Beziehung auf z und x

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{a}, \text{ wie zuvor.}$$

Daraus folgt demnach der Satz: Wenn eine Gerade in der coordinirten Ebene der xz mit der Axe der z einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich a ist, und wenn sich dann irgend eine willkürliche und willkürlich gelegte Curve von einfacher oder doppelter Krümmung, mit sich selbst parallel und so bewegt, daſs ein bestimmter Punct derselben immer durch jene Gerade geht, so wird diese Curve eine cylindrische Fläche beschreiben, deren Gleichung zwischen partiellen Differentialien ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{a}.$$

III. In der That, wenn eine der Ebene der xz parallele Gerade sich mit sich selbst parallel und so bewegt, daſs sie mit der Ebene der xy stets denselben Winkel, dessen Cotangente a ist, bildet, so wird sie, wie sonderbar und selbst regellos ihre übrige Bewegung auch seyn mag, eine Fläche beschreiben, deren Gleichung

$$y = f(x - az),$$

oder, was dasselbe ist,

$$x = az + f(y)$$

seyn wird, und wo der Ausdruck $f(y)$ jede willkürliche Function von y, z. B. y^m, A^y, Arc Sin y u. f., und selbst sprungweise bald diese, bald jene Function von y bezeichnen kann. Denn wenn man durch irgend einen Punct dieser Fläche eine mit der Ebene der xz parallele Ebene legt, so wird die Fläche von dieser Ebene in einer Linie geschnitten werden, die mit irgend einer Lage jener beschreibenden Geraden zusammenfällt, und deren Tangente daher mit der Ebene der xy durch die Gleichung (§. 210, V.)

$$\left(\frac{dx}{dz}\right) = a$$

ausgedrückt werden wird; allein dieselbe Gleichung erhält man auch durch die partielle Differentiation des vorhergehenden Ausdrucks $x = az + f(y)$ in Beziehung auf x und z, welches auch der Werth der Gröſse $f(y)$ seyn mag.

IV. Eben so wird die, übrigens nicht mehr cylindrische Fläche, deren Gleichung

$$x^2 = 2az + f(y)$$

ist, von einer jeden mit xz parallelen Ebene in einer Curve geschnitten, deren Tangente mit der Ebene der xy einen Winkel bildet, der durch die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{a}$$

ausgedrückt wird. Wenn daher eine in der Ebene xz verzeichnete Parabel, deren Gleichung $x^2 = 2az$ ist, sich mit sich selbst parallel, sonst aber ganz willkürlich bewegt, so wird sie eine Fläche beschreiben, deren partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{a},$$

und deren endliche Gleichung

$$x^2 = 2az + f(y)$$

ist, wo $f(y)$ eine völlig willkürliche Function von y bezeichnet.

§. 220. (Digression über die Bedeutung der Differentialgleichungen.) Wir haben bereits öfter Veranlassung gehabt, die Gleichungen gegebener Curven zu differentiiren. So haben wir z. B. in §. 211. für den Kreis, dessen Gleichung ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \ldots (a),$$

die erste Differentialgleichung desselben

$$(x-\alpha)\, dx + (y-\beta)\, dy = 0 \ldots (b),$$

und auch die zweyte Differentialgleichung, unter der Voraussetzung, daſs dx constant ist,

$$(y-\beta)\, d^2y + dx^2 + dy^2 = 0 \ldots (c)$$

gefunden. Wollte man die letzte noch einmal differentiiren, so würde man für die dritte Differentialgleichung des Kreises erhalten:

$$(y-\beta)\, d^3y + 3\, dy\, d^2y = 0;$$

oder auch, wenn man den Werth von $(y-\beta)$ aus (c) substituirt,

$$(dx^2 + dy^2)\, d^3y - 3\, dy\, d^2y^2 = 0 \ldots (d).$$

Alle diese vier Gleichungen, und selbst jede willkürliche Combination derselben, gehören, so wie die erste (a), aus welcher sie abgeleitet sind, für den Kreis, aber sie sind demungeachtet sehr wesentlich von einander verschieden. Die erste Gleichung (a) enthält drey Constanten, nämlich die beyden Coordinaten α und β des Mittelpuncts und den Halbmesser ρ des Kreises; durch diese Gleichung wird demnach der gegebene Kreis seiner Lage und Gröſse nach vollständig bestimmt. — Die zweyte Gleichung (b) enthält aber nur mehr die beyden ersten Constanten α und β, und sie gehört daher für einen Kreis, dessen Mittelpunct in der Ebene der xy bestimmt, dessen Halbmesser aber unbestimmt ist, oder willkürlich angenommen werden kann. — Die dritte Gleichung (c) enthält nur mehr die einzige Constante β, und sie ist daher von α und ρ ganz unabhängig, d. h. diese dritte Gleichung gehört für einen Kreis, dessen Mittelpunct irgendwo in einer Geraden liegt, die in der Entfernung $y = \beta$ von der Axe der x mit dieser Axe parallel steht, und dessen Halbmesser von ganz unbestimmter Gröſse ist. — Die vierte Gleichung (d) endlich, die keine der drey Constanten mehr enthält, gehört überhaupt für einen Kreis, dessen Lage und Gröſse aber völlig unserer Willkür überlassen wird.

Man sieht aus diesem Beyspiele, wie die höheren Differentialien der Gleichung einer Curve, mit der Ordnung ihrer Differentialien, an Allgemeinheit ihrer Bedeutung zunehmen.

I. Aber noch bedeutender ist diese Zunahme bey den Differentialgleichungen der Flächen. — Die endliche Gleichung der cylindrischen Fläche ist, wie wir gesehen haben,

$$y - bz = f.(x - az),$$

und in dieser Gleichung bezeichnet $f.(x - az)$ irgend eine *willkürliche* Function der Gröſse $(x - az)$, die selbst ganz gesetzlos fortgehen oder die auch das Gesetz ihres Fortganges alle Augenblicke ändern kann.

Wenn man aber diese Gleichung partiell differentiirt, so erhält man, wenn f' irgend eine andere Function von derselben Gröſse $(x - az)$ ausdrückt, für $y =$ Const,

$$b\left(\frac{dz}{dx}\right) = -f' + a\left(\frac{dz}{dx}\right).f',$$

und eben so für $x =$ Const,

$$1 - b\left(\frac{dz}{dy}\right) = -a\left(\frac{dz}{dy}\right).f'.$$

Eliminirt man aus diesen beyden partiellen Differentialgleichungen die Gröſse f', so erhält man

$$a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1 \ldots (A');$$

eine Gleichung, die wir schon oben (§. 219.) auf einem anderen Wege erhalten haben.

Man sieht daraus, daſs durch die partielle Differentiirung der Gleichungen der Flächen, nicht nur die constanten Gröſsen, sondern selbst noch ganz willkürliche Functionen zur Verschwindung gebracht werden können.

II. Wenn man endlich, um dieſs noch weiter zu führen, diese Gleichung (A') noch ein Mal partiell differentiirt, und dabey, wie gewöhnlich, die Gröſse dx constant voraussetzt, so erhält man für das gesuchte Differential in Beziehung auf z und x

$$a\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

und eben so in Beziehung auf z und y

$$a\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + b\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0.$$

Eliminirt man dann aus diesen zwey Gleichungen die Gröfse $\frac{a}{b}$, so erhält man als Resultat dieser Elimination

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2 \ldots (A'');$$

und auch diese Gleichung wird noch für eine cylindrische Fläche, in der oben aufgestellten Bedeutung des Wortes, d. h. sie wird für eine Fläche gehören, die durch die Bewegung einer mit sich selbst parallel bleibenden Geraden entsteht. Da aber die beyden constanten Gröfsen a und b, durch welche, zwar nicht der Ort, aber doch die Lage dieser Geraden bestimmt werden soll, in der Gleichung (A″) nicht mehr vorkommen, so kann auch diese Bewegung der erzeugenden Geraden nicht mehr an diesen Parallelismus ihrer Lage gebunden seyn; oder, mit anderen Worten, die Gleichung (A″) wird für eine Fläche gehören, die durch irgend eine Bewegung einer sich immer parallelen geraden Linie im Raume entstanden ist, z.B. durch die Bewegung einer Geraden, die in allen ihren Lagen Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist (§. 215.), oder auch, die durch die auf einander folgenden Durchschnittslinien einer Ebene entsteht, die in allen ihren Lagen auf irgend einer Curve von doppelter Krümmung senkrecht steht u. s. w. Da von diesen geraden Durchschnittslinien, deren sich je zwey selbst wieder schneiden, jedes nächste Paar in *einer* Ebene liegen mufs, so wird man die so entstehenden Flächen als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge, aber von unendlich kleiner Breite bestehend, betrachten können. Da überdiefs je zwey nächste dieser Elemente sich immer in einer geraden, nämlich in der erzeugenden Linie schneiden, so wird sich jedes dieser Elemente, durch Drehung desselben um diese gemeinschaftliche Durchschnittslinie mit dem nächstfolgenden Elemente, in die Ebene dieses zweyten Elements legen, und wenn man diese Ebene wieder um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie des zweyten und dritten Elements dreht, und dieses Verfahren für alle Elemente fortsetzt, so sieht man, daſs sich auf diese Weise die ganze Fläche, deren Gleichung (A″) ist, in eine einzige Ebene, ohne Bruch oder Verdoppelung ausbreiten oder developpiren läſst. Aus diesem Grunde werden auch die Flächen, welche durch die Gleichung (A″) dargestellt werden, abwickelbare oder *developpable* Flächen genannt. — Die cylindrischen Flächen gehören in das Geschlecht der developpablen Flächen, aber sie sind, so allgemein auch die Gleichung (A) derselben ausgedrückt ist, doch nur als ein sehr specieller Fall der letzteren Flächen zu betrachten.

§. 221. (Conische Flächen.) Eine conische Fläche oder ein *Kegel*, in der allgemeinen Bedeutung des Wortes, wird durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, die stets durch einen gegebenen festen Punct, und zugleich durch eine gegebene Curve (die leitende Linie) geht. Der feste Punct heiſst der *Scheitel*, oder angemessener der *Mittelpunct* des Kegels, da die ihn erzeugende Gerade auch über diesen Punct herausgehen kann.

Sind a, b, c die drey den x, y, z parallelen Coordinaten des festen Punctes, so sind die Gleichungen der den Kegel *erzeugenden Geraden* (§. 183.)

$$\left.\begin{aligned} x - a &= \alpha(z - c) \\ y - b &= \beta(z - c) \end{aligned}\right\},$$

in welchen Gleichungen die Gröſsen a, b, c immer constant, die beyden α und β aber, wie in §. 217., für dieselbe Lage der erzeugenden Geraden zugleich constant, und für verschiedene Lagen dieser Geraden auch zugleich variabel sind, woraus, wie zuvor, folgt, daſs β eine Function von α ist, oder da man hat

$$\alpha = \frac{x - a}{z - c} \text{ und } \beta = \frac{y - b}{z - c},$$

daſs die allgemeine Gleichung der Kegel seyn wird

$$\frac{y - b}{z - c} = f \cdot \left(\frac{x - a}{z - c}\right) \ldots \text{(B)}.$$

I. Sind daher die Gleichungen der erzeugenden Geraden, und zugleich die Gleichungen

$$U = 0 \text{ und } V = 0$$

der leitenden Curve gegeben, so wird man, wie oben (§. 218.), aus diesen vier Gleichungen die drey Gröfsen x, y, z eliminiren, und das Resultat dieser Elimination wird sofort die Gleichung des gesuchten Kegels geben.

Ex. I. Sey die leitende Curve ein Kreis des Halbmessers A. Die Ebene dieses Kreises sey parallel mit der Ebene der xy, und von ihr um die Gröfse B entfernt. Die Coordinaten des Mittelpuncts des Kreises endlich seyen wieder M und N.

Diefs vorausgesetzt, hat man für die beyden Gleichungen des Kreises

$$\left.\begin{array}{c}(x-M)^2 + (y-N)^2 = A^2 \\ z = B\end{array}\right\}.$$

Der feste Punct oder der Mittelpunct des Kegels liege irgendwo in der Ebene der xy; so ist $c=0$ und die Gleichungen der erzeugenden Geraden werden seyn:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{x-a}{z} = \alpha \\ \frac{y-b}{z} = f(\alpha)\end{array}\right\}.$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drey Gröfsen x, y und z, so erhält man

$$(B\alpha + a - M)^2 + (B.f(\alpha) + b - N)^2 = A^2,$$

so dafs man demnach für die Gleichung des gesuchten Kegels hat:

$$[(x-a)B + (a-M)z]^2 + [(y-b)B + (b-N)z]^2 = A^2 z^2.$$

Ist für einen besonderen Fall $a=M$ und $b=N$, so ist die Axe des Kegels, das heifst, die den festen Punct mit dem Mittelpuncte des Kreises verbindende Gerade, parallel mit der Axe der z, und dann ist die Gleichung des Kegels

$$(x-M)^2 + (y-N)^2 = \frac{A^2 z^2}{B^2},$$

wo $\frac{A}{B}$ die Tangente des Winkels der Seitenlinie des Kegels mit der Axe desselben bezeichnet. Heifst dieser Winkel θ, und ist der feste Punct zugleich der Anfang der Coordinaten, so hat man, wenn die Axe des Kegels in der coordinirten Axe der z liegt, für die Gleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 = z^2 . \mathrm{Tang}^2\, \theta.$$

Ex. II. Wenn die leitende Curve eine ebene Curve, und in der coordinirten Ebene der xy enthalten, d. h. wenn ihre Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so wird man, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, in dieser Gleichung der leitenden Curve nur

$$\text{statt } x \text{ die Größe } \frac{az - cz}{z - c}$$

$$\text{und statt } y \text{ » » } \frac{bz - cy}{z - c}$$

substituiren, um sofort die Gleichung des gesuchten Kegels zu erhalten. Ist z. B. die leitende Curve oder die Basis des Cylinders eine Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

ist, und sind wieder a, b, c die Coordinaten des festen Puncts, so hat man für die gesuchte Kegelfläche die Gleichung

$$(az - cx)^2 . B^2 + (bz - cy)^2 . A^2 = (z - c)^2 . A^2 B^2.$$

Ist $a = b = 0$, oder liegt der feste Punct in der Axe der z, so hat man

$$B^2 x^2 + A^2 y^0 = \frac{A^2 B^2}{c^2} (z - c)^2.$$

Ist aber die leitende Curve die Astrois (§. 204.), deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}$$

ist, so hat man für die Gleichung des gesuchten Kegels

$$(az - cx)^{\frac{2}{3}} + (bz - cy)^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}} . (z - c)^{\frac{2}{3}}.$$

II. Um noch einen anderen Ausdruck für die conischen Flächen zu finden, differentiire man die Gleichung (B) partiell in Beziehung auf z, x und auf z, y, so erhält man, wie oben (§. 220, I.),

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) [(x - a) . f' - (y - b)] = (z - c) . f',$$

und

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) [(x - a) . f' - (y - b)] = - (z - c).$$

Eliminirt man aus diesen zwey Gleichungen die Function f', so hat man

$$z - c = (x-a)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y-b)\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots (B')$$

für die gesuchte Differentialgleichung der conischen Flächen. Man sieht, daſs diese Gleichung (B') nichts anderes ist, als die Gleichung der die conische Fläche tangirenden Ebene (§. 216, II.), die zugleich durch den festen Punct geht, dessen Coordinaten a, b, c sind.

III. Differentiirt man die Gleichung (B') noch ein Mal partiell, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{y-b}{x-a} \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0 \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \frac{x-a}{y-b} \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

und diese zwey Ausdrücke geben, durch Elimination der Gröſse

$$\frac{x-a}{y-b}$$

die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2,$$

welches wieder die vorhergehende Gleichung (A'') der developpablen Fläche ist, zu welcher die conischen Flächen ebenfalls als eine besondere Classe gehören.

IV. Um endlich die Gleichung desjenigen Kegels zu erhalten, der eine Fläche, die durch die Gleichung $W=0$ gegeben ist, ringsum berührt, wird man aus dieser Gleichung $W=0$ die Werthe von

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

suchen, und sie in der vorhergehenden Gleichung (B') des Kegels substituiren, wodurch man eine neue Gleichung $T=0$ erhält, und mit diesen beyden Gleichungen $W=0$, $T=0$ wird man, wie zuvor, mit den Gleichungen $U=0$, $V=0$ verfahren.

Ex. Sey die gegebene Gleichung

$$W = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

welche für eine Kugel gehört, deren Halbmesser r ist. Die partiellen Differentialien dieser Gleichung sind

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z},$$

so dafs demnach, mittelst der Gleichung (B'), die Gleichung

$$T = o \quad \text{oder} \quad (z - c)z + x^2 + y^2 = o$$

erhalten wird.

Ist nun der feste Punct irgendwo in der Axe der z, so ist $a = b = o$, und man hat daher für die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\frac{x}{z - c} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{y}{z - c} = f\alpha.$$

Die Combination dieser vier Gleichungen gibt, wie zuvor,

$$\alpha^2 + (f\alpha)^2 = \frac{r^2}{c^2 - r^2};$$

also ist auch die Gleichung des gesuchten, die Kugel ringsum tangirenden Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r(z - c)^2}{c^2 - r^2}.$$

Ist der feste Punct ein leuchtender Punct, so ist die Curve, in welcher sich die gegebene Fläche und die Kugel berührt, und deren Gleichungen

$$W = o \quad \text{und} \quad T = o$$

sind, zugleich diejenige Curve, welche, auf der beleuchteten Fläche, den hellen Theil von dem beschattenden trennt. — Ist aber der feste Punct das Auge des Beobachters, so ist jene Berührungscurve der scheinbare Umfang, unter welchem dem Auge jene Kugelfläche erscheint.

Dasselbe Problem läfst sich auch, mittelst der Gleichung (A') des §. 220., auf die cylindrischen Flächen anwenden.

§. 222. (Schiefe Flächen oder *surfaces gauches.*) So werden alle jene Flächen genannt, die durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, deren je zwey nächste Lagen nicht in einer Ebene sind.

Die einfachsten derselben werden durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, die immer durch die Axe der z und durch eine gegebene Curve geht, und dabey zugleich der Ebene der xy stets parallel bleibt.

Diese Fläche hat die sie charakterisirende Eigenschaft, dafs jede durch die Axe der z gehende Ebene diese Fläche in einer der Ebene der xy parallelen Geraden schneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene ist aber

$$y = \alpha \cdot x,$$

und die Gleichung einer der xy parallelen Ebene ist

$$z = \beta;$$

und da auch hier die beyden Gröfsen α und β zugleich constant und zugleich variabel sind, so wird man für die gesuchte allgemeine Gleichung dieser Flächen haben:

$$z = f \cdot \left(\frac{y}{x}\right) \ldots (\mathrm{C}).$$

Ex. I. Ist die leitende Curve ein auf xy senkrechter Kreis des Halbmessers a, und ist der Mittelpunct dieses Kreises in der Axe der x von dem Anfangspuncte um die Gröfse b entfernt, so sind die Gleichungen dieses Kreises

$$x = b,$$
$$y^2 + z^2 = a^2.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den beyden folgenden

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \text{und}$$
$$z = f \cdot (\alpha),$$

so erhält man

$$\alpha^2 b^2 + (f\alpha)^2 = a^2,$$

oder

$$b^2 y^2 = (a^2 - z^2) \cdot x^2$$

für die Gleichung der gesuchten Fläche, welche bekanntlich manche unserer Gewölbe bildet.

Ex. II. Ist die leitende Curve die oben (§. 214.) betrachtete Schraubenlinie AMM' (Fig. 100), deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ z &= ab \cdot \mathrm{Arc\,Sin}\frac{x}{a} \end{aligned}\right\},$$

und verbindet man diese Gleichungen wieder mit den beyden vorhergehenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \alpha \\ z &= f(\alpha) \end{aligned}\right\},$$

so erhält man durch Elimination der Gröfsen xyz aus diesen vier Gleichungen

$$f(\alpha) = ab \text{ Arc Sin } \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

also ist auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von α und $f(\alpha)$ substituirt:

$$z = ab \text{ Arc Tang } \frac{x}{y}$$

die gesuchte Gleichung der so entstehenden Fläche, welche z. B. viele unserer Wendeltreppen bilden.

Die Differentialgleichung der allgemeinen Gleichung (C) ist endlich

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \ldots (C').$$

§. 223. (Rotationsflächen.) So werden diejenigen Flächen genannt, welche durch die Drehung irgend einer Curve um eine feste gerade Linie (die Drehungsaxe) entstehen. — Geht diese Axe durch den Anfang der Coordinaten, so werden ihre Gleichungen die Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} x &= Az \\ y &= Bz \end{aligned}\right\}.$$

Eine auf diese Axe senkrechte Ebene aber wird (nach §. 193, III.) zur Gleichung haben:

$$Ax + By + z = \alpha,$$

wo α irgend eine willkürliche Constante bezeichnet. Eine solche Ebene wird die gesuchte Rotationsfläche immer in einem Kreise schneiden. Dasselbe wird aber auch eine Kugel thun, deren Mittelpunct im Anfange der Coordinaten liegt, und für welche daher die Drehungsaxe einer ihrer verlängerter Halbmesser seyn wird. Ist β der Halbmesser dieser Kugel, so wird ihre Gleichung seyn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2;$$

und man sieht, wie zuvor, daſs diese zwey Gröſsen α und β^2 immer zugleich constant und zugleich veränderlich sind, daſs also auch

$$\beta^2 = f(\alpha),$$

oder daſs

$$x^2 + y^2 + z^2 = f.(Ax + By + z) \ldots (D)$$

seyn wird; ein Ausdruck, der zugleich die allgemeine Gleichung der gesuchten Rotationsflächen ist.

I. Ist die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so ist $A = B = 0$, und man hat für die Gleichung dieser Rotationsflächen

$$x^2 + y^2 = f(z) \;.\;.\;.\; (D'),$$

von welcher die partielle Differentialgleichung ist:

$$x\left(\frac{dz}{dy}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

II. Sind demnach wieder $U = 0$ und $V = 0$ die gegebenen Gleichungen der Curve, welche um die gegebene Axe rotiren soll, so wird man aus der Verbindung dieser zwey Gleichungen mit den beyden folgenden:

$$Ax + By + z = \alpha \quad \text{und}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = f(\alpha),$$

die Gleichung der gesuchten Rotationsfläche, wie zuvor, ableiten.

Ex. I. Ist die gegebene Curve eine Gerade in der Ebene der xz, so sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} y = 0, \\ x = mz + n \end{array}\right\}.$$

Ist ferner die Rotationsfläche zugleich die coordinirte Axe der z, so hat man, da nach §. 182. die Gleichungen dieser Axe $x = 0$ und $y = 0$ sind, in dem Vorhergehenden die Gröſsen A und B gleich Null zu setzen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} z = \alpha \quad \text{und} \\ x^2 + y^2 + z^2 = f(\alpha) \end{array}\right\}.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$(m\alpha + n)^2 + \alpha^2 = f(\alpha);$$

so daſs man daher für die gesuchte Rotationsfläche die Gleichung erhält:

$$mz + n = \sqrt{x^2 + y^2},$$

welches die Gleichung eines Kegels (§. 221.) ist. Nimmt man den Mittelpunct des Kegels im Anfange der Coordinaten, so ist $n = 0$, und die letzte Gleichung geht in folgende über:

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2,$$

wo m die Tangente des Winkels bezeichnet, welcher die Seitenlinie des Kegels mit seiner Axe bildet, übereinstimmend mit §. 221, Ex. I.

Ex. II. Ist die gegebene Curve eine Ellipse in der Ebene der xz, und sind a, b ihre halbe groſse und kleine Axe, so wie c die Entfernung ihres Mittelpuncts, in der Axe der x, von dem Anfang der Coordinaten, so sind die Gleichungen der Ellipse

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ \left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \frac{z^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Ist wieder die Rotationsaxe in der Axe der z, so hat man

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= f(\alpha) \end{aligned}\right\},$$

und aus diesen vier Gleichungen erhält man für die gesuchte Rotationsfläche den Ausdruck

$$b\sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{b^2-z^2} + bc \;\ldots\; \text{(I)}.$$

Ist $c = a$, so hat man

$$b\sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{b^2-z^2} + ab$$

für die Fläche, welche durch die Rotation der Ellipse um die Tangente des Scheitels der groſsen Axe entsteht.

Ist $c = 0$, so hat man

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

für die Fläche, die durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Axe entsteht.

Ist $a = b = c$, so hat man

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{a^2-z^2} = a \quad \text{oder}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2}$$

für die Fläche, welche durch die Rotation eines Kreises des Halbmessers a um eine Tangente desselben entsteht, wo diese Tangente zugleich die Axe der z ist.

Ist endlich $a = b$ und $c = 0$, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

für die bekannte Gleichung der Kugel, deren Halbmesser a, und deren Mittelpunct zugleich der Anfang der Coordinaten ist.

§. 224. (Anderes Verfahren, die Rotationsflächen gegebener Curven zu finden.) Dieses Verfahren folgt unmittelbar aus der einfachen Bemerkung, daſs bey der Rotation einer Curve um eine ihrer zwey coordinirten Axen, z. B. um die Axe der x, die Ordinate y während der Drehung immer *denselben Werth* beybehält, da diese Ordinate der Halbmesser des Kreises ist, welchen der Endpunct der Ordinate y während seiner Drehung um die Axe der x beschreibt. Hat man daher die Gleichung der Curve auf diejenige Form gebracht, in welcher die Axe der x zugleich die Rotationsaxe ist, so wird man, in dieser Gleichung, nur $\sqrt{y^2 + z^2}$ statt y substituiren, um sofort die gesuchte Gleichung der Rotationsfläche zu erhalten.

So hat man für die Ellipse, wenn die Abscissen x vom Mittelpuncte auf der grofsen Axe genommen werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

also ist auch sofort

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Fläche, die durch Rotation der Ellipse um ihre grofse Axe entsteht.

Eben so hat man für dieselbe Ellipse, wenn die Abscissen x vom Mittelpuncte auf der kleinen Axe genommen werden:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

also ist auch

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung der Fläche, die durch Rotation dieser Curve um ihre kleine Axe entsteht, wo die coordinirte Axe der x zugleich die Rotationsaxe ist.

Ist daher in der gegebenen Gleichung der Curve die Axe der x noch nicht die Rotationsaxe, so mufs man sie vorerst darauf bringen. — Um auch davon ein Beyspiel zu geben, sey wieder

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse (Fig. 102), wo $CQ = x'$ auf der grofsen Axe $2a$ der Ellipse von dem Mittelpuncte C derselben genommen ist. Die Rotationsaxe AP soll mit der grofsen Axe CQ den Winkel θ bilden, und $AC = c$ soll das Loth von dem Mittelpuncte der Ellipse auf diese Rotationsaxe seyn. Sind aber

$$AP = x \quad \text{und} \quad PM = y$$

die neuen Coordinaten, so hat man, nach §. 194, II.,

$$x' = x \operatorname{Cos} \theta + (y - c) \operatorname{Sin} \theta,$$

$$\text{und} \quad y' = (y - c) \operatorname{Cos} \theta - x \operatorname{Sin} \theta.$$

Substituirt man diese Werthe von x' und y' in der vorhergehenden Gleichung der Ellipse, und setzt man dann statt y die Grösse $\sqrt{y^2 + z^2}$, so erhält man

$$\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right) \operatorname{Sin}^2 \theta + \left(\frac{u^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) \operatorname{Cos}^2 \theta + ux\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \operatorname{Sin} 2\theta = 1,$$

wo der Kürze wegen

$$u = \sqrt{y^2 + z^2} - c$$

gesetzt worden ist. Diefs ist die gesuchte Gleichung der Rotationsfläche, die durch die Drehung der gegebenen Ellipse um die Axe AP entsteht.

Ist $\theta = 0$, so hat man

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \text{oder}$$

$$a\sqrt{y^2 + z^2} - b\sqrt{a^2 - x^2} = ac \ldots (1)$$

für den Fall, wo die Rotationsaxe der x mit der grofsen Axe $2a$ der Ellipse parallel ist, übereinstimmend mit §. 223, Ex. II.

Ist aber $\theta = 90^\circ$, so hat man

$$\frac{u}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder}$$

$$b\sqrt{y^2 + z^2} - a\sqrt{b^2 - x^2} = bc \ldots (2)$$

für den Fall, wenn die Rotationsaxe der x mit der kleinen Axe $2b$ der Ellipse parallel ist.

I. Für $c = 0$ sind in den beyden letzten Fällen die Axen $2a$ und $2b$ der Ellipse zugleich die Rotationsaxen, und man erhält in dem ersten Falle, wenn a in der Axe der x liegt, oder für das sogenannte *verlängerte Sphäroid* aus der Gleichung (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

und in dem zweyten, wenn b in der Axe der x liegt, oder für das *abgeplattete Sphäroid* aus der Gleichung (2):

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1,$$

wie zuvor.

II. Ist endlich $a=b=c$, so erhält man aus der Gleichung (1) sowohl, als auch aus (2), die Gleichung

$$\sqrt{y^2+z^2}-\sqrt{a^2-x^2}=a\;.\;.\;.\;(3)$$

für die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation eines Kreises des Halbmessers a um eine seiner Tangenten entsteht. Dieselbe Gleichung (3) läſst sich auch so ausdrücken:

$$x^2+y^2+z^2=2a^2+2a\sqrt{a^2-x^2}, \quad \text{oder}$$

$$x^2+y^2+z^2=2a\sqrt{y^2+z^2}.$$

§. 225. (Einhüllende Flächen.) Sey $U=0$ die Gleichung einer Fläche zwischen den drey veränderlichen Coordinaten x, y, z und einer constanten Gröſse ω. — Wenn man dieser constanten Gröſse ω nach und nach alle möglichen Werthe gibt, so erhält man eine Folge von Flächen, deren jede von der anderen nur durch ihren besonderen Werth von ω verschieden seyn wird. Die Reihe aller dieser Flächen aber wird durch eine andere Fläche begrenzt oder umschlossen werden, welche die *einhüllende Fläche* von jenen genannt wird, während die ersten die *eingehüllten* heiſsen.

Gibt man, in der aufgestellten Gleichung $U=0$ der eingehüllten Fläche, der Gröſse ω den nächstfolgenden Werth $\omega+d\omega$, so erhält man die Gleichung der nächstfolgenden eingehüllten Fläche, die in Gestalt und Lage von der vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn, und diese in irgend einer Curve schneiden wird. Diese Curve wird die gemeinschaftliche Berührungslinie dieser beyden nächsten eingehüllten Flächen mit ihrer einhüllenden seyn, und die Puncte dieser Curve werden diejenigen Puncte der ersten Fläche $U=0$ seyn, für welche die Werthe von x, y, z sich nicht ändern, während die Gröſse ω in $\omega+d\omega$ übergeht. Das heiſst also: Differentiirt man die Gleichung $U=0$ bloſs in Beziehung auf ω, so gehört die resultirende Gleichung für jene Curve. Da aber diese Curve zugleich ganz auf der ersten Fläche $U=0$ selbst liegt, so sind die beyden Gleichungen dieser Curve, in welcher sich zwey nächste eingehüllte Flächen schneiden, oder in welcher zwey nächste eingehüllte Flächen von ihrer einhüllenden berührt werden:

$$\left.\begin{array}{r} U=0 \\ \text{und}\quad \left(\frac{dU}{d\omega}\right)=0 \end{array}\right\},$$

wenn man durch $\left(\frac{dU}{d\omega}\right)$ das Differential von U, bloſs in Beziehung auf die constante Gröſse ω bezeichnet.

Gibt man also in diesen beyden Gleichungen der Gröſse ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man auch alle auf einander folgenden Curven dieser Art, welche Curven sich sämmtlich auf der einhüllenden Fläche befinden werden, so daſs diese Fläche aus jenen Curven gleichsam zusammengesetzt seyn wird. Eliminirt man daher aus jenen beyden Gleichungen die Gröſse ω, so erhält man in x, y, z eine Gleichung, die, da sie von ω ganz unabhängig ist, für *alle* jene Curven, d. h. die für die gesuchte *einhüllende Fläche* selbst gehören wird.

Ex. 1. Um dieſs durch ein Beyspiel vollkommen deutlich zu machen, sey in der Ebene der xy irgend eine Curve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

seyn soll, verzeichnet. Auf dieser Curve bewege sich der Mittelpunct einer Kugel, deren Halbmesser r ist. Der Raum, welchen diese Kugel während ihrer Bewegung durchlauft, wird die einhüllende Fläche für alle jene beweglichen Kugeln seyn.

Ist ω der Werth von x für irgend eine bestimmte Lage des Mittelpuncts dieser beweglichen Kugel, so ist die Gleichung derselben

$$(x-\omega)^2 + (y-f\omega)^2 + z^2 = r^2,$$

und das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf ω ist

$$x - \omega + (y-f\omega) \cdot \frac{d.f\omega}{d\omega} = 0.$$

Eliminirt man daher aus diesen beyden Gleichungen die Gröſse ω, so erhält man die gesuchte Gleichung der alle diese Kugeln einhüllenden Fläche.

Ist zum Beyspiel, um dieses auf einen besonderen Fall anzuwenden, die feste, in der Ebene der xy verzeichnete Curve ein Kreis des Halbmessers R, so hat man für die Gleichung dieses Kreises

$$\omega^2 + (f\omega)^2 = R^2,$$

also auch

$$\frac{d.f\omega}{d\omega} = -\frac{\omega}{\sqrt{R^2-\omega^2}}.$$

Es gehen daher die zwey obigen Gleichungen für unseren speciellen Fall in folgende über:

$$(x-\omega)^2 + (y-\sqrt{R^2-\omega^2}) + z^2 = r^2,$$

$$x = \frac{\omega \cdot y}{\sqrt{R^2-\omega^2}}.$$

Eliminirt man darans die Gröſse ω, so erhält man für die gesuchte Gleichung der alle jene Kugeln einhüllenden Fläche

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{r^2-z^2} = R,$$

welches die Gleichung der Oberfläche eines körperlichen Ringes ist.

Setzt man in dieser Gleichung $R = r$, so erhält man

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{r^2-z^2} = r$$

für die Fläche, welche wir zuvor (§. 224, II.) durch die Gleichung (3) ausgedrückt haben.

Ex. II. Bewegt sich aber auf derselben fixen Curve die Spitze eines Kegels mit kreisförmiger Basis, dessen Axe senkrecht auf der Ebene der xy steht, und dessen Seite mit der Axe den Winkel θ bildet, so hat man (§. 221, Ex. I.)

$$(x-\omega)^2 + (y-f\omega)^2 = z^2 \,.\, \mathrm{Tang}^2\,\theta,$$

wovon das Differential in Beziehung auf ω ist:

$$x - \omega + (y - f\omega) \cdot \frac{d \cdot f\omega}{d\omega} = 0.$$

Ist daher wieder für einen besonderen Fall die feste Curve ein Kreis des Halbmessers R, so hat man, wie zuvor,

$$f\omega = \sqrt{R^2-\omega^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{d \cdot f\omega}{d\omega} = -\frac{\omega}{\sqrt{R^2-\omega^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $f\omega$ und $\frac{d \cdot f\omega}{d\omega}$ in der vorletzten Gleichung, so erhält man

$$\omega = \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

und wenn man endlich auch diesen Werth von ω in der ersten der vorhergehenden Gleichungen substituirt, so ist

$$\sqrt{x^2+y^2} = z\,\mathrm{Tang}\,\theta + R$$

die gesuchte Gleichung für die alle beweglichen Kegel einhüllende Fläche.

I. Es ist für sich klar, daſs sich dasselbe Verfahren auch ungeändert auf krumme Linien anwenden läſst, welche eine gegebene, aber bewegliche krumme Linie, in allen Lagen der letzteren, ringsum einschlieſst. Wenn sich z. B. der Mittelpunct eines Kreises des Halbmessers r auf einer Curve, deren Gleichung durch $x = \omega$ und $y = f\omega$ gegeben ist, bewegt, so wird die Gleichung des beweglichen Kreises seyn:

$$(x-\omega)^2 + (y - f\omega)^2 = r^2;$$

und von dieser Gleichung ist das Differential in Beziehung auf ω

$$x - \omega + (y - f\omega) \cdot \frac{d.f\omega}{d\omega} = o.$$

Eliminirt man dann aus diesen beyden Gleichungen die Gröſse ω, so erhält man die gesuchte Gleichung der alle beweglichen Kreise einhüllenden Curve.

Ist z. B. die Curve, auf deren Peripherie sich der Mittelpunct jenes Kreises bewegt, wieder ein Kreis des Halbmessers R, so hat man

$$f\omega = \sqrt{R^2 - \omega^2},$$

also auch für jene beyden Gleichungen

$$(x-\omega)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \omega^2})^2 = r^2,$$

$$x - \omega - (y - \sqrt{R^2 - \omega^2}) \cdot \frac{\omega}{\sqrt{R^2 - \omega^2}} = o;$$

und diese zwey Gleichungen geben, durch Elimination der Gröſse ω,

$$x^2 + y^2 = (R \pm r)^2$$

für die Gleichung der gesuchten einhüllenden Curve, die, demnach ein doppelter, dem erwähnten festen concentrischer Kreis ist, dessen Halbmesser gleich der Summe oder gleich der Differenz der beyden Gröſsen R und r ist, je nachdem man die Durchschnitte der beweglichen Kreise auf der äuſseren oder auf der inneren Seite des festen Kreises betrachtet.

Acht und zwanzigstes Capitel.

Principien der Integralrechnung.

§. 226. (Erklärung.) Wir haben in dem Vorhergehenden die Gleichungen mehrerer krummen Linien und Flächen kennen gelernt, und da diese Gleichungen als der vollständige Ausdruck derjenigen Gegenstände im Raume, die sie repräsentiren, zu betrachten sind, so werden wir auch durch diese Gleichungen selbst in den Stand gesetzt, alle Eigenschaften, durch welche sich jene krummen Linien und Flächen unter einander unterscheiden und auszeichnen, aufzufinden, wie diefs z. B. bey der krummen Linie des zweyten Grades geschehen ist, die wir oben (§. 195. u. f. und §. 210.) umständlicher betrachtet haben.

Allein es gibt noch Fragen anderer Art, welche dieselben Gegenstände betreffen — Fragen, die wir bisher noch kaum berührt haben, und die sich aus jenen Gleichungen nicht, wenigstens nicht so unmittelbar, ableiten lassen, wie diefs allerdings mit den übrigen Eigenschaften dieser Curven und Flächen der Fall ist.

I. Wenn man z. B. die *Länge* einer krummen Linie, etwa der Ellipse, oder wenn man die *Fläche* sucht, welche sie einschliefst, oder wenn man um die *Oberfläche* und um das *Volum* desjenigen Körpers fragt, der durch die Rotation dieser Ellipse um irgend eine Axe entstanden ist, so sieht man nicht sogleich, wie man, blofs mit Hülfe jener gegebenen Gleichung dieser Curve, zu Kenntnissen solcher Art gelangen kann.

Wir haben in dem Vorhergehenden, bey Gelegenheit der Tangenten und Krümmungshalbmesser, das Verhalten der kleinsten Theile oder der Elemente der Curven und Flächen gegen einander untersucht, und dasselbe, wie es die Natur der Sache fordert, aus den Differentialgleichungen dieser Curven abgeleitet. Auch haben wir bereits früher noch (Cap. X.) gesehen, dafs man von jedem gegebenen Ausdruck zwischen endlichen Gröfsen, welcher Art derselbe auch seyn mag, das Differential desselben ohne Mühe und durch ein im Grunde sehr einfaches Verfahren ableiten kann.

II. Hier aber, bey der Beantwortung dieser neuen Fragen, handelt es sich offenbar um ein jenem vorhergehenden ganz entgegengesetztes Verfahren. Hier ist nämlich das Element des Bogens oder der Fläche einer Curve gegeben, und es soll daraus dieser Bogen oder diese Fläche selbst abgeleitet werden; oder mit anderen Worten, hier soll man aus einem gegebenen Differential rückwärts auf denjenigen *endlichen Ausdruck* schliefsen, durch dessen Differentiirung jenes unendlich kleine Element entstanden ist. Man nennt aber diesen endlichen Ausdruck das *Integral* von seinem Differentialausdrucke, so wie auch das Verfahren, durch welches man von einem gegebenen Differentiale zu seinem Integrale gelangt, die *Integralrechnung* genannt wird. — Endlich pflegt man auch, so wie man oben das Differential eines endlichen Ausdruckes durch d angezeigt hat, das Integral eines gegebenen Differentials durch ein dem letzten vorgesetztes $\int$ auszudrücken. So haben wir z. B. in §. 51. für das Differential der Gröfse x^m erhalten:

$$d \,.\, x^m = m x^{m-1} dx;$$

also wird auch umgekehrt das Integral von $m x^{m-1} dx$ durch $\int m x^{m-1} dx$ ausgedrückt werden, oder man wird haben:

$$\int m x^{m-1} dx = x^m;$$

und da die constante Gröfse m auf das Integrale selbst keinen weiteren Einflufs haben kann, so wird man dieselbe auch aufser dem Integralzeichen setzen können, wodurch man erhält:

$$m \int x^{m-1} dx = x^m;$$

oder auch, wenn man statt m die Gröfse $m + 1$ setzt:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

In der That erhält man auch die Gröfse unter dem Integralzeichen wieder, wenn man das Integral selbst, nach den oben gegebenen Vorschriften, differentiirt. So gibt

$$d \,.\, \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

oder, was dasselbe ist, so gibt

$$\frac{1}{m+1} \cdot d \cdot x^{m+1},$$

wenn man die Gröſse $d \cdot x^{m+1}$ nach §. 51. differentiirt, den vorhergehenden Ausdruck $x^m dx$ wieder, wie es seyn soll, da die beyden Symbole d und $\int$ eine einander direct entgegengesetzte Bedeutung haben.

III. Allein ganz eben so wird man auch den Ausdruck haben:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

wo C irgend eine constante Gröſse bezeichnet. Denn nimmt man wieder von den beyden Theilen dieser Gleichung das Differential, so erhält man für den ersten Theil

$$d \cdot \int x^m dx = x^m dx,$$

und für den zweyten, da die beständige Gröſse C, als solche, kein Differential hat:

$$d \cdot \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C\right) = x^m dx,$$

wie zuvor.

Da nämlich durch die Differentiation eines endlichen Ausdrucks, wie wir oben (§. 220.) gesehen haben, eine constante Gröſse verloren gehen kann, so wird man, so oft man von einem gegebenen Differential zu seinem Integrale übergegangen ist, dem letzten eine solche constante Gröſse wieder hinzufügen. Der eigentliche Werth dieser Constante kann übrigens in den meisten Fällen sehr leicht bestimmt werden. Denn hat man z. B. das Integral

$$y = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

gefunden, und weiſs man, oder nimmt man an, daſs dieses Integral $y = A$ für $x = a$ ist, so hat man

$$A = \frac{a^{m+1}}{m+1} + C,$$

also auch

$$C = A - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Soll aber y mit x zugleich verschwinden, so hat man, wenn

$m+1$ positiv ist, auch $C=0$, u. s. f. in allen ähnlichen Fällen. Wir werden in der Folge diese *Constanten der Integration* bey jedem Integrale als schon betrachtet voraussetzen, ohne ihrer immer ausdrücklich zu erwähnen.

§. 227. (Einfachste Integralformeln.) Alle analytischen Ausdrücke, mit welchen wir uns bisher beschäftiget haben, sind entweder aus Potenzen, oder Logarithmen, Exponentialgröſsen, oder endlich aus den sogenannten trigonometrischen Functionen $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Arc\,Sin} x$ u. f. zusammengesetzt; und da wir bereits oben (Cap. X. und §. 102.) die Differentialien dieser einzelnen Classen von Gröſsen gefunden haben, so ist dadurch auch das Differential eines jeden aus ihnen zusammengesetzten Ausdrucks gegeben. Aus diesem Grunde ist die Differentialrechnung als ein vollendeter, für sich abgeschlossener Theil der mathematischen Analysis zu betrachten, und nicht mehr sie selbst, sondern nur die Anwendung ihrer Grundsätze auf verschiedene Probleme kann Veranlassung zu weiteren Entdeckungen seyn.

Nicht so verhält es sich mit der Integralrechnung. Die Formen, unter welchen die Differentialausdrücke von einer oder auch von mehreren veränderlichen Gröſsen auftreten können, sind so mannigfaltig, und die Veränderungen (vergl. §. 220.), die sie erlitten haben, können so verschieden seyn, daſs sie sich nicht leicht auf einzelne Vorschriften, wie bey der Differentialrechnung, noch auf bestimmte, das Ganze umfassende Classen zurückführen lassen, und daſs es oft sehr schwer, ja nicht selten sogar unmöglich ist, denjenigen geschlossenen endlichen Ausdruck, aus welchem das vorgelegte Differential entstanden ist, d. h. das Integral desselben anzugebeu.

Aus dieser Ursache ist die Integralrechnung, obschon auf sie vielleicht mehr Mühe und Scharfsinn, als auf irgend einen andern Zweig der Mathematik verwendet worden ist, noch immer, einige allerdings sehr wichtige Partien derselben ausgenommen, mehr als ein Aggregat von oft nur wenig unter einander zusammenhängenden Theilen, denn als ein wissenschaftlich geordnetes, in sich abgeschlossenes Ganze zu betrachten. Und dieſs ist zugleich der Grund, warum sie noch so wenig in diejenigen Schriften aufgenommen worden ist, die sich mit dem ersten Unterrichte in den mathematischen Wissenschaften beschäftiget haben, da die diesem Gegenstande ausschliefslich gewidmeten Werke (z. B. *Euler's Instit. calculi integralis*, 4 *Vol. IV.*, oder *Lacroix traité du calc. intégral*, 3 *Vol. IV.*) für jenen Zweck zu voluminös und auch ohne Weitläufigkeit keines angemessenen Auszugs fähig sind. So ist es gekommen, dafs die wichtigsten und interessantesten Resultate der neueren Analysis immer nur als der Antheil einiger Wenigen, die sich ausschliefsend der Wissenschaft widmen, betrachtet wurden, und dafs sie von jenen Lehrbüchern, und somit auch von der Kenntnifs des bey weitem gröfsten Theiles der Leser, immer fern geblieben sind, indem man auf alle diese schönen und bewunderungswürdigen Entdeckungen der Neueren verzichtend, sich mit den wenigen und kargen Lehrsätzen begnügte, welche die alten Griechen, mühsam genug, da ihnen unsere Analysis fremd war, über die Kugel und den Cylinder gefunden hatten.

Versuchen wir es daher, einen anderen Weg einzuschlagen, und sehen wir zu, ob wir, auch ohne Hülfe jenes gelehrten Apparats von so vielen Bänden, auf eine einfachere Weise zu der Beantwortung der oben (§. 226.) aufgestellten Fragen gelangen können.

Da, nach dem Vorhergehenden, das Verfahren der Integralrechnung das Umgekehrte von dem der Differentialrechnung ist, so werden wir zuerst, durch eine blofse einfache Inversion der oben (§. 54. und 102.) aufgestellten Formeln der Differentialrechnung, sofort auch eben so viele Fundamentalausdrücke für die Integralrechnung erhalten, so dafs man daher folgende einfache Ausdrücke haben wird.

I. Durch Umkehrung der Formeln des §. 54:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log\text{nat}\, x,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log\text{nat}\, a},$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \text{wo} \quad \log\text{nat}\, e = 1.$$

II. Und eben so durch Umkehrung der Formeln des §. 102:

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \operatorname{Sec}\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi} = -\operatorname{Cosec}\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \operatorname{Tang}\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi} = -\operatorname{Cotang}\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} = \log \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \log \frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},$$
$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \log \operatorname{Tang}\frac{90+\varphi}{2} = \log \frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

III. Aus den Gleichungen des Nr. II. könnte man sofort mehrere andere öfter vorkommende Integralformeln, z. B. die von

$$\int \frac{dx}{1 \pm x^2} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm x^2}}$$

ableiten.

Setzt man nämlich die Gröſse $x = \operatorname{Sin}\varphi$, so hat man $dx = d\varphi \operatorname{Cos}\varphi$, und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varphi;$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc}\operatorname{Sin} x \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Geht dann in diesem Ausdrucke x in $x\sqrt{-1}$ über, so ist

$$\sqrt{-1}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \varphi, \quad \text{oder auch} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\varphi.\sqrt{-1}.$$

Allein nach §. 105, II. ist

$$-\varphi.\sqrt{-1} = \log(\operatorname{Cos}\varphi - \sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi) = \log(\sqrt{1+x^2}+x);$$

also ist auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2}) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ganz eben so erhält man, wenn man $x = \operatorname{Tang}\varphi$ setzt:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int d\varphi = \varphi,$$

also auch

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Arc Tang}\, x \quad . \;\; . \;\; . \quad (3);$$

und wenn man in diesem Ausdrucke $x\sqrt{-1}$ statt x setzt:

$$\sqrt{-1} \int \frac{dx}{1 - x^2} = \varphi \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = -\varphi . \sqrt{-1},$$

also auch, wenn man statt $-\varphi . \sqrt{-1}$ wieder den vorigen Werth substituirt, da

$$\text{Sin}\, \varphi = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{und} \quad \text{Cos}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{ist,}$$

$$-\varphi . \sqrt{-1} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right),$$

und daher

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \log \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} \quad . \;\; . \;\; . \quad (4).$$

§. 228. (Integration des Ausdrucks $d\varphi \,\text{Sin}^m \varphi \,\text{Cos}^m \varphi$). Durch ein dem vorhergehenden (§. 227, III.) ähnliches Verfahren, oder auch durch andere Mittel, könnte man eben so die Integrale

$$\int x^m dx\, (1 \pm ax)^n \quad \text{und} \quad \int x^m dx\, (1 \pm ax^2)^n \text{ u. f.}$$

ableiten, wo m und n ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bezeichnen; und diefs ist es auch, was in den oben angeführten Werken geschehen, und bisher in allen anderen Schriften über diesen Gegenstand beybehalten worden ist.

Allein zu unserer Absicht wird es angemessener seyn, aus den einfachen, in §. 227, Nr. II. gegebenen trigonometrischen Ausdrücken, die sich im Grunde, wie wir oben (§. 102, I.) gesehen haben, auf die einzige Grundformel

$$d . \text{Sin}\, \varphi = d\varphi \,\text{Cos}\, \varphi \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \,\text{Cos}\, \varphi = \text{Sin}\, \varphi$$

zurückführen lassen, das Integral

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^m \varphi \,\text{Cos}^n \varphi$$

zu entwickeln, wo m und n blofs ganze, übrigens entweder positive oder negative Zahlen bezeichnen, indem dieses Integral, wie wir bald sehen werden, zur Auflösung der hier in Rede stehenden Probleme vollkommen hinreicht.

I. So lange nun die Gröfsen m und n blofs positive ganze Zahlen andeuten, könnte man das gesuchte Integral

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^m \varphi \operatorname{Cos}^n \varphi$$

unmittelbar aus den Gleichungen des §. 99. ableiten, welche die Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen durch die Sinus und Cosinus derselben vielfachen Bogen geben. Auf diese Weise würden uns diese Gleichungen für die Integralrechnung von nicht geringerem Nutzen seyn, als es die ihnen entgegengesetzten des unmittelbar vorhergehenden §. 98. für die Bestimmung der regelmäſsigen Polygone (§. 121.) gewesen sind.

Wollte man z. B. das Integral

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^3 \varphi$$

finden, so hätte man, nach §. 99:

$$4 \operatorname{Sin}^3 \varphi = 3 \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} 3\varphi;$$

also ist auch sofort, nach den Fundamentalformeln des §. 227, Nr. II.:

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^3 \varphi = \tfrac{3}{4} \int d\varphi \operatorname{Sin} \varphi - \tfrac{1}{4} \int d\varphi \operatorname{Sin} 3\varphi,$$

das heiſst:

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^3 \varphi = \tfrac{1}{12} \operatorname{Cos} 3\varphi - \tfrac{3}{4} \operatorname{Cos} \varphi.$$

Suchte man eben so das Integral

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^3 \varphi,$$

so hätte man, nach §. 99:

$$\operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^3 \varphi = \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{Cos} 2\varphi) \cdot \tfrac{1}{4}(3 \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} 3\varphi),$$

oder wenn man dieses Product entwickelt:

$$\operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^3 \varphi$$
$$= \tfrac{1}{8}(3 \operatorname{Cos} \varphi - 3 \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} 2\varphi + \operatorname{Cos} 3\varphi - \operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos} 3\varphi).$$

Da man aber nach den ersten Gleichungen des §. 96. hat:

$$\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta = \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos}(\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos}(\alpha + \beta),$$

so hat man auch

$$\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} 2\varphi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} 3\varphi) \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos} 3\varphi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} 5\varphi),$$

so daſs daher ist:

$$d\varphi \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^3 \varphi = \frac{d\varphi}{16}(2 \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} 3\varphi - \operatorname{Cos} 5\varphi),$$

und dieſs wieder nach §. 227, Nr. II. integrirt, gibt sofort

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^3 \varphi = \tfrac{1}{16}(2 \operatorname{Sin} \varphi - \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin} 3\varphi - \tfrac{1}{5} \operatorname{Sin} 5\varphi).$$

Man sieht, wie sich dieses Verfahren auf alle Werthe von

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^m \varphi \operatorname{Cos}^n \varphi$$

ohne Mühe fortsetzen läfst, wenn m und n ganze und positive Zahlen bedeuten.

II. Allein für negative Werthe dieser Zahlen läfst sich jene Methode nicht unmittelbar anwenden. Statt aber für die letzteren wieder ein zweytes, jenes gleichsam ergänzende Verfahren aufzusuchen, wollen wir eine andere, beyden Bedingungen zugleich entsprechende Methode aufstellen.

Nach einem der ersten Grundsätze der Differentialrechnung (§. 49.) ist das Differential des Products von zwey veränderlichen Gröfsen x und y

$$d\,.\,xy = x\,dy + y\,dx,$$

also ist auch, wenn man von allen Gliedern dieser Gleichung das Integral nimmt:

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy.$$

Dieser einfache, aber durch das ganze Gebiet der Integralrechnung höchst fruchtbare Satz zeigt, dafs, wenn y irgend eine Function von x, und wenn das Integral $\int x\,dy$ bereits bekannt ist, daraus auch sofort das Integral $\int y\,dx$, oder umgekehrt, abgeleitet werden kann *). Man sieht, dafs bey diesem Verfahren alles

---

*) Um diefs durch ein einfaches Beyspiel zu zeigen, sey das Integral

$$\int u^2\,.\,(\log\text{nat}\,u)\,.\,du$$

zu suchen. Setzt man den gegebenen Ausdruck $u^2(\log u)\,du = y\,dx$, so kann man, dem beabsichtigten Zwecke gemäfs,

$$y = \log u \quad \text{und} \quad dx = u^2\,du$$

nehmen, wodurch man erhält:

$$dy = \frac{du}{u} \quad \text{und} \quad x = \tfrac{1}{3}u^3.$$

Substituirt man diefs in dem vorhergehenden allgemeinen Ausdrucke, so hat man, da

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{3}\int u^2\,du = \tfrac{1}{9}u^3$$
$$\text{und} \quad \int y\,dx = \int u^2(\log u)\,du$$

ist, für das gesuchte Integral

$$\int u^2(\log u)\,du = \tfrac{1}{3}u^3 \log u - \tfrac{1}{9}u^3.$$

Diese Art zu integriren wird die theilweise Integration *(Intégration par parties)* genannt.

auf eine schickliche Trennung des vorgelegten Integralausdrucks in zwey Factoren y und dx, oder x und dy ankömmt, wo von den beyden Producten $y\,dx$ oder $x\,dy$ die Integration des einen bereits bekannt ist.

Um diesen allgemeinen Ausdruck auf unser gegenwärtiges Problem, d. h. auf die Bestimmung des Integrals $\int d\varphi \operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi$ anzuwenden, wollen wir

$$y = (\operatorname{Cos}\varphi)^{m+n+2} \quad \text{und} \quad dx = \frac{(\operatorname{Tang}\varphi)^m}{(\operatorname{Cos}\varphi)^2}\,d\varphi$$

setzen, wodurch daher auch wird:

$$dy = -(m+n+2)\,(\operatorname{Cos}\varphi)^{m+n+1}\operatorname{Sin}\varphi\,d\varphi$$

und

$$x = \frac{1}{m+1}(\operatorname{Tang}\varphi)^{m+1}.$$

Substituirt man diese Werthe von x, y, dx und dy in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung, so erhält man

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi$$
$$= \frac{1}{m+1}\operatorname{Sin}^{m+1}\varphi \operatorname{Cos}^{n+1}\varphi + \frac{m+n+2}{m+1}\int d\varphi \operatorname{Sin}^{m+2}\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi \ldots (A),$$

oder auch umgekehrt, wenn man das letzte Glied dieses Ausdrucks zuerst setzt:

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^{m+2}\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi$$
$$= -\frac{1}{m+n+2}\operatorname{Sin}^{m+1}\varphi \operatorname{Cos}^{n+1}\varphi + \frac{m+1}{m+n+2}\int d\varphi \operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi \ldots (A');$$

und diese Gleichung (A) oder (A') ist es, die uns das gesuchte Integral

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cos}^n\varphi$$

für alle ganzen, sowohl positiven als negativen Werthe der Grössen m und n geben wird.

Setzt man z. B. in der Gleichung (A') die Grösse $n = 0$, so erhält man

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^{m+2}\varphi = -\frac{1}{m+2}\operatorname{Sin}^{m+1}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \frac{m+1}{m+2}\int d\varphi \operatorname{Sin}^m\varphi.$$

Da man aber das Integral des letzten Theils für $m = 0$ und $m = 1$, nämlich

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^0\varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\operatorname{Cos}\varphi,$$

schon aus dem Vorhergehenden (§. 227, II.) kennt, so erhält man, wenn man m nach der Ordnung gleich 0, 1, 2, 3, . . . setzt:

$$\int d\phi \, \mathrm{Sin}^2 \phi = -\tfrac{1}{2} \mathrm{Sin}\,\phi \, \mathrm{Cos}\,\phi + \tfrac{1}{2}\phi,$$
$$\int d\phi \, \mathrm{Sin}^3 \phi = -\tfrac{1}{3} \mathrm{Sin}^2 \phi \, \mathrm{Cos}\,\phi - \tfrac{2}{3} \mathrm{Cos}\,\phi,$$
$$\int d\phi \, \mathrm{Sin}^4 \phi = -\tfrac{1}{4} \mathrm{Sin}^3 \phi \, \mathrm{Cos}\,\phi + \tfrac{3}{4} \int d\phi \, \mathrm{Sin}^2 \phi,$$
$$\int d\phi \, \mathrm{Sin}^5 \phi = -\tfrac{1}{5} \mathrm{Sin}^4 \phi \, \mathrm{Cos}\,\phi + \tfrac{4}{5} \int d\phi \, \mathrm{Sin}^3 \phi \text{ u. f.},$$

in welchen Ausdrücken man noch, wenn man will, die Potenzen von $\mathrm{Sin}\,\phi$ nach den erwähnten Ausdrücken des §. 99. in die Sinus und Cosinus dieser vielfachen Winkel verwandeln kann.

Setzt man dann in diesen Ausdrücken $90 - \phi$ statt ϕ, so erhält man auch die analogen Integrale von

$$d\phi \, \mathrm{Cos}^2 \phi, \quad d\phi \, \mathrm{Cos}^3 \phi, \quad d\phi \, \mathrm{Cos}^4 \phi \text{ u. f.}$$

Wenn man also in der allgemeinen Gleichung (A') die Gröſse $n = 0$ setzt, so erhält man das Integral von

$$d\phi \, \mathrm{Sin}^{m+2} \phi, \text{ wo } m = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ ist.}$$

Setzt man eben so in der Gleichung (A') statt n die Gröſse $1, 2, 3, \ldots$, so erhält man die Integrale von

$$d\phi \, \mathrm{Sin}^{m+2} \phi \, \mathrm{Cos}\,\phi,$$
$$d\phi \, \mathrm{Sin}^{m+2} \phi \, \mathrm{Cos}^2 \phi,$$
$$d\phi \, \mathrm{Sin}^{m+3} \phi \, \mathrm{Cos}^3 \phi \text{ u. f.},$$

wo wieder m nach der Ordnung die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet.

Setzt man aber in der Gleichung (A) die Gröſse m gleich $-m$, so hat man

$$\int \frac{d\varphi \, \mathrm{Cos}^n \varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\mathrm{Cos}^{n+1} \varphi}{\mathrm{Sin}^{m-1} \varphi} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{d\varphi \, \mathrm{Cos}^n \varphi}{\mathrm{Sin}^{m-2} \varphi}$$

und in diesem Ausdrucke gibt

$n = 0$ das Integral von $\dfrac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi}$ für $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$n = 1$ » » » $\dfrac{d\varphi \, \mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi}$,

$n = 2$ » » » $\dfrac{d\varphi \, \mathrm{Cos}^2 \varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi}$ u. f.;

und eben so erhält man auch für $n = -1, -2, -3, \ldots$ das Integral von

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi \, \mathrm{Cos}\,\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi \, \mathrm{Cos}^2 \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m \varphi \, \mathrm{Cos}^3 \varphi} \text{ u. f. für } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

und so fort für alle besonderen Werthe, die man den beyden Gröfsen m und n geben kann. Man findet am Schlusse dieses Capitels die vorzüglichsten zur bequemeren Übersicht zusammengestellt, so dafs man demnach die ganze Integralrechnung, so fern sie sich auf die Auflösung der oben (§. 226, I.) aufgestellten Probleme bezieht, aus der einzigen Gleichung (A), wie aus einer ihnen allen gemeinschaftlichen Quelle, eben so ableiten kann, wie wir oben die Trigonometrie, und durch sie die ganze Geometrie, deren eigentliche Basis die Trigonometrie ist, aus der einzigen Gleichung (A) des §. 91. abgeleitet haben.

§. 229. (Integration des Ausdrucks $\varphi^m d\varphi \operatorname{Sin}\varphi$.) Wenn man in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy$$

die Gröfse

$$y = \varphi^m \quad \text{und} \quad dx = d\varphi \operatorname{Sin}\varphi,$$

also auch

$$dy = m\varphi^{m-1} d\varphi \quad \text{und} \quad x = -\operatorname{Cos}\varphi$$

setzt, so erhält man sofort

$$\int \varphi^m d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi^m \operatorname{Cos}\varphi + m\int \varphi^{m-1} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi.$$

Ist dann wieder

$$y = \varphi^{m-1} \quad \text{und} \quad dx = d\varphi \operatorname{Cos}\varphi,$$

so findet man auf dieselbe Weise

$$\int \varphi^{m-1} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \varphi^{m-1} \operatorname{Sin}\varphi - (m-1)\int \varphi^{m-2} d\varphi \operatorname{Sin}\varphi,$$

und ganz eben so gibt

$$y = \varphi^{m-2} \quad \text{und} \quad dx = d\varphi \operatorname{Sin}\varphi$$

den Ausdruck

$$\int \varphi^{m-2} d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi^{m-2} \operatorname{Cos}\varphi - (m-2)\int \varphi^{m-3} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, und substituirt dann die einzelnen Integrale in einander, so erhält man

$$\begin{aligned}\int \varphi^m d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = & -\varphi^m \operatorname{Cos}\varphi \\ & + m\varphi^{m-1} \operatorname{Sin}\varphi \\ & + m(m-1)\varphi^{m-2} \operatorname{Cos}\varphi \\ & - m(m-1)(m-2)\varphi^{m-3} \operatorname{Sin}\varphi - + + \ldots,\end{aligned}$$

wovon das Gesetz des Fortgangs deutlich ist.

Ganz auf dieselbe Art erhält man auch den dem vorhergehenden analogen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\int \varphi^m d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = {} & \varphi^m \operatorname{Sin}\varphi \\ & + m\varphi^{m-1} \operatorname{Cos}\varphi \\ & - m(m-1)\varphi^{m-2} \operatorname{Sin}\varphi \\ & - m(m-1)(m-2)\varphi^{m-3} \operatorname{Cos}\varphi + + \ldots,\end{aligned}$$

und diese beyden Ausdrücke gelten für alle Werthe von m. Wenn aber m eine ganze positive Zahl ist, ein Fall, der am häufigsten vorkommt, so brechen beyde Reihen ab, und dann wird das Integral von

$$\varphi^m d\varphi \operatorname{Sin}\varphi \quad \text{und} \quad \varphi^m d\varphi \operatorname{Cos}\varphi$$

durch einen endlichen oder geschlossenen Ausdruck gegeben.

§. 230. (Zusammenstellung der vorhergehenden Ausdrücke.) Ehe wir die einzelnen Formeln, welche nach dem Vorhergehenden aus der allgemeinen Gleichung (A) entspringen, zum bequemen Gebrauche sammeln, wollen wir ihnen noch einige Bemerkungen vorausschicken.

Erstens gelten alle diese Ausdrücke auch dann, wenn man in ihnen die Gröſse φ in $90-\varphi$ verwandelt, das heiſst (nach §. 94, B), wenn man

statt		setzt
φ	. . . .	$90-\varphi$,
$d\varphi$	. . . .	$-d\varphi$,
$\operatorname{Sin}\varphi$	. . . .	$+\operatorname{Cos}\varphi$,
$\operatorname{Cos}\varphi$	. . . .	$+\operatorname{Sin}\varphi$,
$\operatorname{Sin}2\varphi$	. . .	$+\operatorname{Sin}2\varphi$,
$\operatorname{Cos}2\varphi$	. . .	$-\operatorname{Cos}2\varphi$,
$\operatorname{Sin}3\varphi$	. . .	$-\operatorname{Cos}3\varphi$,
$\operatorname{Cos}3\varphi$	. . .	$-\operatorname{Sin}3\varphi$,
$\operatorname{Sin}4\varphi$	. . .	$-\operatorname{Sin}4\varphi$,
$\operatorname{Cos}4\varphi$	. . .	$+\operatorname{Cos}4\varphi$,
$\operatorname{Sin}5\varphi$	. . .	$+\operatorname{Cos}5\varphi$,
$\operatorname{Cos}5\varphi$	. . .	$+\operatorname{Sin}5\varphi$ u. f.

Demnach erhält man z. B. durch den Ausdruck $\int d\varphi \operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi$ der folgenden Tafel auch sogleich den von $\int d\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi \operatorname{Sin}^2\varphi$, daher auch der letzte, als überflüssig, nicht durchaus in der Tafel erscheint. Die Tafel gibt nämlich

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^3 \varphi \,\text{Cos}^2 \varphi = \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5}\text{Cos}\, 5\varphi - \tfrac{1}{3}\text{Cos}\, 3\varphi - 2\,\text{Cos}\,\varphi),$$

also ist auch sofort

$$\int d\varphi \,\text{Cos}^3 \varphi \,\text{Sin}^2 \varphi = -\tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5}\text{Sin}\, 5\varphi + \tfrac{1}{3}\text{Sin}\, 3\varphi - 2\,\text{Sin}\,\varphi).$$

Zweitens kommen, aus demselben Grunde, auch Ausdrücke der Art

$$\int d\varphi \,\text{Tang}^3 \varphi \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \,\text{Sec}\,\varphi \,\text{Tang}^2 \varphi \quad \text{u. f.}$$

nicht unmittelbar in der Tafel vor, da sie schon in den ihnen gleichgeltenden

$$\int \frac{d\varphi \,\text{Sin}^3 \varphi}{\text{Cos}^3 \varphi} \quad \text{oder} \quad \int \frac{d\varphi \,\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Cos}^3 \varphi} \quad \text{u. f.}$$

enthalten sind.

Drittens endlich läſst sich das allen Formeln dieser Tafel zu Grunde liegende Integral

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^m \varphi \,\text{Cos}^n \varphi$$

auch auf die zusammengesetzte Formel anwenden:

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^m (a\varphi + b)\,\text{Cos}^n (a\varphi + b),$$

wo a und b constante Gröſsen bezeichnen, wenn man nur in den Ausdrücken der Tafel $a\varphi + b$ statt φ setzt, und dann das Ganze durch die Gröſse a dividirt.

Nämlich

$$\int d\varphi \,\text{Cos}\,\varphi = \text{Sin}\,\varphi \quad \text{gibt}$$

$$\int d\varphi \,\text{Cos}\,(a\varphi + b) = \frac{1}{a}\,\text{Sin}\,(a\varphi + b);$$

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^2 \varphi \,\text{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{3}\text{Sin}^3 \varphi \quad \text{gibt sofort}$$

$$\int d\varphi \,\text{Sin}^2 (a\varphi + b)\,\text{Cos}\,(a\varphi + b) = \frac{1}{3a}\,\text{Sin}^3 (a\varphi + b);$$

$$\int \frac{d\varphi \,\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Cos}\,\varphi} = -\,\text{Sin}\,\varphi + \log \text{Tang}\,\frac{90 + \varphi}{2} \quad \text{gibt eben so}$$

$$\int \frac{d\varphi \,\text{Sin}^2 (a\varphi + b)}{\text{Cos}\,(a\varphi + b)} = -\frac{1}{a}\,\text{Sin}\,(a\varphi + b) + \frac{1}{a}\log \text{Tang}\,\frac{90 + a\varphi + b}{2}.$$

Integraltafel.

I. $\int d\varphi \,\text{Sin}^m \varphi$, wo $m = 1, 2, 3, \ldots$

$\int d\varphi \,\text{Sin}\,\varphi = -\,\text{Cos}\,\varphi,$

$\int d\varphi \,\text{Sin}^2 \varphi = -\tfrac{1}{4}\text{Sin}\, 2\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^3\varphi = \tfrac{1}{12}\operatorname{Cos}3\varphi - \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^4\varphi = \tfrac{1}{32}\operatorname{Sin}4\varphi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}2\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^5\varphi = -\tfrac{1}{80}\operatorname{Cos}5\varphi + \tfrac{5}{48}\operatorname{Cos}3\varphi - \tfrac{5}{8}\operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^6\varphi = -\tfrac{1}{192}\operatorname{Sin}6\varphi + \tfrac{3}{64}\operatorname{Sin}4\varphi - \tfrac{15}{64}\operatorname{Sin}2\varphi + \tfrac{5}{16}\varphi.$$

II. $\int d\varphi \operatorname{Cos}^m\varphi$.

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi = \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}2\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi = \tfrac{1}{12}\operatorname{Sin}3\varphi + \tfrac{3}{4}\operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi = \tfrac{1}{32}\operatorname{Sin}4\varphi + \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}2\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}^5\varphi = \tfrac{1}{80}\operatorname{Sin}5\varphi + \tfrac{5}{48}\operatorname{Sin}3\varphi + \tfrac{5}{8}\operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\int d\varphi \operatorname{Cos}^6\varphi = \tfrac{1}{192}\operatorname{Sin}6\varphi + \tfrac{3}{64}\operatorname{Sin}4\varphi + \tfrac{15}{64}\operatorname{Sin}2\varphi + \tfrac{5}{16}\varphi.$$

III. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^m\varphi}$.

$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} = \log\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi} = -\operatorname{Cotang}\varphi,$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi} = -\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{2\operatorname{Sin}^2\varphi} + \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^4\varphi} = \operatorname{Cotang}\varphi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cotang}^3\varphi,$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^5\varphi} = -\left(\frac{1}{4\operatorname{Sin}^4\varphi} + \frac{3}{8\operatorname{Sin}^2\varphi}\right)\operatorname{Cos}\varphi + \frac{3}{8}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^6\varphi} = -\left(\frac{1}{5\operatorname{Sin}^5\varphi} + \frac{4}{15\operatorname{Sin}^3\varphi} + \frac{8}{15\operatorname{Sin}\varphi}\right)\operatorname{Cos}\varphi.$$

IV. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^m\varphi}$.

$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \log\operatorname{Tang}\frac{90^\circ+\varphi}{2},$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \operatorname{Tang}\varphi,$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^3\varphi} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{2\operatorname{Cos}^2\varphi} + \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^4\varphi} = \operatorname{Tang}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{Tang}^3\varphi,$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^5\varphi} = \left(\frac{1}{4\operatorname{Cos}^4\varphi} + \frac{3}{8\operatorname{Cos}^2\varphi}\right)\operatorname{Sin}\varphi + \frac{3}{8}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$
$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^6\varphi} = \left(\frac{1}{5\operatorname{Cos}^5\varphi} + \frac{4}{15\operatorname{Cos}^3\varphi} + \frac{8}{15\operatorname{Cos}\varphi}\right)\operatorname{Sin}\varphi.$$

V. $\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi$.

$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^2\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\tfrac{1}{12}\mathrm{Sin}\,3\varphi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^3\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{32}\mathrm{Cos}\,4\varphi - \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,2\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^4\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{80}\mathrm{Sin}\,5\varphi - \tfrac{1}{16}\mathrm{Sin}\,3\varphi + \tfrac{1}{8}\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

VI. $\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi$.

$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi = -\tfrac{1}{12}\mathrm{Cos}\,3\varphi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^2\varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi = -\tfrac{1}{32}\mathrm{Sin}\,4\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^3\varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi = \tfrac{1}{80}\mathrm{Cos}\,5\varphi - \tfrac{1}{48}\mathrm{Cos}\,3\varphi - \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^4\varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi = \tfrac{1}{192}\mathrm{Sin}\,6\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Sin}\,4\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi.$$

VII. $\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi \,\mathrm{Cos}^3\varphi$.

$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}^3\varphi = \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,4\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^2\varphi \,\mathrm{Cos}^3\varphi = = \tfrac{1}{80}\mathrm{Sin}\,5\varphi - \tfrac{1}{48}\mathrm{Sin}\,3\varphi + \tfrac{1}{8}\mathrm{Sin}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^3\varphi \,\mathrm{Cos}^3\varphi = \tfrac{1}{192}\mathrm{Cos}\,6\varphi - \tfrac{3}{64}\mathrm{Cos}\,2\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^4\varphi \,\mathrm{Cos}^3\varphi = \tfrac{1}{448}\mathrm{Sin}\,7\varphi - \tfrac{1}{320}\mathrm{Sin}\,5\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Sin}\,3\varphi + \tfrac{3}{64}\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

VIII. $\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi \,\mathrm{Cos}^4\varphi$.

$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}^4\varphi = -\tfrac{1}{80}\mathrm{Cos}\,5\varphi - \tfrac{1}{16}\mathrm{Cos}\,3\varphi - \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^2\varphi \,\mathrm{Cos}^4\varphi = -\tfrac{1}{192}\mathrm{Sin}\,6\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Sin}\,4\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Sin}\,2\varphi - \tfrac{1}{16}\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^3\varphi \,\mathrm{Cos}^4\varphi = \tfrac{1}{448}\mathrm{Cos}\,7\varphi + \tfrac{1}{320}\mathrm{Cos}\,5\varphi - \tfrac{1}{64}\mathrm{Cos}\,3\varphi - \tfrac{3}{64}\mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \,\mathrm{Sin}^4\varphi \,\mathrm{Cos}^4\varphi = \tfrac{1}{1024}\mathrm{Sin}\,8\varphi - \tfrac{1}{128}\mathrm{Sin}\,4\varphi + \tfrac{9}{128}\varphi.$$

IX. $\int \frac{d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$.

$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = -\log \mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = -\mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$
$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}^2\varphi + \int \frac{d\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$
$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}^4\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = -\tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}^3\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

X. $\int \frac{d\varphi \,\mathrm{Sin}^m \varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}$.

$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$
$$\int d\varphi \frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi} = \mathrm{Tang}\,\varphi - \varphi,$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}=\mathrm{Cos}\,\varphi+\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^4\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}+\tfrac{3}{2}\,\mathrm{Tang}\,\varphi-\tfrac{3}{2}\varphi.$$

$$\text{XI.}\quad\int\frac{d\varphi\,\mathrm{Sin}^m\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}.$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}^2\varphi},$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}=\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{2\,\mathrm{Cos}^2\varphi}-\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}^2\varphi}+\log\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^4\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}=-\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}-\frac{5}{2}\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

$$\text{XII.}\quad\int\frac{d\varphi\,\mathrm{Sin}^m\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi}.$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi}=\frac{1}{3\,\mathrm{Cos}^3\varphi},$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi}=\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tang}^3\varphi,$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi}=\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi}-\frac{2}{3\,\mathrm{Cos}^3\varphi},$$

$$\int d\varphi\,\frac{\mathrm{Sin}^4\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi}=\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tang}^3\varphi-\mathrm{Tang}\,\varphi+\varphi.$$

$$\text{XIII.}\quad\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=\log\mathrm{Tang}\,\varphi,$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=-\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=-\frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2\varphi}+\log\mathrm{Tang}\,\varphi,$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^4\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=-\frac{1}{3\,\mathrm{Sin}^3\varphi}-\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

$$\text{XIV.}\quad\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^m\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi}.$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi}=\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}^2\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi}=-2\,\mathrm{Cotang}\,2\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi} = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi} + 3\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^4\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi} = -\frac{1}{3\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}^3\varphi} - \tfrac{8}{3}\operatorname{Cotang} 2\varphi.$$

XV. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cso}^3\varphi}$.

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} = \frac{1}{2\operatorname{Cos}^2\varphi} + \log \operatorname{Tang}\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} = \frac{1}{2\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi} - \frac{3}{2\operatorname{Sin}\varphi} + \frac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} = -\frac{2\operatorname{Cos} 2\varphi}{\operatorname{Sin}^2 2\varphi} + 2\log \operatorname{Tang}\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^4\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} = \frac{1}{2\operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Sin}^3\varphi} + \frac{5}{2}\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^4\varphi \operatorname{Cos}\varphi}.$$

XVI. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^m\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi}$.

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi} = \frac{1}{3\operatorname{Cos}^3\varphi} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi} + \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi} = \frac{1}{3\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} - \tfrac{8}{3}\operatorname{Cotang} 2\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi} = \frac{1}{3\operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}^3\varphi} + \frac{5}{3\operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi} + 5\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}^3\varphi},$$

$$\int \frac{g\varphi}{\operatorname{Sin}^4\varphi \operatorname{Cos}^4\varphi} = -\frac{8\operatorname{Cos} 2\varphi}{3\operatorname{Sin}^3 2\varphi} - \frac{16\operatorname{Cos} 2\varphi}{3\operatorname{Sin} 2\varphi}.$$

XVII. $\int \varphi^m d\varphi \operatorname{Sin}\varphi$.

$$\int \varphi\, d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi,$$

$$\int \varphi^2 d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi + 2\varphi \operatorname{Sin}\varphi + 2\operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\int \varphi^3 d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi^3 \operatorname{Cos}\varphi + 3\varphi^2 \operatorname{Sin}\varphi + 6\varphi \operatorname{Cos}\varphi - 6\operatorname{Sin}\varphi,$$

$$\int \varphi^4 d\varphi \operatorname{Sin}\varphi = -\varphi^4 \operatorname{Cos}\varphi + 4\varphi^3 \operatorname{Sin}\varphi + 12\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi - 24\varphi \operatorname{Sin}\varphi - 24\operatorname{Cos}\varphi.$$

XVIII. $\int \varphi^m d\varphi \operatorname{Cos}\varphi$.

$$\int \varphi\, d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \varphi \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\int \varphi^2 d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \varphi^2 \operatorname{Sin}\varphi + 2\varphi \operatorname{Cos}\varphi - 2\operatorname{Sin}\varphi,$$

$$\int \varphi^3 d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \varphi^3 \operatorname{Sin}\varphi + 3\varphi^3 \operatorname{Cos}\varphi - 6\varphi \operatorname{Sin}\varphi - 6\operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\int \varphi^4 d\varphi \operatorname{Cos}\varphi = \varphi^4 \operatorname{Sin}\varphi + 4\varphi^3 \operatorname{Cos}\varphi - 12\varphi^2 \operatorname{Sin}\varphi - 24\varphi \operatorname{Cos}\varphi + 24\operatorname{Sin}\varphi.$$

Neun und zwanzigstes Capitel.

Rectification der Curven.

---

§. 231. (Element des Bogens einer Curve.) Wir wollen nun zu der Anwendung der Ausdrücke der vorhergehenden Tafel auf die oben (§. 226, I.) erwähnten interessanten Probleme übergehen, und unter diesen zuerst diejenigen betrachten, welche sich auf die *Bestimmung der Länge des Bogens* einer Curve zwischen zwey gegebenen Puncten derselben, oder auf die sogenannte *Rectification der Curven* beziehen.

Wir haben bereits oben (§. 210, IV.) den allgemeinen Ausdruck für das Element des Bogens einer Curve kennen gelernt. Sind nämlich M und M' (Fig. 97) zwey nächste Puncte einer Curve NQ, und betrachtet man diese Curve als ein Polygon von unendlich kleinen geradlinien Seiten, so hat man in dem rechtwinkligen Dreyecke MaM', in welchem $Ma = dx$ und $M'a = dy$ die Differentialien der beyden Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ bezeichnen, wenn man den Bogen NQ der Curve überhaupt durch s bezeichnet, für das Element $MM' = ds$ dieses Bogens den Ausdruck

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Substituirt man dann in diesen allgemeinen Ausdruck für ds den Werth von dy durch x und dx so ausgedrückt, wie er aus der Gleichung irgend einer gegebenen Curve folgt, so erhält man den particulären Werth des Elements ds, wie er für diese gegebene Curve gehört, in einer Gleichung der Form ausgedrückt:

$$ds = f(x) \,.\, dx;$$

und wenn man dann von diesem Differentialausdrucke $f(x) \,.\, dx$, aus den Vorschriften der letzten Tafel, den *endlichen Ausdruck* in x, das heifst, wenn man das *Integral* dieser Gröfse $f(x) \,.\, dx$ angeben kann, so hat man dadurch auch s durch x bestimmt, oder man hat dadurch die Länge des Bogens dieser Curve durch die zu seinem Endpuncte gehörende Abscisse x, und zwar ganz allgemein ausgedrückt, da man in der so erhaltenen Gleichung zwischen s und x für die Gröfse x jeden willkürlichen Werth annehmen kann, um daraus sofort auch den ihm entsprechenden Werth des Bogens s zu finden.

I. Um diefs zuerst auf ein sehr einfaches Beyspiel anzuwenden, sey die Gleichung

$$x = ay - \alpha$$

der geraden Linie CDM (Fig. 77) gegeben. Das Differential derselben ist $dx = a\,dy$, also ist auch das Element MM' der gegebenen Geraden selbst

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2}}.$$

Von diesem Ausdrucke hat aber die Integration keine weitere Schwierigkeit, so dafs man für das gesuchte Integral sofort erhält

$$s = x\sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2}} + C,$$

wo C die oben (§. 226, III.) erwähnte Constante der Integration bezeichnet.

Ist h der Winkel, welchen die Gerade CM mit der Axe der y bildet, ist also $ACD = 90 - h$, so hat man $a = \text{Tang}\,h$, und das vorhergehende Integral geht in den folgenden einfacheren Ausdruck über:

$$s = \frac{x}{\text{Sin}\,h} + C.$$

Um diese Constante C zu bestimmen, kann man z. B. die Länge unserer Geraden von demjenigen Puncte C an zählen, wo sie die Axe der x schneidet. Da für diesen Punct $y = 0$, also auch $x = -\alpha$ ist, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$0 = -\frac{\alpha}{\text{Sin}\,h} + C \quad \text{oder} \quad C = \frac{\alpha}{\text{Sin}\,h},$$

und daher unser vollständig bestimmtes Integral

$$s = \frac{x + \alpha}{\text{Sin}\,h},$$

oder auch, wenn man statt x seinen Werth $ay - \alpha = y\,\text{Tang}\,h - \alpha$ substituirt:

$$s = \frac{y}{\text{Cos}\,h},$$

und durch die beyden letzten Gleichungen ist die Länge $CM = s$ unserer Geraden für jeden gegebenen Werth von $AP = x$ oder von $PM = y$ gegeben.

Zählt man aber die Länge dieser Geraden von dem Puncte D, wo sie die Axe der y schneidet, so hat man für diesen Punct $x = 0$, also auch $y = \frac{\alpha}{a}$, so dafs daher auch $C = 0$ wird, wodurch das vorhergehende Integral in den einfachen Ausdruck übergeht:

$$s = \frac{x}{\operatorname{Sin} h} \quad \text{oder} \quad s = \frac{y}{\operatorname{Cos} h} - \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} h},$$

aus welchem man wieder die Länge $DM = s$ für jeden gegebenen Werth von $AP = x$ oder $PM = y$ finden wird.

Alle diese Ausdrücke stimmen auch mit denjenigen überein:

$$CM = \frac{CP}{\operatorname{Sin} h} \quad \text{und} \quad DM = \frac{AP}{\operatorname{Sin} h},$$

die man unmittelbar aus der Auflösung des recktwinkligen Dreyeckes BPM erhält.

II. Um dasselbe Verfahren auch auf eine im Raume verzeichnete Gerade anzuwenden, deren Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\},$$

so hat man für das Element dieser Geraden (nach §. 215.) den Ausdruck

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Differentiirt man aber die beyden vorhergehenden Gleichungen, so hat man

$$dx = a\,dz \quad \text{und} \quad dy = b\,dz,$$

und daher auch

$$ds = dz\sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

wovon wieder das Integral ist

$$s = z\sqrt{1 + a^2 + b^2} + \text{Const.}$$

Nennt man f, g, h die Winkel, welche diese Gerade mit den coordinirten Axen der x, y, z macht, so hat man (nach §. 186, II.)

$$a = \frac{\operatorname{Cos} f}{\operatorname{Cos} h} \quad \text{und} \quad b = \frac{\operatorname{Cos} g}{\operatorname{Cos} h},$$

also auch, da $\mathrm{Cos}^2 f + \mathrm{Cos}^2 g + \mathrm{Cos}^2 h = 1$ ist:

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 h},$$

so daſs daher das vorhergehende Integral in folgendes übergeht:

$$s = \frac{z}{\mathrm{Cos}\, h} + \mathrm{Const.}$$

Will man nun die Gröſsen s und z zugleich verschwinden lassen, d. h. zählt man die Länge der Geraden von dem Puncte, wo sie die Ebene der xy schneidet, so ist auch $\mathrm{Const} = 0$, und daher

$$s = \frac{z}{\mathrm{Cos}\, h} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Zählt man aber diese Gerade von der Ebene der xz, so ist für den Anfangspunct $y = 0$ und $z = -\frac{\beta}{b}$, also auch $\mathrm{Const} = \frac{\beta}{b\,\mathrm{Cos}\, h} = \frac{\beta}{\mathrm{Cos}\, g}$, und daher jenes Integral

$$s = \frac{z}{\mathrm{Cos}\, h} + \frac{\beta}{\mathrm{Cos}\, g} \quad \text{oder} \quad s = \frac{y}{\mathrm{Cos}\, g} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nimmt man endlich den Anfang der Zählung in der Ebene yz, so ist $x = 0$ und $z = -\frac{\alpha}{a}$, also auch $\mathrm{Const} = \frac{\alpha}{a\,\mathrm{Cos}\, h} = \frac{\alpha}{\mathrm{Cos} f}$, und daher das gesuchte Integral

$$s = \frac{z}{\mathrm{Cos}\, h} + \frac{\alpha}{\mathrm{Cos} f} \quad \text{oder} \quad s = \frac{x}{\mathrm{Cos} f} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und diese Gleichungen (1), (2) und (3) geben den gesuchten Werth der Länge s der gegebenen Geraden für jeden Werth von x, y oder z.

§. 232. (Rectification des Kreises.) Indem wir nun zu den eigentlichen krummen Linien übergehen, wählen wir zuerst die einfachste derselben, den Kreis, dessen Gleichung nach §. 199.

$$r = 2\,a\,\mathrm{Cos}\, v$$

ist, wo a der Halbmesser, r eine Sehne, und v der Winkel der Sehne mit einem durch ihren Endpunct gehenden Durchmesser des Kreises ist.

Da aber diese Gleichung nicht mehr zwischen rechtwinkligen Coordinaten x, y, sondern zwischen den *Polarcoordinaten* (§. 180, I.) r und v besteht, so werden wir zuerst den oben gegebenen allgemeinen Ausdruck von

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

für diese neuen Coordinaten umgestalten. Man hat aber (a. a. O.)

$$x = r \operatorname{Cos} v,$$
$$y = r \operatorname{Sin} v,$$

also auch, wenn man diese beyden Gleichungen differentiirt:

$$dx = dr \operatorname{Cos} v - r\,dv \operatorname{Sin} v,$$
$$dy = dr \operatorname{Sin} v + r\,dv \operatorname{Cos} v,$$

und wenn man diese Werthe von dx und dy in den vorhergehenden Ausdruck von ds substituirt:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2} \quad . \quad . \quad . \quad (A'),$$

welches demnach der allgemeine Ausdruck für das Element jeder ebenen Curve zwischen den Polarcoordinaten r und v ist, wie wir auch schon früher (§. 213.) gefunden haben.

Substituirt man daher in diesem Ausdrucke von ds den Werth von

$$dr = -2a\,dv \operatorname{Sin} v,$$

der unmittelbar aus der obigen Gleichung des Kreises folgt, so erhält man

$$ds = dv . \sqrt{4a^2 \operatorname{Sin}^2 v + 4a^2 \operatorname{Cos}^2 v} \quad \text{oder}$$
$$ds = 2a\,dv,$$

wovon das Integral ist

$$s = 2av,$$

wenn nämlich s zugleich mit v verschwinden soll.

Für $v = \pi$, wo $\pi = 3.14159\ldots$, erhält man die ganze Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser a ist, gleich

$$2a\pi,$$

übereinstimmend mit §. 124, V.

I. Dasselbe findet man auch aus der Gleichung des Kreises (§. 199.)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zwischen rechtwinkligen Coordinaten. Diese Gleichung gibt nämlich

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad dy = -\frac{x}{y}\,dx,$$

also ist auch für den Kreis

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, könnte man die Gleichung (1) des §. 227, III. benützen. Setzt man nämlich in dieser Gleichung $\frac{x}{a}$ statt x, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arc Sin} \frac{x}{a},$$

so daſs demnach das gesuchte Integral ist

$$s = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \,\text{Arc Sin} \frac{x}{a},$$

wenn s mit x zugleich verschwindet. Für $x = a$ wird aber

$$\text{Arc Sin} \frac{x}{a} = \text{Arc Sin}\, 1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

also ist auch der vierte Theil der Kreisperipherie gleich $\frac{1}{2} a \pi$, und daher diese Peripherie selbst gleich $2 a \pi$, wie zuvor.

II. Allein da es unsere Absicht ist, alle hier und in der Folge noch zu entwickelnden Integrale ganz aus der Tafel des §. 230. zu nehmen, und somit aus einer einzigen Quelle [der Gleichung (A) des §. 228.] abzuleiten, so wollen wir schon jetzt einer merkwürdigen Umgestaltung der Gleichungen einer jeden Curve erwähnen, die uns in der Folge sehr nützlich seyn wird, da sie es eigentlich ist, die uns in den Stand setzt, die erwähnte Quelle gehörig zu benützen.

Obschon nämlich jede ebene Curve, ihrer Natur nach, nur durch eine einzige Gleichung zwischen x und y ausgedrückt wird, so ist es doch oft sehr vortheilhaft, dieselbe, mittelst Einführung einer Hülfsgröſse, durch *zwey Gleichungen* zu geben. Wir haben davon bereits oben (§. 207.) ein Beyspiel bey der Cyclois kennen gelernt, wo $v = \frac{t}{a}$ diese Hülfsgröſse oder das Verbindungsmittel zwischen den beyden dort aufgestellten Gleichungen dieser Curve ist. — Es ist in den meisten Fällen sehr leicht, eine solche Hülfsgröſse aufzufinden, und man sieht, daſs man sie, zur Benützung der Tafel von §. 230, aus den trigonometrischen Functionen wählen wird. Für den Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ist, biethet sich, da man nach §. 95. eben so für jeden Winkel φ hat

$$\text{Cos}^2\varphi + \text{Sin}^2\varphi = 1,$$

diese Wahl gleichsam von selbst dar. Man wird nämlich den Kreis auch durch die beyden folgenden Gleichungen ausdrücken können:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\text{Cos}\,\varphi \\ y &= a\,\text{Sin}\,\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen geben aber sofort

$$dx = -\,a\,d\varphi\,\text{Sin}\,\varphi,$$
$$dy = a\,d\varphi\,\text{Cos}\,\varphi,$$

und daher auch, wenn man diese Werthe von dx und dy in der Gleichung (A) substituirt:

$$ds = a\,d\varphi,$$

wovon das Integral ist

$$s = a\varphi,$$

wenn s mit φ verschwindet. Nennt man also wieder 2π die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, so hat man, wenn man in der letzten Gleichung $\varphi = 2\pi$ setzt, für die Peripherie desjenigen Kreises, dessen Halbmesser a ist, den Ausdruck $2a\pi$, wie zuvor.

III. Man sieht übrigens, daſs alle vorhergehenden Ausdrücke den Werth von π als bereits bekannt voraussetzen, und daſs z. B. die obige Gleichung

$$s = a\,\text{Arc Sin}\,\frac{x}{a}$$

uns über den eigentlichen Werth dieser Gröſse π nichts kennen lehrt. Wir haben zwar diese Gröſse schon oben (§. 103.) mit einer für alle wissenschaftlichen Bedürfnisse mehr als hinlänglichen Genauigkeit kennen gelernt, aber nur durch die Summirung von zwar convergenten, aber doch immer unendlichen Reihen, und da man kein anderes Mittel kennt, diesen Zweck zu erreichen, oder da es, wie es scheint, unmöglich ist, den Werth eines Kreisbogens, zu welchem z. B. die Abscisse x gehört, durch eine endliche und geschlossene Function dieser Abscisse auszudrücken, so sagt man, daſs der Kreis eine nicht *rectificable* Curve sey, deren es noch viele andere gibt, was uns aber nicht hindern soll, den bereits gefundenen, wenn auch nur genäherten Werth von π auch in der Folge noch oft mit großem Vortheil anzuwenden, wie dieß bereits in dem Vorhergehenden häufig genug geschehen ist.

§. 233. (Rectification der Parabel.) Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = a x.$$

Setzt man, um diese Gleichung durch zwey andere auszudrücken,

$$x = \tfrac{1}{4} a \operatorname{Tang}^2 \varphi, \quad \text{so ist} \quad y = \tfrac{1}{2} a \operatorname{Tang} \varphi,$$

so daß man daher hat

$$d x = \tfrac{1}{2} a \, d\varphi \, . \, \frac{\operatorname{Tang} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

$$d y = \frac{1}{2} \frac{a \, d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}.$$

Substituirt man aber diese Ausdrücke von dx und dy in der allgemeinen Gleichung (A), so erhält man

$$d s = \frac{\tfrac{1}{2} a \, d\varphi}{\operatorname{Cos}^3 \varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, IV.)

$$s = \tfrac{1}{4} a \left[\frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} - \log \operatorname{Tang} \frac{90 - \varphi}{2} \right],$$

wenn s mit φ (oder was dasselbe ist, mit x) zugleich verschwindet, oder wenn der Bogen s von dem Scheitel der Parabel genommen wird.

I. Wollte man diesen Bogen s durch die Abscisse x ausdrücken, so hat man

$$\operatorname{Tang} \varphi = 2 \sqrt{\frac{x}{a}},$$

also auch

$$\operatorname{Sin} \varphi = 2 \sqrt{\frac{x}{a + 4x}} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{\frac{a}{a + 4x}},$$

und überdieß

$$\operatorname{Tang} \frac{90 - \varphi}{2} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{\sqrt{a + 4x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von s, so erhält man

$$s = \tfrac{1}{2} \sqrt{a x + 4 x^2} - \tfrac{1}{4} a \log \frac{\sqrt{a + 4x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Die Parabel ist demnach eine rectificable Curve, da man für jeden Werth von x oder von φ den ihm entsprechenden Bogen s durch einen geschlossenen Ausdruck findet.

§. 234. (Rectification der Neil'schen Parabel.)

Die Gleichung dieser Curve ist (§. 202.)

$$y^3 = a x^2.$$

Setzt man daher $x = \frac{8}{27} a \operatorname{Tang}^3 \varphi$, so ist $y = \frac{4}{9} a \operatorname{Tang}^2 \varphi$, und daher auch

$$dx = \frac{8a}{9} \frac{\operatorname{Tang}^2 \varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}, \quad dy = \frac{8a}{9} \frac{\operatorname{Tang} \varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

und dadurch wird die Gleichung (A)

$$ds = \frac{8a}{9} \frac{d\varphi \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}^4 \varphi},$$

wovon nach §. 230, XII. das Integral ist

$$s = \frac{8a}{27 \operatorname{Cos}^3 \varphi} + \text{Const.}$$

Zählt man den Bogen s vom Scheitel dieser Curve, oder ist $s = 0$ für $x = \varphi = 0$, so hat man

$$\text{Const} = -\frac{8a}{27},$$

und daher auch

$$s = \frac{8a}{27}\left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^3 \varphi} - 1\right).$$

Will man den Bogen s durch die Ordinate y ausdrücken, so ist

$$\operatorname{Tang}^2 \varphi = \frac{9y}{4a}, \quad \text{also auch} \quad \operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{\frac{4a}{4a + 9y}},$$

und daher der gesuchte Bogen der Curve

$$s = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right],$$

so daſs daher für die *Neil*'sche Parabel der Bogen s durch eine algebraische (oder nicht transcendente) Function von y gegeben wird.

I. Übrigens wird man bemerken, daſs man auch hier noch die vorhergehende Tafel entbehren könnte, da die gegebene Gleichung $y^3 = a x^2$ zu ihrem Differential gibt

$$dx = \tfrac{3}{2} dy . \sqrt{\frac{y}{a}},$$

wodurch die Gleichung (A) wird

$$ds = dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}.$$

Ausdrücke dieser Art aber, in welchen der eine Factor dy das vollständige Differential der in dem anderen Factor enthaltenen Gröſse ist, geben immer ein algebraisches Differential.

So ist z. B.

$$\int (1 + x^n)^m . x^{n-1} dx = \frac{(1 + x^n)^{m+1}}{n(m+1)},$$

und eben so ist auch

$$s = \int dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}} = \tfrac{8}{27} a \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Const},$$

wie zuvor.

§. 235. (Rectification der Astrois.) Nimmt man in der oben (§. 204.) gegebenen Gleichung dieser Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

die Coordinaten

$$x = a \operatorname{Cos}^3 \varphi \quad \text{und} \quad y = a \operatorname{Sin}^3 \varphi,$$

so erhält man durch die Gleichung (A) für das Element des Bogens der Astrois

$$ds = -3a . d\varphi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi,$$

wovon das Integral (nach §. 230, V.) ist

$$s = \frac{3a}{4} (2 \operatorname{Cos}^2 \varphi - 1) + \text{Const}.$$

Ist $s = 0$ für $\varphi = 90^\circ$, das heiſst für $x = 0$, oder zählt man den Bogen EM (Fig. 90) von dem höchsten Puncte E der Curve, so ist

$$\text{Const} = - \tfrac{3}{4} a,$$

und daher

$$s = \tfrac{3}{2} a \operatorname{Cos}^2 \varphi \quad \text{oder} \quad s = \tfrac{3}{2} a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Astrois läſst sich daher ebenfalls algebraisch rectificiren. Nimmt man in dem letzten Ausdrucke $x = AC = a$, so erhält man den Bogen $EMC = \tfrac{3}{2} a$, so daſs daher der ganze Umfang der Astrois gleich $6a$ oder gleich der dreyfachen geraden Linie BC oder DE ist.

§. 236. (Rectification der Evolute der Ellipse.) Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{b} \text{ und } \beta = \frac{a^2 - b^2}{a},$$

so hat man für die Gleichung dieser Curve (§. 212.):

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Ist daher wieder

$$x = \beta \operatorname{Cos}^3 \varphi \text{ und } y = \alpha \operatorname{Sin}^3 \varphi,$$

so erhält man für das Element des Bogens:

$$ds = 3 d\varphi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{\alpha^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + \beta^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}, \text{ oder auch}$$
$$ds = 3 d\varphi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

wovon wieder das Integral sofort nach der Bemerkung des §. 234, I., die hier auch Statt hat, bekannt ist, so daſs man hat

$$s = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{Cos}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$, das heiſst für $\varphi = 90$, so erhält man

$$\text{Const} = -\frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2},$$

also ist auch der Bogen $s = EM$ (Fig. 90) der Curve

$$s = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{Cos}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $\varphi = 0$ oder $y = 0$, oder endlich $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$, so erhält man, ohne Berücksichtigung der Zeichen, für den vierten Theil EMC des Anfangs dieser Curve

$$EMC = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta},$$

und daher auch für den ganzen Umfang derselben

$$4 \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{4(a - b)}{ab} (a^2 + ab + b^2).$$

§. 237. (Rectification der Logistik.) Die Gleichung dieser Curve ist (§. 205, Fig. 91)

$$x = e^y,$$

wo $AP = x$, $PM = y$, $AC = 1$ und $CD = e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Setzt man daher

$$x = \mathrm{Tang}\,\varphi,$$

so hat man

$$dx = \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

wodurch die Gleichung (A) wird

$$ds = \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, XIV.)

$$s = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \mathrm{Const.}$$

Zählt man den Bogen DM von dem Puncte D an, wo $x = \mathrm{Tang}\,\varphi = e$ ist, so hat man für die Constante der Integration:

$$\mathrm{Const} = \log(1 + \sqrt{1+e^2}) - \sqrt{1+e^2}.$$

§. 238. (Rectification der Cyclois.) Für diese Curve hatten wir oben (§. 207.) die beyden Gleichungen

$$x = a(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi),$$

wo (Fig. 93) $AP = x$, $PM = y$ und der Winkel $MOH = \varphi$ ist. Davon sind die Differentialien

$$dx = a\,d\varphi\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi) \quad \text{und} \quad dy = a\,d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

also ist auch die Gleichung (A) oder das Element des Bogens der Cyclois

$$ds = a\,d\varphi\sqrt{2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi} = 2\,a\,d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

und davon ist das Integral

$$s = -4a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \mathrm{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $\varphi = 0$, so hat man

$$\mathrm{Const} = 4a,$$

und daher ist der gesuchte Bogen $AM = s$ der Cyclois

$$s = 4a(1 - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi) = 8\,a\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Nimmt man diesen Ausdruck von s für den Werth $\varphi = 180^0$, so hat man, da $\mathrm{Sin}\,45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, den halben Bogen der Cyclois $AMD = 4a$, und daher den ganzen $AMDB = 8a$ oder gleich dem achtfachen Halbmesser des erzeugenden Kreises.

§. 239. (Rectification der Kettenlinie.) Für diese Curve haben wir oben (§. 206.) die Gleichung erhalten:

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2(a+x)}{a},$$

wo (Fig. 92) $DP = x$ und $PM = y$ ist.

Setzen wir demnach

$$\frac{a+x}{a} = \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

so hat man

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

oder, wenn man alle Glieder dieser Gleichung durch $e^{\frac{y}{a}}$ multiplicirt:

$$e^{\frac{2y}{a}} - \frac{2 \cdot e^{\frac{y}{a}}}{\operatorname{Cos}\varphi} + 1 = 0.$$

Löst man diese für $e^{\frac{y}{a}}$ quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi} + \operatorname{Tang}\varphi = \frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \operatorname{Tang}\frac{90^\circ+\varphi}{2}.$$

so daſs man daher die Kettenlinie auch durch folgende zwey Gleichungen ausdrücken kann:

$$x = \frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi} - a \quad \text{und}$$

$$y = a \log \operatorname{Tang}\frac{90^\circ+\varphi}{2}.$$

Davon sind die Differentiale

$$dx = \frac{a\,d\varphi \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

und damit wird die Gleichnng (A)

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi},$$

wovon das Integral (nach §. 230, IV.) ist

$$s = a \operatorname{Tang}\varphi.$$

§. 240. (Rectification der Spiralen.) Für die Spirale *Archimed's* ist (§. 208.)

$$\nu = 2\pi r,$$

also auch

$$d\nu = 2\pi d r.$$

Substituirt man diesen Werth von dr in der Gleichung (A′) des §. 232, oder in

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2},$$

so erhält man

$$ds = \frac{d\nu}{2\pi}\sqrt{1 + \nu^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, sey $\nu = \text{Tang}\,\varphi$, also auch

$$d\nu = \frac{d\varphi}{\text{Cos}^2\varphi},$$

so daſs man daher hat

$$ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{\text{Cos}^3\varphi},$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, IV.)

$$s = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}^2\varphi} + \log\frac{1 + \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi}\right].$$

Um dieſs wieder durch ν auszudrücken, hat man

$$\text{Tang}\,\varphi = \nu \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}^2\varphi} = \nu \cdot \sqrt{1 + \nu^2},$$

und überdieſs

$$\frac{1 + \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} = \nu + \sqrt{1 + \nu^2},$$

so daſs man daher für den Bogen s dieser Spirale erhält

$$s = \frac{1}{4\pi}\left[\nu \cdot \sqrt{1+\nu^2} + \log(\nu + \sqrt{1+\nu^2})\right].$$

Eben so hat man für die logarithmische Spirale

$$r = a^\nu,$$

also auch

$$dr = a^\nu \cdot d\nu \cdot \log a.$$

Setzt man daher $b = \log a$, so findet man

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2} = a^\nu \cdot d\nu\sqrt{1 + b^2},$$

woraus sofort (nach §. 227, I.) folgt

$$s = a^\nu \cdot \sqrt{\frac{1 + b^2}{b^2}} \quad \text{oder} \quad s = r\sqrt{\frac{1 + b^2}{b^2}}.$$

§. 241. (Rectification der Ellipse.) Die Gleichung der Ellipse ist (§. 198.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo $2a$ und $2b$ ihre groſse und kleine Axe bezeichnen. Zerlegt man diese Gleichung (nach §. 232, II.) mittelst einer Hülfsgröſse φ in zwey andere, so daſs man hat

$$\left.\begin{array}{l} x = a \operatorname{Sin}\varphi \\ y = b \operatorname{Cos}\varphi \end{array}\right\},$$

so ist auch

$$dx = a\,d\varphi \operatorname{Cos}\varphi \quad \text{und} \quad dy = -\,b\,d\varphi \operatorname{Sin}\varphi,$$

und daher geht die Gleichung (A) in folgende über:

$$ds = a\,d\varphi \,.\, \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2\varphi},$$

wo der Kürze wegen $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ gesetzt worden ist.

Allein dieser Ausdruck läſst sich, wie man ihn auch, etwa durch Einführung anderer Hülfsgröſsen, verändern mag, weder durch unsere Tafel (§. 230.), noch auch sonst durch irgend ein bekanntes Mittel integriren.

In solchen Fällen bleibt nichts übrig, als den gegebenen Differentialausdruck in eine Reihe zu entwickeln, und die Glieder derselben einzeln zu integriren. Dieſs ist offenbar immer ausführbar, aber das Totalintegral wird auf diese Weise durch eine endlose Reihe gegeben, aus welcher man den Werth des gesuchten Integrals nur dann annähernd finden kann, wenn diese Reihe convergent ist.

Ist e eine gegen die Einheit nur geringe Gröſse, oder ist die Excentricität der Ellipse nur klein, ist also diese Ellipse selbst nur wenig von einem Kreise verschieden, so hat man, wenn man die Wurzelgröſse $\sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}$ nach dem Binom entwickelt:

$$ds = a\,d\varphi \Big[1 - \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin}^2\varphi - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,2^2} e^4 \operatorname{Sin}^4\varphi$$
$$- \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\;2^3} e^6 \operatorname{Sin}^6\varphi - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,2^4} e^8 \operatorname{Sin}^8\varphi - \ldots \Big].$$

Substituirt man dann die Werthe der Integrale

$$\int d\varphi \operatorname{Sin}^3\varphi, \quad \int d\varphi \operatorname{Sin}^4\varphi, \quad \int d\varphi \operatorname{Sin}^6\varphi$$

aus der Tafel des §. 230, Nr. I., so erhält man für den elliptischen Bogen s folgenden Ausdruck:

$$\frac{s}{a} = \varphi - \frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2^2}\operatorname{Sin}2\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1}{2.4}e^4\left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{4}{2^4}\operatorname{Sin}2\varphi + \frac{1}{2^4.2}\operatorname{Sin}4\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{15}{2^6}\operatorname{Sin}2\varphi + \frac{6}{2^6.2}\operatorname{Sin}4\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^6.3}\operatorname{Sin}6\varphi\right) - \ldots$$

Um den Quadranten oder um den vierten Theil des Umfangs der Ellipse zu erhalten, wird man in dem vorhergehenden Ausdrucke den Winkel $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ setzen. Nimmt man dann die so erhaltene Gröſse vier Mal, so hat man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$2a\pi\left[1 - (\tfrac{1}{2}e)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2\right.$$
$$\left. - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - \ldots\right].$$

Für $a = b$ oder für $e = 0$ erhält man den Umfang des Kreises gleich $2a\pi$, wie zuvor (§. 232.).

I. Für die Hyperbel hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man also auch hier

$$x = a.\operatorname{Sin}\varphi,$$
$$y = b\sqrt{-1}.\operatorname{Cos}\varphi,$$

so erhält man für den hyperbolischen Bogen

$$s = \int a\,d\varphi\sqrt{1 - e^2\operatorname{Sin}^2\varphi},$$

wie zuvor, wo aber $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Man sieht, daſs die elliptischen und hyperbolischen Bogen eine eigene Classe von transcendenten Gröſsen bilden. Die Parabel ist, wie wir oben gesehen haben (§. 233.), durch einen einfachen logarithmischen Ausdruck rectificabel, aber nicht die beyden andern Curven der zweyten Ordnung, die weder unmittelbar von dem Kreise, noch auch von den Logarithmen abhängen. Man pflegt Ausdrücke der Art

$$\int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} \quad \text{oder auch} \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}} \quad \text{u. dgl.}$$

elliptische Functionen zu nennen, die in der neueren Analysis eine sehr wichtige Rolle spielen, da man eine groſse Anzahl anderer Integralien auf sie eben so zurückführen kann, wie man z. B. die Ausdrücke

$$\int \frac{dx}{1+x} \quad \text{oder} \quad \int d\varphi \operatorname{Sin}^2 \varphi, \quad \int \varphi \, d\varphi \operatorname{Cos} \varphi \quad \text{u. dgl.}$$

in dem Vorhergehenden auf Kreisbogen zurückgeführt hat, so daſs jene die Rectification der Ellipse, und diese die Rectification des Kreises als bekannt voraussetzen.

Die vorhergehenden Beyspiele werden hinreichend das Verfahren zeigen, welches man bey der Bestimmung der Länge der Curven zu beobachten hat. Wir wollen nun sehen, wie man auch den ebenen Raum bestimmen kann, der von den Bogen dieser Curven eingeschlossen wird.

Dreyſsigstes Capitel.

Quadratur der Curven.

§. 242. (Element der Fläche einer Curve.) Wir haben bereits oben (§. 140, II.) gesehen, daſs man jede gegebene geradlinige Figur in ein Rechteck verwandeln kann, und daſs (nach §. 118.) die Fläche eines Rechteckes gleich dem Producte der Basis in die Höhe desselben ist. Auf dieselbe Weise wird man also auch analog die von einer gegebenen Curve eingeschlossene Fläche in unendlich kleine Rechtecke zerlegen können, deren Seiten dx und dy sind, wo dann das Product $dx.dy$ die Fläche eines solchen unendlich kleinen Rechteckes bezeichnen wird.

Dieser Ausdruck $dx.dy$ ist aber (nach §. 47, II.) einem Differential der *zweyten* Ordnung gleich zu achten. Man kann es jedoch auf ein Differential der ersten Ordnung zurückführen, wenn man bemerkt, daſs in jeder Gleichung einer Curve zwischen x und y eine dieser beyden Gröſsen willkürlich angenommen werden kann; wo dann, dieser Annahme gemäſs, auch die andere Gröſse durch dieselbe Gleichung bestimmt wird. Nimmt man also z. B. die Gröſse y willkürlich an, so wird das erste Integral des Ausdrucks $dx.dy$ oder $dy.dx$, da dy von dx unabhängig ist, gleich

$$y\,dx$$

seyn. Nennt man demnach F die von einer gegebenen Curve eingeschlossene ebene Fläche, so wird das Element dieser Fläche

$$dF = y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

seyn.

Man kann nämlich diese Fläche $ANPM$ (Fig. 97) auch als aus den Vierecken $PP'MM'$, $P'P''M'M''$, . . . bestehend betrachten, deren eine Seite PM, $P'M'$, $P''M''$, . . . gleich der Ordinate y, und die andere $PP' = P'P'' = dx$, oder gleich dem Differentiale der Abscisse $AP = x$ ist. Jedes dieser Vierecke besteht aber aus einem Rechtecke $PP'Ma$, dessen Fläche gleich $y\,dx$, und aus dem rechtwinkligen Dreyecke MaM', dessen Fläche $\frac{1}{2}M'a.Ma = \frac{1}{2}dy.dx$ ist, so daſs man daher für das Element der Fläche F einer Curve den Ausdruck hat:

$$dF = y\,dx + \tfrac{1}{2}dy.dx;$$

welcher Ausdruck aber nach dem oben (§. 47, I.) aufgestellten Princip der Differentialrechnung sofort in den folgenden einfacheren übergeht:

$$dF = y\,dx.$$

Um dann die von einer gegebenen Curve eingeschlossene Fläche zu finden, wird man den aus der Gleichung dieser Curve gegebenen Werth von y, in x ausgedrückt, in dem vorhergehenden allgemeinen Ausdruck von $dF = y\,dx$ substituiren, wodurch man die Gröſse dF als eine bloſse Function von x und dx, oder wodurch man eine Gleichung der Form

$$dF = f(x)\,.\,dx$$

erhält, die das Element der Fläche dieser besonderen Curve darstellen wird. Summirt man dann alle diese Elemente, d. h. nimmt man das Integral von diesem Differentialausdrucke, so wird man die gesuchte Fläche F der Curve selbst erhalten.

Dieses Verfahren wird die *Quadratur* der Curven genannt.

I. Das Vorhergehende ist unmittelbar nur auf rechtwinklige Coordinaten anwendbar. Man kann aber auch die von einer Curve eingeschlossene Fläche, statt in unendlich kleine Rechtecke, deren Seiten den Coordinaten der x und y parallel sind, in unendlich kleine Dreyecke zerlegen, deren gemeinschaftlicher Scheitel in irgend einem inneren Puncte der Curve liegt. — Ist A (Fig. 99) dieser Punct, und zieht man aus ihm zu zwey nächsten Puncten M und m der Curve MN die geraden Linien AM und Am, so wird die Fläche des Dreyeckes AMm zugleich das Element dF der Fläche der Curve MN darstellen. Sey $AM = r$ der *Radius* der Curve, und $PAM = v$ der Winkel, welchen dieser Radius mit der Axe AX der x, oder mit sonst einer festen, durch den Punct A gehenden Geraden bildet. Nimmt man dann auf der ersten dieser Geraden $AM = r$ zwey nächste Puncte Q und S in der Entfernung $AQ = r$ und $AS = r + dr$, und beschreibt man mit diesen Entfernungen aus dem Mittelpuncte A die Kreisbogen Qq

und Ss, so entsteht das rechtwinklige Viereck $QSqs$. Da der Winkel $XAM = v$, also auch $MAm = dv$ ist, so sind die Seiten dieses Viereckes

$$QS = dr \quad \text{und} \quad Qq = r\,dv;$$

also ist auch die Fläche desselben Viereckes

$$r\,dr\,dv.$$

Da dieses Viereck $QSqs$ als das Element der Dreyecksfläche AMm zu betrachten, und da wieder, wenn die Gleichung der Curve zwischen den Polarcoordinaten r und v gegeben ist, eine der beyden Gröſsen, z. B. r als willkürlich oder unabhängig anzusehen ist, so wird man den vorhergehenden Ausdruck in Beziehung auf diese Gröſse r integriren, wodurch man

$$\int r\,dr\,dv = \tfrac{1}{2} r^2\,dv$$

für die Fläche des Dreyeckes AMm erhält; und da diese Dreyeckfläche, nach dem Vorhergehenden, zugleich das Element der Fläche F der Curve ist, so wird man für den allgemeinen Ausdruck dieses Elements erhalten:

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\,dv \quad . \; . \; . \quad (B').$$

In der That, wenn man aus dem Mittelpuncte A mit dem Halbmesser $AM = r$ den Kreisbogen Ma beschreibt, so besteht die dreyseitige Figur AMm, durch welche das eigentliche Element der Fläche der Curve dargestellt wird, aus zwey Theilen, nämlich aus dem Kreissector AMm, dessen Fläche $\frac{1}{2} AM . Ma$ oder $\frac{1}{2} r . r\,dv$ ist, und aus dem in dem Puncte a rechtwinkligen Dreyecke Mam, dessen Fläche $\frac{1}{2} Ma . am = \frac{1}{2} r\,dv . dr$ ist, so daſs man demnach hat:

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\,dv + \tfrac{1}{2} r\,dr\,dv;$$

das heiſst, nach dem so eben angeführten Princip der Differentialrechnung

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\,dv,$$

wie zuvor.

§. 243. (Quadratur der Parabel.) Wenden wir nun auch diesen allgemeinen Ausdruck von dF auf mehrere specielle Curven an, und betrachten wir unter diesen zuerst die Parabel, für welche wir oben die Gleichung erhalten haben:

$$y^2 = 2ax,$$

so dafs daher sofort, nach der Gleichung (B)

$$dF = dx \,.\, \sqrt{2ax}$$

ist, von welcher das Integral, nach §. 234, I., seyn wird:

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2ax^3} + \text{Const.}$$

Zählt man diese Fläche von dem Scheitel der Parabel, so ist $F = 0$ für $x = 0$, also auch

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2ax^3} = \tfrac{2}{3}xy = \frac{y^3}{3a}.$$

Es ist daher die Fläche AMP (Fig. 85) der Parabel für jeden Punct M derselben gleich zwey Drittheilen des Rechteckes zwischen den Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$. Sucht man aber diejenige Fläche $PMM'P'$, die zwischen den beyden Ordinaten $PM = A$ und $PM' = A'$ enthalten ist, so erhält man für diese Fläche den Ausdruck

$$\frac{1}{3a}(A'^3 - A^3).$$

§. 244. (Quadratur des Kreises.) Legt man dem Kreise, wie oben (§. 232.), die Gleichung

$$r = 2a \operatorname{Cos} v$$

zu Grunde, so hat man sofort nach der Gleichung (B')

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2 dv = 2a^2 \int dv \operatorname{Cos}^2 v;$$

also auch, nach §. 230, II.,

$$F = a^2 (v + \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} 2v) + \text{Const}$$

für die Fläche, welche zwischen dem Durchmesser und derjenigen Sehne enthalten ist, die durch den einen Endpunct dieses Durchmessers geht und mit ihm den Winkel v bildet. Soll F mit v zugleich verschwinden, so ist die Constante der Integration gleich Null. Setzt man aber in dem vorhergehenden Ausdrucke $v = 90^0 = \tfrac{1}{2}\pi$, so erhält man für die Hälfte der Kreisfläche $\tfrac{1}{2}a^2\pi$, also auch für die ganze Fläche des Kreises $a^2\pi$, wo a den Halbmesser desselben bezeichnet, übereinstimmend mit §. 124, V.

I. Dasselbe folgt auch aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

wenn man in ihr

$$x = a \operatorname{Sin}\varphi \quad \text{und} \quad y = a \operatorname{Cos}\varphi$$

setzt. Dann gibt nämlich die Gleichung (B)

$$F = \int y\,dx = a^2 \int d\varphi \operatorname{Cos}^2 \varphi,$$

oder (§. 230, II.)

$$F = \tfrac{1}{2} a^2 (\varphi + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\varphi),$$

wenn F mit φ zugleich verschwindet.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Fläche des Quadranten gleich $\frac{1}{4} a^2 \pi$, und daher auch die Fläche des ganzen Kreises gleich $a^2 \pi$, wie zuvor.

Will man diese Fläche durch die Abscisse x ausdrücken, so ist

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also auch

$$\varphi = \operatorname{Arc\,Sin} \frac{x}{a},$$

und daher

$$F = \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,Sin} \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Man sieht, daſs von diesem Ausdrucke der letzte Theil

$$\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

die Fläche des rechtwinkligen Dreyeckes CPM (Fig. 45) bezeichnet, und daſs daher

$$\tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,Sin} \frac{x}{a}$$

die Fläche des Kreissectors DCM ist. Auch bemerkt man von selbst, daſs alle diese Ausdrücke wieder die Kenntniſs der Gröſse π oder die Kenntniſs des Bogens, dessen Sinus gegeben ist, voraussetzen.

§. 245. (Quadratur der Ellipse.) Nimmt man für diese Curve, wie oben (§. 241.), die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \operatorname{Sin}\varphi \\ y &= b \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\},$$

so erhält man durch die Gleichung (B)

$$F = ab \int d\varphi \operatorname{Cos}^2 \varphi = \tfrac{1}{2} ab (\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\varphi + \varphi),$$

wenn F für $\varphi = 0$ oder für $x = 0$ verschwindet. Nimmt man diesen Werth von F, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, viermal, so erhält man für die Fläche der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$ab\pi.$$

Da hier der Winkel φ derselbe ist mit dem vorhergehenden §. 244. eben so bezeichneten Winkel, so hat man

für die Ellipse $F = \frac{1}{2} ab (\text{Sin}\,\varphi \; \text{Cos}\,\varphi + \varphi)$,

und für den Kreis $F' = \frac{1}{2} a^2 (\text{Sin}\,\varphi \; \text{Cos}\,\varphi + \varphi)$,

also ist auch

$$\frac{F}{F'} = \frac{b}{a},$$

oder wenn man aus dem Mittelpuncte einer Ellipse mit einem Halbmesser, welcher der halben grofsen Axe der Ellipse gleicht, einen Kreis beschreibt, so verhalten sich die homologen, zu demselben x gehörenden, Flächen der Ellipse und des Kreises, wie b zu a. Wird eben so aus demselben Mittelpuncte mit dem Halbmesser b ein Kreis beschrieben, so verhalten sich die homologen Flächen der Ellipse und des Kreises, wie a zu b.

§. 246. (Quadratur der Hyperbel.) Da die Gleichung dieser Curve ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so kann man dafür wieder die zwey Gleichungen annehmen:

$$x = a \,\text{Cos}\,\varphi \quad \text{und} \quad y = b\sqrt{-1} \,.\, \text{Sin}\,\varphi;$$

woraus man sofort erhält:

$$F = -ab\sqrt{-1} \int d\varphi \; \text{Sin}^2 \varphi = \tfrac{1}{2} ab\sqrt{-1} \,.\, (\text{Sin}\,\varphi \; \text{Cos}\,\varphi - \varphi).$$

Um die imaginäre Gröfse aus diesem Ausdrucke wegzubringen, hat man (§. 105.)

$$\varphi\sqrt{-1} = \text{log nat}\,(\text{Cos}\,\varphi + \sqrt{-1} \,.\, \text{Sin}\,\varphi) \quad \text{oder}$$

$$\varphi\sqrt{-1} = \log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

und eben so ist

$$\text{Sin}\,\varphi \; \text{Cos}\,\varphi = \frac{xy}{ab\sqrt{-1}},$$

so dafs man daher hat:

$$F = \tfrac{1}{2} ab \left[\frac{xy}{ab} - \log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right].$$

Da aber $\frac{y}{b} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist, so hat man auch für die gesuchte hyperbolische Fläche AMP (Fig. 83) den Ausdruck

$$F = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} ab \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

wenn $F = 0$ für $x = a$ oder für $\varphi = 0$ ist.

§. 247. (Quadratur der Lemniscate.) Für diese Curven hat man, nach §. 203, die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

wo $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 89) ist. Diese Gleichung kann auch so dargestellt werden:

$$y^2 = -a^2 - x^2 + a\sqrt{a^2 + 4x^2}.$$

Nimmt man daher den Hülfswinkel φ so an, daſs man hat

$$x^2 = a^2(\operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi),$$

so ist

$$\sqrt{a^2 + 4x^2} = a(1 + 2\operatorname{Cos}\varphi),$$

und daher auch

$$y^2 = a^2(\operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}^2\varphi).$$

Daraus erhält man durch die Gleichung (B)

$$dF = y\,dx = -\frac{a^2}{2}d\varphi \operatorname{Sin}\varphi\,[1 + 2\operatorname{Cos}\varphi]\,.\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{1+\operatorname{Cos}\varphi}},$$

oder da man überhaupt hat

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{1+\operatorname{Cos}\varphi}} = \frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},\ \text{so ist auch}$$

$$dF = -\tfrac{1}{2}a^2 d\varphi\,(1 - \operatorname{Cos}\varphi)(1 + 2\operatorname{Cos}\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2 d\varphi\,(2\operatorname{Cos}^2\varphi - \operatorname{Cos}\varphi - 1),$$

und davon ist das Integral (nach §. 230, II.)

$$F = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Sin}\varphi\,(\operatorname{Cos}\varphi - 1) + \text{Const.}$$

Ist $F = 0$ für $x = 0$, das heiſst, für $\varphi = 90^\circ$, so hat man

$$\text{Const} = \tfrac{1}{2}a^2,$$

und daher das gesuchte vollständige Integral

$$F = \tfrac{1}{2}a^2(1 - \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi).$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $\varphi = 0$ oder (Fig. 89) $x = AB = AC = a\sqrt{2}$, so erhält man für die Fläche ABM, oder für den Quadranten der Curve den Ausdruck $\tfrac{1}{2}a^2$, so daſs daher die ganze Fläche der Lemniscate gleich $2a^2$ ist.

§. 248. (Quadratur der Astrois.) Setzt man für diese Curve, wie in §. 235,

$$x = a\operatorname{Cos}^3\varphi \quad \text{und}$$
$$y = a\operatorname{Sin}^3\varphi,$$

so erhält man sofort

$$F = \int y\,dx = -3a^2 \int \mathrm{Sin}^4\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi\,d\varphi,$$

und davon ist das Integral, nach §. 230, VI.:

$$F = -3a^2\left[\tfrac{1}{192}\,\mathrm{Sin}\,6\varphi - \tfrac{1}{64}\,\mathrm{Sin}\,4\varphi - \tfrac{1}{64}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi\right] + \mathrm{Const.}$$

Soll aber F für $\varphi = 90^0$, das heifst, für $x = 0$ verschwinden, so ist die Constante der Integration gleich $\frac{3a^2\pi}{32}$, und daher das vollständige Integral

$$F = \frac{3a^2}{32}\left(\pi - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Sin}\,6\varphi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,4\varphi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi - 2\varphi\right).$$

Nimmt man diesen Werth für $\varphi = 0$ viermal, so erhält man für die ganze Fläche der Astrois (Fig. 90)

$$BDCE = \tfrac{3}{8}a^2\pi.$$

I. Ganz eben so erhält man auch für die Evolute der Ellipse, wenn man wieder, wie in §. 236,

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{b}, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{a},$$

$$\text{und} \quad x = \beta\,\mathrm{Cos}^3\varphi, \quad y = \alpha\,\mathrm{Sin}^3\varphi$$

annimmt, nach der Gleichung (B)

$$F = \int y\,dx = -3\alpha\beta \int d\varphi\,\mathrm{Sin}^4\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi,$$

also auch, wie zuvor,

$$F = \tfrac{3}{32}\alpha\beta\left[\pi - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Sin}\,6\varphi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,4\varphi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi - 2\varphi\right],$$

wenn F für $\varphi = 90^0$ verschwindet, so dafs demnach die ganze Fläche dieser Curve wird:

$$\tfrac{3}{8}\alpha\beta\pi = \frac{3\left(a^2 - b^2\right)^2}{8ab}\,.\,\pi.$$

§. 249. (Quadratur der Cyclois.) Für diese Curve hat man, nach §. 207:

$$x = a(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),$$

$$y = a(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi),$$

wo φ gleich dem Winkel HOM (Fig. 93) und $AP = x$, $PM = y$ ist. also auch

$$dx = a\,d\varphi\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi \quad \text{und} \quad dy = a\,d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

und damit gibt die Gleichung (B)

$$dF = a^2\,d\varphi\,(1 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}^2\varphi),$$

wovon das Integral ist

$$F = \tfrac{3}{2} a^2 \varphi - 2a^2 \operatorname{Sin} \varphi + \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{Sin} 2\varphi,$$

wenn F mit φ oder x zugleich verschwindet. Nimmt man diesen Werth von F für $\varphi = \pi$ zweymal, so erhält man für die Fläche ABD der ganzen Cyclois den Ausdruck

$$F = 3a^2\pi,$$

oder diese Fläche ist dreymal so groſs, als die Fläche des erzeugenden Kreises, dessen Halbmesser a ist.

§. 250. (Quadratur der Kettenlinie.) Für diese Curve hat man, wie §. 239:

$$d\varphi = \frac{a\,d\varphi \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

und da $x = \frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi} - a$ ist, so ist auch

$$\int x\,dy = a^2 \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} - a^2 \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

wovon das Integral (§. 230, IV.) ist:

$$\int x\,dy = a^2 \operatorname{Tang}\varphi - a^2 \log \operatorname{Tang} \frac{90 + \varphi}{2},$$

wenn dieses Integral zugleich mit φ verschwindet. Weiter ist aber

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy,$$

also ist auch die gesuchte Fläche DMP dieser Curve

$$F = \int y\,dx = \frac{a^2}{\operatorname{Cos}\varphi} \log \frac{1 + \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - a^2 \operatorname{Tang}\varphi.$$

§. 251. (Quadratur der Spiralen.) Für die Spirale des Archimeds hat man die Gleichung (§. 208.)

$$v = 2\pi r,$$

also ist auch, nach der Gleichung (B′)

$$F = \tfrac{1}{2} \int r^2\,dv = \frac{1}{8\pi^2} \int v^2\,dv = \frac{v^5}{24\pi^2}.$$

Nach der ersten vollen Drehung des Radius oder für $v = 2\pi$ ist daher die von diesem Radius zurückgelegte Fläche

$$f' = \tfrac{1}{3}\pi.$$

Nach zwey Revolutionen ist $v = 4\pi$ und

$$f'' = \tfrac{8}{3}\pi.$$

Nach drey Revolutionen ist $v = 6\pi$ und

$$f''' = \tfrac{27}{3}\pi,$$

und überhaupt nach n Revolutionen

$$f^n = \frac{n^3\pi}{3},$$

so wie nach $(n+1)$ Revolutionen

$$f^{n+1} = \frac{(n+1)^3\pi}{3},$$

so daſs demnach die Differenz der Fläche der n^{ten} und $(n+1)^{ten}$ Revolution gleich

$$f^{n+1} - f^n = [(n+1)^3 - n^3]\frac{\pi}{3}$$

seyn wird.

I. Für die logarithmische Spirale ist

$$v = \log r,$$

also auch die Fläche derselben

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\, dv = \tfrac{1}{4} r^2.$$

Ein und dreyſsigstes Capitel.

Complanation der Flächen.

§. 252. (Element der krummen Oberflächen.) Wenn man, wie in §. 216, die krumme Oberfläche eines Körpers durch zwey nächste der xz parallele Ebenen MQQ'' und NRR'' (Fig. 101), und eben so durch zwey andere nächste der yz parallelen Ebenen MQP und $M'Q'P'$ schneidet, so erhält man dadurch einen von diesen vier Flächen eingeschlossenen Theil $MNM'N'$ der Oberfläche Φ des Körpers, den man als das Element $d\Phi$ dieser Oberfläche betrachten kann.

Dieselben vier, auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen schlieſsen aber auch, in dieser Ebene, das ebene Rechteck $QRQ'R'$ ein, und da $QQ' = PP' = dx$, $QR = Q''R'' = dy$ ist, so ist die Fläche dieses Rechteckes $QRQ'R'$ (nach §. 118.) gleich dem Producte $dx \,.\, dy$.

Allein dieses Rechteck ist zugleich die Projection (§. 181, I.) des Vierecks $MNM'N'$ oder des Elements $d\Phi$ der krummen Fläche, so daſs daher, nach der a. a. O. gegebenen Erklärung der Projection, wenn n die Neigung der unendlich kleinen Ebene $MNM'N'$ gegen die coordinirte Ebene der xy bezeichnet, die Gleichung bestehen wird:

$$d\Phi \,.\, \mathrm{Cos}\, n = dx\,dy.$$

Diese Neigung n ist aber identisch mit der Neigung der die krumme Fläche in M berührenden Ebene gegen dieselbe Ebene der xy, und da (nach §. 216, III.) dieser Winkel n durch die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\, n = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

erhalten wird, so ist auch der allgemeine Ausdruck des Elements einer krummen Fläche

$$d\Phi = dx\,dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

wo $p = \left(\frac{dx}{dz}\right)$ und $q = \left(\frac{dy}{dz}\right)$ die partiellen Differentialien von z in Beziehung auf x und auf y bezeichnen, die man aus der gegebenen Gleichung der krummen Fläche ebenfalls als gegeben annimmt. — In der Bestimmung dieses Integrals besteht die sogenannte *Complanation der Flächen.*

I. Einfacher wird dieser Ausdruck für solche krumme Flächen, die durch die Rotation einer gegebenen Curve um eine feste Gerade entstehen.

Nimmt man die Axe der x in dieser fixen Geraden, und schneidet man dann die Rotationsfläche durch zwey einander nächste, auf dieser Axe der x senkrecht stehende Ebenen PM und PM (Fig. 97 oder Fig. 97, A.), so werden diese Schnitte *Kreise* seyn, deren Mittelpuncte P, P' . . . in der Rotationsaxe AX liegen, und deren Halbmesser PM, $P'M'$ die Ordinaten y der Curve MNQ ausdrücken, durch deren Rotation um die fixe Gerade AX jene Fläche entstanden ist.

Die Peripherie des Kreises, zu welchem der Halbmesser $PM = y$ gehört, wird gleich $2\pi y$, und die des nächstfolgenden Kreises, zu welchem der Halbmesser $P'M' = y + dy$ gehört, wird gleich $2\pi(y + dy)$ seyn. Zwischen beyden Peripherien wird sich ein ringförmiger Theil der gesuchten Oberfläche des Rotationskörpers befinden, den man, da MM' mit der Tangente TM der Curve NMQ zusammenfällt, als die Oberfläche eines abgestumpften *Kegels* betrachten kann, von welchem die Halbmesser der beyden Grundflächen

$$r = y \quad \text{und} \quad R = y + dy,$$

und von welchen die Seitenlinie m oder

$$MM' = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

das Element des Bogens der gegebenen Curve NMQ ist, so daſs man daher für die Oberfläche dieses abgestumpften Kegels, d. h. für das gesuchte Element der Rotationsfläche (nach §. 163.) hat:

$$d\Phi = (R + r)\, m\pi,$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe von R, r und $m = ds$ substituirt:

$$d\Phi = (2y + dy)\, \pi\, ds,$$

das heiſst, nach dem oben aufgestellten Princip der Differentialrechnung:

$$d\Phi = 2\pi y\,ds \quad . \quad . \quad . \quad (C);$$

und dieſs ist der Ausdruck, auf welchen wir nun wieder mehrere specielle Rotationsflächen anwenden wollen.

§. 253. (Oberfläche des parabolischen Conoids.) Wenn sich eine Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = ax$$

ist, um die Axe der x dreht, so wird die Oberfläche des so entstehenden kegelförmigen Körpers gleich

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = \pi\int dx\sqrt{a^2 + 4ax}$$

seyn, wovon das Integral (nach §. 234, I.) ist:

$$\Phi = \frac{\pi}{6a}\,(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Soll Φ mit x zugleich verschwinden, so ist Const $= -\dfrac{a^2\pi}{6}$, und daher

$$\Phi = \frac{\pi}{6a}\,(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6}a^2\pi.$$

I. Wenn sich, statt der Parabel, eine gerade Linie, deren Gleichung

$$y = ax$$

ist, um die Axe der x dreht, so hat man noch einfacher für die Oberfläche des so entstehenden senkrechten Kegels mit kreisförmiger Basis:

$$\Phi = 2\pi\sqrt{1 + a^2}\,.\int ax\,dx = a\pi x^2\sqrt{1 + a^2} = \pi y\sqrt{x^2 + y^2},$$

also Φ gleich der Peripherie $2\pi y$, multiplicirt in die halbe Seitenlinie $\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ des Kegels, wie oben §. 163.

§. 254. (Oberfläche der Kugel.) Wenn ein Kreis des Halbmessers a sich um einen seiner Durchmesser dreht, so beschreibt die Peripherie des Kreises während seiner Bewegung die Oberfläche der Kugel.

Ist dieser Durchmesser zugleich die Axe der x, so hat man für die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

also ist auch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und daher

$$\Phi = 2a\pi\int dx = 2a\pi x,$$

wenn Φ mit x zugleich verschwindet. Dieser Ausdruck für $x=a$ doppelt genommen, gibt die Oberfläche der ganzen Kugel gleich

$$4a^2\pi,$$

oder viermal so grofs, als die Oberfläche eines ihrer gröfsten Kreise (§. 244.).

I. Nimmt man aber für die Gleichung des Kreises die beyden Ausdrücke

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\varphi \quad \text{und} \quad y = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

so erhält man

$$ds = -a\,d\varphi,$$

das negative Zeichen, weil s wächst, wenn φ abnimmt. Es ist daher

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = -2a^2\pi\int d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 2a^2\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

wenn Φ für $\varphi=90^0$ verschwindet. Dieser Ausdruck für $\varphi=0$ doppelt genommen, gibt die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2\pi$, wie zuvor.

§. 255. (Oberfläche des verlängerten Sphäroids.) So wird, nach §. 224, derjenige Körper genannt, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre grofse Axe entsteht. Sind $2a$ und $2b$ die grofse und kleine Axe der Ellipse, und ist die coordinirte Axe der x zugleich die Rotationsaxe der Ellipse, so hat man für die Gleichung dieser Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

woraus folgt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

wenn $a^2e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt wird.

Man hat demnach

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = 2b\pi\int dx\sqrt{1 - \frac{e^2x^2}{a^2}}.$$

Setzt man aber

$$\frac{ex}{a} = \mathrm{Sin}\,\varphi,$$

so ist auch

$$dx = \frac{a}{e}\,d\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

und daher

$$\Phi = \frac{2ab\pi}{e}\int d\varphi \,\mathrm{Cos}^2\varphi = \frac{ab\pi}{e}(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi),$$

wenn Φ mit φ oder mit x zugleich verschwindet.

Will man diesen Werth von Φ durch die Abscisse ausdrücken, so hat man, da $ex = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ ist:

$$\Phi = \frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{ab\pi}{e}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{ex}{a}.$$

Nimmt man endlich dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a$ doppelt, so erhält man für die Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids den Ausdruck

$$2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,e.$$

Für $e = 0$ oder $a = b$ gibt der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel $4a^2\pi$, wie oben.

§. 256. (Fläche des abgeplatteten Sphäroids.) Für denjenigen Körper aber, der durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe $2b$ entsteht, oder für das abgeplattete Sphäroid (§. 224.) hat man

$$\frac{x^2}{b^2} = \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

also auch

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = 2a\pi.\int dx\sqrt{1 + \frac{a^2e^2x^2}{b^4}}.$$

Setzt man aber

$$\frac{aex}{b^2} = \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

also auch

$$dx = \frac{b^2}{ae}\sqrt{-1}\,.\,d\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

so hat man

$$\Phi = \frac{2b^2\pi}{e}\sqrt{-1}\,.\int d\varphi\,\mathrm{Cos}^2\varphi,$$

und davon ist das Integral

$$\Phi = \frac{b^2\pi}{e}\sqrt{-1}\,.\,[\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi].$$

Nach §. 105. ist aber

$$\varphi\sqrt{-1} = \log\mathrm{nat}\,(\mathrm{Cos}\,\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi),$$

also ist auch, wenn man die Werthe von φ und $\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi$ wieder durch x ausdrückt:

$$\Phi = \frac{a\pi x}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} + \frac{b^2\pi}{e}\log\left(\frac{a e x + \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2}}{b^2}\right) + \text{Const},$$

wo man in der Größe nach dem Logarithmuszeichen auch den constanten Nenner b^2 ganz weglassen kann, da er schon in der Constante der Integration enthalten vorausgesetzt wird.

Soll dann Φ mit x zugleich verschwinden, so hat man

$$\text{Const} = -\frac{2 b^2 \pi}{e}\log b.$$

Setzt man endlich in dem so erhaltenen Ausdrucke zuerst $x = + b$ und dann $x = - b$, so gibt die Differenz beyder Werthe für die gesuchte Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$2 a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{e}\log\frac{1 + e}{1 - e}.$$

Für $e = 0$ oder $a = b$ wird der letzte Ausdruck die Oberfläche der Kugel gleich $4 a^2 \pi$, wie zuvor, geben.

§. 257. (Complanation des Rotationskörpers der Astrois.) Setzt man, wie oben, für die Astrois

$$x = a \operatorname{Cos}^3\varphi \quad \text{und} \quad y = a \operatorname{Sin}^3\varphi,$$

so erhält man

$$ds = -3a\int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi,$$

und daher auch für die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation dieser Curve um die Axe der x entsteht:

$$\Phi = -6 a^2 \pi \int d\varphi \operatorname{Sin}^4\varphi \operatorname{Cos}\varphi,$$

wovon das Integral, nach §. 230, V., genommen werden könnte. Allein nach der Bemerkung des §. 234, I. erhält man kürzer noch

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi \,.\, \operatorname{Sin}^4\varphi = \tfrac{1}{5}\operatorname{Sin}^5\varphi,$$

so daſs man daher hat:

$$\Phi = -\tfrac{6}{5} a^2 \pi \operatorname{Sin}^5\varphi + \text{Const}.$$

Ist $\Phi = 0$ für $\varphi = 90$, so ist

$$\text{Const} = \tfrac{6}{5} a^2 \pi,$$

und daher

$$\Phi = \tfrac{6}{5} a^2 \pi (1 - \operatorname{Sin}^5\varphi).$$

Dieser Ausdruck für $\varphi = 0$ doppelt genommen, gibt für die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation der ganzen Astrois um die Axe der x entsteht, den Werth

$$\tfrac{12}{5} a^2 \pi.$$

§. 258. (Complanation derjenigen Flächen, welche durch die Rotation der Cyclois entstehen.)

A. Wenn sich die Cyclois um die Axe AB (Fig. 104) dreht, so hat man, wie in §. 249:

$$x = a\,(\varphi - \operatorname{Sin}\varphi) \quad \text{und}$$
$$y = a\,(1 - \operatorname{Cos}\varphi),$$

also auch

$$y\,ds = a^2 d\varphi \left(3 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{Sin}\frac{3\varphi}{2}\right),$$

und daher, nach §. 230, I.:

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds = 2\pi \left(\frac{2a^2}{3} \operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\varphi - 6a^2 \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi\right) + \text{Const.}$$

Soll Φ mit φ zugleich verschwinden, so ist

$$\text{Const} = \tfrac{32}{3} a^2 \pi;$$

also ist auch die Fläche, welche durch die Rotation des Bogens AM der Cyclois um die Axe AB entsteht:

$$\Phi = 2a^2\pi\,(\tfrac{2}{3} \operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\varphi - 6 \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{16}{3}).$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = 180$ doppelt, so erhält man für die Fläche, welche durch die Rotation der ganzen Cyclois ADB um AB entsteht:

$$\Phi = \tfrac{64}{3} a^2 \pi.$$

B. Wenn sich aber der Bogen DM um die Tangente DE der Cyclois in ihrem höchsten Puncte D dreht, so hat man, nach §. 207, I., für die Gleichungen dieser Curve

$$x = a\,(\varphi + \operatorname{Sin}\varphi),$$
$$y = a\,(1 - \operatorname{Cos}\varphi);$$

also auch

$$ds = 2a\,d\varphi \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi,$$

und daher

$$\Phi' = 2\pi \int y\,ds = \frac{16a^2\pi}{3} \operatorname{Sin}^3 \tfrac{1}{2}\varphi,$$

wenn Φ' mit φ zugleich verschwindet, oder wenn der Bogen DM der Curve von dem Puncte D an gezählt wird.

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = 180$ doppelt, so erhält man für die ganze, auf diese Weise entstehende Fläche:

$$\Phi' = \tfrac{32}{3} a^2 \pi;$$

und diese Fläche wendet ihrer Rotationsaxe DE die convexe Seite zu, während die erste (in A) durch Φ bezeichnete Fläche ihrer Axe AB die concave Seite zukehrt. Auch ist, wie man sieht,

$$\Phi = 2\Phi' \quad \text{oder} \quad \Phi + \Phi' = 32 a^2 \pi.$$

C. Wenn sich ferner der Bogen der Cyclois um die Axe CD dreht, so hat man wieder

$$x = a(1 - \operatorname{Cos}\varphi) \quad \text{und}$$
$$y = a(\varphi + \operatorname{Sin}\varphi),$$

und daher auch für das Element des Bogens

$$ds = 2 a d\varphi \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und}$$
$$y ds = 2 a^2 d\varphi (\varphi + \operatorname{Sin}\varphi) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

wovon das Integral ist

$$\int y ds = 8 a^2 (\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\varphi + \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\varphi) + \text{Const.}$$

Soll dieses Integral für $\phi = 0$ verschwinden, so ist

$$\text{Const} = -\tfrac{16}{3} a^2,$$

und daher

$$\Phi'' = 16 a^2 \pi (\tfrac{1}{2}\phi \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\phi + \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{2}{3}),$$

woraus man für $\phi = 180$ erhält:

$$\Phi'' = 8 a^2 \pi (\pi - \tfrac{4}{3});$$

und diefs ist die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation des halben Bogens DMA der Cyclois um die Axe CD entsteht.

D. Wenn sich endlich der Bogen AD um die Tangente AE in dem Anfangspuncte A, die daselbst senkrecht auf AB steht, dreht, so ist wieder

$$x = a(1 - \operatorname{Cos}\phi),$$
$$y = a(\phi - \operatorname{Sin}\phi),$$

also auch

$$ds = a d\phi \sqrt{2 - 2\operatorname{Cos}\phi},$$

und daher

$$\int y\,ds = 2a^2\left(4\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi - 2\varphi\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{4}{3}\,\mathrm{Sin}^3\tfrac{1}{2}\varphi\right),$$

wenn dieses Integral mit φ zugleich verschwindet, so daſs man daher hat:

$$\Phi''' = 4a^2\pi\left(4\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi - 2\varphi\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{4}{3}\,\mathrm{Sin}^3\tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Für $\varphi = 360$ gibt dieser Ausdruck

$$\Phi''' = 16\,a^2\pi^2,$$

für die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation des ganzen Bogens ADB der Cyclois um die Tangente derselben in A oder B entsteht. Diese Oberfläche ist demnach gleich der Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser $4a\sqrt{\pi}$ ist.

Zwey und dreyfsigstes Capitel.
Cubatur der Körper.

---

§. 259. (Element der Körper.) Wenn man, wie in §. 252, einen gegebenen Körper durch zwey nächste der xz, und eben so durch zwey nächste der yz parallele Ebenen schneidet, so erhält man dadurch einen von diesen vier Ebenen eingeschlossenen Theil $MN'RQ'$ (Fig. 101) des Körpers, der die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat, dessen endliche Seitenlinien QM, RN, . . . auf der Ebene der xy senkrecht stehen, und dessen Basis $QRQ'R'$, in dieser Ebene der xy, die Seitenlinien $QQ' = RR' = dx$ und $QR = Q'R' = dy$ hat, so dafs daher die Fläche dieser Basis, wie in §. 252, gleich dem Producte $dx \cdot dy$ ist.

Schneidet man dann den so erhaltenen Theil $MN'RQ'$ des Körpers noch durch zwey andere einander nächste und der xy parallele Ebenen, deren Distanz von einander daher gleich dz gesetzt werden kann, so wird das zwischen den letzten beyden Ebenen enthaltene Element jenes Theiles des körperlichen Volums ein rechtwinkliges Parallelepipedum seyn, dessen Basis gleich der Basis $QRQ'R'$ des erwähnten Theils, und dessen Höhe gleich dz ist, dessen Volum also auch (nach §. 161.) gleich dem Producte $dx \cdot dy \cdot dz$ seyn wird.

Da man dergleichen schneidende Ebenen durch alle Puncte des Körpers legen kann, so wird dadurch der ganze Körper in solche unendlich kleine senkrechte Parallelepipede zerlegt werden, und ihre Summe wird das Volum dieses Körpers seyn. Nennt man also V dieses Volum, so wird das Element desselben seyn

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

I. Auch hier wird der Ausdruck für dV einfacher, wenn man nur solche Körper betrachtet, die durch die Rotation der Fläche einer Curve um eine gerade Linie entstanden sind. Ist diese Gerade zugleich die Axe der x, so wird, wie in §. 252, I., jede auf diese Gerade senkrechte Ebene den Körper in einem Kreise schneiden, dessen Mittelpunct in der Axe der x, dessen Halbmesser gleich der auf dieser Axe senkrechten Ordinate y, und dessen Fläche daher πy^2 seyn wird.

Zwischen dieser und der nächstfolgenden schneidenden auf derselben Rotationsaxe senkrechten Ebene, deren Entfernung von der ersten daher gleich dx ist, wird ein Theil des Körpers enthalten seyn, der die Gestalt eines Cylinders hat, dessen Basis πy^2 und dessen Höhe dx, dessen Volum daher (§. 163.) auch gleich $\pi y^2 dx$ seyn wird, und da der ganze Körper nur aus solchen Cylindern von kreisförmiger Basis und unendlich kleiner Höhe besteht, so wird auch

$$dV = \pi y^2 dx \quad . \quad . \quad . \quad \text{(D)}$$

das Element aller dieser durch Rotation entstandenen Körper bezeichnen.

In der Bestimmung des Integrals dieses Ausdrucks besteht die sogenannte Cubatur der Körper.

§. 260. (Volum des parabolischen Conoids.) Wenn man die Fläche einer Parabel, deren Gleichung ist

$$y^2 = ax,$$

um die Axe der x dreht, so hat man für das Volum des so entstehenden Körpers nach der Gleichung (D)

$$V = \pi \int y^2 dx = a\pi \int x dx = \tfrac{1}{2} a\pi x^2,$$

wo V mit x verschwindet, und wo (Fig. 85) $AP = x$ und $PM = y$ ist.

Ergänzt man das Rechteck, dessen zwey Seiten AP und PM sind, und dreht man dann dieses Rechteck um die Axe AP der x, so entsteht ein Cylinder mit kreisförmiger Basis, wo y der Halbmesser dieser Basis, und x die Höhe des Cylinders, also auch (§. 163.)

$$V' = \pi y^2 x = a\pi x^2$$

das Volum dieses Cylinders ist. Da sonach $V' = 2V$ ist, so wird das Volum dieses Cylinders durch die Oberfläche jenes parabolischen Conoids in zwey gleiche Theile getheilt.

Ist endlich V'' das Volum des Kegels, der durch Umdrehung der geradlinigen Sehne AM um die Axe der x entsteht, und dessen Volum daher

$$V'' = \tfrac{1}{3}\pi y^2 x = \tfrac{1}{3} a \pi x^2$$

ist, so hat man

$$\frac{V}{V'} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{V}{V''} = \frac{3}{2}.$$

I. Wenn sich, statt der Parabel, die gerade Linie, deren Gleichung

$$y = a x$$

ist, um die Axe der x dreht, so hat man für den so entstehenden Körper, den senkrechten Kegel mit kreisförmiger Basis,

$$V = \pi \int y^2 dx = \tfrac{1}{3} a^2 \pi x^3 = \tfrac{1}{3}\pi y^2 x,$$

übereinstimmend mit §. 163.

§. 261. (Volum des hyperbolischen Conoids.) Ist in der Hyperbel (Fig. 83) $AP = x$ und $PM = y$, so hat man für die Gleichung dieser Curve (nach §. 200)

$$y^2 = \frac{2 b^2 x}{a} + \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

und daraus erhält man sofort

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2 \pi}{a^2} \int (2 a x + x^2) dx,$$

wovon das Integral nach §. 234, I. ist

$$V = \frac{b^2 \pi}{a^2} (a x^2 + \tfrac{1}{3} x^3)$$

oder auch

$$V = \tfrac{1}{3} \pi x y^2 + \frac{b^2 \pi x^2}{3 a}.$$

Der erste Theil des letzten Ausdrucks ist der von dem geradlinigen Dreyecke AMP beschriebene Kegel, also ist auch der zweyte Theil oder $\frac{b^2 \pi x^2}{3 a}$ dasjenige Volum, welches das hyperbolische Segment, das von der Sehne AM und dem Bogen AM begrenzt wird, während dieser Drehung der Hyperbel um AP beschreibt.

I. Legt man aber der Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu Grunde, wo $CP = x$ und $PM = y$ ist, und wird dann diese

Curve um eine durch C auf die grofse Axe AB senkrechte Gerade gedreht, so ist das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int x^2\, dy = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int (b^2 + y^2)\, dy,$$

und daher

$$V = \frac{a^2 \pi}{b^2} (b^2 y + \tfrac{1}{3} y^3),$$

wenn V mit y zugleich verschwindet.

§. 262. (Volum der Kugel.) Ist BAD (Fig. 103) ein Kreisbogen des Halbmessers $BC = DC = a$, und ist $AP = x$, $PB = y$, so hat man (§. 199.)

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Heifst daher V' das Volum, das durch die Rotation des Kreisabschnittes $ABPD$ um die Axe CA entsteht, so ist

$$V' = \pi \int y^2\, dx = \pi (a x^2 - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $x = a$ doppelt, so erhält man das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3} a^3 \pi$.

I. Um eben so das Volum V desjenigen Körpers zu erhalten, der durch Rotation des Kreisausschnittes ACB um AC entsteht, so hat man zuerst für das Volum V'' des Kegels, der durch Rotation des rechtwinkligen Dreyecks BPC um AC entsteht (nach §. 260, I.):

$$V'' = \tfrac{1}{3} \pi (a - x)(2ax - x^2);$$

und da $V = V' + V''$ ist, so hat man auch für das gesuchte Volum V des Ausschnitts ACB

$$V = \tfrac{2}{3} a^2 \pi x.$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $x = a$ doppelt, so erhält man für das Volum der Kugel $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

II. Ist bad ein dem vorhergehenden concentrischer Kreisbogen des Halbmessers $Ca = a'$, und ist $Cp = x'$, so ist das Volum des Ausschnittes bCp (nach I.)

$$v = \tfrac{2}{3} a'^2 \pi x',$$

also ist auch das Volum des von der Fläche $ABbaA$ um AC beschriebenen Körpers, oder so ist das Volum des gegebenen Theiles einer *Kugelschale*, deren Dicke $a - a'$ ist, gleich

$$V - v = \tfrac{2}{3} \pi (a^2 x - a'^2 x'^2),$$

oder da $\frac{x'}{x} = \frac{a'}{a}$ ist:

$$V - v = \frac{2\pi}{3a}(a^3 - a'^3) \, . \, x.$$

Nimmt man auch diesen Ausdruck für $x = a$ doppelt, so erhält man für das Volum der ganzen Kugelschale:

$$V - v = \frac{4\pi}{3}(a^3 - a'^3);$$

und setzt man in diesem letzten Ausdrucke die Grösse $a' = 0$, so erhält man $\frac{4}{3}a^3\pi$ für das Volum der Kugel, deren Halbmesser a ist, wie zuvor.

III. Um eben so das Volum V des Körpers zu erhalten, der durch Rotation des Kreisabschnittes BDA um seine Chorde BD entsteht, sey $CP = b$, $PB = PD = c$ und $PQ = x$, $QN = y$, so hat man für die Gleichung des Kreises

$$(b + y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by,$$

und daher auch

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2b\int y\,dx.$$

Allein für $x = c$ ist

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arc\,Cos}\frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}bc,$$

also ist auch, wenn $x = c$ genommen wird, das gesuchte Volum

$$V = \tfrac{2}{3}\pi c(2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \, . \operatorname{Arc\,Cos}\frac{b}{a}.$$

Für $b = 0$ ist $c = a$, also auch das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3}a^3\pi$, wie zuvor.

§. 263. (Volum des verlängerten Sphäroids.) Wenn sich eine Ellipse um ihre grosse Axe $2a$ dreht, so hat man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch das Volum des durch diese Rotation entstehenden Sphäroids

$$V = \pi\int y^2 dx = \frac{b^2\pi x}{a^2}(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2),$$

wenn V mit x verschwindet. Wird dieser Ausdruck für $x = a$ doppelt genommen, so erhält man für das Volum des ganzen

Sphäroids

$$V = \frac{4}{3} a b^2 \pi.$$

Für $b = a$ erhält man $V = \frac{4}{3} a^3 \pi$, das Volum der Kugel, wie zuvor.

§. 264. (Volum des abgeplatteten Sphäroids.) Wenn sich eine Ellipse um ihre kleine Axe dreht, so hat man

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

und daher auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int y^2\, dx = \frac{a^2 \pi x}{b^2}\left(b^2 - \tfrac{1}{3} x^2\right).$$

Dieser Ausdruck, für $x = b$ doppelt genommen, gibt das Volum des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$V = \tfrac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Man sieht daraus, daſs sich das Volum des abgeplatteten Sphäroids zu dem des verlängerten wie a zu b verhält.

§. 265. (Volum der cycloidischen Sphäroide.) *A.* Wenn die Cyclois AMD (Fig. 104) sich um die Gerade AB dreht, so hat man, wenn $AP = x$ und $PM = y$ ist:

$$x = a(\varphi - \operatorname{Sin} \varphi),$$
$$y = a(1 - \operatorname{Cos} \varphi),$$

also auch

$$y^2\, dx = a^3\, d\varphi\, (1 - 3 \operatorname{Cos} \varphi + 3 \operatorname{Cos}^2 \varphi - \operatorname{Cos}^3 \varphi),$$

und davon ist das Integral, wenn dasselbe zugleich mit φ verschwinden soll:

$$\int y^2\, dx = a^3 \left(\frac{5\varphi}{2} - \tfrac{15}{4} \operatorname{Sin} \varphi + \tfrac{3}{4} \operatorname{Sin} 2\varphi - \tfrac{1}{12} \operatorname{Sin} 3\varphi\right).$$

Daraus folgt, daſs das Volum jedes Theiles des so entstehenden Körpers ist

$$V = \frac{a^3 \pi}{12}\left[30\varphi - 45 \operatorname{Sin} \varphi + 45 \operatorname{Sin} 2\varphi - \operatorname{Sin} 3\varphi\right].$$

Nimmt man diesen Ausdruck für $\varphi = \pi$ doppelt, so erhält man für das Volum des Körpers, der durch Rotation der ganzen Cyclois ADB um AB entsteht:

$$V = 5 a^3 \pi^2.$$

B. Wenn sich aber dieselbe Cyclois um die Tangente DE des höchsten Punctes D dreht, so hat man

$$x = a(\varphi + \operatorname{Sin}\varphi),$$
$$y = a(1 - \operatorname{Cos}\varphi),$$

und daher auch

$$V' = \pi \int y^2\, dx = \frac{a^3\pi}{12}(6\varphi - 3\operatorname{Sin}\varphi - 3\operatorname{Sin}2\varphi + \operatorname{Sin}3\varphi).$$

Nimmt man diesen Werth für $\varphi = \pi$ doppelt, so erhält man

$$V' = a^3\pi^2$$

für den Körper, der durch Rotation der doppelten Fläche $AMDE$ um DE entsteht, welcher Körper demnach der Axe DE seine convexe Seite zuwendet.

Es ist demnach, wenn man diesen Werth von V' mit dem V der Nr. *A.* vergleicht:

$$V = 5V'.$$

Wenn aber das Rechteck, dessen zwey Seiten AB und AE sind, um dieselbe Axe DE gedreht wird, so entsteht ein Cylinder, dessen Volum gleich $8a^3\pi^2$ ist. Zieht man davon das Volum $V' = a^3\pi^2$ ab, so erhält man

$$7a^3\pi^2$$

für das Volum des Körpers, der durch Rotation der Fläche $AMDBCA$ um DE entsteht.

C. Wenn sich ferner die Cyclois um die Axe CD dreht, so hat man

$$x = a(1 - \operatorname{Cos}\varphi),$$
$$y = a(\varphi + \operatorname{Sin}\varphi),$$

und daher auch

$$y^2\,dx = a^3\,d\varphi\,(\varphi^2\operatorname{Sin}\varphi + 2\varphi\operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Sin}^3\varphi),$$

also auch für das gesuchte Volum

$$V'' = a^3\pi\left[\varphi^2\left(\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\varphi\right) + 2\varphi(\operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}2\varphi) + \tfrac{5}{4}\operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}2\varphi + \tfrac{1}{12}\operatorname{Cos}3\varphi - \tfrac{1}{3}\right].$$

Für $\varphi = \pi$ gibt dieser Ausdruck

$$V'' = \frac{3a^3\pi}{2}\left[\pi^2 - \tfrac{16}{9}\right],$$

oder das Volum des Körpers, der durch Rotation der Fläche $AMDC$ um CD entsteht.

D. Wenn sich endlich die cycloidische Fläche um die Tangente AE im Scheitel A dreht, so ist

$$x = a(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi),$$
$$y = a(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),$$

also auch $V''' = \pi \int y^2\, dx$ oder

$$V''' = a^3\pi\left[\tfrac{5}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\varphi + \tfrac{1}{12}\mathrm{Cos}\,3\varphi - \tfrac{19}{12}\right]$$
$$+ a^3\pi\left[2\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,2\varphi - \varphi^2\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{Cos}\,\varphi\right)\right].$$

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man

$$V''' = 6a^3\pi^3$$

als das Volum des Körpers, der durch Rotation der ganzen Fläche $AMDB$ um AE entsteht.

Noch hat man zwischen diesen Körpern die Gleichung

$$V''' = 6\pi V' = \tfrac{6}{5}\pi V.$$

§. 266. (Anwendung des allgemeinen Ausdrucks (D) auf solche Körper, die nicht durch Rotation entstanden sind.) Wenn ein Körper auch nicht durch Drehung einer Curve um irgend eine Gerade entstanden, wenn er aber doch so beschaffen ist, dafs er, in Beziehung auf eine gerade, durch den Körper gehende Linie, zu beyden Seiten dieser Geraden symmetrisch gebaut ist, so bezeichne X die Fläche des Schnittes, welcher durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene in dem Körper entsteht, und man wird dann diesen Körper, eben so wie in §. 259, I., als aus Cylindern bestehend betrachten können, von welchen die, hier nicht mehr kreisförmige, Basis die erwähnte Fläche X, und die Höhe dx ist, so dafs man daher für das Element aller dieser Körper haben wird

$$dV = \int X \, . \, dx \quad . \; . \; . \quad (E).$$

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die wir schon oben (§. 216.) betrachtet haben, stellt eine solche in Beziehung auf alle drey Coordinatenaxen symmetrische Fläche dar.

Wird diese Fläche z. B. durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene geschnitten, so wird dieser Schnitt, dessen Fläche wir überhaupt X genannt haben, die Gestalt einer Ellipse haben, und da man allgemein hat

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

so sieht man, wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

zusammenstellt, daſs die Halbaxen jenes elliptischen Schnittes sind:

$$b.\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad c.\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

so daſs man daher für die Fläche dieses Schnittes (nach §. 245.) haben wird:

$$X = bc\pi.\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Mit diesem Werthe von X gibt die vorhergehende allgemeine Gleichung:

$$V = \int X dx = bc\pi\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Dieser Ausdruck für $x = a$ doppelt genommen, gibt das Volum des ganzen *Sphäroids mit drey Axen* gleich

$$V = \tfrac{4}{3}abc\pi.$$

Ist $c = b$, so erhält man aus der letzten Gleichung das Volum des verlängerten Sphäroids:

$$V = \tfrac{4}{3}ab^2\pi.$$

Ist aber $c = a$, so hat man für das Volum des abgeplatteten Sphäroids.

$$V = \tfrac{4}{3}a^2b\pi.$$

Ist endlich $c = b = a$, so erhält man für das Volum der Kugel:

$$V = \tfrac{4}{3}a^3\pi,$$

alles übereinstimmend mit Demjenigen, was für diese Körper schon oben gefunden wurde.

Drey und dreyſsigstes Capitel.

Statische Bestimmung der Oberfläche und des Volums der Rotationskörper.

§. 267. (Allgemeine Ausdrücke für diese Bestimmung.) Wir wollen nun annehmen, daſs die krumme Linie, durch deren Rotation um die Axe der x eine Fläche erzeugt werden soll, um irgend einen *innern* Punct derselben, nach allen Richtungen von diesem Puncte aus, symmetrisch gebaut ist, so daſs einem *jeden* Elemente der Curve auf der einen Seite dieses Punctes ein eben so weit von diesem Puncte entferntes zweytes Element auf der anderen entgegengesetzten Seite dieses Punctes entspreche, zwischen welchen beyden Elementen daher dieser Punct in der Mitte liegen wird. Da dasselbe, des vorausgesetzten symmetrischen Baues dieser Curve gemäſs, von jedem correspondirenden Elementenpaare der Curve, in Beziehung auf denselben inneren Punct, gelten soll, so wird dieser Punct als der *Mittelpunct* der ganzen Curve zu betrachten seyn, wie dieſs z. B. in dem Kreise, in der Ellipse, in der Astrois u. ſ. der Fall ist.

Sey $MQ'M'$ (Fig. 105) eine solche symmetrische Curve, und C ihr Mittelpunct, so wie MCM' irgend eine durch diesen Mittelpunct gehende Sehne oder ein Durchmesser der Curve. Man ziehe in der Ebene dieser Curve, *auſser derselben*, die Gerade PAP' in einer willkürlichen Richtung, und nehme diese Gerade für die Axe der x an, so daſs die von den Puncten M, C, M' auf diese Gerade gefällten Lothe die Ordinaten dieser Curve bezeichnen. Noch sey CQ und $M'Q'$ mit der Abscissenaxe PP' parallel.

Da für die symmetrische Curve, der Voraussetzung gemäſs, die Distanz der beyden Puncte M und M' von dem Mittelpuncte C gleich groſs, oder da $CM = CM'$ ist, so hat man auch in den beyden rechtwinkligen Dreyecken CMQ und $CM'Q'$ die Seite

$QM = Q'C$. Bezeichnet man daher durch y die Ordinaten PM und PM' von je zwey zusammengehörenden Puncten M und M' der Curve, und nennt man Y die Ordinate AC ihres Mittelpunctes C, so hat man

$$PM = AC + QM \text{ und}$$
$$P'M' = AC - Q'C,$$

also auch, wenn man diese beyden Gleichungen addirt, da $PM = P'M' = y$ und $AC = Y$, so wie $QM = Q'C$ ist:

$$y = Y,$$

und daher auch, da das Element ds des Bogens in dem Puncte M dasselbe mit dem in M' ist:

$$y\,ds = Y\,ds.$$

Nimmt man aber die Summe aller dieser Ausdrücke für jedes Punctenpaar der Curve, so hat man

$$\int y\,ds = \int Y\,ds,$$

oder da $Y = AC$ eine constante Gröſse, also auch

$$\int Y\,ds = Y \int ds,$$

und da überdieſs $\int ds$ oder s den Umfang der ganzen Curve bezeichnet:

$$\int Y\,ds = Ys,$$

oder endlich

$$\int y\,ds = Ys.$$

Allein nach §. 252 (Gleichung C) hat man für die Oberfläche Φ eines jeden Rotationskörpers, wenn die Drehungsaxe zugleich die Axe der x ist, den Ausdruck

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds,$$

also ist auch, wenn man in diesem Ausdrucke den erhaltenen Werth von $\int y\,ds = YS$ substituirt:

$$\Phi = 2\pi \,.\, YS \quad . \quad . \quad . \quad \text{(F)},$$

wo S den Umfang der ganzen Curve, und Y den senkrechten Abstand ihres Mittelpunctes von der Rotationsaxe bezeichnet.

I. Man sieht aus dieser Darstellung, daſs der erhaltene Werth von Φ immer derselbe bleibt, welche Lage auch die Curve um ihren Mittelpunct C einnimmt, wenn nur die senkrechte Distanz Y ihres Mittelpunctes von der Drehungsaxe nicht geändert wird.

II. Derselbe Schlufs wird sich auch auf das Volum derjenigen Körper anwenden lassen, welche durch Rotation der Fläche einer symmetrischen Curve um irgend eine Axe entstehen. Wie nämlich, nach der Gleichung (F), die Oberfläche dieser Körper als das Product des Umfangs S der Curve in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser Y ist, betrachtet worden ist, so wird auch das Volum V dieser Körper durch das Product der Fläche F dieser Curve (die man nach Cap. 30 findet) in die Peripherie $2\pi Y$ desselben Kreises dargestellt werden, so dafs man demnach für das Volum dieser Körper den Ausdruck haben wird:

$$V = 2\pi . YF \quad . \quad . \quad . \quad \text{(G)}.$$

In der Statik oder in der Lehre von dem Gleichgewichte der Körper ist dieser Mittelpunct unter der Benennung des *Schwerpunctes* bekannt.

Gehen wir nun zu der Anwendung der beyden allgemeinen Gleichungen (F) und (G) über, und betrachten wir zuerst einige einfache geradlinige Figuren.

§. 268. (Körper, die durch Rotation eines regelmäfsigen Dreyeckes entstehen.) Ist a der Halbmesser des Kreises, der einem regelmäfsigen, d. h. einem gleichseitigen Dreyecke umschrieben ist, so hat man (nach §. 121.) die Seite dieses Dreyeckes gleich $a\sqrt{3}$, also auch für den Umfang S und die Oberfläche F desselben

$$S = 3a\sqrt{3} \quad \text{und} \quad F = \tfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Nennt man daher $Y = d$ die senkrechte Distanz des Mittelpunctes dieses Dreyeckes von seiner Rotationsaxe, so hat man für die Oberfläche Φ, und für das Volum V des Körpers, der durch Rotation des gleichseitigen Dreyeckes um jene Axe entsteht, nach den Gleichungen (F) und (G) die Ausdrücke

$$\Phi = 6ad\pi\sqrt{3} \quad \text{und}$$
$$V = \tfrac{3}{2}a^2 d\pi\sqrt{3}.$$

I. Dreht sich demnach das Dreyeck ABC (Fig. 106) um eine durch seinen Scheitel C mit der Basis AB parallel gehende Axe, so ist $d = a$, also auch

$$\Phi' = 6a^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und} \quad V' = \tfrac{3}{2}a^3\pi\sqrt{3},$$

oder auch, wenn $b = a\sqrt{3}$ die Seite des Dreyecks bezeichnet:

$$\Phi' = 2b^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und} \quad V' = \tfrac{1}{2}b^3\pi.$$

II. Dreht sich aber dasselbe Dreyeck um seine Basis AB, so ist $d = \frac{1}{2}a$, und daher

$$\Phi'' = 3a^2\pi\sqrt{3} = b^2\pi\sqrt{3} \quad \text{und}$$
$$V'' = \tfrac{3}{4}a^3\pi\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}b^3\pi.$$

§. 269. (Rotation des regelmäſsigen Vierecks.) Ist a der Halbmesser des dem Quadrate umschriebenen Kreises, so ist die Seite desselben $b = a\sqrt{2}$, der Umfang $S = 4a\sqrt{2}$ und die Fläche $F = 2a^2$. Bezeichnet daher wieder, hier und in der Folge, d den senkrechten Abstand des Mittelpunctes der Figur von der Rotationsaxe, so ist

$$\Phi = 8ad\pi\sqrt{2} \quad \text{und}$$
$$V = 4a^2d\pi.$$

I. Dreht sich daher das Quadrat $ABCD$ (Fig. 107) um eine seiner Seiten AB, so ist $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$, und daher

$$\Phi' = 8a^3\pi = 4b^2\pi \quad \text{und}$$
$$V' = 2a^3\pi\sqrt{2} = b^3\pi.$$

II. Dreht sich aber dasselbe Quadrat um eine Gerade ab (Fig. 108), die durch eine Spitze A des Quadrats parallel mit der Diagonale BD geht, so hat man $d = a$, und daher

$$\Phi'' = 8a^2\pi\sqrt{2} = 4b^2\pi\sqrt{2} \quad \text{und}$$
$$V'' = 4a^3\pi = b^3\pi\sqrt{2}.$$

§. 270. (Rotation des regelmäſsigen Fünfecks.) Ist wieder a der Radius dieses Polygons, so ist (§. 121, III.) die Seite desselben

$$a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

und daher der Umfang des Fünfecks

$$S = 5a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

und die Fläche desselben

$$F = \frac{5a^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Mit diesen Werthen erhält man aus den Gleichungen (F) und (G) für die Oberfläche und das Volum des durch Rotation dieses Polygons entstandenen Körpers:

$$\Phi = 10\, a\, d\, \pi \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

$$V = \tfrac{5}{2}\, a^2\, d\, \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

I. Wird dieses Fünfeck um eine seiner Seiten gedreht, so ist

$$d = \tfrac{1}{4} a (1 + \sqrt{5}),$$

und daher

$$\Phi' = 5\, a^2 \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}},$$

$$V' = \tfrac{5}{4} a^3 \pi \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

II. Wird es aber um eine Gerade gedreht, die durch eine Spitze des Polygons senkrecht auf den Radius desselben geht, so ist $d = a$, und daher

$$\Phi'' = 10\, a^2 \pi \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

$$V'' = \tfrac{5}{2}\, a^3 \pi \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Eben so erhält man für das regelmäſsige Sechseck, wenn a den Radius, oder was dasselbe ist, die Seite desselben bezeichnet:

$$S = 6a \quad \text{und} \quad F = \tfrac{3}{2} a^2 \sqrt{3},$$

und daher auch

$$\Phi = 12\, a\, d\, \pi \quad \text{und} \quad V = 3\, a^2\, d\, \pi \sqrt{3}.$$

§. 271. (Rotation des Kreises.) Wenn der Kreis des Halbmessers a um eine gerade, auſser ihr liegende Linie gedreht wird, so hat man für den Umfang des Kreises

$$S = 2\, a\, \pi,$$

und für die Fläche desselben

$$F = a^2 \pi,$$

also ist auch, wenn d den senkrechten Abstand des Mittelpunctes von jener Rotationsaxe bezeichnet:

$$\Phi = 4\, a\, d\, \pi^2 \quad \text{und}$$

$$V = 2\, a^2\, d\, \pi^2.$$

Ist $d = a$ oder wird der Kreis um eine seiner Tangenten gedreht, so hat man

$$\Phi' = 4\, a^2 \pi^2 \quad \text{und}$$

$$V' = 2\, a^3 \pi^2,$$

und die beyden letzten Ausdrücke geben die Complanation und die Cubatur desjenigen Körpers, dessen Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{a^2-z^2} = a$$

wir bereits oben (§. 224, II. und §. 225, Ex. I.) mitgetheilt haben.

I. Eben so hat man für die Fläche F der Ellipse, deren Halbaxen a und b sind (nach §. 245.):

$$F = ab\pi.$$

Wird diese Ellipse um ihre Tangente im Endpuncte der groſsen Axe gedreht, so ist $d = a$, und daher

$$V'' = 2a^2 b\pi^2.$$

Wird sie aber um ihre Tangente im Endpuncte der kleinen Axe gedreht, so ist $d = b$ und

$$V''' = 2ab^2\pi^2.$$

Setzt man in den beyden letzten Ausdrücken von V'' und V''' die Gröſse $b = a$, so erhält man

$$V' = 2a^3\pi^2$$

für die Rotation des Kreises um seine Tangente, wie zuvor.

§. 272. (Rotation der Lemniscate.) Für diese Curve haben wir oben (§. 247.) gefunden

$$F = 2a^2,$$

wo (Fig. 89) $AC = AB = a\sqrt{2}$ ist. Da der Mittelpunct dieser Curve in dem Anfangspuncte A der Coordinaten liegt, so hat man, wenn die Drehungsaxe durch den Scheitel B senkrecht auf die Abscissenaxe BC geht:

$$Y = AB = a\sqrt{2}, \text{ also auch}$$
$$V = 2\pi . YF = 4a^3\pi\sqrt{2}.$$

Da ferner der gröſste Werth der Ordinate $PM = P'M' = y$ zu beyden Seiten des Anfangspunctes A gleich $\frac{1}{2}a$ ist, so hat man, wenn die Rotationsaxe MM' durch die Endpuncte M und M' dieser zwey gröſsten Ordinaten parallel mit BC geht:

$$Y = \tfrac{1}{2}a, \text{ und wie zuvor } F = 2a^2,$$

also auch für den so entstehenden Rotationskörper

$$V' = 2a^3\pi.$$

§. 273. (Rotation der Astrois.) Für diese Curve haben wir oben (§. 235. und 248.) gefunden

$$S = 6a \quad \text{und} \quad F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Ist also wieder d der senkrechte Abstand des Mittelpunctes

A (Fig. 90) der Astrois von der Rotationsaxe, so ist

$$\Phi = 12\, a\, d\, \pi \quad \text{und}$$

$$V = \tfrac{3}{4}\, a^2\, d\, \pi^2.$$

Wird die Astrois um eine Gerade gedreht, die durch den Punct D oder E parallel mit der Abscissenaxe BC geht, so ist $d = a$, und daher

$$\Phi' = 12\, a^2\, \pi,$$

$$V' = \tfrac{3}{4}\, a^3\, \pi^2.$$

Geht aber die Rotationsaxe durch zwey benachbarte Spitzen C und E, oder C und D der Curve, so ist $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$, und daher

$$\Phi'' = \frac{12\, a^2\, \pi}{\sqrt{2}},$$

$$V'' = \frac{3\, a^3\, \pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

§. 274. (Rotation der Cyclois.) Obschon uns der Ort des Mittelpunctes für diese Curve sowohl als auch für ihre Fläche nicht gegeben ist, so ist doch bekannt, dafs er irgendwo in der Geraden CD (Fig. 104) liegen mufs, weil die Curve zu beyden Seiten dieser Geraden symmetrisch vertheilt ist.

Nimmt man daher die Rotationsaxe mit dieser Geraden CD parallel und von ihr um die senkrechte Distanz d entfernt an, so wird man, da (nach §. 238. und 249.)

$$F = 3\, a^2\, \pi \quad \text{und} \quad S = 8\, a$$

ist, für den so entstehenden Rotationskörper die Ausdrücke haben:

$$\Phi = 16\, a\, d\, \pi,$$

$$V = 6\, a^2\, d\, \pi^2.$$

Ist daher die Rotationsaxe zugleich die Tangente AB im Scheitel A der Cyclois, so ist $d = CA = a\,\pi$, und daher

$$\Phi' = 16\, a^2\, \pi^2,$$

$$V' = 6\, a^3\, \pi^3,$$

übereinstimmend mit §. 258, D. und §. 265, D.

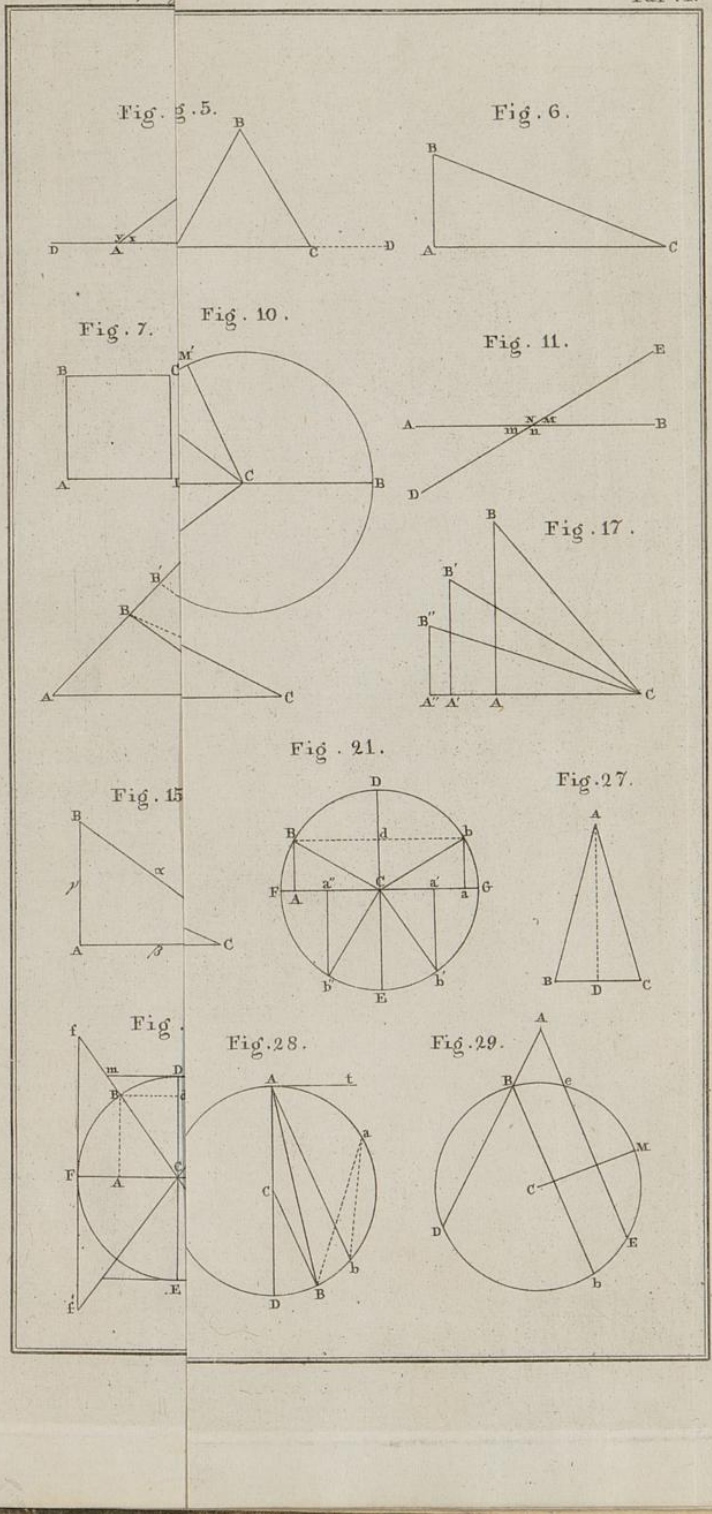


Fig. g.5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 17.
Fig. 21.
Fig. 27.
Fig. 15
Fig.
Fig. 28.
Fig. 29.

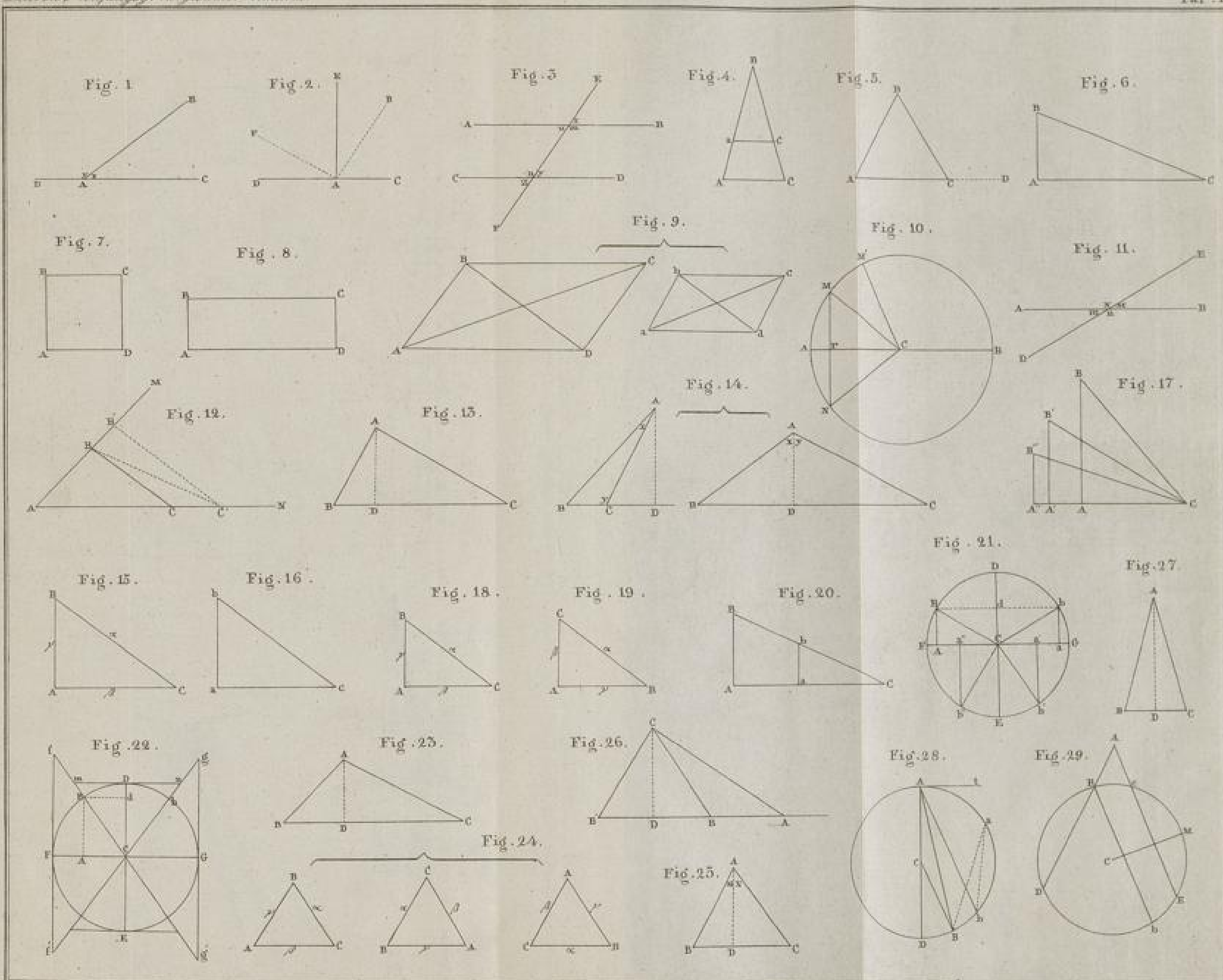
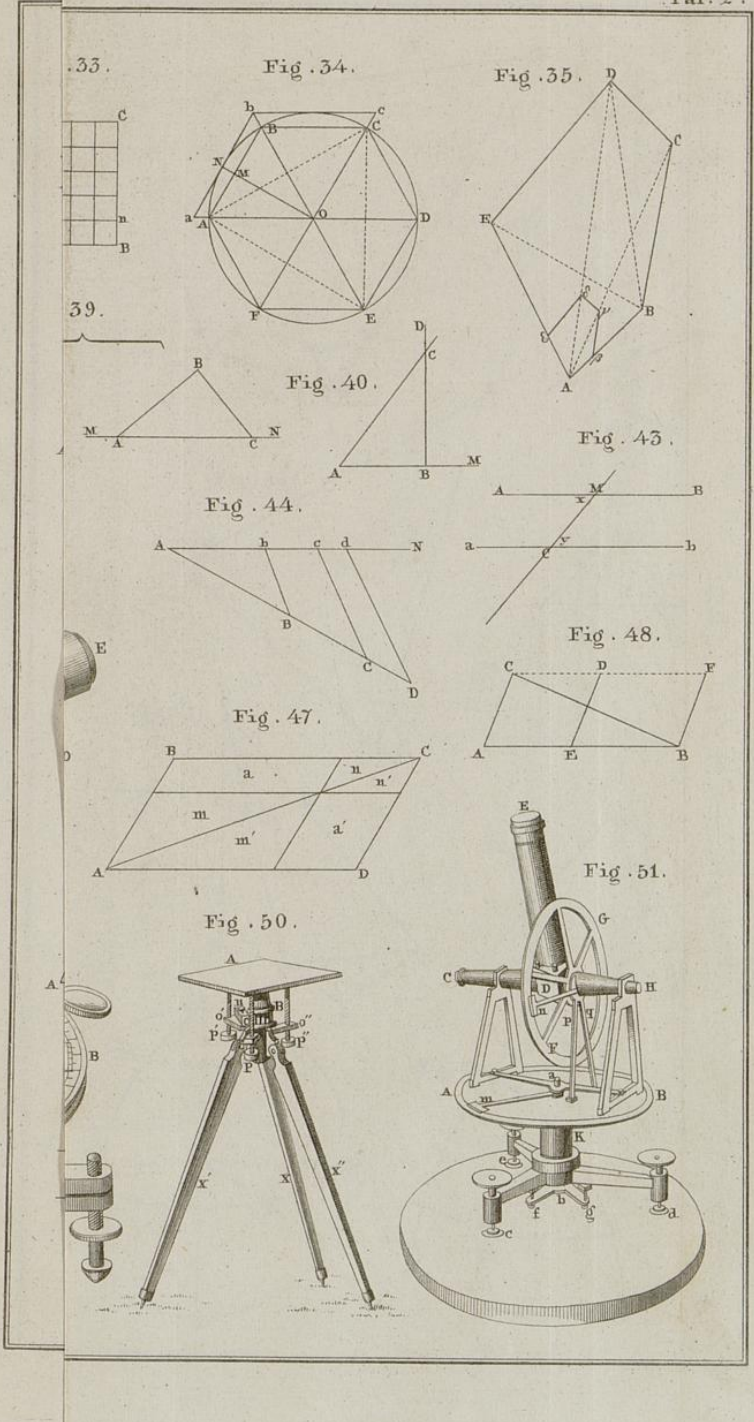


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.


.33.
Fig. 34.
Fig. 35.
39.
Fig. 40.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 48.
Fig. 47.
Fig. 51.
Fig. 50.

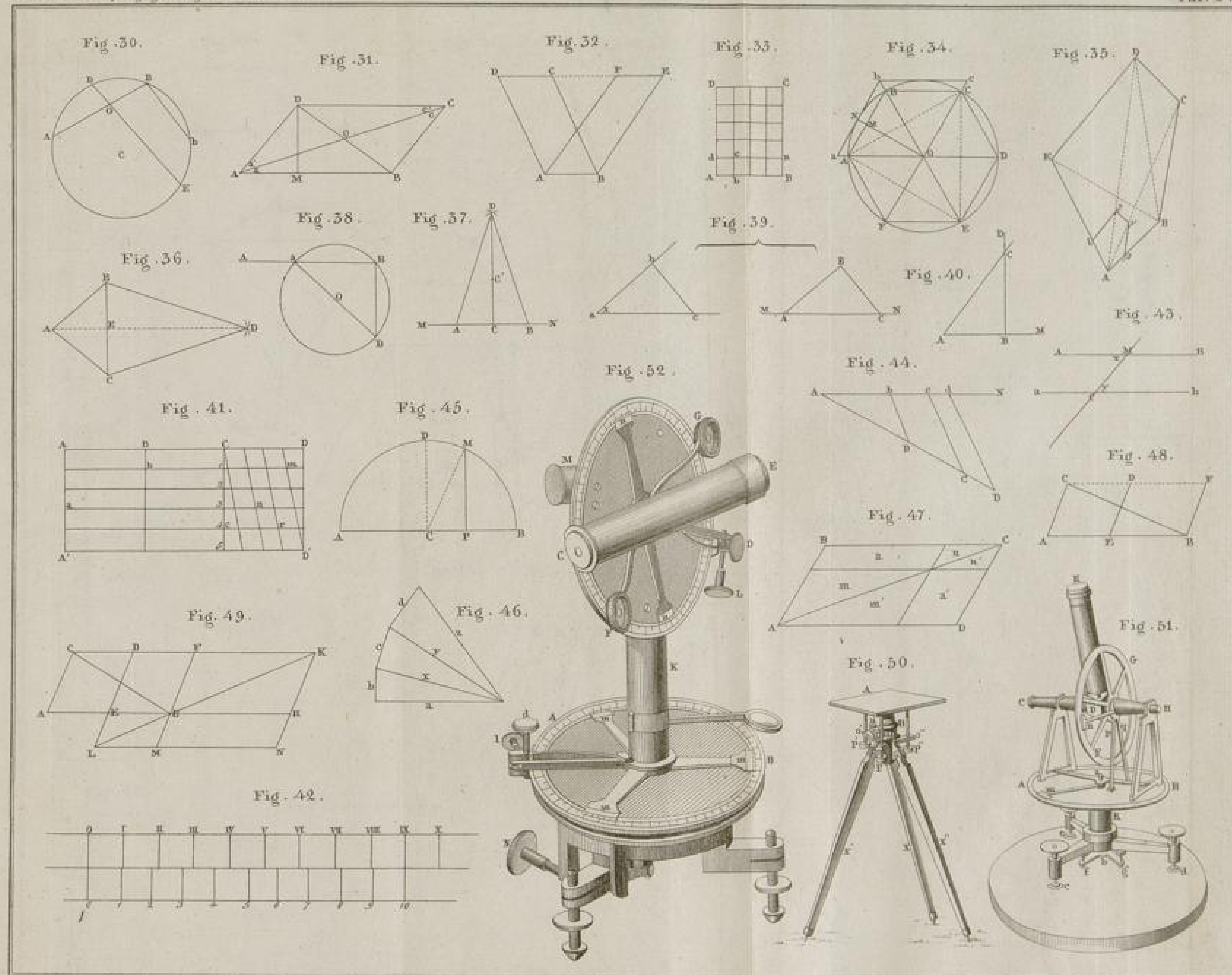


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.

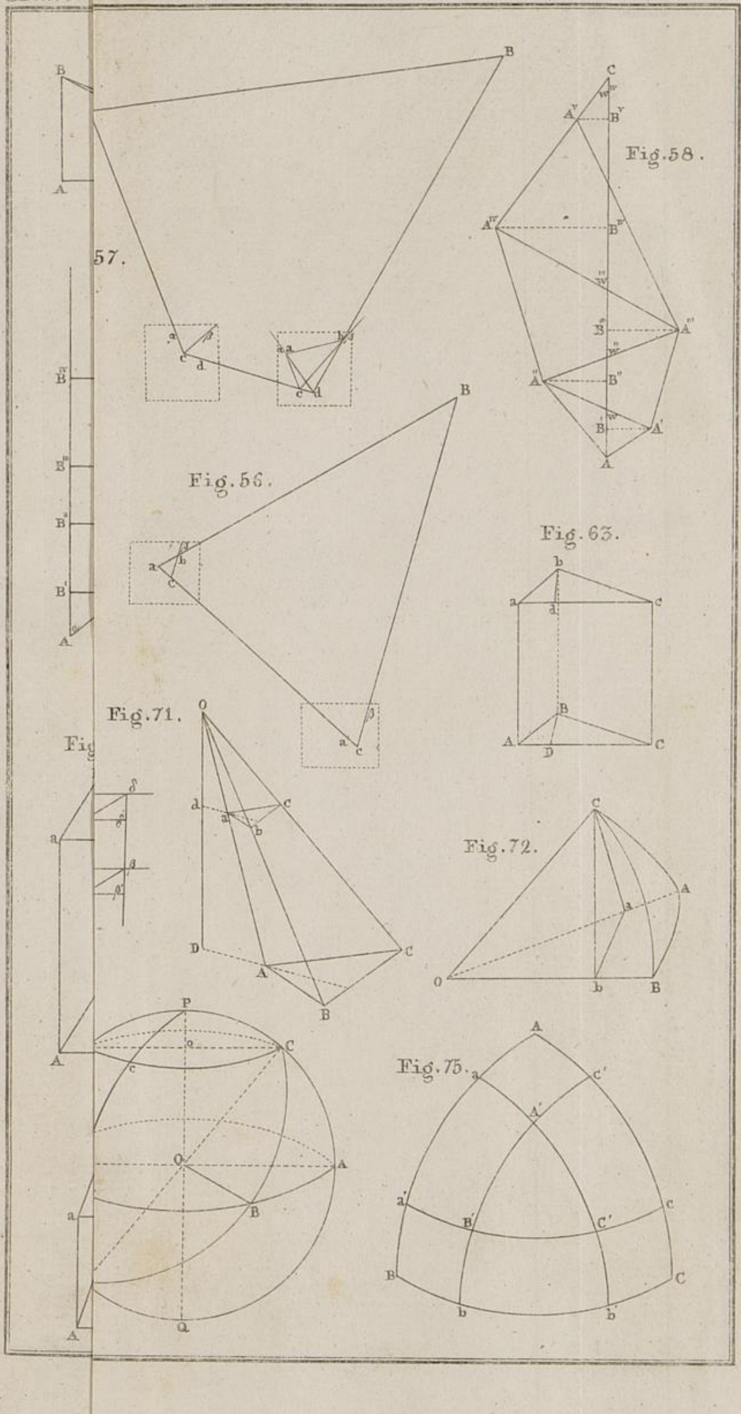


Fig. 56.

57.

Fig. 58.

Fig. 63.

Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 75.

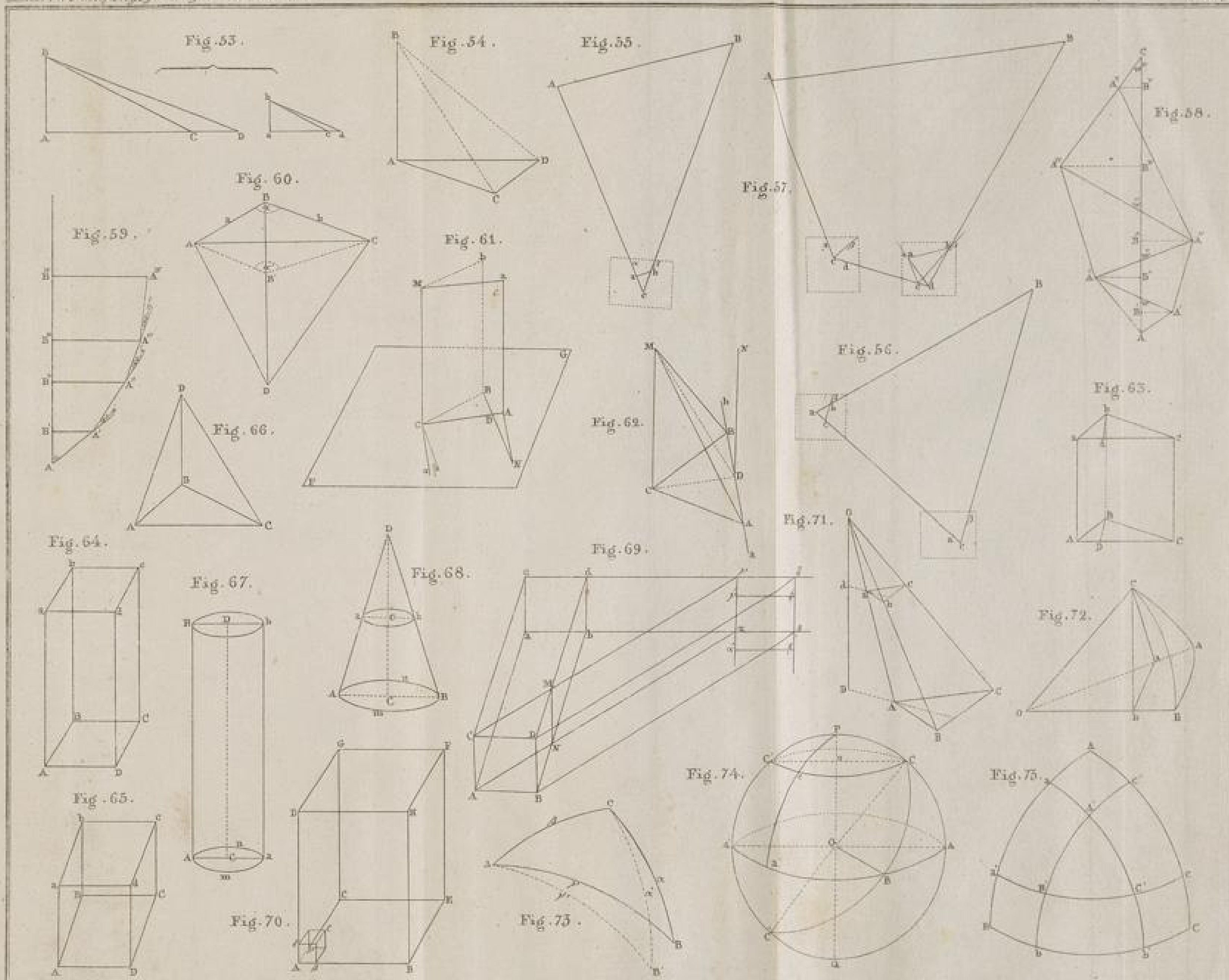


Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 56.
Fig. 63.
Fig. 66.
Fig. 64.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 65.
Fig. 70.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.

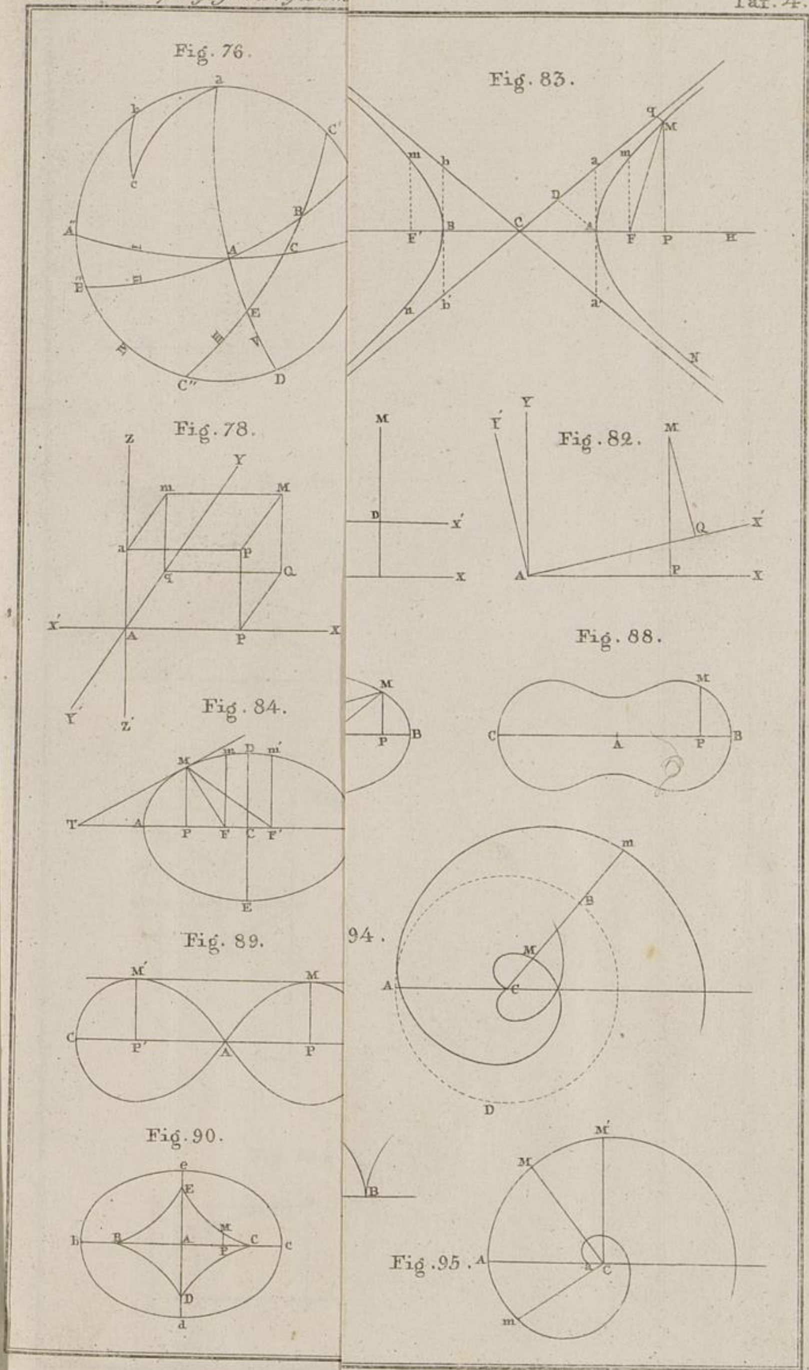


Fig. 76.
Fig. 83.
Fig. 78.
Fig. 82.
Fig. 88.
Fig. 84.
Fig. 89.
94.
Fig. 90.
Fig. 95.

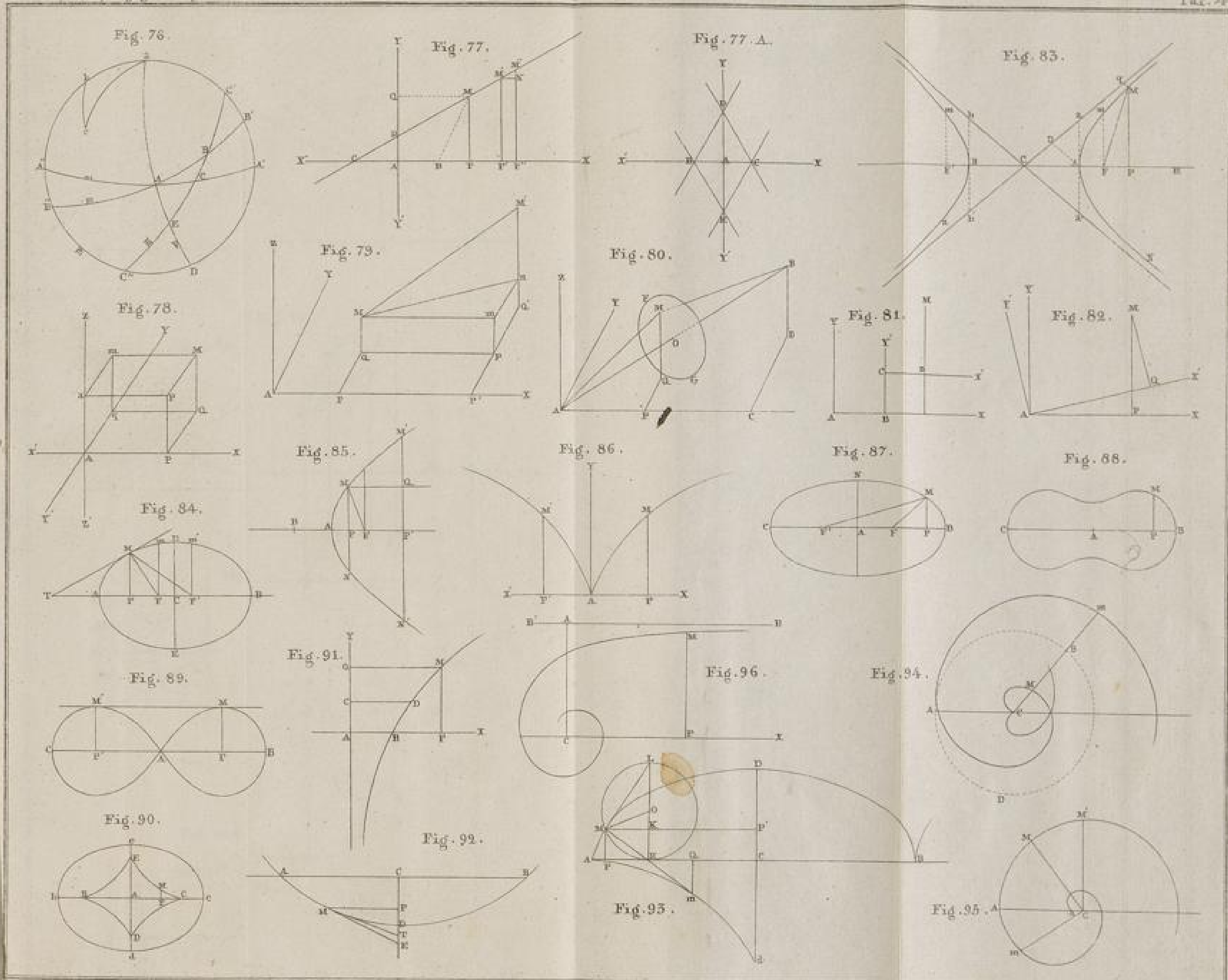


Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 77. A.
Fig. 83.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 78.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 84.
Fig. 89.
Fig. 91.
Fig. 96.
Fig. 94.
Fig. 90.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 95.

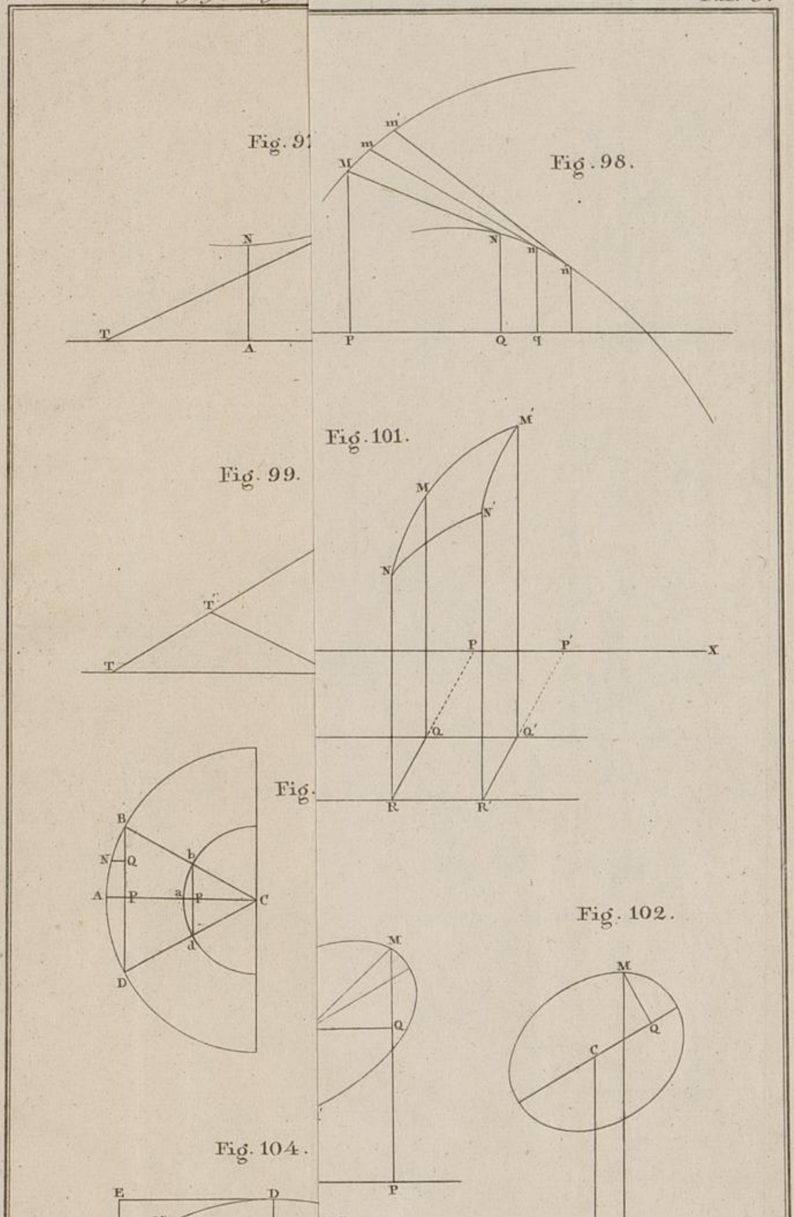


Fig. 97. Fig. 98. Fig. 99. Fig. 101. Fig. Fig. 102. Fig. 104. 105.

Fig. 97.

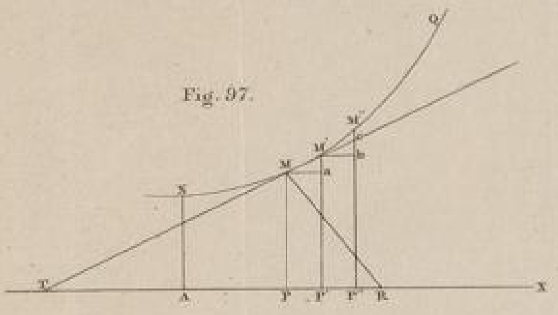


Fig. 97. A

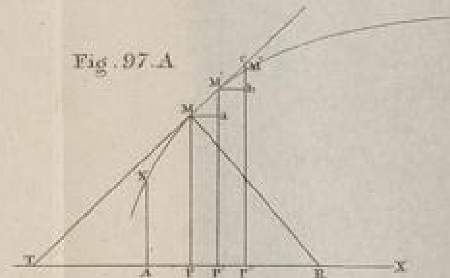


Fig. 98.

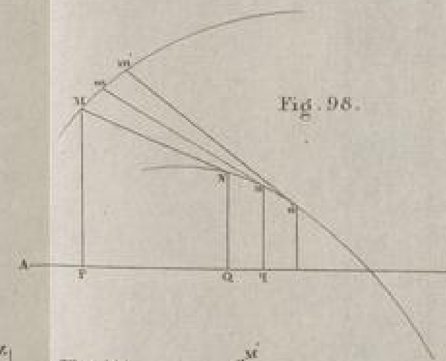


Fig. 99.

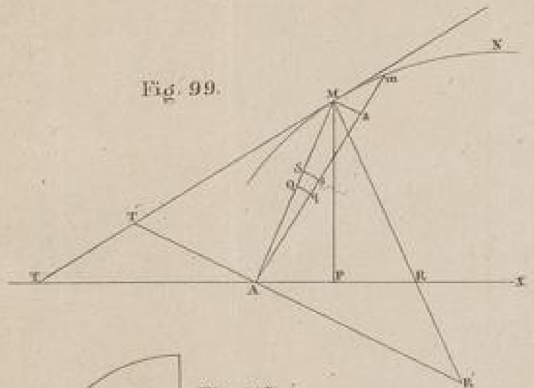


Fig. 100.

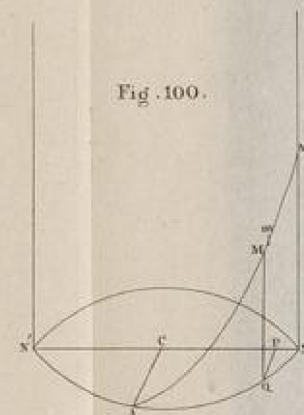


Fig. 101.

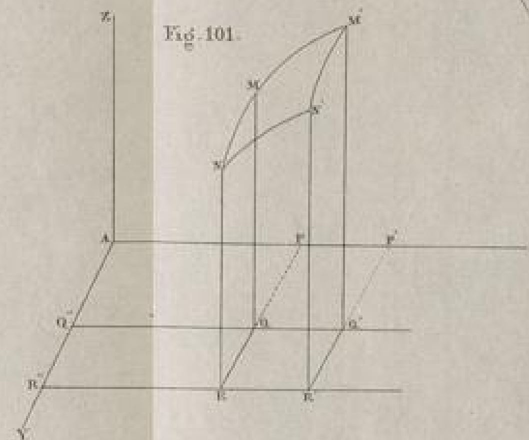


Fig. 103.

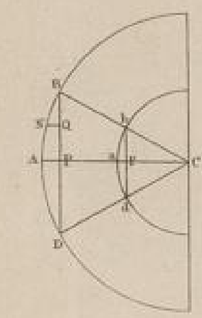


Fig. 106.

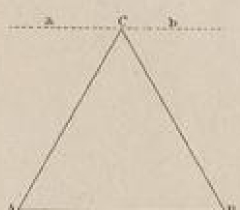


Fig. 107.

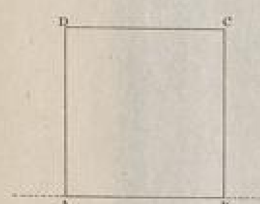


Fig. 108.

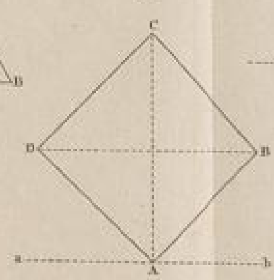
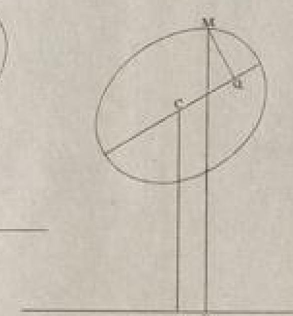


Fig. 102.



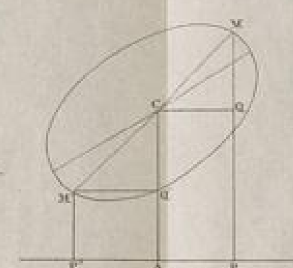


Fig. 105.

Fig. 104.