Kurzgefaßte Anweisung

zur

Algebra,

zum Schul- und Privat-Gebrauch

von

Daniel Schürmann,

Schullehrer in Remscheid.

Barmen, gedruckt in der von Eickenschen Buchdruckerei
und zu haben bei dem Verfasser
1805.

Vorrede.

Daß die Algebra nützlich, ja in manchen Fällen nöthig und unentbehrlich ist, mag hier, statt eines weitläuftigen Beweises, auch nur ein flüchtiger Ueberblick der in diesem Werkchen enthaltenen Aufgaben und Auflösungen bezeugen.

„Aber die Algebra ist schwer zu erlernen.“

Dieses Vorurtheil, dem ich so gerne das Gegentheil entgegen setzen möchte, hat freilich bisher manchen Freund der Rechenkunst von der Erlernung der Algebra zurück gehalten. Die mathematische Lehrart, so gut und vortrefflich sie auch an sich ist, und die man deßhalb auch in algebraischen Schriften findet, mag vielleicht vieles mit dazu beigetragen haben. Nach derselben wird der Anfang der Algebra mit den Erklärungen der vorkommenden Zeichen, Namen und Redensarten gemacht. Statt Ziffern und Zahlen, an die man bisher gewöhnt war, werden Buchstaben, als allgemeine Größen, gebraucht. Hierauf kommen der Ordnung nach die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchstaben, Regeln und Beweisen, gleich anfangs vor. Kein Wunder also, daß mancher Anfänger, besonders der junge Schüler, schon jetzt, gleichsam auf halbem Wege, wieder zurück tritt, weil ihm dieses alles fremd, mühsam und unverständlich vorkommt, und noch keine nützliche Anwendung davon machen und einsehen kann.

Nachdem auch ich Erfahrungen der Art gemacht hatte, schlug ich einen andern Weg ein, und suchte den Anfänger der Algebra nur mit den nöthigsten Zeichen und Ausdrücken bekannt zu machen, und ihn dann sogleich mit der Auflösung der leichtesten Gleichungen und Aufgaben zu beschäfftigen. Er bekam dadurch Geschmack an der Algebra, und setzte nun mit desto größerer Lust auch das übrige durch, welches ich nur gelegentlich, wie es nöthig ward, nachholte.

Diese Methode entsprach nun meiner Absicht und Erwartung ganz: daher habe ich sie denn auch in dieser kurzgefaßten Anweisung zum Grunde gelegt und befolgt, und zweifele nicht, sie wird beim Unterricht in den Schulen brauchbar, auch selbst beim Privatgebrauch ohne mündliche Belehrung instructiv, leicht und angenehm gefunden werden.

Sollen den nun künftig alle Rechenschüler die Algebra erlernen? — Dieses kann die Meynung gar nicht seyn. Ich wenigstens bestimme keinen Schüler dazu. Nur diejenigen, welche die gemeine Rechenkunst und Geometrie bis zur nöthigen Fertigkeit geübt, und nun noch Zeit haben, länger auf die Schule zu gehen, pflege ich in der Algebra zu unterrichten; und auch nur in dem Fall, wenn sie Lust und Fähigkeit merken laßen, und sich zur Erlernung der Algebra melden. Ein solcher Fall trat denn auch noch im letzt verwichenen Monat

Februar ein; und als ich bei der Gelegenheit abermals den Mangel einer zum Schulgebrauch zweckmäßigen und wohlfeilen schriftlichen Anleitung empfand, so veranlaßte mich dieses, den schon vorlängst gefaßten Gedanken auszuführen, und diese kurzgefaßte Anweisung zur Algebra zum Schul- und Privat-Gebrauch, die sich an mein Practisches Schulbuch der gemeinen Rechenkunst und Geometrie ꝛc. anschließen läßt, herauszugeben.

Ich wünsche, daß dieses Werkchen denen, die Gebrauch davon machen, nützlich werden möge.

Remscheid
den 24. May 1805.

Der Verfasser.

Von der Algebra überhaupt,
und einigen dazu gehörigen Erklärungen.

1. Die Algebra ist eine Wissenschaft, unbekannte Größen, aus bekannten oder gegebenen Eigenschaften derselben, vermittelst gewisser Gleichungen, auf eine allgemeine Art zu finden; daher sie auch die allgemeine Rechenkunst genennet wird.

2. Man bedienet sich dabei nicht nur der gewöhnlichen Zahlen und Zeichen der Rechenkunst; sondern auch der Buchstaben des lateinischen Alphabets, als allgemeine Zeichen der Größen. In diesem Fall benennet man die bekannten oder gegebenen Zahlen und Größen mit den erstern Buchstaben des Alphabets: a, b, c, d, 2c.; hingegen die unbekannten oder zu suchende Zahlen und Größen mit den letztern Buchstaben: p, q, x, y oder z.

3. Das Zeichen der Gleichheit sind zwei horizontale Parallellinien $=$. Das Zeichen der Addition ist $+$, und wird plus oder mehr; das Zeichen der Subtraction aber, ein kleiner Querstrich ohne Punkte $-$, wird minus oder weniger ausgesprochen. $8+4=12$ heißt also: 8 plus oder mehr 4 ist gleich 12. $6a-2a=4a$ wird gelesen: 6a minus oder weniger 2a ist gleich 4a. Das Zeichen der Multiplication ist entweder ein Punct . , oder ein schrägliegendes Kreuz $\times$, und wird mal ausge-

sprochen. Sollen Buchstaben mit einander multiplicirt werden, so setzt man sie ohne einiges Zeichen neben einander. ab heißt also: a mit b multiplicirt. Sollen mehrere Zahlen oder Größen mit einander multiplicirt werden, so zeigt man die Multiplication dadurch an, daß man sie mit Einschaltungs-Zeichen einschließt, und den Multiplicator vor oder hinter die Einschaltung setzt. $(6+2)\,4=32$. $(a-b)\,c=d$. Das erste Beispiel wird gelesen: 6 plus 2 multiplicirt mit 4, ist gleich 32; das andere: a minus b multiplicirt mit c ist gleich d. Wenn Buchstaben Zahlen vor sich stehen haben, so werden diese Zahlen Coefficienten oder Mitzähler genannt. Bei $4x$ heißt die 4: Coefficient oder Mitzähler. Das Zeichen der Division sind zween über einander stehende Punkte :, oder man schreibet die Größen, welche einander dividiren sollen, wie einen Bruch, nämlich den Dividenden über den Querstrich, und den Divisor unter denselben, und zeigt also die Division dadurch an.

$$\frac{8+4}{2}=6. \qquad \frac{(4x-2a)\,b}{c}=12\,d.$$

Das erste Beispiel wird gelesen: 8 plus 4, dividirt durch 2, ist gleich 6; das andere: $4x$ minus $2a$, multiplicirt mit b, dividirt durch c, ist gleich $12d$.

4. Diejenigen Größen, welche das Zeichen + vor sich stehen haben, werden positive oder wirkliche; die aber das Zeichen — haben, negative oder mangelnde Größen genannt. Eine Größe ohne vorstehendes Zeichen, wird allemal als positiv betrachtet. Die positiven Größen kann man sich als habende Baarschaft, hingegen die negativen als Schuld vorstellen.

Von den Gleichungen.

1. Ein Ausdruck, daß Zahlen oder Größen einander gleich seyen, wird Gleichung genannt. $12+4=16$. $a-b=c$, wird gelesen: 12 plus 4, ist gleich 16. a minus b, ist gleich c.

1. Uebung.

Wie werden folgende Gleichungen gelesen?

$20-8=12$. $\qquad 2x+a=b$.

$(12+4)5=80$. $\qquad (a-b)c=d$.

$\frac{(16+4)3}{5}-4=8$. $\qquad \left(\frac{x-a}{b}+c\right)d=n$.

2. Die Wage ist ein sinnliches Bild von einer Gleichung. Liegt in beiden Wagschalen gleich schwer, so steht die Wage im Gleichgewicht oder horizontal. Ist in einer Schale mehr, als in der andern, so kann die Wage auf zweierlei Art ins Gleichgewicht gebracht werden: entweder, man nimmt das, was in der einen Schale mehr ist heraus, oder man legt auf der leichten Seite so viel hinzu, als die eine mehr hat. Liegt z. B. in der einen Schale ein 8= und 4 pfündiger Stein, und in der andern 12 ℔: so steht die Wage im Gleichgewicht, und dieses drückt man so aus: $8+4=12$. Sind aber in der einen Schale 8, 4 und 2 ℔, und in der andern nur 10 ℔: so nimmt man entweder aus der einen 4 ℔ heraus, oder legt in der andern 4 ℔ zu, um die Wage ins Gleichgewicht zu bringen. Dieses wird dann so ausgedrückt: $8+4+2-4=10$; oder $8+4+2=10+4$.

3. Bei den Gleichungen hat man folgende Grundsätze wohl zu merken:

I. Wenn man Gleiches zu Gleichem addirt: so kommen auch gleiche Summen heraus, als:

$$\begin{array}{rrcl} & 8 & = & 8 \\ \text{addirt} & 4 & = & 4 \\ \hline & 12 & = & 12 \end{array}$$

II. Wenn man Gleiches von Gleichem subtrahirt: so bleiben auch gleiche Reste übrig, als:

$$\begin{array}{rrcl} & 12 & = & 12 \\ \text{subtrah.} & 4 & = & 4 \\ \hline & 8 & = & 8 \end{array}$$

III. Wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt: so kommen auch gleiche Producte heraus, als:

$$\begin{array}{rrcl} & 8 & = & 8 \\ \text{multipl. mit} & 3 & = & 3 \\ \hline & 24 & = & 24 \end{array}$$

IV. Wenn man Gleiches durch Gleiches dividirt: so kommen auch gleiche Quotienten heraus, als:

$$\begin{array}{rrcl} \text{divid. durch } 3) & 24 & = & 24 \\ \hline & 8 & = & 8 \end{array}$$

V. Wenn zwo Zahlen oder Größen einer dritten gleich sind: so sind sie einander auch selber gleich, als:

$12 = 8 + 4$ und $12 = 7 + 5$

Hier ist auch $8 + 4 = 7 + 5$, weil diese beiden Größen der dritten Größe 12 gleich sind.

Von Auflösung der Gleichungen.

Bei algebraischer Auflösung der Aufgaben bestehen die Gleichungen aus bekannten und aus unbekannten Größen.

Erstes Beispiel.

In einer gleichstehenden Wage befindet sich in der einen Wagschale ein 8 pfündiger, und auch ein unbekannter Stein, dessen Gewicht man nicht weiß; in der andern aber 12 ℔: Wie schwer wird demnach der unbekannte Stein wohl seyn?

Auflösung.

Man nenne ihn x: so bekommt man folgende Gleichung: $x + 8 = 12$

Um nun das Gewicht von dem unbekannten Stein zu finden, so muß man die Gleichung auf x bringen, und folglich die bekannte Größe 8 wegschaffen. Dieses geschiehet aber, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung 8 subtrahirt, als:

$$\begin{array}{rcl} x + 8 & = & 12 \\ -\ 8 & & -\ 8 \\ \hline x & = & 4 \end{array}$$ ℔ der unbek. Stein.

Zweites Beispiel.

Welches ist der Werth von x in folgender Gleichung?

$$\begin{array}{rcl} x + 8 - 6 & = & 32 \\ +\ 6 & & +\ 6 \\ \hline x + 8 & = & 38 \\ -\ 8 & & -\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Antw. $x = 30$

Anmerk. Man siehet hieraus, daß eine negative Größe durch das entgegengesetzte Zeichen +, und eine positive Größe durch das entgegengesetzte Zeichen — auf die andere Seite der Gleichung weggeschafft wird.

2. Uebung.

Welches ist der Werth von x in folgenden Gleichungen?

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & x + 7 = 35 \\ 2. & x - 12 = 16 \\ 3. & x + 6 - 10 = 24 \\ 4. & x - 7 + 9 = 30 \end{array}\right\} \text{Antw. } 28.$$

5. Suchet eine Zahl, wenn man 12 dazu addirt, und von der Summe 16 subtrahirt, daß noch 24 übrig bleiben: Welche Zahl ist es? Antw. 28.

Drittes Beispiel.

Es ist eine Zahl, wenn man 6 dazu addirt, und die Summe mit 4 multiplicirt, so kommt zum Product 32: Welche Zahl ist es?

Auflösung.

Die Zahl sey x, so gibts folgende Gleichung:

$$\begin{array}{r} x + 6 \\ 4 \\ \hline 4x + 24 = 32. \end{array} \quad \text{Oder } (x + 6)\, 4 = 32.$$

Erkl. Im ersten Fall wird 24 durch — weggeschafft, und die folgende Gleichung durch 4 dividirt. Im andern Fall dividirt man die Gleichung sogleich durch 4, und bringt in der folgenden Gleichung die 6 durch — weg.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 24 &=& 32 \\ -24 && -24 \\ \hline 4)\ 4x &=& 8 \\ \hline x &=& 2 \end{array}$$

Antw. $x = 2$ die Zahl.

Oder $$\begin{array}{rcl} 4)\ (x+6)4 &=& 32 \\ \hline x + 6 &=& 8 \\ -6 && -6 \\ \hline x &=& 2 \end{array}$$

Anmerk. Wenn eine Gleichung auf beiden Seiten durch eine gemeinschaftliche Zahl dividirt werden soll, so pflegt man den Divisor linker Hand vor die Gleichung in einen Krummstrich zu setzen, wie oben.

3. Uebung.

Was ist x in folgenden Gleichungen?

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 3x + 12 = 48 \\ 2. & 4x - 20 = 28 \\ 3. & (x - 4)5 = 40 \\ 4. & (x + 10)6 = 132 \end{array}\right\} \text{Antwort 12.}$$

5. Suchet eine Zahl, wenn man von ihr 10 subtrahiret, zu diesem Rest 16 addiret, und die Summe mit 8 multipliciret, daß 144 kommen. — Sie ist 12.

Viertes Beispiel.

Es ist eine Zahl, wenn man 12 zu ihr addirt, diese Summe mit 4 multiplicirt, von diesem Product 32 subtrahirt, und den Rest durch 3 dividirt, daß der Quotient 100 sey: Welche Zahl ists?

Auflösung.

Die Zahl sey x, so kommt folgende Gleichung:

$$\frac{(x + 12)\,4 - 32}{3} = 100.$$

Um diese Gleichung auf die unbekannte Größe x zu bringen, so wird sie zuerst mit 3 multiplicirt, und hernach die übrigen bekannten Größen, nach den vorigen Uebungen weggeschafft, als:

$$\begin{array}{rl}
\dfrac{(x + 12)\,4 - 32}{3} = 100 & (3 \\
\hline
(x + 12)\,4 - 32 = 300 & \\
+ 32 \quad + 32 & \\
\hline
4)\ (x + 12)\,4 = 332 & \\
\hline
x + 12 = 83 & \\
- 12 \quad - 12 & \\
\hline
\text{Antw.} \quad x = 71 \text{ die Zahl.} &
\end{array}$$

Anmerk. Wenn eine Gleichung auf beiden Seiten mit einer gemeinschaftlichen Zahl multiplicirt oder eingerichtet werden soll, so pflegt man den Multiplicator rechter Hand an die Gleichung in einen Krummstrich zu setzen, wie oben.

4. Uebung.

Was ist x in folgenden Gleichungen?

1. $\dfrac{(x + 10)\,4 - 20}{3} = 60$
2. $\dfrac{(x - 15)\,3 + 25}{5} = 20$

Antw. 40.

3. $\frac{(x + 20 - 36)\,4}{6} = 16$
4. $\frac{(x - 16)\,6}{8} + 28 = 46$

Antw. 40.

5. Suchet eine Zahl, wenn man 160 dazu addirt, die Summe mit 30 multiplicirt, das Product durch 5 dividirt, und von diesem Quotienten 200 subtrahirt, daß 1000 kommen: Welche Zahl ists? Antw. 40.

I. Aufgaben
mit allen vier Rechnungsarten.

Um nun zur fernern Uebung alle mögliche Veränderungen zu bekommen, die man mit den Zeichen der vier Rechnungsarten vornehmen kann: so sind folgende 24 Versetzungen der 4 Buchstaben ABCD, nebst den 24 Veränderungen der beigesetzten Zeichen zu merken, wovon jede eine besondere Aufgabe vorstellen kann. Nro. 1. könnte z. B. so heißen:

Suchet eine Zahl, wenn man a dazu addirt, von der Summe b subtrahirt, den Rest mit c multipl., und dies Product durch d dividirt, daß n herauskomme.

Nimmt man nun für die überschriebenen kleinen Buchstaben beliebige Zahlen, z. B.

Es sey a = 2
b = 3
c = 4
d = 5
n = 120,

und für die zu suchende Zahl x an: so kommen bei der Bearbeitung die zugleich beigesetzten Antworten für x heraus; doch ist es zur Uebung auch nützlich, über dieselben die Probe zu machen.

		a	b	c	d			
1.	ABCD	+	—	.	:	Antwort		151
2.	ABDC	+	—	:	.	=	=	97
3.	ACBD	+	.	—	:	=	=	$199\frac{1}{3}$
4.	ACDB	+	.	:	—	=	=	$164\frac{2}{3}$
5.	ADBC	+	:	—	.	=	=	82
6.	ADCB	+	:	.	—	=	=	$91\frac{3}{4}$
7.	BACD	—	+	.	:	=	=	149
8.	BADC	—	+	:	.	=	=	95
9.	BCAD	—	.	+	:	=	=	$200\frac{2}{3}$
10.	BCDA	—	.	:	+	=	=	$155\frac{1}{3}$
11.	BDAC	—	:	+	.	=	=	62
12.	BDCA	—	:	.	+	=	=	$88\frac{1}{4}$
13.	CABD	.	+	—	:	=	=	$300\frac{1}{2}$
14.	CADB	.	+	:	—	=	=	$248\frac{1}{2}$
15.	CBAD	.	—	+	:	=	=	$299\frac{1}{2}$
16.	CBDA	.	—	:	+	=	=	$231\frac{1}{2}$

		a	b	c	d			
17.	CDAB	.	:	+	—	Antwort		$181\frac{1}{2}$
18.	CDBA	.	:	—	+	=	=	$178\frac{1}{2}$
19.	DABC	:	+	—	.	=	=	50
20.	DACB	:	+	.	—	=	=	$56\frac{1}{2}$
21.	DBAC	:	—	+	.	=	=	46
22.	DBCA	:	—	.	+	=	=	$63\frac{1}{2}$
23.	DCAB	:	.	+	—	=	=	$80\frac{2}{3}$
24.	DCBA	:	.	—	+	=	=	$79\frac{1}{3}$

Zu desto besserer Erläuterung soll nun noch die Ausarbeitung von den ersten Veränderungen jeder Hauptversetzung, nämlich von Nro. 1, 7, 13 und 19 folgen, wornach auch die übrigen leicht gemacht werden können.

1. $$\frac{(x + 2 - 3)\,4}{5} = 120 \quad (5$$

$$4)\ (x + 2 - 3)\,4 = 600$$

$$x + 2 - 3 = 150$$
$$+3 \quad +3$$

$$x + 2 = 153$$
$$-2 \quad -2$$

$$x = 151$$ die Zahl.

7.

$$\frac{(x-2+3)\,4}{5} = 120 \qquad (5$$

$$4)\ (x-2+3)\,4 = 600$$

$$x-2+3 = 150$$

$$-3 \quad -3$$

$$x-2 = 147$$

$$+2 \quad +2$$

$x = 149$ die Zahl.

13.

$$\frac{2x+3-4}{5} = 120 \qquad (5$$

$$2x+3-4 = 600$$

$$+4 \quad +4$$

$$2x+3 = 604$$

$$-3 \quad -3$$

$$2)\ 2x = 601$$

$x = 300\frac{1}{2}$ die Zahl.

19.

$$5)\ \left(\frac{x}{2}+3-4\right)5 = 120$$

$$\frac{x}{2}+3-4 = 24$$

$$+4 \quad +4$$

$$\frac{x}{2}+3 = 28$$

$$-3 \quad -3$$

$$\frac{x}{2} = 25 \qquad (2$$

$x = 50$ die Zahl.

Zu mehrerer Uebung können nun auch diese 24 Veränderungen, nach folgendem Beispiel von Nro. 1, mit den angenommenen Buchstaben bearbeitet und aufgelöst werden.

Nro. 1. $\frac{(x + a - b)\,c}{d} = n$ (d

c) $(x + a - b)\,c = dn$

$$x + a - b = \frac{dn}{c}$$

$$x + a = \frac{dn}{c} + b$$

$x = \frac{dn}{c} + b - a =$ 151 die Zahl.

Dieser letztere Ausdruck wird Formel genannt. Eine solche Formel enthält nun eine allgemeine Regel, zur Auflösung dieser und aller möglichen Aufgaben von ähnlicher Art, die Zahlen mögen für die Buchstaben angenommen und verändert werden, wie man will. Löset man diese Formel mit den vorhin für die Buchstaben angenommenen Zahlen auf, so bekommt man für x den schon angezeigten Werth, als:

$$\frac{dn}{c} = \frac{600}{4} = 150$$

$$+ 3 = b$$

$$153$$

$$- 2 = a$$

$$151 = x$$

Bei aufmerksamer Betrachtung der obigen Formel, kann man leicht bemerken, daß in derselben das Gegentheil von alle dem, was vorher in der Aufgabe gesagt worden, und in der ersten Gleichung ausgedrückt ist, geschiehet: denn, was dort addirt und subtrahirt werden soll, das wird hier subtrahirt und addirt; und was dort multipliciren und dividiren soll, damit muß hier dividirt und multiplicirt werden. Diese Bemerkung läßt sich bei der Auflösung mit Zahlen so leicht nicht machen.

II. Aufgaben
von Einer unbekannten Größe.

1. Suchet eine Zahl, wenn man 12 dazu addirt, und von der Summe 8 subtrahirt, daß 36 kommen.

Anmerk. Die herausgebrachte Antwort zu dieser und mehr folgenden Aufgaben, muß nach der Aufgabe probirt werden.

2. Suchet eine Zahl, wenn man 20 dazu addirt, und die Summe mit 6 multiplicirt, daß 360 kommen.
3. Suchet eine Zahl, wenn man sie mit 16 multiplicirt, und das Product durch 5 dividirt, daß 48 kommen.
4. Suchet eine Zahl, wenn man 18 dazu addirt, von der Summe 6 subtrahirt, und den Rest

mit 9 multiplicirt, daß 216 kommen: Was für eine Formel kommt hierbei heraus?

Antw. $x = \frac{d}{c} + b - a = 12.$

5. Suchet eine Zahl, wenn man 36 dazu addirt, von der Summe 24 subtrahirt, den Rest mit 15 multiplicirt, und dies Product durch 10 dividirt, daß 315 kommen.

6. Suchet eine Zahl, wenn man sie mit 12 multiplicirt, zum Product 24 addirt, die Summe durch 4 dividirt, und vom Quotienten 48 subtrahirt, daß 96 kommen: Nach welcher Formel ist diese Zahl zu finden?

Antw. $x = \frac{(d + n)\,c - b}{a} = 46.$

7. Suchet eine Zahl, wenn man sie durch 24 dividirt, vom Quotienten 64 subtrahirt, den Rest mit 8 multipl., und zum Product 45 addirt, daß 234 kommen.

8. Suchet eine Zahl, wenn man 15 dazu addirt, die Summe durch 18 dividirt, vom Quotienten 40 subtrahirt, und den Rest mit 27 multiplicirt, daß 1000 kommen: Nach welcher Formel ist diese Zahl zu finden?

Antw. $x = \left(\frac{n}{d} + c\right)b - a = 1371\frac{2}{3}$

Nach diesen Vorübungen, die in dem Lernbegierigen schon Lust und Liebe zur Algebra erwecken können, ist es nun auch nöthig, die Regeln der vier Rechnungsarten, mit gleichnamigen Größen, welche einerlei oder verschiedene Zeichen haben, vorzunehmen, und auch darin die nöthigen Uebungen anzustellen.

1. Vom Addiren.

1. Gleichnamige Größen, welche einerlei Zeichen haben, zu addiren.

Regel. Zählet die gleichnamigen Größen, wie beim Rechnen, zusammen, und setzet ihr gemeinschaftliches Zeichen vor die Summe.

	Probe	
$24 - 6 + 8 = 26$		$8a + 5b - 7c$
$10 - 9 + 4 = 5$		$4a + 3b - 2c$
$34 - 15 + 12 = 31$		$12a + 8b - 9c$

Anmerk. Diese Regel ist an sich schon begreiflich gnug, und im ersten Beispiel sind zur Probe die zusammen gesetzten Größen in einfache verwandelt und addirt worden.

2. Gleichnamige Größen, welche verschiedene Zeichen haben, zu addiren.

Regel. Ziehet die kleinern von den größern ab, und setzet vor den Rest das Zeichen der größern Größe.

	Probe	
$9 - 5 + 6 = 10$		$12a + 16b - 18c$
$5 + 2 - 4 = 7$		$6a - 12b + 12c$
$4 - 3 + 2 = 3$		$18a + 4b - 6c$

Erklärung und Beweis. Wenn man die positiven Größen als habende Baarschaft, die negativen hingegen als Schuld betrachtet, so wird man, außer der beigesetzten Probe, von der Richtigkeit dieses Verfahrens vollends überzeugt: denn, wenn ich 6 Stbr. habe, bin aber 4 Stbr. schuldig, so habe ich noch 2 Stbr., welches durch + 2 ausgedrückt wird.

6. Uebung.

1. Addiret	$40 + 20 - 6$	$28a - 15b + 24c$
und	$24 - 12 + 10$	$12a + 10b - 6c$

2. Addiret	$32 - 25 + 40$	$5x - 10a + 16b - 20c$
	$20 - 8 + 10$	$-18x + 32a - 20b + 15c$
	$16 + 15 - 36$	$10x - 14a - 10b + 5c$

2. Vom Subtrahiren.

1. Kleinere Größen von gleichnamigen größern Größen, die aber einerlei Zeichen haben, zu subtrahiren.

Regel. Ziehet die kleinern von den größern Größen, wie beim Rechnen ab, und setzet vor den Rest ihr gemeinschaftliches Zeichen.

		Probe		
Von	$48 - 20 + 16$	$= 44$	Von	$18a - 10b + 12c$
	$32 - 15 + 12$	$= 29$		$6a - 8b + 5c$
Rest	$16 - 5 + 4$	$= 15$		$12a - 2b + 7c$

Anmerk. Die Richtigkeit dieser Regel ist an sich schon begreiflich gnug, und die beigesetzte Probe bestätiget sie.

7. Uebung.

Subtrah. von	$56 - 18 + 28$	Von	$20a + 15b - 9c$
	$30 - 10 + 16$		$12a + 9b - 4c$

2. Größere Größen von kleinern zu subtrahiren, wenn sie einerlei Zeichen haben.

Regel. Ziehet in diesem Fall die kleinern Größen von den größern ab, und setzet das entgegen gesetzte Zeichen derselben vor den Rest: + wenn sie —, und — wenn sie + haben.

	Probe			
Von	$16-4+3=15$		Von	$6a+4b-6c$
	$8-7+5=6$			$8a+10b-15c$
Rest	$8+3-2=9$			$-2a-6b+9c$

Erklärung und Beweis. 1. Außer der Probe, beim ersten Beispiel, kann man sich auch auf folgende Art von der Richtigkeit dieser Regel überzeugen: 5 kann nicht wirklich ganz von 3 abgezogen werden, weil 3 um 2 kleiner ist als 5: daher muß der Unterschied dieser beiden Zahlen im Reste mit dem Zeichen — erscheinen, und dadurch subtrahirt werden.

2. Daß aber — 7 von — 4 noch + 3 übrig bleibt, ist auf diese Art begreiflich: Es sollten 8 — 7 subtrahirt werden; weil nun aber 8 wirklich subtrahiret wird, so ist dadurch 7 zu viel abgezogen worden, welche denn wieder hinzu gethan werden muß, und also mit — 4 zum Rest + 3 heraus bringt. Wenn daher eine negative Größe subtrahiret werden soll, so bekommt sie das Zeichen +, und wird also positiv.

Anmerk. Weil Subtrahiren das Gegentheil vom Addiren ist, so kann man es ins Addiren verwandeln: man darf nur die Zeichen des Subtrahenden, nämlich + in —, und — in + verändern, als:

Von	$16-4+3$	Oder	$\left.\begin{array}{r}16-4+3\\-8+7-5\end{array}\right\}$ addirt
	$8-7+5$		
Rest	$8+3-2$		$8+3-2$

8. Uebung.

1. Subtrah. von	$28-6+4$	Von	$16a+4b-10c$
	$12-8+10$		$4a+12b-17c$

2. Subt. von	$36+9-6$	Von	$6x-5a+7b-8c$
	$20+12-18$		$10x-8a+15b-8c$

3. Gleichnamige Größen zu subtrahiren, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

Regel. Addiret die Größen, und setzet vor die Summe das Zeichen des Minuenden, nämlich derjenigen Größe, von welcher abgezogen werden soll.

	Probe		
Von	$24-4+6=26$	Von	$7a+2b-8c$
	$18+8-4=22$		$2a-6b+4c$
	$6-12+10=4$		$5a+8b-12c$

Erklärung und Beweis. Die Richtigkeit dieser Regel ist schon nach dem Vorhergehenden klar. Im ersten Beispiel soll $+8$ von -4 abgezogen werden. Die negative Größe 4 ist als Schuld anzusehen, und da nun diese Schuld durch den Abzug der positiven Größe um 8 vermehrt wird: so muß -12 heraus kommen. Es sollten hier überhaupt $18+8-4$ subtrahirt werden; da aber $18+8$ wirklich, und also um 4 zu viel abgezogen worden: so mußte diese wieder hinzu gethan werden, und macht mit der positiven 6 nun $+10$ aus.

9. Uebung.

1. Subtr. von	$60-18+6$	Von	$10a+8b-12c$
	$20+14-3$		$6a-10b+4c$

Gemischte Aufgaben.

2. Subtr. von	28	Von	$16x$
	$12+4$		$7x-6a$
3. Subtr. von	$50-10+15$	Von	$16a-4b+12c$
	$24-10+18$		$10a+2b+6c$

4. Subtr. von $40+2-8$ Von $18x-4a+9b-6c$
 $18-4-6$ $20x-3a+12b-10c$

3. Vom Multipliciren.

Wenn Buchstaben mit einander multiplicirt werden sollen, so setzt man sie ohne Zeichen an einander. Z. B. a mit b, gibt ab oder ba; denn auch in Zahlen ist es einerlei, ob ich sage: 3 mal 4, oder 4 mal 3 ist 12; jedoch pflegt man bei Buchstaben die alphabetische Ordnung zu beobachten, und also ab für ba, cn für nc zu schreiben.

Sollen zusammen gesetzte Größen mit einander multiplicirt werden, so schließt man sie mit Einschaltungs-Zeichen ein, und setzt den Multiplicator vor oder hinter die Einschaltung, und zeigt die Multiplication dadurch an; soll die Multiplication aber wirklich verrichtet werden, so hat man nicht allein auf die Größen selbst, sondern auch auf ihre Zeichen zu sehen, und dabei folgende Fälle und Regeln zu merken.

Zusammen gesetzte Größen mit einerlei und verschiedenen Zeichen wirklich durch einander zu multipliciren.

Allgemeine Regel. Einerlei Zeichen geben im Product +, verschiedene aber −.

Erstes Beispiel.

1.

$$\begin{array}{rrl} & 18 + 6 = & 24 \\ \text{mit} & 4 + 2 = & 6 \\ \hline & 36 + 12 & 144 \\ 72 + 24 & & \\ \hline 72 + 60 + 12 = & & 144 \end{array}$$

(Probe: 24 mit 6 = 144)

$$\begin{array}{r} 7a + 3b \\ \text{mit}\ 2a \\ \hline 14aa + 6ab \end{array}$$

Probe

2. $\begin{array}{rl} & 18 - 6 = 12 \\ \text{mit} & \underline{4 + 2 = \;\; 6} \\ & 36 - 12 \quad 72 \\ & \underline{72 - 24} \\ & 72 + 12 - 12 = 72 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rl} & 7a - 3b \\ \text{mit} & \underline{4a + 2b} \\ & 14ab - 6bb \\ & \underline{28aa - 12ab} \\ & 28aa + 2ab - 6bb \end{array}$

Erklärung und Beweis. Daß die positive Größen im ersten Beispiel auch positive Producte hervorbringen, ist keinem Zweifel unterworfen. Daß aber, nach dem zweiten Beispiel, die Producte von negativen und positiven Größen negativ sind, bedarf noch eines Beweises. — 6 zeigt einen Mangel an, welcher der positiven Große 18 abgeht. Wenn diese nun mit 2 multiplicirt wird, so muß auch von dem Product 36 jener Mangel 2 mal abgehen, und also 12 das Zeichen — haben; welches auch den folgenden Fall, da nämlich 18 — 6 mit 4 multiplicirt wird, so wie alle ähnliche Fälle rechtfertiget.

10. Uebung.

1. Multipl. $\begin{array}{r} 18 + 2 \\ \text{mit } \underline{\;\;4} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3a + 4b \\ \text{mit } \underline{2a} \end{array}$

2. Multipl. $\begin{array}{r} 24 - 6 \\ \text{mit } \underline{\;\;5} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 4x - 6a \\ \text{mit } \underline{4b} \end{array}$

3. Multipl. $\begin{array}{r} -16 + 20 \\ \text{mit } \underline{\;\;3} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} -4a + 7b \\ \text{mit } \underline{3c} \end{array}$

4. Multipl. $\begin{array}{r} 32 - 4 \\ \text{mit } \underline{8 + 2} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2a - 3b \\ \text{mit } \underline{a + b} \end{array}$

5. Multipl. $\begin{array}{r} 20 + 6 \\ \text{mit } \underline{8 - 2} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3x + 2a \\ \text{mit } \underline{3x - 2a} \end{array}$

Zweites Beispiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Probe} \\
8 - 3 = & 5 \\
\text{mit } \underline{6 - 2} = & \underline{4} \\
-16 + 6 & 20 \\
\underline{48 - 18} & \\
48 - 34 + 6 = & 20
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4a - 2b \\
\underline{3a - 4b} \\
-16ab + 8bb \\
\underline{12aa - 6ab \quad\quad} \\
12aa - 22ab + 8bb
\end{array}
$$

Erklärung und Beweis. Hier ist nun noch zu erklären und zu beweisen, daß das Product von zwei negativen Größen positiv ist. Zuerst ist 8 — 3 mit — 2 multipl. worden. Daß 8 mit — 2 multipl. im Product — 16 gibt, ist aus dem Vorhergehenden schon klar; aber hier ist der Mangel — 2 wirklich 8 mal, folglich um 3 mal zu viel genommen worden: daher muß dieser Mangel — 2 wieder 3 mal hinzu gethan werden, und dies geschieht durch + 6.

II. Uebung.

$$
\begin{array}{lrlr}
1.\ \text{Multipl.} & 16 - 2 & & 3x - 4a \\
\text{mit} & \underline{6 - 2} & \text{mit} & \underline{2x - 3a} \\[2ex]
2.\ \text{Multipl.} & 20 - 4 & & 6a - 2b \\
\text{mit} & \underline{9 - 3} & \text{mit} & \underline{4a - 3b}
\end{array}
$$

Gemischte Aufgaben.

$$
\begin{array}{lrlr}
3.\ \text{Multipl.} & 32-7+2 & & 2x-3a+4b \\
\text{mit} & \underline{12-8+3} & \text{mit} & \underline{4x+2a-3b} \\[2ex]
4.\ \text{Multipl.} & 40+6-12 & & 3y+2q-4a \\
\text{mit} & \underline{16-8+4} & \text{mit} & \underline{3y-2q+4a}
\end{array}
$$

4. Vom Dividiren.

Wenn Größen durch einander dividirt werden sollen, so schreibt man sie wie einen Bruch, nämlich den Dividenden über einen Querstrich, und den Divisor unter denselben; oder man schließt beide Theile ein, schreibt den Divisor nach dem Dividenden, und setzt zween Punct darzwischen, und zeigt die Division dadurch nur an. Es soll z. B. $8 + 6$ durch $4 - 2$, oder $a + b$ durch $c + d$ dividirt werden, so schreibt man:

$$\frac{8+6}{4-2} \text{ oder } (8+6):(4-2) \quad \frac{a+b}{c+d} \text{ oder } (a+b):(c+d)$$

In Buchstaben kann die Division nur alsdann wirklich geschehen, wenn beide Theile, so wohl Divisor als Dividend, einerlei Buchstaben enthalten.

Also $\frac{a+b}{c+d}$ nicht; wohl aber $\frac{a\,b}{a} = b.$

$$\frac{a\,b}{b} = a. \qquad \frac{2bc}{c} = 2b. \qquad \frac{4xy}{2x} = 2y.$$

$$\frac{8abx}{3ab} = 2\tfrac{2}{3}\,x.$$

Sollen zusammen gesetzte Größen wirklich dividirt werden, so kann dieses auch nur bloß bei theilbaren Größen geschehen; und dann hat man nicht allein auf die Größen selbst, sondern auch auf ihre Zeichen zu sehen, und dabei folgende Fälle und Regeln zu merken.

Zusammen gesetzte Größen mit einerlei und verschiedenen Zeichen wirklich durch einander zu dividiren.

Allgemeine Regel. Einerlei Zeichen geben im Quotienten +, verschiedene aber —.

Erstes Beispiel.

1. 4 in $20+8$ — $5+2$ $\qquad$ $2a$ in $6aa+4aa$ — $3a+2a$

2. $4+2$ in $72+12-12 \mid 18-6$
$72+36$
$4+2$ in $-24-12$
$-24-12$
—

$4a+2b$ in $28aa+2ab-6bb \mid 7a-3b$
$28aa+14ab$
$4a+2b$ in $-12ab-6bb$
$-12ab-6bb$
—

Erklärung und Beweis. Daß positive Größen, nach dem ersten Beispiel, im Quotienten + hervorbringen, bedarf hier wohl keines Beweises; wohl aber, daß verschiedene Zeichen einen negativen Quotienten liefern. Wenn man -6 mit $+2$ multiplicirt, so kommt, nach dem Beweise in der Multiplication, -12. Dividirt man nun dieses negative Product durch den positiven Factoren $+2$: so muß der negative Factor -6 heraus kommen.

12. Uebung.

1. Dividiret 2 in $12+4$. $\qquad$ a in $ab+2ac$.
2. Dividiret $8+2$ in $40-14-6$. $\qquad$ $2a$ in $4ab-6ac$.
3. Div. $6-2$ in $144+78-10$. $\qquad$ $a-b$ in $aa-ab+bb$.

Zweites Beispiel.

1. -2 in -8 — $+4$ $\qquad$ $-2b$ in $6bc-4bd$ — $-3c+2d$

$$\begin{array}{llr|l}
2. & -2+6 \text{ in } & -20+68-24 & 10-4 \\
 & & -20+68 & \\
\hline
 & & +8-24 & \\
 & & +8-24 & \\
\hline
 & & - &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l}
2a-3c \text{ in } & -24aa+52ac-24cc & -12a+8c \\
 & -24aa+36ac & \\
\hline
 & +16ac-24cc & \\
 & +16ac-24cc & \\
\hline
 & - &
\end{array}$$

Erkl. und Beweis. Wenn man — 2 in — 8 dividirt, so ist der Quotient gewiß 4. Ob er aber + 4 oder — 4 sey, ist noch ungewiß. Eins von beiden muß er aber seyn. Wollte man ihn für — 4 nehmen, und ihn zur Probe mit dem Divisor — 2 multipl., so erhielte man zum Product + 8, da doch der Dividend — 8 ist: folglich muß er das Gegentheil, nämlich + 4 seyn, welches auch in der Probe — 8 gibt. Daher gilt denn auch bei der Division die Regel: Einerlei Zeichen geben +, verschiedene aber —.

13. Uebung.

1. Dividiret -3 in -12. $\quad -3a$ in $12ab-9ac$.
2. Dividiret $-4+7$ in $-36+71-14$.
   $-4a+6b$ in $-18ac+12bc+12aa-18ab$.

Gemischte Aufgaben.

Dividiret 1. $6ab-10ac$ durch $2a$.

2. $xy+x$ durch x.

3. $4xx - 20xy + 25yy$ durch $2x - 5y$.
4. $aaxx - bbyy$ durch $ax + by$.
5. $2ab - a$ durch $2b - 1$.
6. $q^2 - 1$ durch $q + 1$.
7. $6aaxx + 5abx - 6bb$ durch $3ax - 2b$.

Anmerk. Theilbare Producte kann man also durch die Division in Factoren auflösen, und dann die Producte durch die Zusammensetzung der Factoren vorstellen. So ist, z. B., nach dem ersten und zweiten obigen Exempel, $6ab - 10ac = (3b - 5a)2a$. $xy + x = (y + 1)x$ u. s. w., wodurch die Auflösung der Formeln bequem gemacht wird.

Zerleget zur Uebung folgende Producte in Factoren: $2ab - 4bc$. $4xx + 8ax$. $6abd - 4acd + 8ad$. $16aa - 9bb$: so muß kommen $(a - 2c)2b$ u. s. w. Wodurch läßt sich folgender Bruch aufheben?

$$\frac{12ac + bc}{8bc - 16cd}.$$

Schlußaufgabe durch alle vier Rechnungsarten.

Zu $a + 9b$ addiret $4a - 12b$; von der Summe subtrahiret $3a - 6b + 4c$; den Rest multipliciret mit $4a - 2b + 3c$, und dividiret das kommende Product durch $2a + 3b - 4c$: so muß zum Quotienten $4a - 2b + 3c$ heraus kommen.

III. Aufgaben
von mehrern unbekannten Größen.

In solchen bestimmten Aufgaben werden von den unbekannten Größen theils Eigenschaften für die Benennung, theils auch für die Gleichung bekannt gemacht und gegeben.

I. Man macht zuerst die Benennung, und nimmt für die unbekannte oder zu suchende Größen einen der letztern Buchstaben des Alphabets an, und verfährt damit, nach den in der Aufgabe gegebenen Eigenschaften eben so, als wenn diese angenommenen Buchstaben die noch unbekannten Größen selber wären. Dadurch kommt man zu so vielen Hauptgleichungen, als unbekannte Größen gesucht werden sollen. Diese Gleichungen bringt man zuerst auf einerlei unbekannte Buchstaben, und endlich durch Nebengleichungen nur auf Einen derselben.

Hierbei ist noch zu merken, daß die unbekannte Größe in der letzten Gleichung immer auf derjenigen Seite stehen muß, wo sie positiv ist, und daß folglich alle bekannte Größen auf die entgegen gesetzte Seite der Gleichung gebracht werden müssen. Z. B.

Suchet zwo Zahlen, wovon eine 8 mehr ist als die andere, wenn man von der größern 15 subtrahirt, zu der kleinern aber 3 addirt, und diese Summe und jenen Rest zusammen thut, daß 28 kommen.

Auflösung.

Es sey x die große und y die kleine Zahl:

so ist I. $y+8=x$ | $y=x-8$

II. $x-15+y+3=28$

$+15\quad -3+12$

$y=40-x$

$$\text{III.}\quad x-8=40-x$$
$$+x \qquad +8$$
$$2)\quad 2x=48$$
$$x=24 \text{ die große, und}$$
$$x-8=y=16 \text{ die kleine Zahl.}$$

Erklärung. Beide Hauptgleichungen I und II, werden auf einerlei Buchstaben, wie hier auf y gebracht. Aus diesen Gleichungen entsteht, nach dem 5. Grundsatze, Seite 10, die Nebengleichung III, welche nun noch auf die unbekannte Größe x gebracht wird. So bald nun $x=24$ bekannt ist, so weiß man aus den vorigen Gleichungen auch den Werth von $y=x-8=16$, oder $y=40-x=16$.

II. Wenn in solchen Aufgaben zwo oder mehrere Größen gesucht werden sollen, und zugleich bekannt gemacht wird, wie viel die eine größer oder kleiner seyn soll, als die andere: so kann man bei der Benennung auch nur Einen unbekannten Buchstaben annehmen, und dadurch die Arbeit der Auflösung viel kürzer und geschwinder verrichten.

Es sey in der vorigen Aufgabe x die kleine, so ist $x+8$ die größere Zahl.

$$x+8-15 \qquad\qquad x+3$$
$$x+3$$
$$2x+11-15=28$$
$$+15+15$$
$$2x+11=43$$
$$-11-11$$
$$2)\quad 2x=32$$
$$x=16 \text{ die kleine, und}$$
$$x+8=24 \text{ die große Zahl.}$$

1. Suchet zwo Zahlen, wenn man sie addirt, daß 40; wenn man aber die kleine von der größern subtrahirt, daß 10 kommen.

Es sey x die große und y die kleine. Oder, es sey x die große, so ist $40 - x$ die kleine. Oder, es sey x die kleine, so ist $40 - x$ die große Zahl.

2. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 24, ihre Differenz aber 12 ist.

3. Suchet zwo Zahlen, welche 24 zur Summe, und 3 zum Quotienten haben.

4. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 16, ihr Quotient aber 5 ist.

Es sey x die kleine, so ist $x + 16$ die große Zahl.

5. Suchet zwo Zahlen, wovon die eine 12 mehr ist, als die andere, und wenn man sie addirt, daß 72 kommen.

6. Suchet zwo Zahlen, wovon die eine 3 mal so groß ist, als die andere, und wenn man sie addirt, daß 100 kommen.

Es sey x die kleine, so ist 3x die große Zahl.

7. Suchet zwo Zahlen, wovon die eine 4 mal so groß ist, als die andere; wenn man zur kleinen 12 addirt, und diese Summe von der größern subtrahirt, daß 124 kommen.

8. Suchet zwo Zahlen, wovon eine $4\frac{1}{2}$ mal größer ist, als die andere; wenn man von der kleinen 24 subtrahirt, und die größere durch diesen Rest dividirt, daß 108 kommen.

Anmerk. Wenn in den Gleichungen Brüche vorkommen, so werden dieselben dadurch weggeschafft, indem die ganze Gleichung mit den Nennern der Brüche multiplicirt oder eingerichtet wird.

9. Suchet zwo Zahlen, wovon eine 8 mal größer ist, als die andere; wenn man von der kleinen 20 subtrahirt, den Rest mit 3 multiplicirt, und die größere durch dies Product dividirt, daß 600 kommen.

10. Suchet zwo Zahlen, wovon eine 6 mal so groß ist, als die andere; wenn man zur kleinen 6880 addirt, diese Summe mit 4 multiplicirt, und dies Product durch die größere dividirt, daß 144 kommen.

11. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 60 ist; wenn man zur kleinen 24 addirt, und die größere durch 2 dividirt, daß gleiche viel komme.

12. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 48 ist, wenn man die kleine mit 2 multiplicirt, die größere aber durch 3 dividirt, daß das Product dem Quotienten gleich sey: Nach welcher Formel sind diese Zahlen zu finden?

Antw. $x = \frac{a}{bc+1} = 6\frac{6}{7}$ die kleine;

$a - x = a - \frac{a}{b+1} = \frac{abc}{bc+1} = 41\frac{1}{7}$ die größere Zahl.

13. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 20; und wovon die kleine so viel unter 100, als die größere über 100 ist.

14. Suchet zwo Zahlen, wovon die eine so viel unter 40, als die andere über 52 ist; und wenn man die kleine mit 3 multipl. eben so viel komme, als wenn man zur größern 12 addirt: Nach welcher Formel sind diese Zahlen zu finden?

Antw. die kleine $x = \frac{a+b+d}{c+1} = 26$;

die größere $y = a+b - \frac{a+b+d}{c+1} = \frac{(a+b)c-d}{c+1} = 66$.

15. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 60 ist; wenn man die kleine mit 8 multiplicirt, die größere aber durch 2 dividirt, daß gleiche viel komme.

16. Suchet zwo Zahlen, wovon eine 10 mal so groß ist, als die andere; und wenn man zur kleinen 12 addirt, die Summe mit 2 multipl., daß eben so viel komme, als wenn man von der größern 8 subtrahirt, und den Rest durch 2 dividirt.

17. Suchet zwo Zahlen, wovon eine 6 mal größer ist, als die andere; und wenn man von der kleinen 5 subtrahirt, die größere aber durch 4 dividirt, daß der Quotient 10 mehr sey, als der Rest: Nach welcher Formel sind diese Zahlen zu finden?

Antw. $x = \frac{(d-b)c}{a-c} = 10$ die kleine;

$ax = \frac{(d-b)ac}{a-c} = 60$ die größere.

18. Suchet zwo Zahlen, wovon eine 4 mal so groß ist, als die andere; wenn man die Differenz dieser Zahlen mit 3 multiplicirt, daß dies Product 52 mehr sey, als wenn man ihre Summe durch 2 dividirt.

19. Suchet drei Zahlen, deren Differenz 4, und ihre Summe 48 ist.

20. Suchet vier Zahlen, deren Differenz 2 ist, und wenn man die Summe der ersten und dritten mit 3 multiplicirt, daß dies Product um 20 größer sey, als die Summe der zweiten und vierten Zahl.

21. Suchet drei Zahlen, wovon die andere 3 mal, die dritte aber 4 mal so groß ist, als die erste; und wenn man die erste mit der andern, die dritte aber mit 6 multiplicirt, daß gleiche viel komme.

22. Suchet drei Gewichtsteine, wovon der zweite 4 ℔. schwerer ist als der erste, und der dritte 8 ℔. mehr wiegt, als der zweite; der erste und dritte aber zusammen genommen 14 ℔. schwerer sind, als der zweite allein.

23. Suchet eine Zahl, wenn man 8 dazu addirt, die Summe mit 4 multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel extrahirt, daß 12 kommen.

Die Zahl sey x, so ist

$$\sqrt{((x+8)4)} = \left.\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right\} \text{quadrirt}$$

$$4)\quad (x+8)\,4 = 144$$

$$x+8 = 36$$

$$-8$$

$$x = 28 \text{ die Zahl.}$$

Erklärung. Wenn die □ Wurzel auf der einen Seite der Gleichung nicht wirklich extrahirt werden kann: so thut man auf der andern Seite das Gegentheil, nämlich man quadrirt die Größe daselbst, und schafft dadurch das Zeichen der Extraction weg.

24. Suchet eine Zahl, wenn man 20 davon subtrah., den Rest durch 6 dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel extrahirt, daß 57 kommen.

25. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 32 ist; wenn man die kleine von der größern subtrahirt, und aus dem Rest die □ Wurzel zieht, daß 4 kommen.

26. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 10 ist; wenn man zur kleinen 4 addirt, die größere aber durch 2 dividirt, diesen Quotienten zur vorigen Summe addirt, und aus dieser Summe die □ Wurzel extrahirt, daß 126 kommen.

IV. Eingekleidete Aufgaben

von einer und mehrern unbekannten Größen.

Die Auflösung solcher Aufgaben kommt den Anfängern freilich etwas schwerer vor, als die der vorhergehenden: denn in diesen wurde immer ausdrücklich gesagt, was man thun, ob man addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren solle; in den folgenden hingegen muß dieses durchs Nachdenken und durch eigene Ueberlegung erst bestimmt werden, um dadurch zu einer Gleichung, und endlich zu dem Werth der unbekannten Größe zu kommen. Auch hierin bringt man es durch Uebung leicht zur Fertigkeit.

1. Ein Bedienter soll zum jährlichen Lohne 30 Rthlr. und ein Kleid haben; wenn ihm nun der Herr nach 4 Monaten den Abschied, und zugleich das Kleid zum Lohne gibt: Wie theuer hat er denn das Kleid gerechnet?

Das Kleid sey = x Rthlr., so wird dessen Werth durch folgenden Regeldetrisatz zur Gleichung bestimmt:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mon.} & & \text{Rthlr.} & & \text{Mon.} \\ \cancel{12} & : & x + 30 & = & \cancel{4} \\ 3 & & & & \end{array}$$

$$\frac{x + 30}{3} = x \quad (3$$

$$x + 30 = 3x$$
$$-\,x$$

$$2)\ 30 = 2x$$

Antw. Rthlr. $15 = x$

2. Einer sagte: Wenn ich $3\frac{1}{2}$ mal so viel Geld hätte, als ich wirklich habe, so hätte ich so viel über 375 Rthlr. als ich jetzt habe: Wie viel Geld hatte er denn? Antw. 150 Rthlr.

3. Ein Sohn erhielt von seinem Vater folgende Aufgabe zur Ausrechnung seines Alters: Wenn du noch $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ mal so alt wärest, als du jetzt bist, und noch neun Jahre dazu, so wärest du 100 Jahre alt: Wie alt war demnach der Sohn? Antw. 20 Jahre.

4. Zwei Personen, die zusammen 32 Rthlr hatten, gingen auf einen Markt, um ein Pferd zu kaufen. Nach geschehener Foderung sagte der Eine: Das ist ja viel! ich könnte mit meinem Gelde nur den 7ten Theil; und ich, sagte der Andere, nur den 9ten Theil bezahlen: Wie theuer war also das Pferd? Antw. 126 Rthlr.

5. Zwei Personen hatten eine Zeche zu bezahlen; der Eine besaß nur $\frac{1}{3}$ derselben, der Andere aber gerade doppelt so viel, als sie schuldig waren.

Nachdem sie nun bezahlt hatten, bestand ihr ganzer Vorrath noch in 40 Gulden: Wie groß war demnach die Zeche? Antw. 30 Gulden.

6. Aus einem Korbe voll Aepfel gab man einer Anzahl Kinder, jedem 4 Aepfel, und behielt noch 44 übrig; man ließ deßwegen die Aepfel wieder zurücke geben, und gab nun jedem Kinde 6 Aepfel, und da blieben noch 12 übrig: Wie viel Aepfel waren im Korbe? und wie viel waren der Kinder? Antw. 108 Aepfel und 16 Kinder.

7. Aus einer Armenkassa theilte man einiges Geld aus, und wollte jedem Armen 6 Stbr. geben, aber da fehlten 12 Stbr.; da man aber jedem nur 4 Stbr. gab, da blieben noch 2 Stbr. übrig: Wie viel Geld war in Kassa? und wie viele Armen waren da? Antw. 30 Stbr. und 7 Armen.

8. Einer sagte: Wenn ich mein Geld mit 10 multiplicire, oder 10 dazu addire, so kommen gleich viele Rthlr. heraus: Wie reich war er? Antw. $1\frac{1}{9}$ Rthlr.

9. Nach einem Testament war der Wittwe die Hälfte des ganzen Vermögens, dem Bruder $\frac{1}{3}$ desselben, und der Kirche das übrige vermacht; und so bekam die Kirche gerade 100 Rthlr.: Wie groß war das ganze Vermögen? Antw. 600 Rthlr.

10. Die Glocke hat . . . geschlagen! rief ein Nachtswächter aus. Wie viel hats geschlagen? fragte ein Nachtsschwärmer, und bekam zur Antwort: Die Hälfte, das Drittel und das Viertel der Stunden sind zusammen um eins mehr, als ihre Anzahl selbst: Wie viel hatte es geschlagen? Antw. 12 Uhr.

11. Es wurde jemand um sein Alter gefragt, und sagte: $\frac{1}{5}$ meines Alters habe ich in der Kindheit verlebt, $\frac{1}{8}$ in der Jugend, und $\frac{1}{2}$ in meinem männlichen Alter, und jetzt bin ich schon seit 14 Jahren ein Greis: Wie alt war er? Antw. 80 Jahre.

12. Ein Bauer geht zur Stadt, um Eier zu verkaufen, wovon ihm unter Weges in einem Wirthshause 10 Stück gestohlen werden. Als er weiter geht, fällt er, und zerbricht die übrigen so, daß nur noch der fünfte Theil und 2 Stück davon ganz bleiben. Mit diesem Rest geht er durch ein Gehölze, und findet einen Korb mit Eiern, aus welchem er 53 Stück nimmt, und nun damit zur Stadt eilt. Nachdem er daselbst nachzählt, fehlen ihm an seiner ersten Anzahl nur noch 11 Stück: Wie viel Eier hat er anfangs gehabt? Antw. 80 Stück.

13. Ein Herr vermacht sein Vermögen der Kirche, der Schule und den Armen, und verordnet, daß die Kirche 1000 Rthlr. weniger bekommen soll, als die Hälfte des Vermögens; die Schule 800 Rthlr. weniger, als $\frac{1}{3}$ des Vermögens, und die Armen 600 Rthlr. weniger, als $\frac{1}{4}$ der Nachlassenschaft: Wie viel bekam nun jeder Theil? Antw. Die Kirche 13400, die Schule 8800, und die Armen 6600 Rthlr.

14. Nach einem Testament soll A von 8600 Gulden 2 mal so viel haben als B, weniger 100 Gulden; B 3 mal so viel als C, weniger 200 Guld., und C 4 mal so viel als D, weniger 300 Gulden: Wie viel bekommt jeder? Antw. A 4900, B 2500, C 900 und D 300 Gulden.

15. Ein Vater ist jetzt 46, und sein Sohn 11 Jahr alt: Nach wie vielen Jahren wird dieser halb so alt seyn als sein Vater? Antw. Nach 24 Jahren.

16. Eine Mutter ist jetzt 65, ihre Tochter aber 39 Jahe alt: Vor wie vielen Jahren war diese halb so alt, als ihre Mutter? Antw. Vor 13 Jahren.

17. Ein Vater, der jetzt 40 Jahr alt ist, hat einen 8= und 6 jährigen Sohn: Wann werden diese beiden zusammen so alt seyn, wie der Vater? Antw. Ueber 26 Jahre.

18. Ein Vater hinterließ seinen 11 Kindern 3600 Rthlr., mit der Verordnung, daß jede Tochter 360, und jeder Sohn 300 Rthlr. erhalten solle, und so ging dieses Vermögen bei der Theilung ganz auf: Wie viel Söhne und Töchter waren da? Antw. 6 Söhne und 5 Töchter.

19. Einer wurde um sein Alter gefragt, und gab zur Antwort: Wenn ich $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ meiner Jahre mit 8 multiplicire, und vom Product 63 zurück nehme, so bleibt Methusalems Alter, nämlich 969 Jahre übrig: Wie alt war er? Antw. 54 Jahre.

20. Man soll einen Rthlr., oder 60 Stbr., in 6 Theile dergestallt vertheilen, daß jeder folgende Theil 1 Stbr. mehr ist, als der vorhergehende: Wie groß wird jeder Theil seyn müssen? Antw. $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$ und $12\frac{1}{2}$ Stbr.

21. Einer geht zum Besuch, und nimmt einige Aepfel mit, um die Kinder seines Freundes damit zu beschenken; dem ersten gibt er die Hälfte davon, und noch einen halben Apfel dazu, ohne einen zu

zerschneiden; dem andern vom Rest die Hälfte, und einen halben Apfel; dem dritten abermals die Hälfte des Rests, und noch einen halben Apfel, und behielt selbst noch einen übrig: Wie viel Aepfel hatte er mit gebracht? Antw. 15 Aepfel.

22. Ein Wechsler hat zweierlei Münzen: von der ersten gelten 10 Stück 1 Rthlr., und von der andern 20 Stück 1 Rthlr., und zahlt 17 Stück für 1 Rthlr. aus: Wie viel mußte er von jeder Sorte nehmen? Antw. 3 Stück von der ersten, und 14 Stück von der andern Sorte.

23. Einer hat einige Pfunde Waare, verkauft er jedes ℔. für $4\frac{7}{8}$ Rthlr., so verliert er in allem $2\frac{1}{2}$ Rthlr.; nimmt er aber für jedes ℔. 5 Rthlr., so gewinnt er überhaupt 10 Rthlr.: Wie viel waren der Pfunde? Antw. 100 ℔.

24. Eine Frau will einige ℔. Flachs zu Leinewand spinnen laßen. Ihre große Magd verspricht, bei der übrigen Hausarbeit, in 36 Tagen damit fertig zu werden; die kleine Magd aber erst in 48 Tagen. Da sie nun bald damit fertig zu werden wünscht, geht sie mit beiden Mägden daran, und verspinnt täglich noch $\frac{1}{8}$ ℔. mehr, als die kleine Magd, und so werden sie in 8 Tagen fertig: Wie viel ℔. Flachs sinds gewesen? Antw. $2\frac{1}{4}$ ℔.

25. Ein Herr wollte ein Landgut um baares Geld kaufen, hatte aber sein Vermögen in Kapitalien ausstehen, deßwegen wollte er das benöthigte Geld nur bei seinen schlechtern Schuldenern aufkündigen, und bei den guten Schuldnern die volle Kapitalien stehen laßen. Kündigte er nur bei jedem 200 Rthlr. auf, so hatte er 700 Rthlr. zu

viel; fodert er aber jedem 150 Rthlr. ab, so hat er 1100 Rthlr. zu wenig: Wie viel muß er nun bei jedem Schuldener aufkündigen, damit er gerade die benöthigte Kaufsumme erhält? Antwort $180\frac{5}{9}$ Rthlr.

26. Harpax legte seine Ducaten in ein Quadrat. Als das Quadrat voll war, blieben ihm 284 Stück übrig. Hierauf machte er ein neues Quadrat, und legte in jede Reihe einen Ducaten mehr, und da hatte er 25 Stück zu wenig: Wie viel Ducaten war Harpax reich? Antw. 24000.

27. Einen Boten, der schon 5 Meilen voraus ist, und alle Stunde $\frac{1}{2}$ Meile geht, soll ein anderer Bote, der in jeder Stunde $\frac{3}{4}$ Meile zurücklegt, wieder einholen: In wie viel Stunden wird er ihn antreffen? Antw. In 20 Stunden.

28. Zwei Boten, die 360 Meilen von einander sind, gehen zu gleicher Zeit gegen einander aus; der eine täglich 5, der andere nur 3 Meilen: An welchem Tage werden sie sich begegnen? Antw. Am 45sten.

29. Es hat so eben 8 Uhr geschlagen: In wie vielen Minuten wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholen und bedecken? Antw. In $43\frac{7}{11}$ M.

30. Ein Kostgänger, der täglich $\frac{3}{16}$ Rthlr. bezahlen mußte, rechnete mit seinem Wirthe ab, und blieb ihm $14\frac{1}{2}$ Rthlr. schuldig. Hierauf versprach er, künftig jede Woche, bis zur Tilgung dieser Schuld, einen franz. Kronenth., zu $1\frac{11}{12}$ Rthlr., auf Rechnung zu geben: In wie vielen Wochen ward er mit seinem Wirthe gleich? Antw. In 24 Wochen.

31. Ein Haase war 60 Sprünge voraus, als ihm ein Hund, der eben so geschwind sprang, nachsetzte: In wie vielen Sprüngen hohlte dieser ihm ein, wenn 4 Hundssprünge so weit als 5 Haasensprünge reichen? Antw. In 240 Sprüngen.

32 Einer schickte einem Kerzengießer 68 ℔. Unschlitt, um ihm dafür Kerzen zu liefern, aber für den Gießlohn Unschlitt zurück zu behalten: Wie viel ℔. Kerzen mußte er wieder zurück erhalten, wenn jedes ℔. Unschlitt $10\frac{1}{2}$ Stbr., und der Gießlohn von jedem ℔. Kerzen $2\frac{1}{4}$ Stbr. gerechnet wird.? Antw. 56 ℔. Kerzen.

33. A sagte zu B: Gib mir einen Rthlr., so haben wir gleich viel Geld; B erwiederte: Gib du mir einen Rthlr., so habe ich 2 mal so viel als du: Wie viel hatte jeder? Antw. A 5 und B 7 Rthlr.

34. In einer Familie waren mehrere Kinder. Es fragte jemand nach der Anzahl derselben, und erhielt vom ältesten Sohn die Antwort: Ich habe so viel Schwestern als Brüder. Die älteste Tochter sagte aber: Ich habe nur halb so viel Schwestern als Brüder: Wie viel waren ihrer? Antw. 7 Kinder, 4 Söhne und 3 Töchter.

35. Einer kauft 20 ℔. Rosinen und 24 ℔. Pflaumen für $2\frac{1}{4}$ Rthlr.; ein anderer kauft in demselben Preis 24 ℔. Rosinen und 30 ℔. Pflaumen für $2\frac{3}{4}$ Rthlr.: Wie viel kostet jedes ℔. von jeder Sorte? Antw. Das ℔. Rosinen $3\frac{3}{4}$, und das ℔. Pflaumen $2\frac{1}{2}$ Stbr.

36. Ein Sohn, der gefragt ward: wie alt er, sein

Vater und Großvater sey? antwortete: Ich und der Vater sind zusammen 54 Jahre alt; der Vater und Großvater zusammen 109 Jahre, und ich und der Großvater bringen 85 Jahre zusammen: Wie alt war jeder? Antw. Der Sohn 15, der Vater 39, der Großvater 70 Jahre.

Auflösung.

Der Sohn sey x, der Vater y, der Großv. z Jahre.

I. $x+y=54$ II. $y+z=109$ III. $x+z=85$

$y=54-x$ $y=109-z$ $x=85-z$

II. I.

$109-z=54-x$ III.

$x=z-55=85-z$

$2z=140$

$z=70$ u. s. w.

37. A, B und C kaufen gemeinschaftlich ein Pferd für 100 Rthlr. A verlangt von B die Hälfte seines Geldes, so könnte er das Pferd allein bezahlen; B von C $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so könnte er auch bezahlen; C von A $\frac{1}{4}$ seines Geldes, um auch allein bezahlen zu können: Wie viel Geld hat jeder gehabt? Antw. A 64, B 72 und C 84 Rthlr.

38. A sagt zu B: Gib mir 100 Rthlr., so habe ich 2 mal so viel als du behältst. B sagt zu C: Gib mir 200 Rthlr., so habe ich 3 mal so viel als du behältst. C sagt zu A: Gib mir 60 Rthlr., so habe ich 5 mal so viel als du behältst: Wie viel hatte jeder? Antw. A 140, B 220 und C 340 Rthlr.

39. Ein Wechsler hat drei Beutel mit Geld, A, B und C, von denen er sagt: Nehme ich aus B 80 Rthlr. und lege sie zu A, so ist in A $1\frac{1}{2}$ mal so viel als, als in B bleibt. Nehme ich aus C 120 Rthlr. zu B, so ist in B $3\frac{1}{2}$ mal so viel, als in C bleibt. Nehme ich aus A 60 Rthlr. zu C, so ist in C $4\frac{1}{3}$ mal so viel, als in A bleibt: Wie viel war in jedem Beutel? Antw. In A 120, B 160 und C 200 Rthlr.

40. Drei Kinder, A, B und C, wurden in einem Garten mit Aepfel beschenkt, die sie ohne Ordnung willkürlich zu sich nahmen. Dadurch hatte nun A die meisten bekommen, und gab deßwegen den beiden andern jedem so viel, als es schon hatte. Hierauf hatte B die meisten, und gab jedem andern auch so viel, als es jetzt hatte. Da nun C die meisten hatte, gab es ebenfalls jedem andern so viel ab, als es nunmehr hatte, und da hatten sie zu ihrer Verwunderung alle gleiche viel, nämlich jedes 8 Aepfel: Wie viel hatte jedes anfangs? Antw. A 13, B 7 und C 4 Aepfel.

Auflösung.

Es sey $A = p$, $B = q$, und $C = x$.

$$\begin{array}{ccc}
p & q & x \text{ Anfangs} \\
-(q+x) & +q & +x \\
\hline
p-q-x & 2q & 2x \\
+p-q-x & -(p-q+x) & +2x \\
\hline
2p-2q-2x & 3q-p-x & 4x \\
+2p-2q-2x & +3q-p-x & -(p+q-3x) \\
\hline
\end{array}$$

I. $4p-4q-4x$. II. $6q-2p-2x$. III. $7x-p-q$ Zuletzt.

Nun ist

$$\text{I. } \frac{4p - 4q - 4x = 8}{p = x + q + 2} \qquad \text{II. } \frac{6q - 2p - 2x = 8}{3q - x - 4 = p}$$

$$\text{III. } \frac{7x - p - q = 8}{7x - q - 8 = p} \text{ Folglich } \frac{\text{I. } x + q + 2 = \text{II. } 3q - x - 4}{x + 3 = q}$$

$$\text{Ferner } \frac{\text{III. } 7x - q - 8 = \text{II. } 3q - x - 4}{2x - 1 = q}$$

$$\text{Endlich } \frac{2x - 1 = x + 3}{x = 4 = C}$$

$$2x - 1 = q = 7 = B$$

$$x + q + 2 = p = 13 = A$$

Anmerk. Dergleichen Aufgaben laßen sich auch leicht durch einen umgekehrten Weg, oder Rückgang, auflösen, da man nämlich mit demjenigen anfängt, was sie zuletzt hatten.

41. Ein Lehrer schüttete vor seinen 6 Schülern einen Sack mit 384 Nüssen aus, und gab ihnen die Erlaubniß, davon nach Belieben zu nehmen. Da aber die Theilung sehr ungleich ausfiel, verlangte er, daß der Größte, welcher die meisten bekommen hatte, jedem andern so viel abgeben solle, als er schon habe; hernach sollte auch der, welcher dadurch die meisten erhalten, auf gleiche Art an die andern wieder abgeben. Nachdem nun alle Sechse dieses gethan hatten, fanden sie, daß einer so viel hatte wie der andere: Wie viel hat jeder zuerst und zuletzt bekommen? Antw. A 193, B 97, C 49, D 25, E 13, F 7; zuletzt jeder 64 Nüsse.

Anmerk. Die Zahlen solcher Aufgaben haben immer folgende Ordnung: Anfangs hat der Geringste 1 mehr, als die Anzahl der Personen ist, und jeder Folgende 2 mal so viel als der Vorhergehende, weniger 1.

42. Ein Haase hat 88 Sprünge vor einem Hunde voraus. Der Hund thut 7 Sprünge, indem der Haase nur 5 thut, und der Hund kommt mit 2 Sprüngen so weit, als der Haase mit 3: Wie viel Sprünge hat der Haase noch zu thun, bis der Hund ihn einholt? Antw. 80 Sprünge.

Von den Potenzen oder Dignitäten.

Wenn eine Größe mehrmals mit sich selbst multipliciret wird, so wird das Product eine **Potenz** oder Dignität genannt, welches eine **Macht** oder **Würde** bedeutet. 4 ist eine Dignität von 2 mal 2. aa von a mal a. aaa von a mal a mal a. aaaa ist eine Dignität von a mal a mal a mal a u. s. w. Weil aber der Ausdruck einer Dignität auf diese Weise, besonders bei großen Dignitäten, sowohl im Schreiben als Aussprechen, etwas unbequem seyn würde, so bezeichnet man den Grad einer Dignität mit einer kleinen Ziffer, oben am Kopf derjenigen Größe, welche zur Dignität erhoben worden, und diese Ziffer wird **Exponent** oder **Würdezeiger** genannt. Statt aa und aaa schreibt man demnach a^2 und a^3, und spricht: a zwei, a drei. Es ist also:

a oder a^1 die 1ste Dignität von a.
aa oder a^2 die 2te Dignität von a.
aaa oder a^3 die 3te Dignität von a.
aaaa oder a^4 die 4te Dignität von a. u. s. w.

aa oder a^2 bedeutet also eine Quadratzahl, so wie aaa oder a^3 eine Kubikzahl.

Will man nur anzeigen, daß mehrere Größen in eine gewisse Dignität erhoben werden sollen, so schließt man sie ein, und setzt den Exponenten oben bei. $(a+b)^2$ heißt: $a+b$ zur 2ten Dignität erhoben. Das Zeichen der Extraction ist $\sqrt{\ }$, und bedeutet an sich schon, wenn es vor einer Größe stehet, daß aus derselben die Quadratwurzel soll gezogen werden. Soll aber die Extraction einer andern Dignität damit angezeigt werden, so setzt man den Exponenten derselben in dieses Wurzelzeichen. $\sqrt[3]{a^3}$ heißt: die Kubikwurzel aus a drei.

Von den Rechnungsarten mit Dignitäten.

I. Additio und Subtractio. Sollen verschiedenartige Dignitäten addirt oder subtrahirt werden, so geschiehet dieses durch die Zeichen $+$ und $-$. a^2+a^3 bedeutet die Summe der 2ten und 3ten Dignität von a, so wie a^3-a^2 die Differenz der 2ten und 3ten Dignität von a. Sind aber die Dignitätsgrößen gleichartig, so verfährt man wie bei andern gemeinen Größen. Von $5a^2$ und $2a^2$ ist $7a^2$ die Summe; hingegen $3a^2$ der Rest oder die Differenz dieser Größen.

II. Multiplicatio. Sollen gleichnamige Dignitätsgrößen mit einander multipliciret werden, so bekommt das Product zum Exponenten die Summe jener Exponenten. a^2 mit a^3 multiplicirt, gibt a^5: denn aa multiplicirt mit aaa ist $=$ aaaaa $= a^5$.

III. Divisio. Sollen gleichnamige Dignitätsgrößen durch einander dividirt werden, so bekommt der Quotient die Differenz jener Exponenten zu seinem Exponenten. a^5 durch a^2 dividirt, gibt a^3: denn aa in aaaaa ist $=$ aaa $= a^3$.

IV. Extractio. Soll aus einer Dignitätsgröße eine Wurzel extrahirt werden, so bekommt die Wurzel den

Quotienten jener Exponenten zu ihrem Exponenten. $\sqrt{a^6}$, oder die Quadratwurzel aus a^6, gibt a^3. $\sqrt[3]{a^6}$, oder die Kubikwurzel aus a^6, gibt a^2: denn a^2 mal a^2 mal a^2 ist $= a^6$.

Von den Rechnungsarten mit Irrationalgrößen.

Wenn aus einer Zahl oder Größe die verlangte Wurzel nicht genau extrahirt werden kann, so wird dieselbe eine Irrationalzahl oder Irrationalgröße, oder auch wohl surdisch genannt. $\sqrt{6}$ oder $\sqrt[3]{7}$ sind Irrationalzahlen, weil man weder die Quadratwurzel aus 6, noch die Kubikwurzel aus 7 genau finden kann. — Negative Zahlen oder Größen, woraus eine Wurzel extrahirt werden soll, nennet man imaginair, eingebildet oder unmöglich. $\sqrt{-4}$ ist also imaginair oder unmöglich: denn die Quadratwurzel aus -4 ist weder -2 noch $+2$, weil -2 mal -2 sowohl $+4$ gibt, als 2 mal 2.

Der Ausdruck einer Irrationalgröße läßt sich oft auf mancherlei Weise verändern, und in einen andern Ausdruck verwandeln. $\sqrt{18}$ ist $= 3\sqrt{2}$, und wird ausgesprochen: 3 mal die Quadratwurzel aus 2. Man dividirt nämlich die Irrationalzahl durch eine Rationalzahl, und setzt deren Wurzel vor das Wurzelzeichen, und den Quotienten hinter dasselbe. Dividirt man $\sqrt{18}$ durch die Quadratzahl 9, so ist $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; durch 4 dividirt, wäre $\sqrt{18} = 2\sqrt{4\frac{1}{2}}$. So ist auch $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, und $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. So kann man auch umgekehrt solche aufgelöste Irrationalgrößen in einfache verwandeln: man darf nur den vorstehenden Factor in denjenigen Grad der Dignität erheben, unter welchem der irrationale Factor stehet, und diesen denn mit der Dignitätsgröße multiplieiren. $3\sqrt{2}$ ist $= \sqrt{18}$: denn 3 mal 3 ist 9, multiplicirt mit $\sqrt{2}$, gibt $\sqrt{18}$. So ist auch $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$: denn 2 mal 2 mal 2 ist 8, multiplicirt mit der $\sqrt[3]{3}$, gibt $\sqrt[3]{24}$.

I. Additio. Verschiedenartige Irrationalgrößen können nur durch das Zeichen $+$; gleichartige aber wirklich addirt werden. Die Summe von $\sqrt{5}$ und $\sqrt{8}$ ist $= \sqrt{5}+\sqrt{8}$; hingegen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{5}$ ist $= 2\sqrt{5}$. Oder $3\sqrt{6}$ und $4\sqrt{6}$ ist $= 7\sqrt{6}$.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} 8 - \sqrt{3} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{7} \\ 2 + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 8\sqrt{7} \\ \hline 10 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{7} \text{ Summe.} \end{array}$$

II. Subtractio. Verschiedenartige Irrationalgrößen können nur durch das Zeichen —; gleichartige aber wirklich subtrahirt werden. $\sqrt{3}$ von $\sqrt{8}$ subtrahirt, gibt $\sqrt{8}-\sqrt{3}$; hingegen $2\sqrt{5}$ von $6\sqrt{5}$ subtr., gibt $4\sqrt{5}$.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} 8 - \sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{7} \\ 2 + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 8\sqrt{7} \\ \hline 6 - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{7} \text{ Rest.} \end{array}$$

III. Multiplicatio. Soll eine Irrationalgröße mit einer gemeinen Zahl oder Größe multipliciret werden, so setzt man diese als Factor vor das Wurzelzeichen. $\sqrt{3}$ multiplicirt mit 2, gibt $2\sqrt{3}$. Soll aber die Multiplication wirklich geschehen, so muß der Factor vorher in die Dignität der Irrationalgröße erhoben, und also der Factor 2 erst quadrirt werden: daher ist $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$. So ist $\sqrt[3]{6}$ multiplicirt mit 2, $= 2\sqrt[3]{6}$, oder $\sqrt[3]{48}$. Stehen beide Factoren unter einerlei Wurzelzeichen, so werden sie wie gewöhnlich mit einander multiplicirt.

$\sqrt{3}$ multiplicirt mit $2\sqrt{5}$, gibt $2\sqrt{15}$. Oder $3\sqrt{6}$ mit $4\sqrt{3}$, gibt $12\sqrt{18}$. Sind sowohl beide Factoren als auch ihre Wurzelzeichen einander gleich, so fällt das Wurzelzeichen beim Producte weg. $\sqrt{5}$ multiplicirt mit $\sqrt{5}$, gibt 5. Wüßte man die Wurzel aus 5, und multiplicirte dieselbe mit sich selbst, so würde gewiß 5 herauskommen: denn die $\sqrt{4}$ multiplicirt mit $\sqrt{4}$ ist $= 4$. So auch bei imaginairen Größen, nur daß $\sqrt{-4}$ multiplicirt mit $\sqrt{-4}$ auch nur -4 gibt. Hiernach werden folgende Beispiele schon verständlich seyn.

$$\begin{array}{r} \text{I. } 4+\sqrt{3} \\ \text{mit } 2 \\ \hline 8+2\sqrt{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{II. } 6-3\sqrt{2} \\ \text{mit } 2 \\ \hline 12-6\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{III. } 8+2\sqrt{3} \\ \text{mit } \sqrt{2} \\ \hline 8\sqrt{2}+2\sqrt{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{IV. } 4-\sqrt{5} \\ \text{mit } \sqrt{5} \\ \hline 4\sqrt{5}-5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{V. } 7-3\sqrt{5} \\ \text{mit } 2\sqrt{3} \\ \hline 14\sqrt{3}-6\sqrt{15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{VI. } 6+3\sqrt{7} \\ \text{mit } 4+2\sqrt{3} \\ \hline 12\sqrt{3}+6\sqrt{21} \\ 24+12\sqrt{7} \qquad\qquad \\ \hline 24+12\sqrt{7}+12\sqrt{3}+6\sqrt{21} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{VII. } 8-4\sqrt{3} \\ \text{mit } 5-2\sqrt{3} \\ \hline -16\sqrt{3}+24 \\ 40-20\sqrt{3} \qquad \\ \hline 40-36\sqrt{3}+24 \\ \hline \text{oder } 64-36\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{VIII. } 6+2\sqrt{3} \\ \text{mit } 3-\sqrt{3} \\ \hline -6\sqrt{3}-6 \\ 18+6\sqrt{3} \qquad \\ \hline 18-6=12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{IX. } 12-\sqrt{20} \\ \text{mit } 6-\sqrt{20} \\ \hline -12\sqrt{20}+20 \\ 72-6\sqrt{20} \qquad \\ \hline 72-18\sqrt{20}+20 \\ \hline \text{oder } 92-18\sqrt{20} \end{array}$$

IV. Divisio. Wenn Irrationalgrößen durch einander dividirt werden sollen, so werden sie wie ein Bruch geschrieben. Die $\sqrt{8}$ dividirt durch die $\sqrt{3}$, gibt $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$. Solche Irrationalbrüche kann man aber immer dergestalt verwandeln, daß der Nenner rational wird: man darf nur oben und unten mit dem Nenner multipliciren, wobei dennoch der Bruch seinen vorigen Werth behält. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ multiplicirt mit $\sqrt{3}$, gibt also $\frac{\sqrt{24}}{3}$, oder $\frac{1}{3}\sqrt{24}$. Eben so auch, wenn Zähler und Nenner aus mehrern Gliedern bestehen, z. B. $\frac{5+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, wobei aber noch zu merken ist, daß man an dem Nenner, bevor man ihn zum Multiplicator macht, eins von den Zeichen ändert, nämlich + in —, oder — in + verwandelt. Dadurch wird die Wurzelgröße für den neuen Bruch im Nenner verschwinden. Demnach wird der angeführte Bruch mit $-2-\sqrt{2}$, oder mit $2+\sqrt{2}$ multiplicirt, als:

$$\begin{array}{rl}
 2-\sqrt{2} & \text{Nenner} \\
\text{mit } 2+\sqrt{2} & \\
\hline
+2\sqrt{2}-2 & \\
4-2\sqrt{2} \quad & \\
\hline
4-2=2 & \text{neuer Nenner}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
5+2\sqrt{2} & \text{Zähler} \\
\text{mit } 2+\sqrt{2} & \\
\hline
5\sqrt{2}+4 & \\
10+4\sqrt{2} \quad & \\
\hline
10+9\sqrt{2}+4=14+9\sqrt{2} & \text{neuer Zähler}
\end{array}$$

folglich ist der vorige Bruch

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{14+9\sqrt{2}}{2} \text{ oder } 7+4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Beispiele.

1. $\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ gibt $\frac{12\sqrt{15}}{3}$, oder $4\sqrt{15}$.

2. $\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ gibt $\frac{12\sqrt{6}}{8}$, oder $1\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

3. $\frac{12-3\sqrt{8}}{3+2\sqrt{3}}$, multipl. mit $3-2\sqrt{3}$, so kommt $\frac{36-9\sqrt{8}-24\sqrt{3}+6\sqrt{24}}{-3}$, multipl. mit -3, so kommt

$$\frac{-108+27\sqrt{8}+72\sqrt{3}-6\sqrt{24}}{9} = -12$$

$+3\sqrt{8}+8\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{24}$.

Von reinen quadratischen Gleichungen.

Wenn in einer Gleichung die zweite Dignität, oder das Quadrat von der unbekannten Größe, als höchste Würde vorkommt, so wird eine solche Gleichung überhaupt Quadratisch genannt. Ist die unbekannte Größe, außer ihrem Quadrat, in der Gleichung weiter nicht vorhanden, so heißt sie rein quadratisch, als: $x^2=36$.

Zur Auflösung solcher reinen quadratischen Gleichungen, bringt man dieselben auf die unbekannte Quadratgröße, und extrahirt auf beiden Seiten die Wurzel. Z. B.

$$
\begin{array}{r}
3x^2 - 12 = 96 \\
+ 12 \\
\hline
3)\ 3x^2 = 108 \\
\hline
\sqrt{}\ x^2 = 36 \\
\hline
x = 6
\end{array}
$$

Hier hat aber, so wie in allen quadratischen Gleichungen, die unbekannte Größe einen doppelten Werth: denn die Wurzel aus 36 ist sowohl -6 als $+6$: denn -6 mal $-6 = +36$.

V. Reine quadratische Aufgaben.

1. Suchet eine Zahl, wenn man sie quadrirt, und zum Quadrat 12 addirt, daß 93 kommen.
2. Suchet eine Zahl, wenn man von ihrem Quadrat 18 subtr., und den Rest durch 3 dividirt, daß 186 kommen.
3. Suchet eine Zahl, wenn man ihre Hälfte mit ihrem Drittentheil multipl., daß 24 kommen.
4. Suchet eine Zahl, wenn man zu derselben 5 addirt, hernach auch 5 von ihr subtrah., demnächst diesen Rest mit jener Summe multipl., daß 96 kommen.
5. Suchet eine Zahl, wenn man ihre Hälfte durch ihren 8ten Theil dividirt, daß ihr Quadrat heraus komme:
6. Suchet zwo Zahlen, die 12 zum Product, und 3 zum Quotienten haben.
7. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 40 ist; wenn man die große quadrirt, daß eben so viel

komme; als wenn man die kleinere mit 80 multiplicirt, und dies Product von 1744 subtr.
x sey die kleine, so ist 40 — x die große.

8. Einige Personen fragten nach ihrer Zeche. Der Wirth sagte: Wenn jeder so viel Stüber gibt als der Personen sind, so ist alles bezahlt. Nachdem dieses geschehen, bekam der Wirth 15 Rthlr.: Wie viel waren der Personen? Antw. 30.

9. Die Inwohner eines Orts hatten eine gemeinschaftliche Schuld abzuführen. Bezahlte jeder so viel Rthlr. als der Inwohner waren, so blieben noch 45 Rthlr. übrig; gab aber jeder nur $\frac{3}{4}$ mal so viel Rthlr. als ihre Anzahl war, so fehlten an der Summe 279 Rthlr.: Wie viel waren der Inwohner? Antw. 36.

10. In einer Schule ward nach der Anzahl der Schüler gefragt. Man gab zur Antwort: $\frac{1}{2}$ der Knaben ist so viel als $\frac{3}{4}$ der Mädchen, und wenn man $\frac{2}{3}$ der Knaben mit $\frac{3}{5}$ der Mädchen multiplicirt, so kommen 960: Wie groß war die Anzahl der Schüler? Antw. 100.

11. Als jemand um sein Alter gefragt ward, sagte er: Wenn die Quadratzahl meiner Jahre noch einmal quadrirt, und dies Quadrat durch $2730\frac{2}{3}$ dividirt wird, so kommt eben so viel, als wenn man $\frac{3}{4}$ meines Alters mit der Hälfte desselben multiplicirt: Wie alt war er? Antw. 32 Jahre.

12. A und B haben Geld; wenn sie die Quadratzahlen desselben zusammen thun, so kommen 136 Rthlr.; hingegen von einander abziehen, so bleiben 64 Rthlr. übrig: Wie viel Geld hatte jeder? Antw. A 10, B 6 Rthlr.

13. Zu einigen Armen sagte jemand: Wenn ich

einem jeden von euch 2 Rthlr. gebe, so bekommt ihr alle mein Geld; wenn ich aber einem jeden so viel Rthlr. geben wollte, als ich jetzt habe, so müßte ich 1058 Rthlr. austheilen können: Wie viel Geld hatte er? und wie viel waren der Armen? Antw. 46 Rthlr. und 23 Armen.

14. Als jemand gefragt wurde, wie viel Geld er habe? sagte er: Wenn ich die Kubikzahl meines Geldes quadrire, so kommt $1111\frac{1}{9}$ mal mehr, als wenn ich die Quadratzahl desselben noch einmal quadrire: Wie reich war er? Antw. $33\frac{1}{3}$ R.

15. Einer hat dreierlei Ellen-Waare; der zweiten ist 2 mal so viel als der ersten, der dritten 3 mal so viel als der zweiten; verkauft jede Elle von jeder Sorte für so viel Rthlr. als es Ellen sind, und löset $256\frac{1}{4}$ Rthlr.: Wie viel Ellen enthielt jede Sorte? Antw. A $2\frac{1}{2}$, B 5 und C 15 Ellen.

16. A, B und C haben Geld. So oft A 7 Rthlr. hat, hat B 3, und so oft B 17 Rthlr. hat, hat C 5; wenn man das Geld von A mit B Geld, und B Geld mit dem Gelde von C; ferner C Geld mit dem Gelde des A multiplicirt, und diese 3 Producte addirt, so kommen $3830\frac{2}{3}$ Rthlr.: Wie viel Geld hatte jeder? Antw. A $79\frac{1}{3}$, B 34, C 10 Rthlr.

17. Wann hat Otto von Guerike die Luftpumpe erfunden? fragte ein Liebhaber der Naturkunde. Man antwortete ihm: Wenn die damalige Jahrzahl mit ihrem 8ten Theil multiplicirt wird, so kommen 329672: Wann war es? Antw. 1624.

18. Ein Kapital hat zu $4\frac{1}{2}$ Procent gerade so viele

Jahre auf Zinsen gestanden, so vielmal es 100 Gulden enthält, und brachte in dieser Zeit $1300\frac{1}{2}$ Gulden Zinsen ein: Wie groß war es? Antw. 1700 Gulden.

19. Wann geht die Schule aus? fragte ein Rechenschüler. Das läßt sich ausrechnen, sagte der Lehrer: wenn man zu den Glockenschlägen der zum Ausgang bestimmten Stunde $4\sqrt{3}$ addirt, und auch $4\sqrt{3}$ davon subtrahirt, Rest und Summe mit einander multiplicirt, so kommen 73: Wann ging die Schule aus? Antw. um 11 Uhr.

20. Was ist das für eine Zahl, wenn man sie quadrirt, vom Quadrat $5\sqrt{3}$ subtrahirt, den Rest mit $7\sqrt{3}$ multipl., daß $126\sqrt{3} - 105$ kommen? Antw. $3\sqrt{2}$.

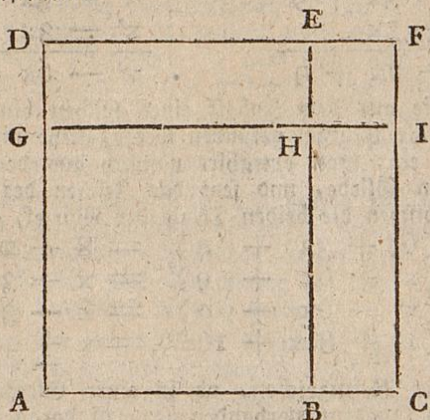
Von unreinen quadratischen Gleichungen.

1. Wenn in einer Gleichung das Quadrat von der unbekannten Größe, als höchste Würde, zugleich auch selbst, als die Wurzel aus dieser Würde vorkommt: so wird eine solche quadratische Gleichung unrein oder vermischt genannt, als $x^2 \pm ax = \pm b$. Dieser allgemeine Ausdruck zeigt an, daß das 2te Glied ax, und auch die bekannte Größe b, sowohl das Zeichen — aus auch + haben, und also positiv oder auch negativ seyn könne.

2. Eine solche Gleichung kann auch nicht anders als durch Extraction auf die unbekannte Größe gebracht werden; aber man sieht auch leicht ein, daß dieses nicht so schlechtweg, wie in den vorigen reinen quadratischen Auf=

gaben, geschehen kann: denn solche Gleichungen enthalten allemal eine zweigliedrige Wurzel, welche aus zwei Theilen, z. B. $a+b$, oder $8+2$ bestehet; daher man sie auch wohl binomische Wurzel, und das Quadrat davon binomisches Quadrat zu nennen pflegt.

3. Ein binomisches Quadrat läßt sich durch folgende Figur vorstellen.



Jede Seite dieser Figur bestehet also aus zwei Theilen, nämlich aus AB, und BC, und der Inhalt des ganzen Quadrats aus drei Theilen, nämlich: 1) aus einem größern Quadrat: ABGH, 2) aus zwei gleichgroßen Reckangeln: BCHI und GHDE, und 3) aus einem kleinern Quadrat: HIEF.

Wenn $AB = 8$, und $BC = 2$: so ist $AC = 8 + 2$ oder $= 10$, und folglich der Inhalt des binomischen Quadrats $= 100$.

$$\begin{array}{lrl} ABGH & = 8 \cdot 8 = & 64 \\ BCHI & = 8 \cdot 2 = & 16 \\ GHDE & = 8 \cdot 2 = & 16 \\ HIEF & = 2 \cdot 2 = & 4 \\ \hline \text{der Inhalt} & = & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Oder } 8+2 \\ 8+2 \\ \hline 16+4 \\ 64+16 \quad \\ \hline 64+32+4=100 \end{array}$$

Es sey ferner $AB = x$, und $BC = 3$ oder -3: so ist $AC = x + 3$ oder $x - 3$, und folglich der Inhalt des binomischen Quadrats $ACDF = x^2 + 6x + 9$, oder $x^2 - 6x + 9$, als:

$$\begin{array}{rrrcrrr} & x & +3 & \quad & \text{Oder} & x & -3 \\ & x & +3 & & & x & -3 \\ \hline & 3x & +9 & & & -3x & +9 \\ x^2 & +3x & & & x^2 & -3x & \\ \hline x^2 & +6x & +9 & & x^2 & -6x & +9 \end{array}$$

4. Wie aus dem Inhalt eines solchen binomischen Quadrats die Wurzel gefunden werde, sieht man hieraus gleich ein: man extrahirt nämlich aus dem ersten und dritten Gliede, und setzt das Zeichen des zweiten Gliedes zwischen die beiden Theile der Wurzel, als:

$$\sqrt{(64 + 32 + 4)} = 8 + 2$$
$$\sqrt{(x^2 + 6x + 9)} = x + 3$$
$$\sqrt{(x^2 - 6x + 9)} = x - 3$$
$$\sqrt{(x^2 \pm 8ax + 16a^2)} = x \pm 4a$$

5. Das Kennzeichen, ob in einer Gleichung ein binomisches Quadrat vorhanden sey, ist daran wahrzunehmen, wenn sich in derselben die unbekannte Größe in einer Dignität, zugleich auch als Quadratwurzel aus dieser Dignität befindet: daher denn auch folgende und ähnliche Formeln dahin gehören:

$$x^4 \pm ax^2 = \pm b \quad \text{Oder} \quad x^6 \pm ax^3 = \pm b$$

6. Wenn nun nach diesem Kennzeichen ein binomisches Quadrat in einer Gleichung enthalten ist, so pflegt es doch selten mit allen seinen drei Gliedern vollständig vorhanden zu seyn. Insgemein mangelt ihm das dritte Glied, nämlich das kleine Quadrat HIEF, und heißt deßwegen unvollständig. Folgende Aufgabe wird dieses deutlicher machen.

Suchet eine Zahl, wenn man 12 dazu addirt, und die Summe mit der Zahl selbst multiplicirt, daß das Product 45 sey.

Es sey x die Zahl, so kommt folgende Gleichung:

$$\begin{array}{l} x + 12 \\ \quad\quad\; x \\ \hline x^2 + 12x = 45 \end{array}$$

Hier ist nun zwar das angegebene Kennzeichen eines binomischen Quadrats vorhanden: denn es befindet sich in dieser Gleichung die unbekannte Größe in der Würde der 2ten Dignität (x^2); zugleich auch als Quadratwurzel aus dieser Dignität (x); aber das darin enthaltene binomische Quadrat ist unvollständig, weil hier das 3te Glied mangelt; und so lange dieses nicht hinzu kommt, kann auch die binomische Wurzel nicht extrahirt werden, wie man bei Ziffer 4 sehen kann.

7. Wie nun aber dieses mangelnde 3te Glied, wodurch das unvollständige binomische Quadrat ergänzt und vollständig wird, gefunden werden kann, geht aus der Beschaffenheit und Berechnung des oben gezeichneten binomischen Quadrats deutlich hervor.

8. In der vorstehenden Gleichung stellt das erste Glied, nämlich x^2, daß größere Quadrat ABGH, und das 2te Glied, $12x$, die Summe der beiden Rectangeln BCHI und GHDE vor. Jedes von diesen Rectangeln hat die Seite des größern Quadrats, nämlich BH, oder $GH = x$ zur Länge, und die Seite des kleinen Quadrats, nämlich HI, oder HE zur Breite. Diese Breite liegt nun in dem Coefficienten des 2ten Gliedes, nämlich in der Zahl 12, doppelt: folglich ist die Hälfte von dem Coefficienten des 2ten Gliedes, wie hier 6, allemal die Seite des kleinen Quadrats, und die Quadratzahl dieses halben Coefficienten, hier nämlich 36, ist allemal der Inhalt des kleinen Quadrats, oder das mangelnde 3te Glied, durch dessen Addition das unvollständige binomische Quadrat ergänzt und vollständig gemacht wird, worauf denn die binomische Wurzel extrahirt werden kann. Weil aber dieses 3te Glied auf der einen Seite der Gleichung immer addirt werden muß, der zweite Theil der binomischen Wurzel mag positiv oder negativ

seyn: so muß eben dieses 3te Glied, oder das Quadrat des halben Coefficienten des 2ten Gliedes, auch auf der andern Seite der Gleichung addirt werden, damit die Gleichung gleich bleibe.

Dieses alles soll nun, zur völligen Auflösung der vorstehenden Gleichung, angewandt werden.

$$\begin{array}{rl} x^2 + 12x = 45 & \\ + 36 + 36 & \\ \hline \sqrt{x^2 + 12x + 36 = 81} & \\ \hline x + 6 = 9 & \\ - 6 & \\ \hline x = 3 & \text{die Zahl} \\ + 12 & \\ \hline 15 & \\ x = 3 & \\ \hline 45 & \text{zur Probe.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{12}{2} = 6 \\ \quad\ 6 \\ \hline 36 \text{ das 3te Glied.} \end{array}$$

9. Auch die unreinen quadratischen Gleichungen enthalten allemal 2 Wurzeln oder Werthe für die unbekannte oder zu suchende Größe. Diese beiden Werthe findet man, wenn man den zweiten Theil der binomischen Wurzel, mit dem zugehörigen Zeichen, auf die entgegenstehende Seite der Gleichung bringt, und die daselbst vorhandene Wurzel dazu addirt, oder davon subtrahirt, als:

$$\begin{array}{c} \sqrt{x^2 + 12x + 36 = 81} \\ \hline x + 6 = 9 \\ \hline x = -6 \pm 9 = 3, \text{ oder } = -15. \end{array}$$

Also ist hier ein positiver und ein negativer Werth von x, nämlich $x=3$, und $x=-15$; und dieser negative Werth leistet der Aufgabe eben so wohl Gnüge, als der positive: denn $-15+12=-3 \times -15=45$.

Bisweilen sind diese zwei Werthe alle beide positiv, wie in folgender Gleichung:

$$\begin{array}{l} x^2 - 24x = -\ 44 \\ \quad\ \ + 144 \quad + 144 \\ \hline \surd\ x^2 - 24x + 144 = 100 \\ \hline x - 12 = 10 \\ \hline x = 12 \pm 10 = 22,\ \text{oder} = 2. \end{array}$$

10. Oft sind auch die beiden Wurzeln, und zwar der 2te Theil derselben, irrational, und diese werden denn im eigentlichen Verstande Binomien genannt, wie in folgender Gleichung:

$$\begin{array}{l} x^2 - 8x = 4 \\ \quad\ + 16 \ \ + 16 \\ \hline \surd\ x^2 - 8x + 16 = 20 \\ \hline x - 4 = \surd 20 \\ \hline x = 4 \pm \surd 20 = 4 + \surd 20,\ \text{oder} = 4 - \surd 20. \end{array}$$

11. Auch fallen die beiden Wurzeln bisweilen nicht nur irrational, sondern so gar auch wohl imaginair aus, wie in folgender Gleichung:

$$\begin{array}{l} x^2 - 8x = -\ 20 \\ \quad\ + 16 \quad + 16 \\ \hline \surd\ x^2 - 8x + 16 = -4 \\ \hline x - 4 = \surd -4 \\ \hline x = 4 \pm \surd -4 = 4 + \surd -4,\ \text{oder} = 4 - \surd -4. \end{array}$$

12. Bringt man alle Glieder einer unreinen quadratischen Gleichung nur auf eine Seite, und also dadurch die Gleichung auf Null, z. B. die obige Gleichungen

1) $\dfrac{x^2 - 24x = -44}{x^2 - 24x + 44 = 0,}$

in welcher $x = 22$, und $x = 2$;

2) $\dfrac{x^2 + 12x = 45}{x^2 + 12x - 45 = 0,}$

in welcher $x = 3$, und $x = -15$ ist:

so sind dabei folgende herrliche Eigenschaften zu bemerken:

I. So oftmals in einer solchen auf Null gebrachten Gleichung die Zeichen + und — ordentlich mit einander abwechseln, eben so viele positive Werthe sind darinnen enthalten. So oft aber hingegen gleiche Zeichen auf einander folgen, eben so viele negative Werthe sind denn auch vorhanden. Im obigen ersten Beispiele wechselt 1) + auf —, und 2) — auf +, folglich zweimal ordentlich mit einander ab: daher sind denn auch beide Werthe, $x = 22$, und $x = 2$ positiv. Im andern Beispiel folgt 1) + auf +, und 2) + auf —: daher ist nur ein Werth positiv, und der andere negativ, nämlich $x = 3$, und $x = -15$.

II. Die ledige Zahl im dritten Gliede ist allemal das Product der beiden Werthe oder Wurzeln, und der Coefficient im zweiten Gliede enthält allemal die Summe derselben. Im ersten obigen Beispiel ist $44 = 22$ mal 2, und $24 = 22 + 2$. Im andern Beispiel ist $45 = 3$ mal 15, und $12 = -15 + 3$.

Eben diese herrliche Eigenschaften trifft man auch in allen übrigen unreinen quadratischen Gleichungen an, die Werthe oder Wurzeln mögen irrational oder auch imaginair seyn. Wer dieses alles aus den ersten Gründen hergeleitet einzusehen wünscht, der lese und studire in Leonhard Euler's vollständigen Anleitung zur Algebra, das vortreffliche Kapitel von der Natur der quadratischen Gleichungen, welches zu dem Ende, am Schluß dieser Anweisung zur Algebra, mit abgedruckt ist.

Allgemeine Auflösung
der unreinen quadratischen Gleichungen.

I. Bringet die unbekannte Würdegröße der 2ten Dignität immer auf diejenige Seite der Gleichung, wo sie positiv ist; setzet auf eben diese Seite, als zweites Glied, auch die Wurzelgröße dieser Dignität, es mag dieselbe dadurch positiv oder negativ werden, und laßet denn die bekannte Größe die entgegenstehende Seite der Gleichung einnehmen.

II. Ist die Würdegröße etwa mit einem Coefficienten verbunden, so entbindet sie davon, indem ihr die ganze Gleichung durch diesen Coefficienten dividiret.

III. Quadriret den halben Coefficienten des 2ten Gliedes, und addiret diese Quadratgröße, als das mangelnde 3te Glied, auf beiden Seiten der Gleichung, und extrahiret hierauf die Quadratwurzel.

IV. Bringet endlich die Gleichung vollends auf die unbekannte Größe: so findet ihr auf der entgegenstehenden Seite die beiden Werthe derselben.

Zum Beispiel mag folgende allgemeine Form dienen:

$$ax^2 = bx + c$$

$$\text{a)}\quad ax^2 - bx = c$$

$$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$$

$$+\frac{b^2}{4a^2} \qquad + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\surd\; x^2 - bx + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x - \frac{b}{2a} = \surd\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \surd\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

VI. Unreine quadratische Aufgaben.

1. Suchet eine Zahl, wenn man 6 dazu addirt, und die Summe mit der Zahl selbst multiplicirt, daß das Product 91 sey.
2. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 18 ist, und wenn man sie mit einander multipl., daß 495 kommen.
3. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 12 ist, wenn man die kleinere quadrirt, und die größere mit 2 multiplicirt, daß gleich viel komme.
4. Suchet eine Zahl, wenn man sie zu ihrem Quadrat addirt, daß 56 kommen.
5. Suchet eine Zahl, wenn man sie von 36 subtrah., den Rest mit der Zahl selbst multiplicirt, daß 260 kommen.
6. Suchet eine Zahl, wenn man sie mit 4 multipl., daß eben so viel komme, als wenn man ihr Quadrat von 117 subtrahirt: Nach welcher Formel ist diese Zahl zu finden?

   Antw. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b + \frac{1}{4}a^2)} = 9$, oder -13.
7. Suchet eine Zahl, wenn man sie kubirt, eben so viel komme, als wenn man zu der Zahl selbst 240 addirt, und diese Summe noch mit der Zahl selbst multiplicirt.
8. Suchet eine Zahl, wenn man zu ihrem Quadrat 12 addirt, und diese Summe noch mit dem Quadrat der Zahl multipl., daß 1728 kommen.
9. Suchet eine Zahl, wenn man 18 dazu addirt, eben so viel komme, als wenn man ihr Quadrat von 830 subtrahirt: Nach welcher Formel ist diese Zahl zu finden?

   Antw. $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(b - a + \frac{1}{4})} = 28$, oder $= -29$.

10. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 8 ist; wenn man die kleine quadrirt, dies Quadrat zur größern addirt, und die Summe mit 3 multiplicirt, daß 492 kommen.

11. Suchet zwo Zahlen, wenn man sie von einander subtrahirt, daß 2 kommen, ihr Product aber 15 sey.

12. Theilet die Zahl 40 in zwei Factoren, deren Differenz 3 ist.

13. Suchet zwo Zahlen, deren Summe 20; die Summe ihrer Quadrate aber 208 ist.

14. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 8 ist; und wenn man $\frac{1}{4}$ der kleinen mit $\frac{5}{6}$ der größern multiplicirt, daß 80 kommen.

15. Suchet eine Zahl, wenn man $\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{12}$ derselben miteinander multipl., und zu diesem Product die Summe dieser Factoren addirt, daß 271 kommen.

16. Suchet eine Zahl, wenn man von ihrem Quadrat ihre Hälfte subtrahirt, daß $7\frac{1}{2}$ kommen.

17. Suchet eine Zahl, wenn man sie mit ihrem 3ten Theil multiplicirt, und zum Product ihre Hälfte addirt, daß 54 kommen.

18. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 6 ist; wenn man die größere quadrirt, eben so viel komme, als wenn man die kleine mit 11 multipl., und zum Product $35\frac{3}{4}$ addirt.

19. Suchet eine Zahl, wenn man 12 davon subtrah., und den Rest mit der Zahl selbst multipl., eben so viel komme, als wenn man die Zahl von 36 subtrahirt, und den Rest mit 10 multiplicirt: Nach welcher Formel ist diese Zahl zu finden?

Antw. $x = \frac{-a+c}{2} \pm \sqrt{bc + \left(\frac{-a+c}{2}\right)^2} = 20$, oder $= -18$.

20. Suchet eine Zahl, wenn man sie quadrirt, daß eben so viel komme, als wenn man die Zahl mit 14 multiplicirt, und zum Product 23 addirt. — Sie ist $7 \pm 6\sqrt{2}$.

21. Suchet eine Zahl, wenn man von ihr $8\sqrt{6}$ subtrahirt, und den Rest mit der Zahl selbst multipl., daß 48 kommen. Sie ist $4\sqrt{6} \pm 12$.

22. Einige Gäste hatten 12 Flaschen Wein, jede zu 30 Stbr., verzehrt. Der Wirth sagte: Wenn ein jeder $6\frac{1}{2}$ Stbr. mehr gibt, als der Gäste sind, so ist alles bezahlt: Wie viel waren der Gäste? Antw. 16.

23. Ein Garten, der 105 Quadratruthen enthält, ist 8 Ruthen länger als breit: Wie lang und breit ist er? Antw. 15° lang und 7° breit.

24. Für die Summe unsers Geldes, sagte A zu B, können wir ein Haus für 92 Rthlr. miethen; wären wir, sagte B zu A, das Product unseres Geldes reich, so könnten wir das Haus für 672 Rthlr. kaufen: Wie viel hatte jeder? Antw. A 84, und B 8 Rthlr.

25. Einer hatte ein Kapital zu 5 Procent ausstehen, und ward um dessen Größe gefragt. Er sagte: Wenn man den 8ten Theil desselben mit den zweijährigen Zinsen multipl., und zum Product 15 addirt, so kommt das Kapital heraus: Wie groß war es? Antw. 20 oder 60 Rthlr.

26. Zwanzig Personen, Männer und Weiber, davon verzehren so wohl die Weiber zusammen 24 Stbr.,

als auch die Männer 24 Stbr.; es findet sich aber, daß ein Mann einen Stüber mehr verzehrt hat, als ein Weib: wie groß war jede Anzahl? Antw. 8 Männer und 12 Weiber.

27. Im Monat April fragte jemand nach dem Dato, und erhielt zur Antwort: Die Quadratwurzel aus den heut verflossenen Tagen, sind die noch zukünftigen: An welchem Tage war es? Antw. Am 25. April.

28. Einer kaufte etliche Tücher für 180 Rthlr.; hätte er dafür 3 Tücher mehr bekommen, so wäre jedes Stück 3 Rthlr. wohlfeiler gewesen: Wie viel Tücher waren es? Antw. 12 Tücher.

29. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier, jedoch eine mehr wie die andere, zu Markt, und lösen doch gleiche viel Geld. Spricht A zu B: Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Stbr. gelöset; B sagt zu A: Hätte ich die deinigen verkauft, so hätte ich $6\frac{2}{3}$ Stbr. daraus gelöset: Wie viel Eier hatte jede? Antw. A 40, B 60; und jede lösete 10 Stbr.

30. Ein Mathematikus bestimmt die Höhe eines Thurms auf folgende Art: Wenn man 106 Fuß davon subtrahirt, oder 1009 Fuß dazu addirt, so kommt jedesmal eine Kubikzahl, deren Wurzeln um 5 unterschieden sind: Wie hoch ist der Thurm? Antw. 322 Fuß.

31. Einer hat zweierlei Thee, und findet, wenn er jedes Pfund des ersten um so viel Rthlr. verkaufte, als des andern Pfunde sind, so würde er 98 Rthlr. lösen; da er aber jede Sorte besonders, und zwar jedes Pfund für so viele Rthlr. verkauft, als es Pfunde sind, so bekommt er 245 Rthlr.:

Wie viel Thee war von jeder Sorte vorhanden? Antw. 7 und 14 ℔.

32. A und B legen zum Handel 172 Rthlr. zusammen. A steht mit seinem Gelde 4 Monate, und bekommt dafür an Einlage und Gewinn 95 Rthlr.; B erhält nach 6 Monaten an Einlage und Gewinn 132 Rthlr.: Wie viel hat jeder eingelegt? Antw. A 76, und B 96 Rthlr.

33. Ein Rechenmeister gab seinem Schüler zwo Zahlen zu multipliciren, von welchen die eine um 75 größer war, als die andere. Nachher mußte er die Probe machen, und das Product durch den kleinen Factor dividiren, und da kam zum Quotienten 227 heraus, und 113 blieben übrig, folglich war unrichtig multiplicirt worden. Der Lehrer befahl nun den Fehler aufzusuchen und zu verbessern. Als der Schüler ihn gefunden, sagte er: er hätte im Multipliciren nur einen Einer ausgelaßen; nein, sagte der Lehrer, diesen Einer hast du nicht in der ersten, sondern in der vierten Stelle ausgelaßen: Welche Zahlen mußte der Schüler mit einander multipliciren? Antw. 159 und 234.

34. Einer verkauft 32 Ellen Waare für 42 Rthlr., und gewinnt dadurch so viel Procent, als 4 Ellen im Einkauf gekostet haben: Wie theuer ist jede Elle eingekauft worden? Antw. Für $1\frac{1}{4}$ Rthlr.

35. Eine Gesellschaft hat 144 Rthlr. zu gleichen Theilen zu bezahlen. Zwei davon sind aber zur Zahlung unvermögend, deßwegen muß nun jeder von den andern einen Rthlr. mehr bezahlen: Wie groß war die Gesellschaft? Antw. 18 Personen.

36. Einer kauft für 1600 Rthlr. Waare, findet aber

Gelegenheit, dieselbe sogleich für 1925 Rthlr. wieder zu verhandeln, wovon er nach 7 Monaten 731 Rthlr., und den Rest über ein Jahr bekommt: Wie viel hat er Procent jährlich gewonnen? Antw. $24\frac{3}{8}$ Rthlr. Procent.

VII. Aufgaben arithmetischer Progressionen.

1. Diese Aufgaben setzen Bekanntschaft mit den Eigenschaften einer arithmetischen Progression voraus, welche etwa in meinem Practischen Schulbuch der gemeinen Rechenkunst und Geometrie, 2te Auflage Seite 328 und 329 bei Ziffer 1 und 5 nachzusehen sind.

2. Bei einer arithmetischen Progression kommt besonders zu merken vor: das erste Glied, die Differenz, das letzte Glied, die Anzahl aller Glieder, und die Summe aller Glieder. Es sey demnach

a das erste Glied
d die Differenz
z das letzte Glied
n die Anzahl aller Glieder, und
m die Summe aller Glieder:

so ist folgende Reihe eine arithm. Progression.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
a.	$a+d$.	$a+2d$.	$a+3d$.	$a+4d$.	$a+5d$ rc.

3. Betrachtet man diese Progression mit Aufmerksamkeit, so fällt es gleich in die Augen, daß die Summe des ersten und letzten; des zweiten und vorletzten Gliedes, — mit Einem Wort, daß die Summen eines jeden Paars, der von vorn und hinten her gegen einander rückenden Glieder, einander gleich sind.

4. Wenn man daher die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl aller Glieder multiplicirt, so erhält man auf eine künstliche Art die ganze Summe aller Glieder. Dieses wird nun durch folgende erste Gleichung auf eine allgemeine Art ausgedrückt:

$$\text{I.}\quad (a + z)\, \tfrac{1}{2}\, n = m.$$

5. Ferner ist bei der aufgestellten Progression leicht zu bemerken, daß das letzte Glied, $a + 5d$, einer zunehmenden arithmetischen Progression, allemal aus dem ersten Gliede, und der so oftmaligen Differenz, als die Progression Glieder hat, weniger eins, bestehet. Dieses drückt folgende zweite Gleichung auf eine allgemeine Art aus:

$$\text{II.}\quad a + (n - 1)\, d = z.$$

6. Bringt man diese beide Gleichungen auf einerlei Größen oder Buchstaben, so kann man sie vermittelst einer dritten Gleichung mit einander verbinden, und dadurch wieder andere Formeln herausbringen. Z. B.

Nach der I. Gleichung ist $z = \frac{2m}{n} - a$, und nach der II. Gleichung ist $z = a + (n - 1)\, d$: folglich ist auch

$$\begin{array}{r}
a + (n - 1)\, d = \frac{2m}{n} - a \\
- a \\
\hline
(n - 1)\, d = \frac{2m}{n} - 2a \\
\hline
\end{array}$$

$$d = \frac{\frac{2m}{n} - 2a}{n - 1},$$ oder mit n eingerichtet, so ist

$$\text{III.}\quad d = \frac{(m - an)\, 2}{(n - 1)\, n}$$

7. Diese drei Hauptgleichungen oder Formeln, wovon jede aus vier verschiedenen Größen oder Buchstaben bestehet, laßen sich auf eine jede derselben bringen. Wenn daher drei Größen bekannt sind, oder in einer arithm. Progression gegeben werden, so bringt man die eine oder andere von diesen Gleichungen auf die unbekannte vierte oder zu suchende Größe, und kommt dadurch zur Auflösung folgender und ähnlicher Aufgaben.

1. Es verzehrt jemand in 20 Tagen 17 Rthlr. 10 Stbr., und zwar jeden folgenden Tag 5 Stbr. mehr, als am vorhergehenden: Wie viel hat er am ersten Tag verzehrt? Antw. 4 Stbr.
2. Unter 12 arme Leute sollen 5 Rthlr. dergestalt ausgetheilt werden, daß der erste 3 Stbr., und jeder folgende etwas Gewisses mehr bekommen soll, als der vorhergehende: Wie viel bekommt jeder folgende mehr? Antw. 4 Stbr.
3. Es sollen nach arithm. Progression 80 Rthlr. unter 6 Personen dergestalt vertheilt werden, daß der höchste 20 Rthlr. bekommt: Wie viel bekommt der geringste und jeder folgende mehr? Antw. $6\frac{2}{3}$ Rthlr., jeder folgende $2\frac{2}{3}$ Rthlr. mehr.
4. Unter 16 Arme soll Geld ausgetheilt werden, daß jeder folgende 3 Stbr. mehr bekommt. Bei der Austheilung blieb der 11te aus, dessen Antheil dem 5ten mit gegeben ward, und so erhielt er 46 Stbr.: Wie viel bekam jeder von diesen beiden? Antw. Der 5te 14, und der 11te 32 Stbr.
5. Nach einer arithm. Progression bekam der 4te und 9te zusammen 37 Rthlr.; der 5te und 11te aber 46 Rthlr.: Wie viel bekam jeder von die-

sen? Antw. Der 4te 11, der 5te 14, der 9te 26, und der 11te 32 Rthlr.

6. Wenn am 1. Januar der Tag 8 Stunden und 12 Minuten, und der letzte Tag dieses Monats 9 Stunden und 42 Minuten lang ist: Um wie viel hat sich denn jeder Tag im Durchschnitt verlängert? Antw. 3 Minuten.

7. Einer ward um sein Alter gefragt, und antwortete: Wenn ich meine durchlebten Jahre von Jahr zu Jahr addire, so erscheinen 1431: Wie alt war er? Antw. 53 Jahre.

8. Man hat 8 Zahlen, die in arithm. Progressionen stehen. Die Summe der beiden mittelsten ist 34, und das Product der ersten und letzten 93: Welche Zahlen sinds? Antw. 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 und 31.

9. Von 7 Zahlen einer arithm. Progression ist die größte 33; wenn man aber die beiden kleinsten mit einander multiplicirt, so ist der 3te Theil dieses Products um 28 kleiner, als die Summe aller Zahlen: Welches ist die Differenz dieser Zahlen? Antw. 2.

10. Einer kauft etliche Schweine; das erste für 2 Rthlr., und jedes folgende für 2 Rthlr. mehr als das vorhergehende, und bezahlt für alle Schweine 110 Rthlr.: Wie viel sind derselben gewesen? Antw. 10 Stück.

11. Nach einer öffentlichen Schulprüfung wurden dem Schullehrer 21660 Nüsse zugeschickt, um sie unter seine Schüler, und zwar nach der Ordnung einer arithm. Progression, welche mit 2 anfangen, und mit 3 steigen sollte, auszutheilen: Wie groß war die Anzahl der Schüler? Antw. 120.

VIII. Aufgaben geometrischer Progressionen.

1. Auch hierbei wird vorausgesetzt, was von den Eigenschaften einer geometrischen Progression im Practischen Schulbuch, Seite 328 und 336 bei Ziffer 1 und 2 angeführet ist. Es kommt dabei zu merken vor: das erste Glied, der Name oder Nenner des Verhältnisses, die Anzahl aller Glieder, das letzte Glied und die Summe aller Glieder. Es sey demnach

a das erste Glied
b der Nenner
n die Anzahl aller Glieder
z das letzte Glied, und
m die Summe aller Glieder:

so ist folgende Reihe eine geom. Progression

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
a.	ab.	ab^2.	ab^3.	ab^4.	ab^5.	ab^6.	ab^7	u.s.w.

2. Bei aufmerksamer Betrachtung dieser Progression ist daran die Eigenschaft leicht zu bemerken, daß das Product des ersten und letzten; des zweiten und vorletzten Gliedes; — mit Einem Wort, daß die Producte, der von vorn und hinten her gegen einander rückenden Glieder, einander gleich sind.

3. Bei Betrachtung des letzten Gliedes ist an demselben die Eigenschaft gleich wahrzunehmen, daß der Exponent des Nenners der Anzahl aller Glieder, weniger eins, gleich, und dieser Nenner allemal mit dem ersten Gliede verbunden ist: daher bestehet das letzte Glied aus dem Product des ersten Gliedes mit dem Nenner, erhoben zur Dignität der Anzahl aller Glieder, weniger eins. Dieses wird nun durch folgende Gleichung auf eine allgemeine Art ausgedrückt:

$$\text{I.}\quad z = ab^{n-1}$$

4. Dieses wird nun wörtlich so ausgedrückt: Erhebet den Nenner in diejenige Dignität, welche der Anzahl aller Glieder, weniger eins, gleich ist, und multiplicirt diese Dignitätszahl mit dem ersten Gliede: so kommt das letzte Glied der geometrischen Progression heraus.

5. Zu einer Formel für die Summation einer geom. Progression gelangt man auf folgende Art: Man setzt die Progression gleich der Summe m, und multiplicirt diese Gleichung noch einmal mit dem Nenner b, und zieht die erste Gleichung von dieser letztern ab, als:

$$\begin{array}{llllllllll} & & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. \\ m & = & a & +ab & +ab^2 & +ab^3 & +ab^4 & +ab^5 & +ab^6 & +ab^7 \quad (b \\ \hline bm & = & & ab & +ab^2 & +ab^3 & +ab^4 & +ab^5 & +ab^6 & +ab^7+ab^8 \\ \hline \end{array}$$

$$bm - m = ab^8 - a.$$

6. Hier bleibt nun augenscheinlich $bm - m = ab^8 - a$ übrig, welche Gleichung auf die Summe m gebracht werden kann. Weil aber der Exponent 8 der Anzahl aller Glieder gleich n ist: so ist der allgemeine Ausdruck:

$$bm - m = ab^n - a$$

$$\text{II.} \quad m = \frac{(b^n - 1)\,a}{b - 1}$$

Dieser Ausdruck heißt nun wörtlich so: Erhebet die Zahl des Nenners in diejenige Dignität, deren Exponent der Anzahl aller Glieder gleich ist; von dieser Dignität subtrahirt 1; multipl. den Rest mit dem ersten Gliede, und dividiret dies Product durch den um 1 verminderten Nenner: so kommt die Summe der geom. Progression heraus.

8. Dieses kommt auch mit folgendem Verhältniß überein: In einer jeden geom. Progression verhält sich die Summe aller Glieder, weniger dem letzten, zur Summe aller Glieder, weniger dem ersten, wie 1 zum Nenner. Zum Beweis dieses Satzes, ist das Product der beiden äußern Glieder, dem Product der beiden innern gleich, als:

$$m - ab^{n-1} : m - a = 1 : b$$

$$bm - ab^n = m - a$$

$$bm - m = ab^n - a$$

$$m = \frac{(b^n - 1)\,a}{b - 1}$$

Hier kommt also auch die vorige Formel heraus. Nach den vorher bemerkten Eigenschaften, und den daraus hergeleiteten beiden Hauptgleichungen oder Formeln, lassen sich folgende und ähnliche Aufgaben auflösen.

1. Eine Taschenuhr wurde durch Versteigernng an den Meistbietenden verkauft, wobei jeder folgende die Hälfte des vorigen mehr bot, und so ward sie dem 8ten für 36 Rthlr. 27 Stbr. zugeschlagen: Wie viel hat der erste geboten? Antw. 2 Rthlr. 8 Stbr.
2. Es gibt eine geom. Progression von 5 Gliedern, wenn man die vier ersten addirt, so kommt $97\frac{1}{2}$, die Summe der vier letzten aber ist $146\frac{1}{4}$: Welche Zahlen sinds? Antw. 12, 18, 27, $40\frac{1}{2}$, und $60\frac{3}{4}$.
3. Es gibt eine arithm. und geom. Progression, jede von 3 Gliedern, die Summe beider Progressionen beträgt 96. Die Glieder der arithmetischen verhalten sich zu den Gliedern der geometrischen Progression, von vorne her, wie 1 zu 2, wie 1 zu 3, und 1 zu 6: Welches sind diese Progressionen? Antw. 3, 6, 9 und 6, 18, 54.
4. Ein Lottospieler verlor in 12 Ziehungen 682 Rthlr. 40 Stbr., nachdem er immer seinen Einsatz ver-

doppelt hatte: Wie hoch hat er zuerst eingesetzt? Antw. 20 Stbr.

5. Ein Amt weigerte sich, eine ausgeschriebene Contribution zu bezahlen, und ward deßwegen mit einigen Soldaten zur militairischen Execution dergestalt belegt, daß es den ersten Tag jedem Soldaten 20 Stbr., und jeden folgenden Tag 3 mal so viel, als am vorhergehenden bezahlen mußte. Erst am 8ten Tage ergab es sich, und mußte in allem $8746\frac{2}{3}$ Rthlr. an Exucutionskosten bezahlen: Wie viel sind der Soldaten gewesen? Antw. 8.

6. In einer geom. Progression von 5 Gliedern, ist die Summe des ersten und letzten Gliedes 410; das Product dieser Glieder aber 2025: Welches sind die Zahlen dieser Progression? Antw. 5, 15, 45, 135 und 405.

Von reinen kubischen Gleichungen.

Wenn in einer Gleichung die dritte Dignität, oder der Kubus von der unbekannten Größe, als höchste Würde vorkommt, so wird eine solche Gleichung überhaupt kubisch genannt. Ist die unbekannte Größe, außer ihrem Kubus, in der Gleichung weiter nicht vorhanden, so heißt sie rein kubisch, als: $x^3 = 8$.

Zur Auflösung solcher reinen kubischen Gleichungen, bringt man dieselben auf die unbekannte Kubikgröße, und extrahirt auf beiden Seiten die Kubikwurzel. Z. B.

$$4x^3 + 20 = 52$$
$$- 20$$
$$4)\ 4x^3 = 32$$
$$\sqrt[3]{\ } x^3 = 8$$
$$x = 2$$

So wie eine jede quadratische Gleichung zwei Werthe oder Wurzeln hat, so trifft die Vermuthung ein, daß in einer kubischen Gleichung deren drei enthalten sind. In der vorstehenden Gleichung $x^3 = 8$, ist $x = 2$. Außer dieser Wurzel müßen also noch zwei andere Werthe für x in der Gleichung vorhanden seyn. Um diese zu finden, bringt man die Gleichung $x^3 = 8$ auf 0, und setzt $x^3 - 8 = 0$; deßgleichen auch die schon gefundene Wurzel $x = 2$, nämlich $x - 2 = 0$, und dividirt die in nichts verwandelte Gleichung durch die in nichts verwandelte Wurzel, als:

$$\begin{array}{r|l}
x - 2 \text{ in } x^3 - 8 & x^2 + 2x + 4 = 0 \\
x^3 - 2x^2 & \\
\hline
+ 2x^2 - 8 & \\
+ 2x^2 - 4x & \\
\hline
+ 4x - 8 & \\
+ 4x - 8 & \\
\hline
- &
\end{array}$$

Indem nun die kubische Gleichung $x^3 - 8 = 0$, durch die gefundene Wurzel $x - 2 = 0$ dividiret worden, so ist im Quotienten eine quadratische Gleichung, nämlich $x^2 + 2x + 4 = 0$, herausgekommen, worauf die beiden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden, als:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x = -4$$
$$+ 1 \qquad + 1$$
$$\sqrt{\ } \; x^2 + 2x + 1 = -3$$
$$x + 1 = \sqrt{-3}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{-3}$$

folglich sind aus $x^3 = 8$ die drei Werthe für x

I. $x = 2$

II. $x = -1 + \sqrt{-3}$

III. $x = -1 - \sqrt{-3}$

Zur Probe bringen diese beiden letzten Wurzeln eben so wohl, als die erstere, die Kubikzahl 8 heraus, wenn man sie kubirt, als:

$$
\begin{array}{rl}
 & -1+\sqrt{-3} \\
 & \underline{-1+\sqrt{-3}} \\
 & -\sqrt{-3}-3 \\
 & \underline{1-\sqrt{-3}} \\
 & \underline{1-2\sqrt{-3}-3} \\
\text{oder} & -2-2\sqrt{-3}\ \text{das}\ \square \\
 & \underline{-1+\sqrt{-3}} \\
 & -2\sqrt{-3}+6 \\
 & \underline{2+2\sqrt{-3}} \\
 & 2+6=8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & -1-\sqrt{-3} \\
 & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
 & +\sqrt{-3}-3 \\
 & \underline{1+\sqrt{-3}} \\
 & \underline{1+2\sqrt{-3}-3} \\
\text{oder} & -2+2\sqrt{-3}\ \text{das}\ \square \\
 & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
 & +2\sqrt{-3}+6 \\
 & \underline{2-2\sqrt{-3}} \\
 & 2+6=8
\end{array}
$$

IX. Reine kubische Aufgaben.

1. Es ist eine Zahl, wenn man deren Quadrat mit ihrem 4ten Theil multiplicirt, so kommen 432: Welche ists? Antw. 12 oder . . .
2. Was ist das für eine Zahl, wenn man ihre 4te Dignität mit ihrer Hälfte dividirt, und zu diesem Quotienten $14\frac{1}{4}$ addirt, daß 100 kommen? Antw. $3\frac{1}{2}$ oder . . .
3. Zu einer Reise wurde einiges Geld bestimmt. Die Hinreise kostete $\frac{1}{4}$, die Rückreise $\frac{1}{3}$, und der Aufenthalt an Ort und Stelle $\frac{1}{8}$ desselben, und das Product dieser Theile beträgt 9216 Rthlr.: Wie viel Geld ist zu dieser Reise bestimmt gewesen? Antw. 96 Rthlr.
4. Einige Hauptleute liegen zu Felde. Jeder hat

3 mal so viel Reuter, und 20 mal so viel Fußgänger als der Hauptleute sind. Jeder Reuter bekommt monatlich an Sold gerade so viel Gulden als der Hauptleute sind, ein Fußgänger aber nur halb so viel, und so beträgt der ganze monatliche Sold 13000 Gulden: Wie viel sind der Hauptleute gewesen? Antw. 10.

5. Man fodert eine geom. Progression von drei Gliedern, deren Nenner 3 ist; wenn man das 3te Glied quadrirt, und dies Quadrat noch mit dem ersten Gliede multiplicirt, daß 17496 kommen: Welche Zahlen sinds? Antw. 6, 18 und 54.

6. Eine Bäuerin vertauscht Enten gegen Hühner, und gibt allemal 2 Enten für 3 Hühner. Die Hühner legen Eier, jedes $\frac{1}{3}$ so viel als der Hühner sind. Mit diesen geht sie zu Markte, gibt allemal 9 Eier für so viel Pfenninge, als ein Huhn hat Eier gelegt, und löset 72 Pfenninge: Wie viel Enten hat die Bäuerin vertauscht? Antw. 12.

7. Es gibt eine Zahl von folgender Eigenschaft: Wenn man von derselben 120 subtrahirt, oder 482 zu ihr addirt, so kommen in beiden Fällen Kubikzahlen heraus, deren Wurzeln um 2 unterschieden sind: Welche Zahl ists? Antw. 849.

8. Es sind drei Zahlen von der Art: Multipl. man das Quadrat der ersten mit der zweiten, so kommen 36; das Quadrat der zweiten mit der dritten, so kommen 80; das Quadrat der dritten mit der ersten, so kommen 75: Welche Zahlen sind es? Antw. 3, 4 und 5.

9. Eine Mauer, welche $\frac{1}{8}$ so breit, und $\frac{1}{6}$ so hoch als lang seyn sollte, wurde veraccordirt, jeden

Kubikfuß für 12 Stbr., und so betrug der ganze Lohn $57\frac{3}{5}$ Rthlr.: Wie lang, breit und hoch ist die Mauer gewesen? Antw. 24 Fuß lang, 3′ breit und 4′ hoch.

10. In einer geom. Progression von 7 Gliedern, ist die Summe des ersten und letzten Gliedes 3650, und das Product dieser beiden Glieder 18225: Welches sind die Zahlen dieser Progression? Antw. 5, 15, 45, 135, 405, 1215 und 3645.

Von vollständigen kubischen Gleichungen.

1. Wenn in einer Gleichung der Kubus von der unbekannten Größe, als höchste Würde, zugleich auch noch die unbekannte Größe selbst, nebst ihrem Quadrat vorkommt, so wird eine solche kubische Gleichung vollständig, unrein, oder auch wohl vermischt genannt, als: $x^3 \pm ax^2 \pm bx = \pm c$.

2. Auch solche vollständige kubische Gleichungen enthalten allemal drei Wurzeln oder Werthe für die unbekannte oder zu suchende Größe. Und wenn man alle Glieder nur auf eine Seite, und also dadurch die Gleichung auf o bringt, so finden auch hierbei jene herrliche Eigenschaften statt, welche Seite 66 bei den quadratischen Gleichungen bemerkt worden sind, nämlich:

I. So oftmals in einer solchen auf o gebrachten Gleichung die Zeichen + und — ordentlich mit einander abwechseln, eben so viele positive Wurzeln sind darinnen enthalten. So oft hingegen einerlei Zeichen auf einander folgen, eben so viele negative Wurzeln sind denn auch vorhanden.

II. Der Coefficient im 2ten Gliede enthält allemal die Summe aller drei Wurzeln; und der Coefficient des 3ten Gliedes die Summe der Producte von je zwei

Wurzeln, und endlich ist die ledige Zahl im 4ten Gliede jedesmal das Product aller drei Wurzeln.

Zum Beispiel diene folgende Gleichung:

$x^3 + 6x^2 - 64x + 96 = 0$, in welcher
$x = 2$
$x = 4$
$x = -12$ ist.

Erkl. Hier wechseln die Zeichen zweimal mit einander ab, nämlich $+$ auf $-$, und $-$ auf $+$; hingegen folgen einmal einerlei Zeichen auf einander, nämlich $+$ auf $+$: daher sind zwei Wurzeln positiv, nämlich $x = 2$ und $x = 4$, und eine Wurzel ist negativ, nämlich $x = -12$.

Die Summe dieser drei Wurzeln ist dem Coefficienten des 2ten Gliedes, nämlich 6 gleich: denn $2 + 4 - 12 = -6$.

Die Summe der Producte je zweier Wurzeln ist dem Coefficienten des 3ten Gliedes 64 gleich: denn

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & . & 4 & = & 8 \\ 4 & . & -12 & = & -48 \\ -12 & . & 2 & = & -24 \\ \hline & & & & -64 \end{array}$$

Die ledige Zahl 96 im 4ten Gliede ist das Product aller drei Wurzeln: denn 2 mal 4 mal 12 = 96.

3. Aus diesen bemerkten Eigenschaften folgt nun auch die Auflösung einer solchen kubischen Gleichung: denn weil die ledige Zahl im 4ten Gliede das Product aller drei Wurzeln ist, so kann auch keine Rationalwurzel anders statt finden, oder sie muß ein Theiler von dieser Zahl seyn. Alle Theiler von 96 sind aber folgende: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Nun muß noch probirt werden, welche von diesen Theilern die Gleichung in 0 verwandeln. Weil man aber aus der Zeichenfolge schon vorläufig weiß, daß zwei positive Wurzeln vorhanden sind, so kann auch der Versuch zuerst mit positiven Theilern gemacht werden. Bei wirklich an-

gestelltem Versuch wird man die zwei positive Wurzeln bald finden, nämlich $x=2$, und $x=4$, welche die Gleichung in o verwandeln, als:

$$\begin{array}{lrlrr}
\text{I.} & x & = 2 & & \\
\text{so ist} & x^3 & = + & 8 & \\
+ & 6x^2 & = + & 24 & \\
- & 64x & = & & -128 \\
+ & 96 & = + & 96 & \\
\hline
& & & +128 & -128 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrlrr}
\text{II.} & x & = 4 & & \\
\text{so ist} & x^3 & = + & 64 & \\
+ & 6x^2 & = + & 96 & \\
- & 64x & = & & -256 \\
+ & 96 & = + & 96 & \\
\hline
& & & +256 & -256 = 0
\end{array}$$

Bei dem Versuch mit negativen Theilern wird nur der negative Theiler -12 die Gleichung in o verwandeln, da nämlich $x=-12$ ist, als:

$$\begin{array}{lrlrr}
\text{III.} & x & = -12 & & \\
\text{so ist} & x^3 & = & & -1728 \\
+ & 6x^2 & = + & 864 & \\
- & 64x & = + & 768 & \\
+ & 96 & = + & 96 & \\
\hline
& & & +1728 & -1728 = 0
\end{array}$$

4. Es ist indessen nicht nöthig, alle drei Wurzeln durch Versuche aus den Theilern des 4ten Gliedes zu suchen; man darf auf diese Weise nur eine Wurzel finden, und die kubische Gleichung durch die gefundene und gleichfalls auf o gebrachte Wurzel dividiren, so bekommt man eine quadratische Gleichung, woraus die beiden übrigen Wurzeln, wie schon bekannt ist, leichter gefunden werden können, als:

$$\text{I. } x-2 \text{ in } \begin{array}{l} x^3+6x^2-64x+96 \\ \underline{x^3-2x^2} \\ \quad +8x^2-64x \\ \quad \underline{+8x^2-16x} \\ \qquad -48x+96 \\ \qquad \underline{-48x+96} \\ \qquad\quad - \end{array} \Bigg| x^2+8x-48=0$$

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$
$$x^2 + 8x = 48$$
$$+16 \quad +16$$
$$\sqrt{\ } \; x^2 + 8x + 16 = 64$$
$$x + 4 = 8$$
$$x = -4 \pm 8 = 4, \text{ oder } = -12$$

5. Bisweilen ist die ledige Zahl im 4ten Glied allzu groß, und deren Theiler gar zu viel, folglich der Versuch auch zu mühsam, mit allen Theilern die Probe der Nichtsverwandlung anzustellen. In diesem Fall erdenkt man eine geom. Progression von 4 Gliedern, wovon das erste Glied 1, und der Nenner eine solche Zahl ist, daß sich die Glieder der Gleichung durch die Glieder der Progression ohne Rest dividiren laßen, wodurch also die ledige Zahl verkleinert wird, als:

$$\begin{array}{l} x^3 + 6x^2 - 64x + 96 = 0 \\ \underline{1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 4 \quad , \quad 8} \\ x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0 \end{array}$$

Aus den Theilern der kleinen ledigen Zahl 12, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 12, findet man leicht folgende drei Wurzeln: $x=1$, $x=2$, und $x=-6$, welche die Gleichung in o verwandeln. Diese werden nun mit dem Nenner der zur Division gebrauchten Progression, nämlich mit 2 multipl., so kommen die schon bekannte drei Wurzeln der Hauptgleichung wieder heraus: $x=2$, $x=4$, und $x=-12$.

Noch ein anderes Beispiel.

Es sey $x^3 - 24x^2 - 612x + 12960 = 0$

Alle Glieder dieser Gleichung laßen sich ebenfalls durch die obige Progression 1, 2, 4, 8 dividiren; aber auch durch 1, 6, 36, 216, deren Nenner 6 ist, als:

$$\begin{array}{cccc} x^3 - & 24x^2 - & 612x + & 12960 = 0 \\ 1 \quad , & 6 \quad , & 36 \quad , & 216 \\ \hline x^3 - & 4x^2 - & 17x + & 60 = 0 \end{array}$$

Die Theiler von der ledigen Zahl 60 sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Von diesen verwandeln die drei Werthe $+3, -4$ und $+5$ die Gleichung in 0, welche nur noch mit 6, als dem Nenner der Progression, multipl. werden müßen, um die drei Wurzeln der Hauptgleichung zu erhalten, als:

$$\begin{aligned} +3 \cdot 6 &= 18 = x \\ -4 \cdot 6 &= -24 = x \\ +5 \cdot 6 &= 30 = x \end{aligned}$$

6. Wenn in einer Gleichung Brüche vorkommen, so werden dieselben dadurch weggeschafft, wenn die Gleichung mit einer solchen geom. Progression multipliciret wird, wodurch die Brüche verschwinden, als:

$$\begin{array}{cccc} x^3 - & 7\tfrac{5}{12}x^2 + & 2\tfrac{2}{3}x + & 1\tfrac{3}{4} = 0 \\ 1 \quad , & 12 \quad , & 144 \quad , & 1728 \\ \hline x^3 - & 89x^2 + & 384x + & 3024 = 0 \end{array}$$

Aus den Theilern der ledigen Zahl 3024, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 u. s. w., findet sich bei der Probe die positive Wurzel $x=9$. Wird nun die Gleichung durch $x-9=0$ dividirt, so erhält man aus der kommenden quadratischen Gleichung die beiden übrigen Wurzeln, nämlich $+84$ und -4. Diese gefundene Wurzeln müßen nun aber noch durch 12, als dem Nenner der Progression, dividiret werden, um die drei Wurzeln für x in der Hauptgleichung zu bekommen, als:

$$12 \text{ in } \begin{cases} +84 = 7 = x \\ +\ 9 = \frac{3}{4} = x \\ -\ 4 = -\frac{1}{3} = x \end{cases}$$

7. Wenn das erste Glied einer Gleichung mit einem Coefficienten verbunden ist, so wird die ganze Gleichung durch denselben dividirt, als:

$$4)\quad \frac{4x^3 + 8x^2 - 224x - 768 = 0}{x^3 + 2x^2 - 56x - 192 = 0}$$

8. Sollten aber nicht alle Glieder der Gleichung durch den Coefficienten des ersten Gliedes ohne Rest dividiret werden können, so schafft man denselben dadurch weg, wenn man die Gleichung mit einer geom. Progression multiplicirt, deren erstes Glied ein solcher Bruch ist, wodurch der Coefficient im ersten Gliede der Gleichung verschwindet, wenn er damit multiplicirt wird; der Nenner der Progression muß denn dem Nenner des Bruchs gleich seyn, als:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x^3 & + & 14x^2 & - & 88x & - & 384 & = & 0 \\ \frac{1}{3} & , & 1 & , & 3 & , & 9 & & \\ \hline x^3 & + & 14x^2 & - & 264x & - & 3456 & = & 0 \end{array}$$

9. Wenn man unter den Theilern der ledigen Zahl im 4ten Gliede, weder einen positiven noch negativen Theiler antrifft, der die Gleichung in 0 verwandelt, so findet auch keine Rationalwurzel, weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen statt; die Wurzeln sind alsdann irrational, oder wohl gar imaginair. Wie nun in einer kubischen Gleichung die Irrational- und Imaginair-Wurzeln gefunden werden können, lehrt uns die so genannte Cardaniregel, deren Erfindung dem Cardano, oder vielmehr dem Scipioni Ferrei zugeschrieben wird.

Diese Regel des Cardani hat Leonh. Euler, in seiner schon gedachten vollständigen Anleitung zur Algebra, in einem besondern Kapitel deutlich vorgetragen und erklärt, weßhalb auch dieses Kapitel am Ende dieser Anweisung zur Algebra mit abgedruckt ist.

Die folgende kubische Aufgaben können indessen nach dem bisher gegebenen Unterricht aufgelöst werden.

X. Vollständige kubische Aufgaben.

1. Welches sind die Werthe von x in folgender Gleichung: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$? Antw. $x = 2, 3, 4$.
2. Was ist x in folgender Gleichung: $x^3 - 6x^2 - 40x + 192 = 0$? Antw. $x = 4$ u. s. w.
3. Was ist x in $x^3 + 7x^2 - 48x - 180 = 0$? Antw. $x = -3$ u. s. w.
4. Was ist x in $x^3 + 2x^2 + 22x = 60$?
5. Was ist x in $x^3 - 16x^2 + 64x = 64$?
6. Was ist x in $x^3 - x - 6 = 0$?
7. Was ist x in $x^3 + 15x^2 + 74x + 120 = 0$?
8. Was ist x in $x^3 - 6x^2 - 792x + 8640 = 0$?
9. Was ist x in $4x^3 + 8x^2 - 224x = 768$?
10. Was ist x in $3x^3 + 14x^2 - 88x = 384$?
11. Was ist x in $\frac{1}{4}x^3 + 5\frac{1}{2}x^2 + 38x + 80 = 0$?
12. A sagte zu B: Ich habe nur 12 Rthlr. mehr als du; aber wenn man das Product unseres Geldes mit der Summe desselben multiplicirt, so kommen 14560: Wie viel hat jeder gehabt? Antw. A 26 und B 14 Rthlr.

13. Etliche Personen fangen einen Handel an, wozu jeder von ihnen 10 mal so viel Rthlr. herschießt, als der Personen sind, und gewinnen Procent 6 Rthlr. mehr, als ihrer sind, und so beträgt ihr ganzer Gewinn 392 Rthlr.: Wie viel sind der Personen gewesen? Antw. 14 Personen.

14. Es sind zwo Zahlen, deren Differenz 18 ist, und wenn man die Differenz ihrer Kubikzahlen mit der Summe der Zahlen multipl., so kommen 275184: Welche Zahlen sind es? Antw. 4 und 22.

15. Einige Kaufleute legen ein Kapital von 8240 Rthlr. zusammen. Ein jeder von ihnen legt zu diesem Kapital noch 40 mal so viel Rthlr., als ihrer sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Procent als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinn, und nachdem ein jeder 10 mal so viel Rthlr. davon genommen als ihrer sind, bleiben noch 224 Rthlr. vom Gewinn übrig: Wie viel können der Personen gewesen seyn?

16. Einer kauft etliche Centner Waare für $24\frac{3}{4}$ Rthlr. Subtrahirt man von der Waare $\frac{1}{2}$ Ctr., und multipl. den Rest mit der Anzahl der gekauften Ctr.; addirt man ferner zu diesem Product $\frac{3}{4}$ Ctr., und multipl. diese Summe auch mit den gekauften Centnern, so kommt der bezahlte Einkauf heraus: Wie viel waren der Ctr.?

Von biquadratischen Gleichungen.

1. Wenn in einer Gleichung von der unbekannten Größe die vierte Dignität, als höchste Würde, vorkommt, so wird eine solche Gleichung überhaupt biquadratisch genannt. Ist die unbekannte Größe außer ihrer vierten Dignität in der Gleichung weiter nicht vorhanden, so heißt sie rein biquadratisch, als: $x^4 = 16$.

2. Zur Auflösung solcher reinen biquadratischen Gleichungen bringt man dieselbe auf die unbekannte Biquadratgröße, und extrahirt auf beiden Seiten die Wurzel der vierten Dignität. Weil aber x^4 das Quadrat von x^2 ist, so kann man auch statt dessen die Quadratwurzel zweimal extrahiren. Z. B.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x^4 - 12 & = & 36 \\ & & & + 12 \\ \hline 3) & 3x^4 & = & 48 \\ \hline \sqrt{} & x^4 & = & 16 \\ \hline \sqrt{} & x^2 & = & 4 \\ \hline & x & = & \pm 2 \end{array}$$

3. So wie eine jede quadratische Gleichung zwei, und jede kubische drei Werthe oder Wurzeln hat, so trifft auch hier die Vermuthung ein, daß in einer biquadratischen Gleichung vier Wurzeln enthalten sind. In der vorstehenden Gleichung $x^4 = 16$, ist sowohl $x = -2$, als $x = 2$. Außer diesen beiden Wurzeln müßen also noch zwei andere Werthe für x in der Gleichung vorhanden seyn. Um diese zu finden, dividirt man die auf o gebrachte Gleichung $x^4 - 16 = o$, durch eine auf o gebrachte Wurzel $x - 2 = o$, und den kommenden Quotienten durch die andere auf o gebrachte Wurzel $x + 2 = o$; so erhält man denn eine quadratische Gleichung, woraus die beiden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden, als:

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 \text{ in } x^4 - 16 & x^3+2x^2+4x+8=0 \\
x^4 - 2x^3 & \\
\hline
+2x^3 - 16 & \\
+2x^3 - 4x^2 & \\
\hline
+4x^2 - 16 & \\
+4x^2 - 8x & \\
\hline
+8x - 16 & \\
+8x - 16 & \\
\hline
- &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x+2 \text{ in } x^3+2x^2+4x+8 & x^2+4=0 \\
x^3+2x^2 & \\
\hline
- \quad 4x+8 & \\
4x+8 & \\
\hline
- &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
x^2 + 4 = 0 \\
\hline
\sqrt{} \; x^2 = -4 \\
\hline
x = \pm\sqrt{-4}
\end{array}
$$

folglich sind aus $x^4=16$ die vier Werthe für x

I. $x = 2$
II. $x = -2$
III. $x = \sqrt{-4}$
IV. $x = -\sqrt{-4}$

Zur **Probe** bringen diese beiden letzten Wurzeln eben so wohl, als die beiden erstern, die Biquadratzahl 16 heraus, wenn man jede quadrirt, und dieses Quadrat abermals mit sich selbst multiplicirt, als:

$$\begin{array}{rr} \sqrt{-4} \\ \sqrt{-4} \\ \hline -4 \\ -4 \\ \hline +16 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -\sqrt{-4} \\ -\sqrt{-4} \\ \hline -4 \\ -4 \\ \hline +16 \end{array}$$

4. Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe, außer der vierten Dignität, auch noch in den übrigen Gliedern vorkommt, so wird eine solche biquadratische Gleichung unrein, oder auch wohl vermischt genannt. Hierzu gehört zuerst folgende Form, da die unbekannte Größe in der 4ten und 2ten Dignität, nebst noch einer ledigen Zahl vorkommt: $x^4 \pm ax^2 = \pm b$.

Weil x^2 die Quadratwurzel aus x^4 ist, so können solche Gleichungen nach der Regel der unreinen quadratischen Gleichungen, Seite 63 Ziffer 8, oder Seite 67, aufgelöst werden. Es sey z. B.

$$\begin{array}{rcl} x^4 - 6x^2 & = & 160 \\ +9 & & +9 \\ \hline \sqrt{\quad} x^4 - 6x^2 + 9 & = & 169 \\ \hline x^2 - 3 & = & 13 \\ & & +3 \\ \hline \sqrt{\quad} x^2 & = & 16 \\ \hline x & = & 4 \end{array}$$

5. Wenn in einer biquadratischen Gleichung alle Glieder vorkommen, so nennet man sie vollständig, als: $x^4 \pm ax^3 \pm bx^2 \pm cx = \pm d$. Solche vollständige biquadratische Gleichungen enthalten auch allemal vier Wurzeln oder Werthe für die unbekannte oder zu suchende Größe. Werden alle Glieder der Gleichung nur auf eine Seite, und also dadurch auf 0 gebracht, so sind dann auch hierbei ähnliche Eigenschaften, wie bei den quadratischen und kubischen Gleichungen, anzumerken, nämlich:

I. So oft in einer solchen auf o gebrachten Gleichung die Zeichen + und — ordentlich mit einander abwechseln, eben so viele positive Wurzeln sind darinnen enthalten. So oft hingegen einerlei Zeichen auf einander folgen, eben so viele negative Wurzeln sind denn auch vorhanden.

II. Der Coefficient im 2ten Gliede enthält allemal die Summe aller vier Wurzeln; der Coefficient des 3ten Gliedes ist die Summe der Producte von je zwei Wurzeln; der Coefficient des 4ten Gliedes macht die Summe der Producte von je drei Wurzeln aus, und endlich enthält die ledige Zahl im 5ten Gliede jedesmal das Product aller vier Wurzeln.

Zum Beispiel diene folgende Gleichung:

$$x^4 - 6x^3 - 85x^2 + 282x + 2160 = 0$$

in welcher $x = 9$
$x = 8$
$x = -6$
$x = -5$ ist.

Erkl. Hier wechseln die Zeichen zweimal mit einander ab, nämlich + auf —, und — auf +; auch folgen zweimal einerlei Zeichen auf einander, nämlich — auf —, und + auf +: daher sind zwei Wurzeln positiv: $x=9$, und $x=8$, und die übrigen zwei Wurzeln sind negativ: $x=-6$, und $x=-5$.

Die Summe dieser vier Wurzeln ist dem Coefficienten des 2ten Gliedes, nämlich 6 gleich: denn $9+8-6-5=6$.

Die Summe der Producte je zweier Wurzeln ist dem Coefficienten des 3ten Gliedes 85 gleich: denn

$$\begin{array}{rrrl}
9 \cdot & 8 = & +\ 72 & \\
9 \cdot & -6 = & & -\ 54 \\
9 \cdot & -5 = & & -\ 45 \\
8 \cdot & -6 = & & -\ 48 \\
8 \cdot & -5 = & & -\ 40 \\
-6 \cdot & -5 = & +\ 30 & \\
\hline
& & 102 & -\ 187 = -\ 85
\end{array}$$

Die Summe der Producte je dreier Wurzeln ist dem Coefficienten des 4ten Gliedes 282 gleich: denn

$$\begin{array}{rrrrl}
9 \cdot & 8 \cdot & -6 = & -432 & \\
8 \cdot & -6 \cdot & -5 = & & +240 \\
-6 \cdot & -5 \cdot & 9 = & & +270 \\
-5 \cdot & 9 \cdot & 8 = & -360 & \\
\hline
& & & -792 & +510 = -282
\end{array}$$

Die ledige Zahl 2160 im 5ten Gliede ist das Product aller vier Wurzeln: denn 9 mal 8 mal 6 mal 5 = 2160.

6. Aus diesen bemerkten Eigenschaften folgt nun auch die Auflösung der biquadratischen Gleichungen: denn weil die ledige Zahl im 5ten Gliede das Product aller vier Wurzeln ist, so kann auch keine andere Rationalwurzel statt finden, oder sie muß ein Theiler von dieser Zahl seyn. Die Theiler der Zahl 2160 sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 u. a. m. Aus der Zeichenfolge sieht man aber schon vorläufig, daß zwei positive und auch zwei negative Wurzeln vorhanden sind. Wird nun der Versuch mit positiven Theilern angestellt, so wird man zuerst finden, daß $x = 8$ die Gleichung in 0 verwandelt, als:

$$\begin{array}{rrr}
x = 8, \text{ so ist } x^4 = & 4096 & \\
-6x^3 = & & -3072 \\
-85x^2 = & & -5440 \\
+285x = & 2256 & \\
+2160 = & 2160 & \\
\hline
& +8512 & -8512 = 0
\end{array}$$

7. Wenn nun auf diese Art eine Wurzel gefunden ist, so wird die auf o gebrachte Gleichung durch diese zuvor auch auf o gebrachte Wurzel dividirt, und dadurch eine kubische Gleichung im Quotienten heraus gebracht, als:

$$\begin{array}{l|l}
x - 8 \text{ in } x^4 - 6x^3 - 85x^2 + 282x + 2160 & x^3 + 2x^2 - 69x - 270 = 0 \\
\quad x^4 - 8x^3 & \\
\hline
\quad\quad +2x^3 - 85x^2 & \\
\quad\quad +2x^3 - 16x^2 & \\
\hline
\quad\quad\quad -69x^2 + 282x & \\
\quad\quad\quad -69x^2 + 552x & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad -270x + 2160 & \\
\quad\quad\quad\quad -270x + 2160 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad - &
\end{array}$$

Nun sucht man aus den Theilern der heraus gebrachten kubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 69x - 270 = 0$ wieder eine neue Wurzel. Unter den negativen Theilern wird zuerst die Wurzel $x = -5$ die Gleichung in o verwandeln. Wird diese nun durch die gefundene und zuvor auch auf o gebrachte Wurzel dividirt, so kommt im Quotienten eine quadratische Gleichung heraus, woraus denn die beiden übrigen Wurzeln, wie schon bekannt ist, leicht gefunden werden können, als:

$$
\begin{array}{l|l}
x+5 \text{ in } x^3+2x^2-69x-270 & x^2-3x-54=0 \\
\underline{x^3+5x^2} & \\
\quad -3x^2-69x & \\
\quad \underline{-3x^2-15x} & \\
\qquad -54x-270 & \\
\qquad \underline{-54x-270} & \\
\qquad\quad - &
\end{array}
$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$x^2 - 3x = 54$$

$$+2\tfrac{1}{4} \quad +2\tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{\ } x^2 - 3x + 2\tfrac{1}{4} = 56\tfrac{1}{4}$$

$$x - 1\tfrac{1}{2} = 7\tfrac{1}{2}$$

$x = 1\tfrac{1}{2} \pm 7\tfrac{1}{2} = 9$, oder $= -6$.

8. Was übrigens Seite 87 u. 88, Ziff. 5 u. 6 bei den kubischen Gleichungen von Verkleinerung der ledigen Zahl, und von Wegschaffung der Brüche gelehret worden, ist auch bei den biquadratischen Gleichungen anzuwenden.

9. Wenn unter den Theilern der ledigen Zahl im 5ten Gliede, weder ein positiver noch negativer Theiler, der die Gleichung in o verwandelt, anzutreffen ist, so findet auch keine Rationalwurzel statt; die Wurzeln sind alsdann irrational, oder wohl gar imaginair. Um diese zu finden, muß die biquadratische Gleichung in eine kubische verwandelt, und diese denn nachher durch Hülfe der Regel des Cardani aufgelöst werden. Wie aber eine biquadratische Gleichung auf eine kubische gebracht wird, lehrt uns des **Pombelli Regel**. Auch diese Regel hat **Leonh. Euler**, in seiner mehrgedachten **vollständigen** Anleitung zur Algebra, vorgetragen und deutlich erklärt, welche deßwegen am Ende dieser Anweisung zur Algebra gleichfalls mit abgedruckt ist.

Folgende biquadratische Aufgaben können indessen nach dem bisher gegebenen Unterricht aufgelöst werden.

XI. Biquadratische Aufgaben.

1. Welches sind die Werthe von x in folgender Gleichung: $x^4 = 81$? Antw. $x = 3, -3, \sqrt{-9}$ oder $-\sqrt{-9}$.
2. Welches sind die Werthe von x in $x^4 - 8x^2 = 425$? Antw. $x = 5$ oder . . .
3. Was ist x in $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$?
4. Was ist x in $x^4 + 8x^3 - 308x^2 - 4320x = 14400$?
5. Was ist x in $2x^4 + 11x^3 - 36x^2 - 275x = 350$?
6. Was ist x in $\frac{1}{3}x^4 + 8\frac{2}{3}x^3 + 81\frac{1}{3}x^2 + 328x + 480 = 0$?
7. Was ist x in $x^4 - 1\frac{1}{6}x^3 - 1\frac{13}{36}x^2 + 2\frac{7}{108}x + 1\frac{8}{27} = 0$?
8. Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$ mal so hoch als dick, und 5 mal so lang als hoch. Jeder Kubikfuß kostet so viel Rthlr., als die Dicke Fuß hat, und so kostet die ganze Mauer 980 Rthlr.: Wie dicke, lang und hoch ist sie? Antw. 2′ dicke, 7′ hoch und 35′ lang.
9. Es hat jemand einige Arbeitsleute, jeder bekommt täglich so viel Groschen, als ihrer sind, und arbeitet so viele Tage, als sie täglich alle zusammen Groschen verdienen, weniger einen Tag, und so verdienen sie insgesammt 6480 Groschen: Wie viel sind der Arbeitsleute gewesen? und wie lange haben sie gearbeitet? Antw. 9 Arbeitsleute, und jeder 80 Tage.
10. Vier Personen haben Geld. B hat 1 Rthlr. mehr als A; C hat 1 Rthlr. mehr als B, und D hat 1 Rthlr. mehr als C. Wenn man von dem Product ihres Geldes 176 subtrahirt, so kommt eine Quadratzahl heraus, deren Wurzel die Hälfte der subtrahirten Zahl ist: Wie viel Geld hat jeder? Antw. A 8, B 9, C 10 und D 11 Rthlr.

Von den Gleichungen unbestimmter Aufgaben.

1. Die bisherigen Aufgaben waren so beschaffen, daß man aus den Umständen und Foderungen derselben, so viele Hauptgleichungen machen konnte, als unbekannte Größen gesucht werden sollten, und werden daher bestimmte Aufgaben genannt. Unbestimmte Aufgaben hingegen sind solche, die mehrerer, oft unendlich vieler Antworten oder Auflösungen fähig sind, die den Foderungen der Aufgabe Genüge leisten. Sie sind daran zu erkennen, wenn man nicht so viele Hauptgleichungen aus den Foderungen und Umständen der Aufgabe machen kann, als Größen gesucht werden sollen.

2. Dieser Theil der Algebra, der auch wohl die unbestimmte Analytic, oder Auflösungskunst genannt wird, führt oft zu den tiefsinnigsten Speculationen, und gewährt dem Liebhaber ein ganz besonderes Vergnügen. Es ist zwar nicht möglich, eine allgemeine Regel zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben zu geben; indessen ist doch, außer den folgenden Beispielen, Winken und Anmerkungen, überhaupt Folgendes zu merken: Man macht so viele Hauptgleichungen, als nach der Aufgabe geschehen kann; bringt diese auf eine der unbekannten Größen; nimmt die andern Größen in der Formel nach den Umständen derselben willkürlich an, und bestimmt darnach diejenige Größe, auf welche die Gleichung gebracht worden ist.

XII. Unbestimmte Aufgaben.

1. Suchet zwo Zahlen, deren Differenz 10 ist: Nach welcher Formel sind solche Zahlen zu finden? Antw. $x = 10 + y$. 1 und 11, und deren unendlich mehr.

2. Wie viele Paar Zahlen gibt es, deren Summe 10 ist? Antw. 5 Paar.

Es sey x die eine, und y die andere Zahl:

so ist $x + y = 10$

$$x = 10 - y$$

Anmerk. Wenn man bei der Auflösung dieser Aufgabe auch Brüche und negative Zahlen wollte gelten laßen, so könnte hier für y eine jede Zahl nach Willkür angenommen, x darnach bestimmt, und so unendlich viele Paar Zahlen von der verlangten Eigenschaft gefunden werden; sollen aber nur ganze und positive Zahlen statt finden, so wird durch diese Bedingung die Anzahl solcher Zahlen sehr eingeschränkt: denn für y darf dann nicht weniger als 1, und nicht mehr als 9 angenommen werden, als:

ist $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$

so ist $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Hiervon sind aber die 4 letztern den 4 erstern umgekehrt gleich: daher gibt es eigentlich nur 5 Paar von diesen Zahlen.

3. Wie oft laßen sich drei positive ganze Zahlen finden, deren Summe 10 ist? Antw. 8 mal: 8, 1, 1, u. s. w.

4. Nach welcher Formel laßen sich zwo Zahlen finden, deren Product ihrer Summe gleich ist? Antw. $x = \frac{y}{y - 1}$. 2 und 2, und in Brüchen unendlich viel.

5. Nach welcher Formel kann man drei Zahlen finden, deren Product und Summe einander gleich sind? Antw. $x = \frac{y + z}{yz - 1}$. 1, 2, 3 und deren mit Brüchen unendlich viel.

6. Nach welcher Formel sind zwo Zahlen zu finden, deren Differenz und Quotient einander gleich sind? Antw. $x = \frac{y^2}{y-1}$. 4 und 2, und deren mit Brüchen unendlich viel.

7. Wie sind zwo Zahlen zu finden, deren Summe und Quotient einander gleich sind? Antwort $x = \frac{y^2}{1-y}$. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, und deren unendlich.

8. Gibt es auch wohl zwo Zahlen, deren Product und Quotient einander gleich sind?

Wenn x die große, und y die kleine Zahl,

$$\text{so ist } xy = \frac{x}{y}$$

$$x)\ xy^2 = x$$

$$\sqrt{\ }\ y^2 = 1$$

$$y = 1$$

Anmerk. Weil hier x aus der Gleichung verschwunden ist, so kann dafür jede beliebige Zahl; für y aber muß jedesmal 1 angenommen werden. Es sey z. B. $x = 4$, so sind die beiden Zahlen 4 und 1. Die Auflösung zeigt hier also deutlich, daß nur Zahlen von der Art für diese Aufgabe zu finden möglich sind.

9. Nach welcher Formel sind zwo Zahlen von der Eigenschaft zu finden, wenn man zur größern ihre Differenz, und zur kleinern ihre Summe addirt, daß gleiche viel komme? Antw. $x = 3y$. 2 und 6, und deren unendlich mehr.

10. Wie sind zwo Zahlen von folgender Eigenschaft zu finden: wenn man zur größern ihre Differenz,

und zur kleinern ihren Quotienten addirt, daß gleiche viel komme? Antw. $x = \frac{2y^2}{2y - 1}$. 2 und $2\frac{2}{3}$, und deren unendlich mehr.

11. Suchet zwo Zahlen, wenn man zur größern ihre Summe, und zur kleinern ihr Product addirt, daß gleiche viel komme: Welche Zahlen sinds? Antw. 2 und 3, und deren unendlich mehr.

Man sehe die Anmerkung bei Aufgabe 8.

12. Wie findet man zwo Zahlen von der Eigenschaft: wenn man die größere mit ihrer Differenz, und die kleinere mit ihrer Summe multiplicirt, daß gleiche viel komme?

Es sey x die große, und y die kleinere Zahl:
so ist $x - y$ die Diff. und $x + y$ die Summe

$$\begin{array}{rcl} x & & y \\ \hline x^2 - xy & = & xy + y^2 \\ - xy & & \\ \hline x^2 - 2xy & = & y^2 \\ + y^2 & & + y^2 \\ \hline \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} & = & 2y^2 \\ \hline x - y & = & \sqrt{2y^2} \\ \hline x & = & y + \sqrt{2y^2} \end{array}$$

Nun sey $y = 2$, so ist $x = 2 + \sqrt{8}$, und deren unendlich mehr, worüber nach Seite 53 bei III die Probe zu machen ist.

13. Nach welcher Formel sind zwo Zahlen zu finden, wenn man zum Quadrat der größern, das Quadrat ihrer Differenz; und zum Quadrat der kleinern, das Quadrat ihrer Summe addirt, daß

gleiche viel komme? Antw. $x=2y+\sqrt{5y^2}$. 2 und $4+\sqrt{20}$ u. s. w.

14. Wie sind zwo Zahlen von der Art zu finden: wenn man die größere mit ihrem Quotienten, die kleinere aber mit ihrer Differenz multiplicirt, daß gleiche viel komme?

Es sey x die große, und y die kleinere Zahl: so ist der Quot. $\frac{x}{y}$ und $x-y$ die Differenz

$$\frac{x^2}{y} = xy - y^2$$

$$x^2 = xy^2 - y^3$$

$$\begin{array}{l} x^2 - xy^2 = -y^3 \\ \quad +\tfrac{1}{4}y^4 \quad +\tfrac{1}{4}y^4 \end{array}$$

$$\sqrt{}\; x^2 - xy^2 + \tfrac{1}{4}y^4 = \tfrac{1}{4}y^4 - y^3$$

$$x - \tfrac{1}{2}y^2 = \sqrt{\tfrac{1}{4}y^4 - y^3}$$

$$x = \tfrac{1}{2}y^2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}y^4 - y^3}$$

Damit diese Formel wurzelfähig werde,

so sey $\sqrt{(\tfrac{1}{4}y^4 - y^3)} = qy - \tfrac{1}{2}y^2$

so ist $\tfrac{1}{4}y^4 - y^3 = q^2y^2 - qy^3 + \tfrac{1}{4}y^4$

$$y^2)\ qy^3 - y^3 = q^2y^2$$

$$q-1)\ qy - y = q^2$$

$$y = \frac{q^2}{q-1}$$

Nun sey $q=2$: so ist $y=4$, und $x=8$.

Anmerk. Daß $qy - \tfrac{1}{2}y^2$ für die Wurzel aus $\tfrac{1}{4}y^4 - y^3$ angenommen wurde, geschah darum, damit nachher $\tfrac{1}{4}y^4$ sich gegen einander aufhob, und das übrige sich durch y^2 dividiren, und so die Gleichung auf y bringen ließ. — Benennt man bei dieser Aufgabe die kleine Zahl x, und die größere xy, so entgeht man aller dieser Schwierigkeit, welche jedoch für ähnliche Fälle lehrreich war.

15. Nach welcher Formel finden sich zwo Zahlen von der Eigenschaft: wenn man das Quadrat der größern mit ihrem Quotienten; das Quadrat der kleinern aber mit ihrem Product multiplicirt, daß gleiche viel komme? Antw. $x = y^2$. 2 und 4; 3 und 9, und deren unendlich mehr.

16. Wie findet man zwo Zahlen von der Art: wenn man das Quadrat der größern mit ihrem Quotienten, und das Quadrat der kleinern mit ihrer Summe multiplicirt, daß gleiche viel komme, z. B. $2\frac{2}{3}$ und $5\frac{1}{3}$, und deren unendlich mehr?

Die kleine Zahl sey x, und die größere xy, damit der Quotient kein Bruch werde.

17. Die Zahl 100 soll in zween ungleiche Theile zerlegt werden, wovon der eine durch 8, und der andere durch 12 sich aufheben läßt; Welches sind diese Theile? Antw. 88 und 12 u. a m.

Der Quotient für 8 sey x, und für 12 sey y:

so ist $8x + 12y = 100$

$$x + y + \frac{4y}{8} = 12 + \frac{4}{8}$$

$$x + y + \frac{4y - 4}{8} = 12$$

Anmerk. Weil diese und ähnliche Aufgaben keine Brüche gestatten, so müßen dieselben, wie schon oben geschehen, abgesondert, und nach der sogenannten Newtonschen Regel so lange gegen ganze Größen verglichen werden, bis sie gänzlich verschwinden. Nachher wird der in die ganze Größe reducirte Werth des Bruchs an die Stelle desselben in die Gleichung gesetzt, welches man substituiren heißt, und demnächst nach folgendem Beispiel weiter verfahren.

Es sey demnach der Bruch $\frac{4y-4}{8} = a$

$$4y = 8a + 4$$

$$\text{II.} \quad y = 2a + 1$$

und so ist $y + \frac{4y-4}{8} = 3a + 1$. Dieses wird nun in der Gleichung statt $y + \frac{4y-4}{8}$ substituirt, so kommt

$$x + 3a + 1 = 12$$

$$\text{I.} \quad x = 11 - 3a$$

Hier wird nun für a eine willkürlich ganze Zahl, jedoch nach Maßgabe der I. Gleichung angenommen; und weil in der II. Gleichung bei 2a noch eine positive Zahl 1 stehet: so kann zum niedrigsten $a = 0$; und nach der II. Gleichung höchstens $a = 3$ seyn; und so findet man, daß die Zahl 100 nur auf viererlei Art in die verlangten Theile zerlegt werden kann, als:

Es sey	$a =$	0	1	2	3
so ist	$x =$	11	8	5	2
und	$y =$	1	3	5	7
und demnach	$8x =$	88	64	40	16
und	$12y =$	12	36	60	84

18. Wie läßt sich die Zahl 100 in zween ungleiche Theile zerlegen, wovon einer durch 5, und der

andere durch 7 theilbar ist? Antw. 65 und 35, oder 70 und 30.

Es sey 5x der eine, und 7y der andere Theil: so ist

$$5x + 7y = 100$$
$$x + y + \frac{2y}{5} = 20$$
$$y + \frac{2y}{5} = 7b$$
$$x + 7b = 20$$
$$\text{I.} \quad x = 20 - 7b$$

Nun sey

$$\frac{2y}{5} = a$$
$$2y = 5a$$
$$y = 2a + \frac{a}{2}$$
$$\frac{a}{2} = b$$
$$a = 2b$$
$$\text{II.} \quad y = 5b$$

Es sey	$b =$	1	2
so ist	$x =$	13	6
und	$y =$	5	10
also	$5x =$	65	30
und	$7y =$	35	70

19. Wie viele ganze 12= und 15 Stüberstücke muß man nehmen, um 20 Rthlr. damit auszuzahlen? Antw. 95 Stücke von der ersten, und 4 Stücke von der andern Sorte. In allem auf 19nerlei Art.

20. Wie viele 15=- und 18 Stüberstücke werden zu 20 Rthlr. erfodert? Antw. von A 74, von B 5 Stücke. In allem 13 Fälle.

21. Wie viele 18= und 21 Stüberstücke werden zu 24 Rthlr. erfodert? Antw. von A 73, von B 6 Stücke. In allem 11 Fälle.

22. Wie viele 21- und 24 Stüberstücke werden zu 32 Rthlr. erfodert? Antw. von A 88, von B 3 Stücke. In allem 11 Fälle.

23. Wie viele ganze brab. Kronenth. zu 114 Stbr., und franz. Kronenth. zu 117 Stbr. muß man nehmen, um 100 Rthlr. ohne Münze auszuzahlen? Antw. von A 28, von B 24 Stück. Mit halben und viertel Stücken gibts mehrere Fälle, wenn nämlich diese Brüche für a genommen werden.

24. Wie findet man eine Quadratzahl von der Beschaffenheit, daß, wenn 1 dazu addiret wird, wieder eine rationale Quadratzahl heraus kommt, z. B. $\frac{9}{16}$, und deren unendlich.

Es sey x^2 die Quadratzahl, und so sey auch ferner

$$\sqrt{(x^2+1)}=q-x \qquad \text{Oder: } \sqrt{(x^2+1)}=qx-1$$

so ist

$$x^2+1=q^2-2qx+x^2 \qquad x^2+1=q^2x^2-2qx+1$$

$$2qx=q^2-1 \qquad 2qx=q^2x^2-x^2$$

$$2q=q^2x-x$$

$$\text{I. } x=\frac{q^2-1}{2q}$$

$$\text{II. } \frac{2q}{q^2-1}=x$$

Es sey nach der I. Formel $q=2$, oder 3
so ist $x=\frac{3}{4}$, und $x^2=\frac{9}{16}$, oder $1\frac{7}{9}$ etc.

Erkl. In der I. Gleichung ist $q-x$ für die Wurzel aus x^2+1 deßwegen angenommen worden, damit nachher x^2 gegen x^2 verschwand, und demnächst die Gleichung auf x gebracht werden konnte. In der II. Gleichung ist die Wurzel aus x^2+1 zu $qx-1$ bestimmt, weil dadurch 1 gegen 1 sich aufhob; demnächst die Gleichung sich durch x dividiren, und endlich auf x bringen ließ. — Benennt man die gegebene Zahl $1=a$, so erscheint für jede Zahl eine allgemeine Formel, wornach solcher Quadratzahlen unendlich viele gefunden werden können.

25. Wie sind zwo Quadratzahlen zu finden, deren Summe rational ist, z. B. 16 und 9? und deren unendlich mehr.

Es sey

$\sqrt{(x^2+y^2)}=q-x$ Oder: $\sqrt{(x^2+y^2)}=qx-y$

$x^2+y^2=q^2-2qx+x^2$ $x^2+y^2=q^2x^2-2qxy+y^2$

$2qx=q^2-y^2$ $2qxy=q^2x^2-x^2$

I. $x=\frac{q^2-y^2}{2q}$ $2qy=q^2x-x$

II. $y=\frac{(q^2-1)x}{2q}$

Es sey nach der I. Formel $q = 4$
und $y = 2$
so ist $x = 1\frac{1}{2}$
folglich $x^2 = 2\frac{1}{4}$, oder 9
und $y^2 = 4$, oder 16

Nach der II. Formel sey $q = 2$
und $x = 4$, folglich $x^2 = 16$
so ist $y = 3$, folglich $y^2 = 9$

Erkl. Warum hier in der I. und II. Gleichung für die Wurzel $q-x$ und $qx-y$ angenommen worden, ist aus der vorigen Anmerkung einzusehen. — Bei der willkürlichen Annahme der Buchstaben in beiden Formeln, kommen für x^2 und y^2 nicht immer ganze Quadratzahlen heraus; man darf aber die Zahlen nur mit dem Nenner multipliciren, um ganze Zahlen zu erhalten.

26. Wie sind zwo Quadratzahlen zu finden, deren Differenz rational ist, z. B. 25 und 16? und deren unendlich mehr.

Es sey $\sqrt{(x^2-y^2)}=q-x$. Oder: $\sqrt{(x^2-y^2)}=qy-x$

27. Gibt es auch wohl eine Quadratzahl von der

sonderbaren Eigenschaft, daß, wenn man ihre Wurzel zu ihr addirt, oder von ihr subtrahirt, in beiden Fällen wieder rationale Quadratzahlen heraus kommen? Antw. Ja, $1\frac{49}{576}$, und deren unendlich mehr.

Es sey x^2 die Quadratzahl;
die Wurzel aus der Summe sey $= qy - x$
und die Wurzel aus der Differenz $= py - x$

so ist $\sqrt{(x^2+x)} = qy - x$ und $\sqrt{(x^2-x)} = py - x$

$$x^2+x = q^2y^2 - 2qxy + x^2 \qquad x^2-x = p^2y^2 - 2pxy + x^2$$

$$2qxy + x = q^2y^2 \qquad 2pxy - x = p^2y^2$$

$$\text{I.}\quad x = \frac{q^2y^2}{2qy+1} \qquad \text{II.}\quad x = \frac{p^2y^2}{2py-1}$$

folglich $\frac{q^2y^2}{2qy+1} = \frac{q^2y^2}{2py-1}$, divid. durch y^2

$$\frac{q^2}{2qy+1} = \frac{p^2}{2py-1}$$

$$2pq^2y - q^2 = 2p^2qy + p^2$$

$$2pq^2y - 2p^2qy = q^2 + p^2$$

$$\text{III.}\quad y = \frac{q^2+p^2}{2pq^2 - 2p^2q} = \frac{q^2+p^2}{(q-p)2pq}$$

Nun nimmt man in dieser III. Formel q und p nach Willkür an; bestimmt darnach y, und demnächst auch nach der I. oder II. Formel x. Es sey $q = 2$, und $p = 1$: so ist $y = \frac{5}{4}$, und $x = \frac{25}{24}$: folglich $x^2 = \frac{625}{576} = 1\frac{49}{576}$, worüber die Probe leicht anzustellen.

28. Wie zerlegt man die Quadratzahl $100 = a^2$ in zwo andere Quadratzahlen? Antw. 64 und 36. In Brüchen unendlich.

Es sey $x^2+y^2=a^2$

$\sqrt{x^2=a^2-y^2}$

$x=\sqrt{(a^2-y^2)}=qy-a$ u. s. w.

29. Wie zerlegt man die Zahl $20=a$ in zwo andere Zahlen, wovon die Summe ihrer Quadrate rational ist? Antw. $11\frac{3}{7}$ und $8\frac{4}{7}$, und deren unendlich mehr.

Es sey x die eine, $a-x$ die andere Zahl; ferner $\sqrt{(a^2-2ax+2x^2}=qx-a$

so ist endlich $x=\dfrac{(q-1)2a}{q^2-2}$.

30. Wie findet man eine Zahl von der Art: wenn man $20=a$ zu ihr addirt, oder von ihr subtrahirt, daß in beiden Fällen Quadratzahlen heraus kommen, z. B. 101, und deren unendlich mehr?

Es sey $\sqrt{(x+a)}=q$, und $\sqrt{(x-a)}=q-p$ rc.

31. Wie findet man zwo Zahlen, die um $4=a$ unterschieden sind, und wovon die Differenz ihrer Quadrate rational ist? Antw. $x=\dfrac{(q+1)2a}{q^2}$ $=6$ und 10, und deren unendlich mehr.

Es sey x die eine, $x+4$ die andere Zahl; ferner $\sqrt{(2ax+a^2)}=qx-a$ u. s. w.

32. Wie sind zwo Zahlen zu finden, deren Summe der Summe ihrer Quadrate gleich ist, z. B. $\frac{3}{5}$ und $1\frac{1}{5}$, und deren unendlich mehr?

Es sey x die eine, und xy die andere Zahl.

33. Wie sind zwo Zahlen zu finden, wovon die Summe ihrer Quadrate der Summe ihrer Ku-

bikzahlen gleich ist, z. B. $\frac{5}{9}$ und $\frac{10}{9}$, und deren unendlich mehr.

34. Wie theilet man die Zahl $31 = a$ in zween ungleiche Theile, deren Product ein rationales Quadrat ist, z. B. $6\frac{1}{5}$ und $24\frac{4}{5}$, und deren unendlich.

35. Wie zerlegt man eine gemeine Zahl, welche aus zwo Quadratzahlen bestehet, z. B. $13 = 9 + 4$, in zwo andere Quadratzahlen, z. B. $10\frac{39}{25}$ und $1\frac{11}{25}$, und deren unendlich mehr.

Es sey $9 + 4 = a^2 + b^2 = 13$

so ist $3 + 2 = a + b$

x sey die eine, und y die andere Wurzel; ferner sey

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & x = a + pq: \text{ so ist } x^2 = a^2 + 2apq + p^2q^2 \\ \text{II.} & y = b - rq: \text{ so ist } y^2 = b^2 - 2brq + r^2q^2\end{array}\right\}\text{ addirt}$$

$$a^2 + b^2 + 2apq - 2brq + p^2p^2 + r^2q^2 = a^2 + b^2$$

$$q \text{ in } p^2q^2 + r^2q^2 = brq - 2apq$$

$$p^2q + r^2q = 2br - 2ap$$

$$q = \frac{(br - ap)2}{p^2 + r^2}$$

folglich I. $x = a + \frac{(br - ap)2p}{p^2 + r^2}$, oder $\frac{2brp + (r^2 - p^2)a}{p^2 + r^2}$

und II. $y = b - \frac{(br - ap)2r}{p^2 + r^2}$, oder $\frac{2arp + (p^2 - r^2)b}{p^2 + r^2}$

In diesen beiden Formeln ist p und q willkürlich anzunehmen.

XIII. Gemischte Aufgaben.

1. Zu einer Arbeit werden drei Tagelöhner gedungen. Der Erste bekommt täglich 8 Ggr., der Andere 7 Ggr. und der Dritte 6 Ggr. Sie haben alle zusammen 146 Tage gearbeitet, und nach eines jeden Rechnung bekommt einer so viel Lohn als der andere: Wie viel Tage hat jeder gearbeitet? Antw. A 42, B 48, C 56 Tage.
2. Es dinget jemand einen Arbeiter auf 84 Tage, und verspricht ihm täglich 9 Ggr. und die Kost; wenn er aber nicht arbeitet, so soll ihm der Arbeiter täglich 3 Ggr. für die Kost bezahlen. Nach verflossener Zeit findet sich bei der Abrechnung, daß einer dem andern nichts schuldig ist: Wie viel Tage hat er gearbeitet? Antw. 21 Tage.
3. Es kauft jemand eine Anzahl fette Ochsen und Kühe für 464 Rthlr. Gibt für jeden Ochsen 24, und für jede Kuh 16 Rthlr.: Wie viel sind der Ochsen, und wie viel der Kühe gewesen? Antw. 2 Ochsen und 26 Kühe, oder 4 Ochsen und 23 Kühe u. s. w. in allem 9 positive Antworten.

   Man sehe die Anmerk. Seite 105 bei Aufgabe 17.
4. Es wird eine Zahl von folgender Eigenschaft verlangt: Wenn man von derselben 120 subtrahirt, oder zu ihr 482 addirt, daß sowohl der Rest als die Summe eine Kubikzahl ist, deren Wurzeln um 2 unterschieden ist: Welche Zahl ists? Antw. 849.
5. Es geben Zahlen von der Art: wenn man sie durch 2 dividirt, so bleibt 1; durch 3, bleiben 2, und durch 4, so bleiben 3 übrig: Welche Zahlen sind es? Antw. 11, 23 u. s. w.

x ſey die Zahl, und ſey folgenden verſchiedenen Dividenden gleich: I. $2p+1$. II. $3q+2$. III. $4r+3$. Nun gibts nach der Newtonſchen Regel folgende Arbeit:

$$\text{I. } 2p+1 = \text{II. } 3q+2$$
$$p = q + \frac{q+1}{2}$$

Nun ſey
$$\frac{q+1}{2} = a$$
$$q = 2a-1$$
$$q + \frac{q+1}{2} = 3a-1$$

ſubſtit. $p = 3a-1$
ſo iſt I. $2p+1 = 6a-1$
und III. $4r+3 = 6a-1$
$$r = a + \frac{2a-4}{4}$$

Ferner ſey
$$\frac{2a-4}{4} = b$$
$$a = 2b+2$$
$$a + \frac{2a-4}{4} = 3b+2$$

ſubſt. $r = 3b+2$
ſo iſt III. $4r+3 = 12b+11 = x$

Nun ſey $b = 0, 1, 2, 3$ u. ſ. w.
ſo iſt $x = 11, 23, 35, 47$ unendlich.

6. Wenn die in der vorigen Aufgabe verlangten Zahlen endlich noch durch 5 dividirt, nichts übrig laßen ſollen: Welche Zahlen werden es dann ſeyn müßen? Antw. 275, 335, 395 ꝛc. unendlich.

Anmerk. Wenn die vorhin gefundene Formel: $12b+11 = x$, nun noch dem hinzugekommenen Dividenden $5t$ gleich geſetzt, und der dabei vorkommende Bruch gegen die ganze Größe c, und ferner gegen d verglichen wird, ſo kommt die Formel für dieſe Aufgabe.

7. Es ſind drei Zahlen in geom. Progreſſion von der Art: wenn man die Summe der erſten und drit-

ten, mit der Differenz zwischen dieser Summe und der mittelsten Zahl multiplicirt, so kommen 90720; wird aber diese Differenz mit der Summe aller drei Zahlen multiplicirt, so ist das Product 117936: Welche Zahlen sind es? Antw. 36, 108, 324.

8. Aus einem Faß 24 Stübers-Wein ward 1 Maaß gezapft, und dafür 1 Mß Wasser wieder hinein gethan. Von diesem vermischten Wein ward abermals 1 Mß genommen, und diese auch mit Wasser ersetzt. Dieses geschah auch zum 3ten und 4ten mal, und da war noch jede Maaß $19\frac{10963}{20000}$ Stbr. werth: Wie viel Maaß enthielt das Faß? Antw. 20 Maaß.

Das Faß halte x Mß, so bleiben nach dem ersten Abzapfen noch $x - 1$ Mß guten Wein drinnen. Nach dem Füllen waren unter x Mß noch $x - 1$ Mß guten Wein: wie viel denn in $x - 1$ Mß? Antw. $\frac{(x-1)^2}{x}$

$$\text{III. } x : x - 1 = \frac{(x-1)^2}{x}$$

$$\text{IV. } x : x - 1 = \frac{(x-1)^3}{x^2}$$

Antw. $\frac{(x-1)^4}{x^3}$ Mß guten Wein zuletzt.

Der zuletzt vermischte Wein war noch $19\frac{10963}{20000}\,x$ Stbr. werth. Wird dieser nun durch 24 Stbr. dividirt, so kommt die Anzahl der Maaße des darunter befindlichen guten Weins heraus, nämlich $\frac{130321}{160000}\,x$, welche den vorigen gleich seyn müßen, als:

$$\frac{(x-1)^4}{x^3} = \frac{130321}{160000}\,x$$

$$\sqrt{(x-1)^4} = \frac{130321}{160000}\,x^4$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \frac{361}{400}\,x^2$$

$$x - 1 = \frac{19}{20}\,x$$

$$x = 20 \text{ Maaß.}$$

9. $30\frac{17}{32}$ Rthlr. sollen unter vier Personen zu gleichen Theilen dergestalt vertheilt werden, daß jeder eine gleiche Anzahl Rthlr. Stbr., und Hl. bekomme: Wie viel bekommt denn einer von jeder Sorte? Antw. $7\frac{1}{2}$ Rthlr. $7\frac{1}{2}$ Stbr. $7\frac{1}{2}$ Hl.

x Rthlr. x Stbr. x Hl. ist gleich $\frac{1}{4}$ von $30\frac{17}{32}$ Rthlr.

10. Ein Offizier hatte ein Corps Soldaten, wenn er 5 Mann in jedes Glied stellte, so blieb einer übrig; nahm er 7, so blieben 6; bei 8 blieb 1; bei 9 blieben 5, und bei 11 blieben 8 übrig: Wie viel waren der Soldaten? Antw. 41 oder 27761 u.s.w.

11. Einer kaufte für 100 Rthlr. auch 100 Ellen Waare, nämlich fein Laken, die Elle zu $5\frac{1}{2}$ Rth.; Seide zu 3 Rthlr., und Zitz zu $\frac{1}{2}$ Rthlr: Wie viel Ellen hat er von jeder Sorte bekommen? Antw. Laken 9, Seide 2, und Zitz 89 Ellen; wozu noch 8 andere Facita in ganzen Zahlen möglich sind.

Es sey x Ellen Zitz, y Seide und z Laken:

so ist I. $x + y + z = 100$ Ellen

$$x = 100 - y - z$$

II. $\frac{1}{2}x + 3y + 5\frac{1}{2}z = 100$ Rthlr.

$$x + 6y + 11z = 200$$

$$\text{substit. I.}\quad \underline{x = -y - z + 100}$$
$$\underline{5y = 100 - 10z}$$
$$y = 20 - 2z$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun sey } z & = & 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5 \\ \text{so ist } y & = & 18\ ,\ 16\ ,\ 14\ ,\ 12\ ,\ 10 \text{ ꝛc.} \\ 100-y-z=x & = & 81\ ,\ 82\ ,\ 83\ ,\ 84\ ,\ 85 \end{array}$$

12. Zwei Hauptleute ließen unter ihre Soldaten, und zwar jeder 1200 Flor. Beute austheilen. Der eine hatte 40 Mann weniger als der andere, daher bekam auch ein jeder von seinen Soldaten 5 Flor. mehr, als einer des andern: Wie viel Soldaten hatte jeder Hauptmann? Antw. Der eine 120, der andere 80 Soldaten.

13. Man kann die Zahl 48 dergestalt in drei verschiedene Theile theilen, daß, wenn der eine Theil A mit 20, der andere B mit 16, und der dritte C mit 12 multipliciret wird, daß die Summe dieser Producte 840 ausmacht: Welche Theile sind es? Antw. A 32, B 2, C 14; wozu noch 13 andere Fälle in ganzen Zahlen möglich sind.

14. Ein Wirth verlangt von einem Weinbauer 2 Ohm $7\frac{1}{2}$ Viertel Wein, das sind 238 Maaß, die Maaß zu 12 Stbr.; da derselbe aber mit dieser Sorte nicht versehn, so füllt er ihm das Faß zu dem verlangten Preise mit folgenden vier Sorten: A zu 20, B 18, C 15 und D zu 10 Stbr. die Maaß: Wie viel konnte er von jeder Sorte dazu nehmen? Antw. Von A 45, B 2, C 2, D 189 Maaß. Zu dieser Aufgabe können in allem 276 Facita in ganzen Zahlen gefunden werden.

$$\text{I.}\quad p + q + x + y = 238 \text{ Maaß}$$
$$p = 238 - q - x - y$$

$$\begin{array}{r} 238 \text{ Mß} \\ 12 \text{ Stbr.} \end{array}$$

$$\text{II.}\quad 10p + 15q + 18x + 20y = 2856 \text{ Stbr.}$$
$$\text{substit.}\ 10p = -10q - 10x - 10y + 2380$$
$$5q + 8x + 10y = 476$$
$$q + x + \frac{3x - 1}{5} + 2y = 95$$

Der Bruch $\frac{3x - 1}{5}$ wird nach der Newtonschen Regel in ganze Größen reducirt: so kommt $x = 5c + 2$, und $q = 92 - 2y - 8c$, wobei zuerst $c = 0$ seyn kann.

15. $1\frac{3}{4}$ Mark 10 löthiges Silber soll 12 löthig gemacht werden: Wie viel feines Silber wird dazu erfodert? Antw. $\frac{7}{8}$ Mark.

16. Von 15, 12, $10\frac{1}{2}$ und 8 löthigem Silber sollen $8\frac{3}{4}$ Mark 11 löthiges Silber gemischt werden: Wie viel Loth wird von jeder Sorte dazu erfodert? Antw. Von A 50, B 10, C 12 und D 68 Loth.

17. Fünf Soldaten, A, B, C, D, E, machen Beute, jeder so viel er kann. Einige, die nur wenig bekommen, werden sehr unwillig, daher erbietet sich E, der das meiste bekommen, jedem andern so viel zu geben, als er schon hat, mit der Bedingung, daß die übrigen hernach ein Gleiches thun sollten. Nachdem dieses geschehen, finden sie, daß sie alle gleiche viel haben: Wie viel Rthlr. hat jeder anfangs erbeutet? Antw. A 6, B 11,

C 21, D 41, E 81; oder auch 2, 3 oder 4 mal u. s. w. so viel.

Man sehe Auflösung und Anmerk. bei Aufgabe 40 und 41, Seite 48 und 49 nach.

18. Welche Zahlen haben die Eigenschaft, daß ihre Summe, ihr Product, und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind? Antw. $1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$, und $\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

19. 1000 Rthlr., die zu 5 Procent auf Interessen stehen, sollen in 3 Jahren, und zwar alle Jahr gleiche viel, bezahlt werden: Wie viel muß denn jedes Jahr an Kapital und Zinse eingehen? Antw. $367\frac{263}{1261}$ Rthlr.

20. Man hat folgende vier Geldsorten: A franz. Kronenth. zu 115 Stbr., B brab. Kronenth. zu 113 Stbr., C Konventh. zu 100 Stbr., und D Kassenth. zu 72 Stbr.: Wie viel Stück muß man von jeder Sorte nehmen, um 1000 Rthlr. auszuzahlen? Antw. Von A 24, B 72, C 18, D 657 Stück, und eine Menge anderer Fälle.

21. Ein Landwirth, der von seinem mathematischen Freunde aus der Stadt besucht wurde, ging mit demselben im Felde spatziren, und kamen bei ein Gewächs, das der Städter nicht kannte. Auf die Frage: was es sey? gab der Landwirth folgende Antwort: Ich gebe Ihnen vier Zahlen, wenn Sie dieselben deutsch aussprechen, und nehmen von jeder Zahl den ersten Buchstaben, so haben Sie den Namen dieses Gewächses. Die vier Zahlen bestimme ich Ihnen auf folgende Weise: Wenn ich das Quadrat der ersten Zahl mit sich selbst multiplicire, und zum Product 599 addire, so kommen 3000. Addire ich zu der

zweiten $\frac{1}{6}$, so bekomme ich eine Zahl von der Eigenschaft, daß wenn ich 7 dazu thue, oder sie mit 7 multiplicire, Summe und Product gleiche groß sind. Die dritte Zahl finde ich, wenn ich die Quadratwurzel aus einer Zahl ziehe, die 10000 mal so groß, als sie selbst ist, und diese Wurzel dann durch 100 dividire, und den Quotienten mit 3 multiplicire. Die vierte Zahl ist das erste Glied einer geom. Progression von drei Zahlen, deren Summe 35, und ihr Product 1000 ist: Welches sind diese vier Zahlen, und wie hieß das Gewächs? Antw. 7, 1, 9, 5 und Senf der Name des Gewächses.

22. Wie lang ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt dem Umfang gleich ist? Antw. 4.

23. Wie lang muß die Seite eines Quadrats seyn, wenn der Inhalt 3 mal so groß seyn soll, als der Umfang? Antw. 12.

24. Wie lang ist die Seite eines Quadrats, dessen Umfang 2 mal so groß ist, als sein Inhalt? Antw. 2.

25. Wie lang und breit muß ein Rectangulum seyn, wenn Inhalt und Umfang gleich seyn soll? Antw. 6 lang, 3 breit, und deren unendlich mehr.

26. Wie lang muß der Diameter eines Zirkels seyn, wenn Inhalt und Umfang gleich seyn soll? Antw. 4.

27. Der Inhalt eines Zirkels sey $113\frac{1}{7}$: Wie lang ist sein Diameter, im Verhältniß zur Peripherie wie 7 zu 22? Antw. 12.

28. Eine Kuh habe an einer 8 Fuß langen Kette für drei Tage Weide: Wie lang muß sie für zwölf Tage seyn? Antw. 16′.

29. Wie lang muß die Basis und der Cathete an

einem rechtwinklichten Triangel seyn, dessen Hypothenuse $58 = a$ ist? Antw. 42 und 40; in Brüchen unendlich viel andere Zahlen.

Es sey x die Basis, y der Cathete, und die Hypoth. $a = qx - y$: so ist nach dem Pythagorischen Lehrsatz

$$\text{I. } \sqrt{(x^2 + y^2)} = qx - y \qquad \text{II. } qx - y = a$$

$$x^2 + y^2 = q^2x^2 - 2qxy + y^2 \qquad x = \frac{a + y}{q}$$

$$\frac{2qy}{q^2 - 1} = x$$

$$\text{I. } \frac{2qy}{q^2 - 1} = \text{II. } \frac{a + y}{q}$$

$$y = \frac{(q^2 - 1)a}{q^2 + 1}$$

$a = 58$

Es sey $q = 2\frac{1}{2}$, ode jede willkürliche Zahl
so ist $y = 42$ der Cathete
und II. $x = 40$ die Basis.

30. Wie lang ist die Basis und der Cathete an einem rechtwinklichten Triangel, dessen Inhalt $840 = a$, und die Hypothenuse $74 = b$ ist? Antw. 70 u. 24.

$$x^2 + y^2 = b^2 \qquad \tfrac{1}{2}xy = a$$

$$\text{I. } x = \sqrt{b^2 - y^2} \qquad \text{II. } x = \frac{2a}{y}$$

I ist gleich II, und so kommt endlich

$$y = \sqrt{\left|: \tfrac{1}{2}b^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^4 - 4a^2)} :\right|}$$

31. Wie lang ist die Basis und der Cathete an einem rechtwinklichten Triangel, dessen Inhalt $60 = a$, und der Umfang $40 = b$ ist? Antw. 15 und 8.

Die Basis sey $=x$, der Cathete $=y$: so ist die Hypoth. $=b-x-y$, und ferner

$$\sqrt{(x^2+y^2)}=b-x-y \qquad \tfrac{1}{2}xy=a$$

$$\text{I. } x=\frac{b^2-2by}{2b-2y} \qquad \text{II. } x=\frac{2a}{y}$$

32. Wie lang muß die Basis, der Cathete, und die Hypothenuse an einem rechtwinklichten Triangel seyn, wenn dessen Inhalt dem Umfang gleich seyn soll? Antw. 8, 6 und 10 und deren unendlich.

Es sey x die Basis, y der Cathete, und $qx-y$ die Hypothenuse, so ist

$$\sqrt{(x^2+y^2)}=qx-y \qquad \begin{array}{r} qx-y \\ +x+y \\ \hline \tfrac{1}{2}xy=qx+x \end{array}$$

$$\text{I } y=\frac{(q^2-1)x}{2q} \qquad \text{II. } y=(q+1)2$$

I ist gleich II, und so kommt zuletzt

$$x=\frac{4q}{q-1}.$$

33. Wenn der Umfang eines rechtwinklichten Triangels $60=a$ ist: Wie lang ist dann jede Seite? Antw. Basis 20, Cathete 15, Hypoth. 25, und deren unendlich mehr.

Es sey $\sqrt{(x^2+y^2)}=qx-y \qquad \begin{array}{r} qx-y \\ x+y \\ \hline qx+x=a \end{array}$

so ist $\text{I. } x=\frac{2qy}{q^2-1} \qquad \text{II. } x=\frac{a}{q+1}$

I ist gleich II, und so kommt zuletzt

$$y=\frac{(q-1)a}{2q}$$

34. Zwo Stangen, wovon die eine $80' = a$, und die andere $60' = b$ lang ist, stehen $100' = c$ weit von einander, und berühren sich mit ihren Spitzen? wie weit sind dieselben nun noch von der Erde entfernt? Antw. 48'.

Das Perpendikel, nämlich die Linie von den Spitzen bis auf die Erde, sey $= x$; dessen Abstand vom einen Winkel sey $= y$: so ist der Abstand vom andern Winkel $= c - y$.

35. An einem ungleichseitigen Triangel seyen die Seiten $30' = a$, $28' = b$ und $26' = c$: Wie groß ist sein Inhalt? Antw. 336 Quadratfuß.

36. Eine lange, schlanke Tanne, von $100' = a$ hoch, ward vom Winde so zerknickt, daß ihre Spitze die Erde, $20' = b$ weit vom Stamm, berührte: Wie lang war jedes Stück? Antw. Eins 48', das Andere 52'.

37. An einem rechtwinklichten Triangel sey die Summe der Basis und Hypothenuse $261 = a$: Wie lang ist jede Seite? Antw. Basis 116, Cathete 87, Hypoth. 145, und deren unendlich mehr.

38. An einem gleichschenklichten Triangel sey die Basis $12' = a$, und das Perpendikel $24' = b$: Wie hoch muß die Theillinie angelegt werden, mit welcher man unten $80 = c$ Quadratfuß mit der Basis parallel abschneiden will? Antw. 8' hoch.

Beschluß.

Daß die Algebra nicht allein dem Liebhaber der Mathematik, sondern auch dem Kaufmann, dem Feldmesser, dem Schullehrer, und mehr andern Geschäfftsmännern, die mit dem Rechnungswesen umgehen müßen, nöthig, nützlich, ja in manchen Fällen schlechterdings unentbehrlich ist, können nun noch zuletzt folgende Aufgaben und deren Auflösungen zeigen.

1. Einer kauft für 1600 Rthlr. Waare, findet aber Gelegenheit, dieselbe sogleich für 1925 Rthlr. wieder zu verhandeln; wovon er nach 7 Monaten 731 Rthlr., und den Rest über 1 Jahr bekommt: Wie viel hat er Procent jährlich gewonnen? Antw. $24\frac{3}{8}$ Rthlr.

$$
\begin{aligned}
\text{Es sey } 1600 &= a \\
731 &= b \\
1925 \div 731 = 1194 &= c \\
7 &= d \\
12 &= n \\
100 &= m
\end{aligned}
$$

und x der jährliche Gewinn Procent.

Hierauf werden beide Termine b und c auf das Kapital ihrer Einkaufssumme berechnet, und die Summe dieser Resultate $= a$ gesetzt, als:

$$\overset{\text{Proc.}}{n : x} = d \qquad\qquad m + \frac{dx}{n} : \overset{\text{Rthlr.}}{m} = b$$

$$\frac{dx}{n} \qquad\qquad \text{I. } \frac{bmn}{dx+mn} \text{ Rthlr.}$$

$$x + m : \overset{\text{Rthlr.}}{m} = c$$

II. $\frac{cm}{x+m}$ Rthlr. Kapital

$$a = \frac{bmn}{dx+mn} + \frac{cm}{x+m}$$

Wenn nun diese Gleichung nach der angenommenen Benennung in Buchstaben aufgelöst wird, wie schon Seite 72, Aufgabe 36 in Zahlen geschehen, so kommt folgende Formel heraus:

$$x = \sqrt{\frac{(b+c-a)m^2n}{ad} + \left(\left(\frac{(a-b)n+(a-c)d}{2ad}\right)m\right)^2} - \left(\frac{(a-b)n+(a-c)d}{2ad}\right)m$$

Diese Formel enthält nun folgende Regel:

I. Multipliciret die Differenz vom Einkauf und Verkauf mit dem Quadrat von 100, und dieses Product abermals mit 12, und dividiret dies letztere Product durch den 7fachen Einkauf:

$$1925 \div 1600 = 325$$
$$120000$$
$$1600 \times 7 = 11200 \text{ in } 39000000$$
$$3482\tfrac{1}{7} \text{ Rthlr.}$$

II. Multipliciret die Differenz vom Einkauf und dem ersten Termin mit 12; ferner die Differenz vom Einkauf und dem letzten Termin mit 7; addiret diese beiden Producte; multipliciret diese Summe mit 100, und dividiret dieses Product durch den 14maligen Einkauf:

$$1600 \div 731 = 869 \times 12 = 10428$$
$$1600 \div 1194 = 406 \times 7 = 2842$$
$$13270$$
$$100$$
$$1600 \times 14 = 22400 \text{ in } 1327000$$
$$59\tfrac{27}{112} \text{ Rth.}$$

III Quadriret diesen Quotienten; addiret zu diesem Quadrat den Quotienten bei Ziffer 1, und extrahiret aus dieser Summe die Quadratwurzel; subtrahiret von derselben den Quotienten bei Ziffer 2: so bleibt die Antwort, nämlich der jährliche Gewinn vom Hundert übrig:

$$59\tfrac{27}{112} \times 59\tfrac{27}{112} = 3509\tfrac{6329}{12544}$$
$$+\ 3482\tfrac{1}{7}$$
$$\sqrt{6991\tfrac{8121}{12544}}$$
$$83\tfrac{69}{112}$$
$$\div\ 59\tfrac{27}{112}$$

Antw. $24\tfrac{3}{8}$ Rthlr.

2. Die Assüradeurs zeichnen in wichtigen Seekriegen, besonders nach gefahrvollen Gegenden, selten unter 20 Procent. Wenn nun der vorsichtige Kaufmann nicht allein seine Einkaufssumme; sondern auch die baar bezahlte Assecuranz-Prämie, zugleich auch den zu hoffenden und wahrscheinlichen Gewinn à 15 Procent, sowohl von der Prämie als Einkaufssumme, sich will versichern laßen: Wie hoch muß er denn 100 Rthlr. Einkauf dem Assüradeur, als Versicherungssumme angeben? Antw. $149\tfrac{27}{77}$ Rthlr.

Es sey die Einkaufssumme 100 = a
Procent, oder 100 = b
die Assecuranz-Prämie Proc. 20 = c
der Gewinn Proc. 15 = d
und die Versicherungssumme = x

Hiernach wird nun die Assecuranz-Prämie von der Versicherungssumme x, und von dieser denn auch der Gewinn berechnet:

$$b : c = x$$

$$b : d = \frac{cx}{b} \text{ die Assecuranz-Prämie}$$

$$\frac{cdx}{b^2} \text{ Gewinn von derselben.}$$

$$\text{Nun ist } x = a + d + \frac{cx}{b} + \frac{cdx}{b^2}$$

$$\text{und endlich } x = \frac{(a + d)\, b^2}{b^2 - (b + d)\, c}$$

Diese Formel läßt sich nun, als eine Regel, wörtlich so ausdrücken:

I. Berechnet von der gegebenen Prämie den Procent angenommenen Gewinn, addiret ihn zu derselben, und ziehet die Summe von 100 ab.

II. Addiret den Procent angenommenen Gewinn zu 100, und sprecht: Wie sich der Rest bei Nro. I zu 100 verhält: so verhält sich die Summe von Nro. II zur Versicherungssumme, als:

100 : 15 = 20

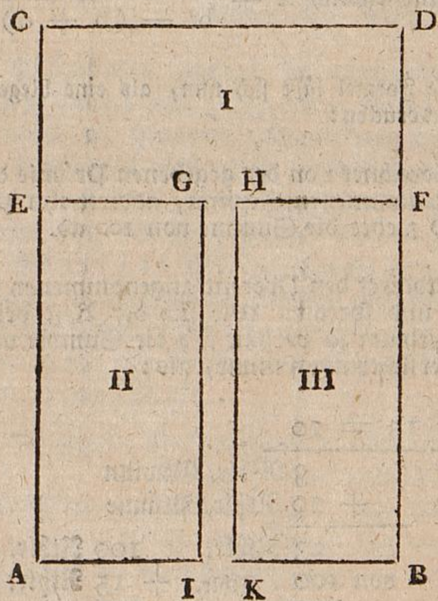
3 Rthlr. Gewinn
+ 20 Rthlr. Prämie

23 Rthlr. 100 Rthlr. Einkauf
von 100 Rthlr. + 15 Rthlr. Gewinn

77 : 100 = 115

Antw. $149\frac{27}{77}$ Rthlr.

3. Folgendes winkelrechte Feld, woran $AB = 24° = a$, und $BD = 35\frac{3}{4}° = b$ ist, soll für drei Erben, I, II und III, in gleiche Theile getheilet werden. Die Umstände sind aber so beschaffen, daß I sein Erbtheil obenher, nämlich CDEF bekommt, wozu aber ein gemeinschaftlicher Weg GHIK, von $\frac{1}{2}° = c$ breit, liegen bleiben muß: Wie breit muß demnach DF oder CE seyn, damit dieser Theil den beiden übrigen Theilen für II und III gleich werde? Antw. $11\frac{3}{4}$ Ruthen.



Es sey DF = x, so ist

$$b - x = BF$$

$$\frac{a - c}{2} = BK$$

$$\text{CDEF}\quad ax = \frac{ab - bc - ax + cx}{2} = BKHF$$

$$2ax = ab - bc - ax + cx$$

$$3ax - cx = ab - bc$$

$$x = \frac{(a - c)\,b}{3a - c} = DF$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun folgende Regel:

I. Subtrahiret von der Linie AB die Breite des Wegs, und multiplicirt den Rest mit der Linie BD

II. Subtrahiret auch von der 3fachen Linie AB die Breite des Wegs, und dividiret das vorige Product durch diesen Rest: so kommt die verlangte Breite DF = $11\frac{3}{4}°$.

$$a - c = 23\frac{1}{2}°$$

$$b = 35\frac{3}{4}°$$

$$3a - c = 71\frac{1}{2} \text{ in } 840\frac{1}{8}$$

Antw. $11\frac{3}{4}° = x = DF$.

Oder: 1. Subtrahiret von der Linie AB den 3ten Theil des Wegs, nämlich $\frac{1}{6}°$: so restiren $23\frac{5}{6}°$.

2. Multipliciret die Linie BD mit diesem 3ten Theil des Wegs, und ziehet den Inhalt $5\frac{23}{24}$ □ Ruthen vom 3ten Theil des ganzen Inhalts, nämlich von 286 □ Ruthen ab: so bleiben $280\frac{1}{24}$ □ Ruthen übrig.

3. Dividiret diesen Rest durch den Rest bei Ziffer 1; so kommt die Breite DF, als:

$23\frac{5}{6}$ in $\underline{280\frac{1}{24}}$

Antw. $11\frac{3}{4}{}^{\circ} = DF$

Solcher und ähnlicher Aufgaben gibt es sehr viele, welche durch die gemeine Rechenkunst schwerlich oder wohl gar nicht aufgelöst werden können. Diese drei mögen indessen zur vorliegenden Absicht schon genug seyn, um den noch übrigen Raum für folgende drei Kapitel aus Eulers Algebra zu ersparen.

I. Kapitel.

(Aus Leonh. Euler's vollständ. Anleit. zur Algebra.)

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

Aus dem Vorhergehenden hat man zur Genüge gesehen, daß die quadratischen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdient in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede quadratische Gleichung zweierlei Auflösungen zulaße, weil darin ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl sowohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden laßen, daher wird es gut seyn, den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären, woher es komme, daß eine quadratische Gleichung, z. B. $xx = 12x - 35$, auf eine doppelte Art auf-gelöset werde, oder daß für x zweierlei Werthe angezeigt werden können, welche beide der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel für x sowohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beiden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich, alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 zu stehen kommt: daher die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobei es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche, wenn sie für x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ wirklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursache gezeigt werden, warum solches auf zweierlei Art geschehen könne.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel: $xx - 12x + 35$, als ein Product aus zwei Factoren angesehen werden könne, wie denn diese Formel wirklich aus diesen zwei Factoren, nämlich $(x-5) \cdot (x-7)$ bestehet. Wenn daher jene Formel soll 0 werden, so muß auch dieses Product $(x-5) \cdot (x-7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit 0, wenn nur einer von seinen Factoren 0 wird. Denn so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wenn dasselbe noch mit 0 multipl. wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grundsatz für die höhern Gleichungen wohl zu bemerken ist.

Hieraus begreift man nun ganz deutlich, daß dieses Product: $(x-5) \cdot (x-7)$, auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmal nämlich, wenn der erste Factor $x - 5 = 0$, und hernach auch, wenn der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschiehet, wenn $x = 5$, das andere aber, wenn $x = 7$. Hieraus verstehet man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung: $xx - 12x + 35 = 0$, zweierlei Auflösungen zuläßt, oder für x zwei Werthe gefunden werden können, welche beide der Gleichung ein Genüge leisten. Der Grund bestehet nämlich darin, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwei Factoren vorstellen läßt.

Eben dieser Umstand findet bei allen quadratischen Gleichungen statt. Denn wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Form: $xx - ax + b = 0$; und diese Formel kann ebenfalls als ein Product aus zwei Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen: $(x-p) . (x-q)$, ohne uns darum zu bekümmern, was p und q für Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfodert, daß dieses Product gleich 0 werde, so ist offenbar, daß solches auf zweierlei Art geschehen könne: erstlich wenn $x = p$, und zweitens wenn $x = q$, welches die beiden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwei Factoren beschaffen seyn müßen, daß derselben Product just unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe. Man multipl. demnach dieselben wirklich, so erhält man $xx - (p+q)x + pq$, welches, da es einerlei seyn soll, mit $xx - ax + b$, so ist klar, daß seyn muß $p + q = a$, und $pq = b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = 0$, die beiden Werthe von x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a, und ihr Product der Zahl b. Daher, so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

Dieses war der Fall, wenn beide Werthe für x positiv sind, da denn in der Gleichung das zweite Glied das Zeichen $-$, das dritte aber das Zeichen $+$ hat. Wir wollen daher auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beiden Werthen für x, oder auch alle beide negativ werden. Jenes geschiehet, wenn die beiden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x-p) . (x+q)$; woher diese zwei Werthe für x entspringen, erstlich $x = p$, und zweitens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdann: $xx + (q-p)x - pq = 0$, wo das zweite Glied das Zeichen $+$ hat, wenn nämlich q größer ist als p; wäre aber q kleiner als p, so hätte es das Zeichen $-$, das dritte Glied aber ist dann immer negativ. Wären aber die beiden Factoren $(x+p) . (x+q)$, so wären beide Werthe für x negativ, nämlich $x = -p$, und

$x=-q$, und die Gleichung selbst würde seyn: $xx+(p+q)x+pq=0$, wo sowohl das zweite als das dritte Glied das Zeichen $+$ haben.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweiten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \ldots ax \ldots b=0$; wenn nun das zweite und dritte Glied das Zeichen $+$ haben, so sind beide Werthe negativ: ist das zweite Glied $-$, das dritte aber $+$, so sind beide Werthe positiv: ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweite Glied die Summe der beiden Werthe, und das dritte ihr Product.

Jetzt ist es ganz leicht, solche quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwei gegebene Werthe in sich enthalten. Man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber -3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen: $x=7$, und $x=-3$; hieraus ferner diese: $x-7=0$, und $x+3=0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden; daß also die Gleichung seyn wird: $xx-4x-21=0$, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beide Werthe für x gefunden werden. Denn da $xx=4x+21$ ist, so wird $x=2\pm\sqrt{25}$, also $x=2\pm5$, also entweder $x=7$, oder $x=-3$.

Es kann auch geschehen, daß beide Werthe für x einander gleich werden; man suche nämlich eine Gleichung, wo beide Werthe für x sind $x=5$; die beiden Factoren werden also seyn: $(x-5) \cdot (x-5)$, und die Gleichung ist also beschaffen: $xx-10x+25=0$, welche nur Einen Werth zu haben scheint, weil auf eine doppelte Art wird $x=5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Denn da $xx=10x-25$, so wird $x=5\pm\sqrt{0}$, oder $x=5\pm0$, und daher wird $x=5$, und $x=5$.

Insonderheit ist hier noch zu merken, daß bisweilen beide Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen, welcher der Gleichung ein Genüge leistet: wie z. E. geschiehet, wenn die Zahl 10 in zwei solche Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey; denn es sey ein Theil $= x$, so wird der andere seyn $10 - x$, und also ihr Product $10x - xx = 30$, folglich $xx = 10x - 30$, und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist, und zu erkennen gibt, daß die Frage unmöglich sey.

Es ist demnach sehr wichtig, ein Kennzeichen auszufinden, woran man sogleich erkennen kann, ob eine quadratische Gleichung möglich sey oder nicht. Es sey daher diese allgemeine Gleichung gegeben: $xx - ax + b = 0$, so wird $xx = ax - b$, und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$; woraus erhellet, daß wenn die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beiden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beiden Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft: daß ihre Summe ist $= a$, und ihr Product $= b$, wie in diesem Exempel zu ersehen: $xx - 6x + 10 = 0$, wo die Summe der beiden Werthe für x seyn muß $= 6$, und das Product $= 10$. Man findet aber die beiden Werthe: I. $x = 3 + \sqrt{-1}$, und II. $x = 3 - \sqrt{-1}$, deren Summe $= 6$, und ihr Product $= 10$ ist.

Man kann dieses Kennzeichen noch auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auf solche Gleichungen angewandt werden kann: $cxx \pm ax + b = 0$; denn hieraus hat man $xx = \frac{\pm ax - b}{c}$: daher $x = \pm \frac{a}{2c} \pm \sqrt{}$ $\left(\frac{aa}{4c} - \frac{b}{c}\right)$, oder $x = \frac{\pm a \pm \sqrt{aa - 4bc}}{2c}$, woraus erhellet, daß beide Werthe imaginär, oder die Gleichung unmöglich werde, wenn $4bc$ größer ist als aa, oder wenn in dieser Gleichung $cxx \pm ax \pm b = 0$, das 4fache Product aus dem ersten und letzten Gliede größer ist, als das Quadrat des zweiten Gliedes. Denn das 4fache Product aus dem ersten und letzten Gliede ist $4bcxx$; das Quadrat aber des mittlern Gliedes ist $aaxx$: wenn nun $4bcxx$ größer als $aaxx$, so ist auch $4bc$ größer als aa, und also die Gleichung unmöglich. In allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich, und die beiden Werthe für x können wirklich angegeben werden, wenn dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemerkt worden; dahingegen bei imaginären Ausdrücken, als $\sqrt{-5}$, auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1, oder irgend eine andere Zahl.

Hierbei ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweiten Grad: $xx \pm ax \pm b$, nothwendig allezeit in zwei solche Factoren: $(x \pm p)$ und $(x \pm q)$ aufgelöst werden kann. Denn wenn man drei solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweiten Grad ansteigen. Daher es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweiten Grad nothwendig zwei Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr noch weniger seyn können.

Man hat schon gesehen, daß wenn diese beiden Factores gefunden worden, man daraus auch die beiden Werthe für x anzeigen kann, indem ein jeder Factor, wenn er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angibt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der quadratischen Gleichung erkannt werde. Denn wenn $x = p$ ein Werth für x in einer quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben; oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x-p$ theilen, und der Quotient gibt den andern Factor.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung gegeben: $xx+4x-21=0$, von welcher wir schon wissen, daß $x=3$ ein Werth für x sey, indem 3 mal $3+4$ mal $3-21=0$ ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x-3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx+4x-21$ durch $x-3$ theilen laße, wie aus folgender Division zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l} x-3)\ xx+4x-21 & x+7 \\ xx-3x & \\ \hline +7x-21 & \\ +7x-21 & \\ \hline - & \end{array}$$

Also ist der andere Factor $x+7$, und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt: $(x-3).(x+7)=0$, woraus die beiden Werthe für x sogleich erhellen, da nämlich aus dem ersten Factor $x=3$, aus dem andern aber $x=-7$ wird.

II. Kapitel.

Von der Regel des Cardani, oder des Scipionis Ferrei.

Wenn eine kubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, und kein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3-axx+bx-c=0$, wo a, b und c ganze Zahlen sind: denn wollte man z. E.

setzen $x=\frac{3}{2}$, so kommt $\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b-c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner, die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt, oder ganze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können o werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

Da nun in diesen Fällen die Wurzel der Gleichung weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben irrational, und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darin für Wurzelzeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem Cardano, oder vielmehr dem Scipioni Ferreo zugeschrieben worden, welche deßwegen verdient hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Kubi, dessen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey die Wurzel $a+b$, so ist der Kubus davon $a^3+3aab+3abb+b^3$, welcher erstlich aus dem Kubo eines jeden Theils bestehet, und außer denselben noch die zwei Mittelglieder enthält, nämlich $3aab+3abb$, welche beide $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a+b$: denn $3ab$ mit $a+b$ multiplicirt, gibt $3aab+3abb$. Diese zwei Glieder enthalten also das 3fache Product der beiden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

Man setze nun es sey $x=a+b$, und nehme beiderseits die Kubi, so wird $x^3=a^3+b^3+(a+b)3ab$. Da nun $a+b=x$ ist, so hat man diese kubische Gleichung: $x^3=a^3+b^3+3abx$, oder $x^3=3abx+a^3+b^3$, von welcher wir wissen, daß eine Wurzel sey $x=a+b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt, so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a=2$, und $b=3$, so bekommt man diese Gleichung: $x^3=18x+35$, von welcher wir gewiß wissen, daß $x=5$ eine Wurzel ist.

Man setze nun ferner $a^3=p$, und $b^3=q$, so wird $a=\sqrt[3]{p}$, und $b=\sqrt[3]{q}$, folglich $ab=\sqrt[3]{pq}$. Wenn daher diese kubische Gleichung vorkommt: $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$, so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß sowohl $3\sqrt[3]{pq}$, als $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine jede kubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

Es sey daher diese allgemeine kubische Gleichung vorgegeben: $x^3 = mx + n$. Hier muß also m verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und n mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl m, und $p + q$ der Zahl n gleich werde, und alsdann wissen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde: $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man hat also diese zwei Gleichungen aufzulösen: I. $3\sqrt[3]{pq} = m$, und II. $p + q = n$. Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{m}{3}$, folglich $pq = \frac{m^3}{27} = \frac{1}{27}m^3$, und $4pq = \frac{4}{27}m^3$. Die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = nn$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}m^3$, so wird $pp - 2pq + qq = n^2 - \frac{4}{27}m^3$, woraus die Quadratwurzel gezogen, gibt $p - q = \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}$. Da nun $p + q = n$, so wird (wenn nämlich diese Gleichung zur nächstvorhergehenden addirt wird) $2p = n + \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}$, und (wenn nämlich jene Gleichung von $p + q = n$ subtrahiret wird) $2q = n - \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}$: daher erhalten wir:

$$p = \frac{n + \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}}{2}, \text{ und } q = \frac{n - \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3}}{2}$$

Wenn also eine solche kubische Gleichung vorkommt: $x^3 = mx + n$, die Zahlen m und n mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit

$$x = \sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}}{2}}$$

woraus erhellet, daß diese Irrationalität nicht nur das Quadratwurzelzeichen, sondern auch das Kubische in sich fasse: und diese Formel ist dasjenige, was man die Regel des Cardani zu nennen pflegt.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern: Es sey $x^3 = 6x + 9$, so ist hier $m = 6$, und $n = 9$, folglich $nn = 81$; $m^3 = 216$, und $\frac{4}{27}m^3 = 32$: daher $nn - \frac{4}{27}m^3 = 49$, und $\sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)} = 7$: daher wird von der vorgegebenen Gleichung, nach der obigen Formel, eine Wurzel seyn: $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist: $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, oder $x = 2 + 1 = 3$. Also ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung: $x^3 = 3x + 2$, so wird $m = 3$, und $n = 2$, also $nn = 4$; $m^3 = 27$, und $\frac{4}{27}m^3 = 4$, folglich $\sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)} = 0$: daher eine Wurzel seyn wird $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

Wenn aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschiehet es doch öfters, daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird, obgleich sie darinnen steckt. Es sey gegeben diese Gleichung: $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $m = 6$, und $n = 40$; ferner $nn = 1600$, und $\frac{4}{27}m^3 = 32$, also $nn - \frac{4}{27}m^3 = 1568$, und $\sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4.4.49.2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$; oder $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$, welche Formel wirklich 4 ist, ohngeachtet solches nicht sogleich daraus erhellet; denn da der Kubus von $2 + \sqrt{2}$ gleich ist $20 + 14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Kubikwurzel aus $20 + 14\sqrt{2}$ gleich $2 + \sqrt{2}$; und eben so ist auch $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$: folglich wird unsere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle kubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darin das zweite Glied fehlt. Es ist aber zu merken, daß eine vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweite Glied mangelt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige kubische Gleichung vorgegeben: $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil des Coefficienten 6 im zweiten Gliede, mit dem vorstehenden Zeichen, und setze $x - 2 = y$, so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung wie folgt:

Da $x = y + 2$

$$\begin{array}{rcrrr} \text{so ist } x^3 & = & y^3 + 6yy & + 12y & + 8 \\ -6xx & = & -6yy & -24y & -24 \\ +11x & = & & +11y & +22 \\ -6 & = & & & -6 \\ \hline x^3 - 6xx + 11x - 6 & = & y^3 & -y & \end{array}$$

Daher erhalten wir diese Gleichung: $y^3 - y = 0$, deren Auflösung sogleich in die Augen fällt: denn nach den Factoren hat man: $y(yy - 1) = y(y + 1) \cdot (y - 1) = 0$; setzt man nun einen jeden Factor gleich 0, so bekommt man:

$$\text{I.} \begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} y = -1, \\ x = 1, \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} y = 1, \\ x = 3, \end{cases}$$

welches die drei schon oben gefundenen Wurzeln sind.

Es sey nun diese allgemeine kubische Gleichung gegeben: $x^3 + axx + bx + c = 0$, aus welcher das zweite Glied weggebracht werden soll. Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil vom Coefficienten des zweiten Gliedes, mit dem vorstehenden Zeichen, und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y. Dieser Regel zufolge werden wir haben: $x + \frac{1}{3}a = y$, und also $x = y - \frac{1}{3}a$, woraus folgende Rechnung entsteht:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Da } x & = & y - \tfrac{1}{3}a \\
\text{so ist } x^3 & = & y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3 \\
axx & = & \quad + ayy - \tfrac{2}{3}aay + \tfrac{1}{9}a^3 \\
by & = & \quad + by - \tfrac{1}{3}ab \\
c & = & \quad + c \\
\hline
 & & y^3 - (\tfrac{1}{3}aa - b)y + \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c = 0
\end{array}$$

in welcher Gleichung das zweite Glied fehlt.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten: $x^3 = mx + n$, oder $x^3 - mx - n = 0$, so wird für unsern Fall $m = \frac{1}{3}aa - b$, und $n = -\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$. Aus diesen für die Buchstaben m und n gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben: $x = y - \frac{1}{3}a$.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande, die Wurzel von allen kubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende: $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$. Um hier das zweite Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Da nun } x & = & y + 2 \\
\text{so ist } x^3 & = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\
-6xx & = & \quad - 6yy - 24y - 24 \\
+13x & = & \quad + 13y + 26 \\
-12 & = & \quad - 12 \\
\hline
 & & y^3 + y - 2 = 0 \\
 & & \text{oder } y^3 = -y + 2
\end{array}$$

Diese Gleichung mit der Formel $x^3 = mx + n$ verglichen, gibt $m = -1$, $n = 2$; also $nn = 4$, und $\frac{4}{27}m^3$

$= -\frac{4}{27}$. Folglich $nn - \frac{4}{27}m^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$: daher erhalten wir $\sqrt{(nn - \frac{4}{27}m^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$. Daraus folgt ferner

$$y = \sqrt[3]{\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9})} + \sqrt[3]{(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9})}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9})} + \sqrt[3]{(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9})}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27})} + \sqrt[3]{(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27})}, \text{ oder endlich}$$

$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; und hernach bekommt man $x = y + 2$.

Bei Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen; gleichwohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechterdings irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ wirkliche Kubi wären. Dieses trifft auch hier zu, denn da der Kubus von $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist: so ist die Kubikwurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$, und $\sqrt[3]{}$ aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y seyn: $y = \frac{1}{3}(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{3 - \sqrt{21}}{2})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$, so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beiden andern auch finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, als:

$$\begin{array}{l|l}
x-3)\; x^3 - 6xx + 13x - 12 & xx - 3x + 4 = 0 \\
 x^3 - 3xx & \\
\hline
 - 3xx + 13x & \\
 - 3xx + 9x & \\
\hline
 + 4x - 12 & \\
 + 4x - 12 & \\
\hline
 - &
\end{array}$$

Aus $xx - 3x + 4 = 0$, ist $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - \frac{16}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist: $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beiden andern Wurzeln, welche beide imaginär sind.

Es war hier aber ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Kubikwurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denjenigen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rationalwurzel hat, die daher weit leichter nach den Theilern des letzten Gliedes gefunden werden können. Wenn aber keine Rationalwurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art, nach des Cardani Regel, ausgedrückt werden, so daß alsdann keine weitere Abkürzung statt findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet: $x^3 = 6x + 4$, wo $m = 6$, und $n = 4$ ist. Daher gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

III. Kapitel.

Von der Regel des Pombelli, die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf Kubische zu bringen.

Da schon oben gezeigt worden, wie die kubische Gleichungen durch Hülfe des Cardani Regel aufgelöst werden können, so kommt die Hauptsache bei den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf kubische Gleichungen zu bringen wisse. Denn ohne Hülfe der kubischen Gleichungen ists nicht möglich die biquadratischen auf eine allgemeine Art aufzulösen: denn wenn man auch eine Wurzel gefunden, so erfodern die übrigen Wurzeln eine kubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höhern Grade, die Auflösung aller niedrigern voraus setzen.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiäner, Namens Pombelli, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Kapitel vortragen wollen.

Es sey demnach die allgemeine biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinnliche Zahlen bedeuten können. Nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerlei sey: $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo es nur darauf ankommt, die Buchstaben p und q und r zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man diese letztere in Ordnung, so kommt heraus:

$$\begin{array}{llll} x^4 + ax^3 & + \frac{1}{4}aaxx & + apx & + pp \\ & + 2pxx & - 2qrx & - rr \\ & - qqxx & & \end{array}$$

Hier sind nun die zwei ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerlei. Für das dritte Glied muß man setzen: $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, woraus man hat:

$qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$. Für das vierte Glied muß man setzen: $ap - 2qr = c$, woraus man hat: $2qr = ap - c$. Für das letzte Glied aber setzt man: $pp - rr = d$, woraus man hat: $rr = pp - d$. Aus diesen drei Gleichungen müßen nun die drei Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste 4 mal, welche seyn wird: $4qq = aa + 8p - 4b$; diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so kommt: $4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$.

Nun quadrire man die mittlere Gleichung, so kommt: $4qqrr = aapp - 2acp + cc$. Wir haben also zweierlei Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich gesetzt folgende Gleichung geben: $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$; und alle Glieder auf eine Seite gebracht, kommt: $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$, welches eine kubische Gleichung ist, daraus in einem jeden Fall der Werth von p, nach den oben gegebenen Regeln, bestimmt werden muß.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drei Werthe des Buchstaben p gefunden, wozu es genug ist, nur einen entdeckt zu haben, so erhält man daraus sogleich die beiden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn: $q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2p - b)}$; und aus der zweiten erhält man: $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wenn aber diese drei Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden:

Da wir die gegebene Gleichung auf die Form gebracht haben: $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, so ist $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadratwurzel gezogen, wird $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. Die erstere gibt: $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, woraus zwei Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwei werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht: $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben: $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen, gibt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$; woraus, um den Buchstaben p zu bestimmen, folgende Gleichung erwächst: $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$, welche durch 4 dividirt gibt: $2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0$. Die Theiler der letzten Zahl sind, 1, 5, 7, 11 2c., von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$, so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$; folglich ist $p = 5$. Will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$, die zweite Wurzel. Um die dritte zu finden, so dividire man die Gleichung durch 2, so kommt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$; und da die Zahl im zweiten Gliede, nämlich $\frac{35}{2}$, die Summe aller drei Wurzeln ist, die beiden erstern aber zusammen 12 machen, so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drei Wurzeln. Es wäre aber genug nur eine zu wissen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer biquadratischen Gleichung heraus kommen müßen.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$; daraus wird alsdann $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$, und $r = \frac{50 - 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: daher unsere beide Quadratgleichungen seyn werden: I. $xx = 5x - 4$. II. $xx = 5x - 6$. Die erste gibt nun diese zwei Wurzeln: $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$. Die andere aber gibt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, folglich wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p=7$, so wird $q=\sqrt{(25+14-35)}=2$, und $r=\frac{-70+50}{4}=-5$, woraus diese zwei Quadratgleichungen entstehen: I. $xx=7x-12$. II. $xx=3x-2$; deren erstere gibt: $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x=\frac{7\pm1}{2}$: daher $x=4$, und $x=3$. Die andere gibt diese Wurzel: $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x=\frac{3\pm1}{2}$: daher $x=2$, und $x=1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben diese folgen auch aus dem dritten Werthe $p=\frac{11}{2}$. Denn da wird $q=\sqrt{(25+11-35)}=1$, und $r=\frac{-55+50}{2}=-\frac{5}{2}$, woraus die beiden quadratischen Gleichungen seyn werden: I. $xx=6x-8$. II. $xx=4x-3$. Aus der ersten bekommt man $x=3\pm\sqrt{1}$, also $x=4$, und $x=2$; aus der andern aber $x=2\pm\sqrt{1}$, also $x=3$, und $x=1$, welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben: $x^4-16x-12=0$, in welcher $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$: daher unsere kubische Gleichung seyn wird: $8p^3+96p-256=0$, das ist: $p^3+12p-32=0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man setzt: $p=2t$; da wird nämlich $8t^3+24t-32=0$, oder $t^3+3t-4=0$. Die Theiler des letzten Gliedes sind: 1, 2, 4, aus welchen $t=1$ eine Wurzel ist; daraus wird $p=2$, und ferner $q=\sqrt{4}=2$, und $r=\frac{16}{4}=4$: daher sind die beiden Quadratgleichungen: $xx=2x+2$, und $xx=-2x-6$: daher die Wurzeln seyn werden: $x=1\pm\sqrt{3}$, und $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bei dem folgenden Exempel ganz wiederholen.

Es sey demnach diese Gleichung gegeben: $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll: $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $- 3x$ gesetzt worden, weil $- 3$ die Hälfte ist der Zahl $- 6$ im zweiten Glied der Gleichung. Diese Formel aber entwickelt gibt: $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq) xx - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0$. Mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, so bekommt man: I. $2p + 9 - qq = 12$. II. $6p + 2qr = 12$. III. $pp - rr = 4$. Aus der ersten erhalten wir $qq = 2p - 3$; aus der zweiten $2qr = 12 - 6p$, oder $qr = 6 - 3p$; und aus der dritten $rr = pp - 4$. Nun multiplicire man rr und qq mit einander, so bekommt man: $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$: daher erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder: $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt: $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist: $p = 2$; daraus wird $qq = 1$, oder $q = 1$; ferner $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$; daraus die Quadratwurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$. Gilt das Zeichen $+$, so hat man $xx = 4x - 2$; für das Zeichen $-$ aber $xx = 2x - 2$; woraus diese vier Wurzeln gefunden werden: $x = 2 \pm \sqrt{2}$, und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Zusatz.

So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nämlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen, die Gleichungen vom fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen: also daß man nicht im Stande ist, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles, was darinnen geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wenn irgend eine Rationalwurzel statt findet, als welche durchs Probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Gliedes seyn muß, welches schon bei den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret worden.

Inhalt.

Verbesserungen.

Seite

22, Beispiel zur zweiten Regel

$$\begin{array}{r} 9 - 5 + 6 = 10 \\ 5 + 2 - 4 = \ \ 3 \\ \hline 14 - 3 + 2 = 13 \end{array}$$

30, 3tes Exempel: $6 - 2$ in $144 - 78 + 10$

31, Zeile 2: 60, anstatt 68

32, Aufgabe 6: qq, anstatt q^2

Zeile 10: $5c$, anstatt $5a$

48, Zeile 3: $2\frac{1}{2}$, anstatt $1\frac{1}{2}$

56, Zeile 7: $-18\sqrt{24}$, anstatt $-6\sqrt{24}$

Zeile 8: $2\sqrt{24}$, anstatt $\frac{2}{3}\sqrt{24}$