Erster Abschnitt.

Theorie des Geschwindigkeitmessers.

§. 1.

Auf einer ebenen horizontalen Tafel beschreibe man (Fig. 1.) von C aus mit CM den Kreis MABM. M sey ein schwerer Körper, dessen Masse man sich in einen Punkt vereinigt vorstellt; an diesen Körper wird ein Faden gebunden, dann gespannt und hierauf in C befestigt. Wird nun NM auf den Halbmesser CM senkrecht gezogen, und dem Körper M nach der Richtung MN ein horizontaler Stoß gegeben, so durchläuft derselbe den Kreis MABM. Wäre der Körper M nicht befestigt, so würde derselbe nach erhaltenem Stoß in der Richtung MN fortgehen. Da aber der Faden den Körper nöthigt, in dem Kreise MABM herum zu laufen, so muß derselbe von dem Körper M gedehnt werden; diese Kraft, womit der Körper den Faden nach der Richtung CM dehnt, heißt bekanntlich die Schwungkraft des Körpers.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sey diese Schwungkraft . . . . $= P$,
das Gewicht des Körpers M . . . $= M$,
der Halbmesser CM . . . . . . $= r$,
die Geschwindigkeit, womit der Körper
M im Kreise MABM herumläuft . . $= c$,
der Raum, durch welchen ein Körper
in der ersten Sekunde frei fällt . . . $= g$,
so hat man

$$\text{(I.)} \qquad P = \frac{c^2}{2gr} M.$$

[S. Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik 4r Theil Seite 68, oder Eytelweins Handbuch der ~~Mathematik~~ Mechanik u. s. w. Seite 54.]

Durch Erfahrung hat man gefunden, daß ein Körper nahe an der Oberfläche der Erde in der ersten Sekunde durch einen Raum von $15^5/_8$ Fuß rheinländisch frei fällt.

Erstes Exempel.

Es sey $c = 5$ Fuß
$r = 2$ Fuß
$M = 15$ Loth, welche man sich in einem Punkte vereinigt vorstellt, so ist

$$P = \frac{25 \cdot 15}{2 \cdot 15^5/_8 \cdot 2} = 6 \text{ Loth}.$$

Zweites Exempel.

Es sey $c = 8$ Fuß
$r = 2\tfrac{6}{125}$ Fuß
$M = 15$ Loth, so ist

$$P = \frac{64 \cdot 15}{2 \cdot 15^5/_8 \cdot 2\tfrac{6}{125}} = 15 \text{ Loth} = M.$$

In diesem Falle ist die Schwungkraft der Schwere gleich, und die Schwungkraft dehnt den Faden eben so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stark, als wenn ein Gewicht von 15 Loth frei an dem Faden herabhinge.

§. 2.

Aufgabe.

Der Körper M (Fig. 1.) laufe in einer Minute oder in 60 Sekunden N mal in dem Kreise MABM herum; man sucht die Schwungkraft dieses Körpers.

Auflösung.

Wenn der Körper in 60 Sekunden N Umläufe macht, so beträgt dies in einer Sekunde $\frac{N}{60}$ Umläufe. Es sey, wie im §. 1. der Halbmesser $CM = r$, so ist der Durchmesser $AM = 2r$ und der Umfang $= 2r\pi$ wo π bekanntlich $= 3{,}14159\ldots$ ist. Nun ist 1 Umlauf $= 2r\pi$, folglich sind $\frac{N}{60}$ Umläufe $= \frac{2r\pi N}{60}$, welches die Geschwindigkeit des Körpers M in einer Sekunde ist. Heißt diese Geschwindigkeit c, so ist $c = \frac{2r\pi N}{60}$. Wird dieser Werth von c in die Gleichung 1 §. 1. gesetzt, so bekommt man:

$$\text{(II.)} \qquad P = \frac{\pi^2 N^2 r}{1800\, g} M.$$

Exempel.

Es sey $N = 60$ Umläufe,
$r = 2$ Fuß,
$M = 15$ Loth, so ist

$$P = \frac{(3{,}14)^2 \cdot 60^2 \cdot 2 \cdot 15}{1800 \cdot 15^5/_8} = 3{,}79 \text{ Loth}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 3.

EF (Fig. 2.) sey eine in den Lagern q und r vertikal stehende Axe, mit welcher in E eine Kurbel K, und in A eine dünne prismatische Stange ABOC fest verbunden ist.

Aufgabe.

Die Axe EF (Fig. 2) mit der prismatischen Stange ABOC werde durch Umdrehung der Kurbel K in Umlauf gesetzt; man sucht die Schwungkraft dieser Stange nach horizontaler Richtung.

Auflösung.

Es sey die Anzahl dieser Umläufe . . = N,
der Winkel FAC . . . . = a,
die Länge der Stange AC . . . . = b,
das Gewicht derselben . . . . . . = M,
ihre Schwungkraft . . . . = P,

Nun theile man AC in eine sehr große Anzahl gleicher Theile = n; so ist die Länge eines jeden Theilchens $= \frac{1}{n} b$, und das Gewicht desselben $= \frac{1}{n} M$. Für irgend ein beliebiges Theilchen in B ziehe man BD auf EF senkrecht, so hat man:

$$1 : \sin. a = AB : BD; \text{ also ist}$$
$$BD = AB \sin. a.$$

Setzt man nun $\frac{1}{n} b$, $\frac{2}{n} b$, $\frac{3}{n} b$ bis $\frac{n}{n} b$ anstatt AB, so erhält man für BD nach und nach $\frac{1}{n} b \sin. a$, $\frac{2}{n} b \sin. a$, $\frac{3}{n} b \sin a$ bis $\frac{n}{n} b \sin. a$.

Werden nun diese Werthe von BD anstatt r, und $\frac{1}{n}$ M anstatt M, in die Gleichung II. §. 2. gesetzt, so erhält man für die Schwungkraft des ersten Theilchens nach horizontaler Richtung

$$= \frac{\pi^2 N^2 \frac{1}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M$$

des zweiten $= \frac{\pi^2 N^2 \frac{2}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M,$

des dritten $= \frac{\pi^2 N^2 \frac{3}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M,$

des vierten $= \frac{\pi^2 N^2 \frac{4}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M,$

des nten oder letzten $= \frac{\pi^2 N^2 \frac{n}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M.$

Die Summe dieser einzelnen Schwungkräfte gibt die Schwungkraft der ganzen Stange AC; diese ist demnach

$$= P = \frac{\pi^2 N^2 \frac{1}{n} b \sin. a}{1800 g} \frac{1}{n} M [1 + 2 + 3 + 4 \text{ bis } n].$$

Dasjenige, was in den Klammern steht, ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Bekanntlich ist diese Summe $= (n + 1) \frac{1}{2} n$. Ist nun n eine sehr große Zahl, so kann man n anstatt $n + 1$ setzen; alsdann ist $(n + 1) \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} n^2$, folglich ist

$$\text{(III.)} \qquad P = \frac{\pi^2 N^2 b \sin. a}{3600 g} M.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Exempel.

Es sey $N = 60$ Umläufe

$b = 1$ Fuß

$a = 30^\circ$

$M = 15$ Loth, so ist

$$P = \frac{(3,14..)^2 \cdot 60^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15}{3600 \cdot 15\frac{5}{8}} = 4,73\ldots \text{ Loth.}$$

§. 4.

An der Axe EF (Fig. 2.) sey ein Arm NO in horizontaler Lage befestigt; durch diesen Arm und durch die Stange AO werde ein Stift O so gesteckt, daß sich AO in der vertikalen Ebene FAC um den Stift O frei drehen und sowohl in die Lage mn, als auch in die Lage op kommen kann. Wird nun die Axe EF mit der Stange AC durch Umdrehung der Kurbel K in Umlauf gesetzt, und AO so genommen, daß sich die Schwungkräfte von OA und OC einander im Gleichgewicht halten, folglich der Endpunkt A der Stange AC in der Axe EF bleibt; so soll dieser Punkt O der Mittelpunkt des Schwunges heißen.

Aufgabe.

Den Mittelpunkt des Schwunges O der Stange AC zu finden.

Auflösung.

Man theile AC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, wie Aa, ab, bc u. s. w. In A, a, b, c u. s. w. bringe man Kräfte an, welche sich wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. verhalten, und nach den horizontalen Richtungen A1, a2, b3, c4.... wirken.

Hier ist z. B. A C in 9 gleiche Theile getheilt worden. Werden nun die angebrachten Kräfte in A = 1 Loth, in a = 2 Loth, in b = 4 Loth bis in C = 10 Loth angenommen, so betragen dieselben 55 Loth. Diese Kräfte zusammen genommen mögen Q heißen, welche man sich in dem Punkte O vereinigt, und nach der Richtung O 7 wirkend verstellen kann; demnach hält eine Kraft Q in O nach der Richtung O N angebracht, jenen Kräften zusammen genommen das Gleichgewicht. Nun nehme man an, daß in A ein Stift angebracht sey, um welchen sich A C frei drehen könne, und daß sich in dem ersten Theilungspunkte a anstatt der einzelnen Kräfte in A, a, b, c u. s. w. eine Kraft R befinde, welche nach der Richtung a 2 wirke. Ist nun diese Kraft R gleich der Summe der statischen Momente $Aa \,.\, 2 + Ab \,.\, 3 + Ac \,.\, 4 + \ldots\ldots AC \,.\, 10$, so ist bekanntlich R mit Q im Gleichgewicht, wenn sich $Q : R = Aa : AO$ verhält, und mithin $AO = \frac{R \,.\, Aa}{Q}$ ist. Da $Aa = 1$, $Ab = 2$ $Ac = 3$ u. s. w. ist, so ist $R = 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + 4 \,.\, 5 + \ldots\ldots 9 \,.\, 10 = 330$ Loth. Demnach ist $AO = \frac{R \,.\, Aa}{Q} = \frac{330}{55} = 6$ Theile $= \frac{2}{3}$ A C weil A C in 9 gleiche Theile getheilt worden ist. Nach diesem Beispiele mit Zahlen wird eine allgemeine Auflösung obiger Aufgabe nicht mehr schwer seyn. Es sey $\frac{\pi^2 N^2 \frac{1}{n} b \sin . a}{1800\, g} \; \frac{1}{n} M = p$; theilt man nun A C in eine sehr große Anzahl gleicher Theile = n, so ist nach §. 3. die Schwungkraft des ersten Theilchens = p . 1, des zweiten = p . 2, des dritten = p . 3, u. s. w.; demnach sind die statischen Momente folgende untereinander gesetzte Größen:

$$1 \cdot 2p = 2p$$
$$2 \cdot 3p = 6p$$
$$3 \cdot 4p = 12p$$
$$4 \cdot 5p = 20p$$
$$\vdots$$

das nte Glied = $n \cdot (n + 1)\, p = (n^2 + n)\, p$.

Wird nun das erste Glied von dem zweiten, das zweite von dem dritten, das dritte von dem vierten u. s. w. subtrahirt, so entstehen folgende Differenzen: 4p, 6p, 8p u. s. w. Wird ferner die erste Differenz von der zweiten, die zweite von der dritten u. s. w. abgezogen, so erhält man die gleichen Differenzen 2p, 2p u. s. w. Bekanntlich lassen sich alle Reihen summiren, bei denen man, wie hier, zuletzt auf gleiche Differenzen stößt. Es sey die Summe von $2p + 6p + 12p + 20p + \ldots$, bis $n\,(n + 1)\,p = S$, so erhält man, wenn nach der erwähnten Methode verfahren wird: $S = (\frac{1}{3}\, n^3 + n^2 + \frac{2}{3}\, n)\, p$ = der Kraft R. Die Summe aller einzelnen Schwungkräfte ist $= p + 2p + 3p + \ldots$ bis $(n + 1)\, p = (\frac{1}{2}\, n^2 + \frac{3}{2} n + 1)\, p$ = der Kraft Q. Demnach ist

$$A\,O = \frac{R.\ Aa}{Q} = \frac{(\frac{1}{3}\, n^3 + n^2 + \frac{2}{3}\, n)\, p}{(\frac{1}{2}\, n^2 + \frac{3}{2}\, n + 1)\, p} =$$

$\frac{2}{3}$ n Theile, wenn A C in n gleiche Theile getheilt worden ist.

Um also den Mittelpunkt des Schwunges der Stange A C zu finden, theile man dieselbe in drei gleiche Theile, und nehme hiervon von A bis O zwei Theile; so ist O der Mittelpunkt des Schwunges.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 5.

X a d Y (Fig. 3.) sey eine vertikal stehende Axe, welche durch die Lager q und r gehalten wird. Oben sey diese Axe mit einem winklicht gebogenen Theile a b c d versehen, mit dem in B eine dünne prismatische Stange B C fest verbunden ist.

Aufgabe.

Die Axe X Y mit der prismatischen Stange B C werde durch Umdrehung der Kurbel Q in Umlauf gesetzt; man sucht die Schwungkraft der Stange B C nach horizontaler Richtung.

Auflösung.

Man stelle sich die Stange B C so weit verlängert vor, bis dieselbe die Axe X Y in A trift; ferner ziehe man B I auf X Y senkrecht, setze $BI = f$, den Winkel $IAB = a$, und

die Länge der Stange $BC = d$, ihr Gewicht $= M$,
die Schwungkraft der Stange $AB = Q$,
die Schwungkraft der Stange $AC = R$,
die Schwungkraft der Stange $BC = P$,
die Anzahl der Umläufe, welche die Stange B C in einer Minute macht $= N$.

Nun ist in dem rechtwinkelichten Dreiecke I A B,

$$\sin. IAB : 1 = IB : AB, \text{ oder}$$
$$\sin. a : 1 = f : AB, \text{ also ist die}$$

Länge der Stange $AB = \frac{f}{\sin. a}$. Auch verhalten sich die Gewichte der Stangen B C und A B wie ihre Längen, folglich hat man:

$$BC : AB = M : \frac{AB}{BC} \cdot M, \text{ oder}$$

$$d : \frac{f}{\sin. a} = M : \frac{f}{d \sin. a} . M;$$ also ist das

Gewicht der Stange AB $= \frac{f}{d \sin. a} . M.$

Setzt man nun in die Gleichung III. §. 3. Q anstatt P, $\frac{f}{\sin. a}$ anstatt b und $\frac{f}{d \sin. a}$ M anstatt M, so erhält man:

$$Q = \frac{\pi^2 N^2 f^2}{3600 g . d \sin. a} M.$$

Auch ist AC = AB + BC, oder

$$AC = \frac{f}{\sin. a} + d = \frac{f + d \sin. a}{\sin. a}.$$

Ferner hat man:

$$BC : AC = M : \frac{AC}{BC} M, \text{ oder}$$

$$d : \frac{f + d \sin. a}{\sin. a} = M : \frac{f + d \sin. a}{d \sin. a} M,$$

also ist das Gewicht der Stange AC $= \frac{f + d \sin. a}{d \sin a} M.$

Wird nun, wie vorhin, R anstatt P, $\frac{f + d. \sin a}{\sin. a}$ anstatt b, und $\frac{f + d \sin. a}{d \sin. a}$ M anstatt M, in die Gleichung III. §. 3. gesetzt, so erhält man:

$$R = \frac{\pi^2 N^2 (f + d \sin. a)^2}{3600 g d \sin. a} M.$$

Nun ist P = R − Q. Setzt man in diese Gleichung die eben gefundenen Werthe für R und Q, so erhält man nach gehöriger Entwickelung:

$$\text{(IV.)} \quad P = \frac{\pi^2 N^2 (2 f + d \sin. a)}{3600 g} M$$

welches die Schwungkraft der Stange B C nach horizontaler Richtung ist.

Exempel.

Es sey $N = 60$ Umläufe
$d = 1$ Fuß
$f = \frac{1}{2}$ Fuß
$a = 30°$
$M = 15$ Loth, so ist

$$P = \frac{(3,14.)^2 . 60^2 . (1 + \frac{1}{2})\, 15}{3600 . 15\frac{5}{8}} = 14,21 \text{ Loth.}$$

§. 6.

Aufgabe.

Den Mittelpunkt des Schwunges der Stange B C (Fig. 3.) zu finden.

Auflösung.

Es seyen G, D und E die Mittelpunkte des Schwunges der Stangen AB, AC und BC; Q, R und P die Schwungkräfte der Stangen AB, AC und BC nach dem vorigen §; alsdann hat man nach Gründen der Mechanik

$R . AD = Q . AG + P . AE$; also ist

$$AE = \frac{R . AD - Q . AG}{P}.$$

Nun ist $BE = AE - AB$; folglich ist

$$\text{(A)} \qquad BE = \frac{R . AD - Q . AG}{P} - AB.$$

Nach §. 4. ist $AD = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} (AB + BC)$ und $AG = \frac{2}{3} AB$. Nach §. 5. ist

$$AB = \frac{f}{\sin. a}$$ und $BC = d$; folglich ist

$$AD = \frac{{}^2\!/_3\, f}{\sin.\, a} + {}^2\!/_3\, d \text{ und}$$

$$AG = \frac{{}^2\!/_3\, f}{\sin.\, a}.$$

Werden nun diese Werthe von AB, AD und AG, und die im vorigen §. gefundenen von P, Q und R in obige Gleichung A gesetzt, so erhält man nach gehöriger Rechnung:

$$\text{(V)} \qquad BE = \frac{d\, f + {}^2\!/_3\, d^2 \sin.\, a}{2\, f + d \sin.\, a}.$$

Durch diese Gleichung kann man also E, den Mittelpunkt des Schwunges der Stange BC, aus den Größen d, f und a finden.

Exempel.

Es sey $d = {}^3\!/_4$ Fuß
$f = {}^1\!/_2$ Fuß
$a = 30°$, so ist

$$BE = \frac{{}^3\!/_4 \cdot {}^1\!/_2 + {}^2\!/_3 \cdot {}^9\!/_{16} \cdot {}^1\!/_2}{2 \cdot {}^1\!/_2 + {}^3\!/_4 \cdot {}^1\!/_2} = {}^9\!/_{22} \text{ Fuß}.$$

§. 7.

Man ziehe durch E (Fig. 3.) die gerade Linie KEL so, daß dieselbe BC unter einem rechten Winkel in E schneidet. Ferner ziehe man durch E die gerade Linie HEi auf XY senkrecht. Hierauf beschreibe man aus B mit dem Halbmesser BC den Bogen pCh, und ziehe Bh mit XY parallel.

Nimmt man nun an, daß sich die dünne prismatische Stange BC um den Punkt B frei drehen könne, so hängt dieselbe bekanntlich in der Vertikallinie Bh herunter, wenn alles in Ruhe ist. Wird aber durch Umdrehung der Kurbel Q die Stange BC in Umlauf gesetzt, so streben alle Theile derselben, sich, vermöge der Schwungkraft, von der Axe XY zu entfernen. Diesem wirkt indessen die Schwere entgegen, und die Stange BC wird dadurch in eine Lage kommen, welche in diesem Falle BC seyn mag.

Aufgabe.

Die dünne prismatische Stange BC (Fig. 3.) hänge in der Vertikallinie Bh herunter; durch Umdrehung der Kurbel Q werde nun diese Stange, welche vermöge der Schwungkraft und der Kraft der Schwere in die Lage BC kommt, in Umlauf gesetzt; man sucht die Anzahl der Umläufe, welche alsdann die Stange BC in einer Minute macht.

Auflösung.

Die vorigen Bezeichnungen der Größen werden hier beibehalten. Es ist demnach IB = f, die Länge der Stange BC = d, der Winkel hBC = IAB = a, die Anzahl der Umläufe, welche die Stange BC in einer Minute macht = N.

Da E der Mittelpunkt des Schwunges der Stange BC ist (§. 6.), so wirkt die Schwungkraft der Stange BC nach der horizontalen Richtung EH mit der Kraft P (§. 5.), und folglich nach der Richtung EL mit der Kraft P cos. a, wie sich aus der Zerlegung der Kräfte ergiebt. Halbirt man BC in F, so ist F der Schwerpunkt der Stange BC; nun ziehe man VF auf BC senkrecht und Ff mit XY parallel. Bekanntlich wirkt das Gewicht M der Stange BC vermöge der Schwere nach der vertikalen Richtung Ff mit der Kraft M, folglich nach der Richtung FV mit der Kraft M sin. a.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Denkt man sich diese Kraft aus F weg, und dagegen in E eine andere Kraft M sin. a $\frac{BF}{BE}$ angebracht, so wirkt diese nach der Richtung EK eben so stark auf die Umdrehung der Stange BC um den Punkt B, als vorhin jene in F nach FV wirkte, weil in beiden Fällen die statischen Momente BF. M sin. a und BE . M. sin. a . $\frac{BF}{BE}$ einander gleich sind.

Demnach wirkt die Schwere der Stange BC nach der Richtung EK mit der Kraft M sin. a $\frac{BF}{BE}$ und die Schwungkraft der Stange BC nach der entgegengesetzten Richtung EL mit der Kraft P cos. a.

Da nun beide Kräfte einander gleich sind, so hat man folgende Gleichung:

$$(B) \qquad M \sin. a \frac{BF}{BE} = P \cos. a.$$

Nun ist BF = ½ d; nach §. 6. ist

$$BE = \frac{d f + \frac{2}{3} d^2 \sin. a}{2 f + d \sin. a};$$

ferner ist nach §. 5. $P = \frac{\pi^2 N^2 (2 f + d \sin. a)}{3600 g.} M.$

Werden diese Werthe in die vorhin gefundene Gleichung B gesetzt, so erhält man nach gehöriger Rechnung:

$$(VI.) \qquad N^2 = \frac{2700 g \tan g. a}{\pi^2 (\frac{3}{2} f + d \sin. a)}.$$

Exempel.

Es sey f = ½ Fuß,
d = ¾ Fuß,

der Winkel $a = 30°$, so ist

$$N = \sqrt{\left[\frac{2700 \cdot 15\,^5/_8 \cdot 0,57735 \ldots}{(3.14)^2 \cdot (^3/_2 \cdot \frac{1}{2} + ^3/_4 \cdot ^1/_2)}\right]} = 46,83.$$

§. 8.

Die prismatische Stange BC (Fig. 3.) sey in B mit b o fest verbunden und an derselben in C einen Kugel angebracht, deren Masse man sich in dem Punkte C vereinigt vorstellt. Durch C ziehe man S C g, welche Bh in m schneidet, auf X Y senkrecht; es ist alsdann g m = IB.

Aufgabe.

Durch Umdrehung der Kurbel Q werde die Axe XY, die damit verbundene Stange BC, und die Kugel C in Umlauf gesetzt; man sucht die Schwungkraft der Kugel C nach der horizontalen Richtung CS.

Auflösung.

Es sey, wie vorhin,

$gm = IB = f$,
die Länge der Stange BC . . . . $= d$,
das Gewicht der Kugel C . . . . $= R$,
ihre Schwungkraft . . . . $= Q$,
der Winkel hBC . . . . $= a$,
die Anzahl der Umläufe, welche die Kugel C in einer Minute macht . . . . . . $= N$.

Nun ist:

$1 : \sin. hBC = BC : mC$, oder
$1 : \sin. a = d : mC$, also ist
$mC = d \sin. a$. Ferner ist,
$gC = gm + mC$; folglich ist
$gC = f + d \sin. a$.

Wird nun dieser Werth von $g\,C$ anstatt r, Q anstatt P, und R anstatt M in die Gleichung II. §. 2. gesetzt, so erhält man für die Schwungkraft der Kugel C nach der horizontalen Richtung CS:

$$\text{(VII.)} \qquad Q = \frac{\pi^2\, N^2\, (f + d \sin. a)}{1800\, g.}\, R.$$

Exempel.

Es sey $N = 60$ Umläufe,
$f = \frac{1}{2}$ Fuß,
$d = \frac{1}{2}$ Fuß,
$a = 30^\circ$,
$R = 32$ Loth, so ist

$$Q = \frac{(3, 14.)^2 \cdot 60^2\, (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})\, 32}{1800 \cdot 15\, \frac{5}{8}} = 30,\, 32 \text{ Loth}.$$

§. 9.

Aufgabe.

Den Mittelpunkt des Schwunges der prismatischen Stange BC (Fig. 3.), so wie der damit verbundenen Kugel C zu finden.

Auflösung.

Es sey U der gesuchte Mittelpunkt des Schwunges; durch U ziehe man MUN, und durch C, TCW mit KEL parallel.

Nach dem vorigen §. ist die Schwungkraft der Kugel C nach der horizontalen Richtung $CS = Q$, mithin nach der Richtung $CW = Q \cos. a$ (§. 7.). Ferner hat man nach §. 5. für die Schwungkraft der Stange BC nach der horizontalen Richtung $EH = P$, folglich nach der Richtung $EL = P \cos. a$ (§. 7.), wo E, nach §. 6, der Mittelpunkt des Schwunges der Stange BC ist. Nun stelle man sich E C als einen Hebel vor, welcher sich um den Punkt U frei drehen kann; der Punkt U wird so genommen, daß sich die Kräfte P cos. a nach der Richtung E L, und Q cos. a nach der Richtung C W einander im Gleichgewicht halten, welches bekanntlich geschieht, wenn P cos. a. EU = Q cos. a. UC ist. Hieraus erhält man:

$$\text{(C)} \qquad UC = \frac{P.EU}{Q}.$$

Nun ist $EC = BC - BE$, oder

$$EC = d - BE.$$

Setzt man hierin den in der Gleichung V. §. 6. gefundenen Werth von BE, so hat man:

$$EC = \frac{3\,d\,f + d^2 \sin. a}{6\,f + 3\,d \sin a}.$$

Da $EU = EC - UC$ ist, so setze man diesen Werth von EU in die vorhin gefundene Gleichung C; alsdann erhält man:

$$UC = \frac{P\,(EC - UC)}{Q}, \text{ folglich}$$

$$UC = \frac{P.EC}{P + Q}.$$

Ferner ist $BU = BC - UC$, oder

$BU = d - UC$. Setzt man nun in diese Gleichung den vorhin gefundenen Werth von UC, so erhält man:

$$\text{(D)} \qquad BU = d - \frac{P.EC}{P + Q}.$$

Nach §. 5. ist

$$P = \frac{\pi^2 N^2 (2\,f + d \sin. a)}{3600\,g} M; \text{ und nach §. 8.}$$

$$Q = \frac{\pi^2 N^2 (f + d \sin. a)}{1800 g} R.$$

Vorhin hat man gefunden:

$$EC = \frac{3 f d + d^2 \sin. a}{6 f + 3 d \sin. a}.$$

Werden diese Werthe von P, Q und EC in die vorhin gefundene Gleichung D gesetzt, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

(VIII.)

$$BU = \frac{(d f + \frac{2}{3} d^2 \sin. a) M + (2 d f + 2 d^2 \sin. a) R}{(2 f + d \sin. a) M + (2 f + 2 d \sin. a) R}.$$

Exempel.

Es sey $d = \frac{1}{2}$ Fuß,
$f = \frac{1}{2}$ Fuß,
$a = 30°$,
$M = 2$ Loth,
$R = 32$ Loth, so ist

$$BU = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}) \cdot 2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})\, 32}{(1 + \frac{1}{4}) \cdot 2 + (1 + \frac{1}{2})\, 32} = \frac{33}{67} \text{ Fuß}.$$

§. 10.

IBC (Fig. 3.) sey ein Winkelhebel, welcher sich um den Punkt B frei drehen kann. An dem Arme IB ist ein Bogen befestigt, wovon B der Mittelpunkt ist; Arm und Bogen werden ohne Schwere angenommen. An den obern Theil dieses Bogens befestigt man einen Faden, welcher um den Bogen geschlagen und mit einer Kugel O versehen wird. Der andere Arm BC ist die vorhin mehrmals erwähnte dünne prismatische Stange BC mit der daran befindlichen Kugel C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn alles in Ruhe ist, und man alsdann die Kugel O wegnimmt, so kommt BC, vermöge der Schwere, in die Vertikallinie Bh; bringt man aber diese Kugel, wie vorhin, wieder an, so wird durch das Gewicht derselben BC gehoben und aus der vertikalen Lage Bh in die Lage Bn versetzt.

A u f g a b e.

Der Winkelhebel IBC mit den daran befindlichen Kugeln O und C werde durch Umdrehung der Kurbel Q in Umlauf gebracht, und vermöge der Schwungkraft und der Kraft der Schwere aus Bn in BC versetzt; man sucht die Anzahl der Umläufe, welche alsdann dieser Winkelhebel mit den daran befindlichen Kugeln in einer Minute macht.

A u f l ö s u n g.

Die Bezeichnungen sind hier, wie in den vorhergehenden Paragraphen; es ist demnach

die Länge der Stange BC . . .	= d,
das Gewicht derselben	= M,
ihre Schwungkraft	= P,
das Gewicht der Kugel C. . . .	= R,
ihre Schwungkraft	= Q,
die Länge des Arms IB	= f,
das Gewicht der Kugel O . . .	= O,
der Winkel hBC	= a,
die Anzahl der Umläufe, welche der Winkelhebel in einer Minute macht	= N.

Nach §. 7. und §. 9. ist die Schwungkraft der Stange BC nach der Richtung EL = P cos a, und die Schwungkraft der Kugel C nach der Richtung CW =

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Q cos. a. Beide Kräfte wirken zusammen in U nach der Richtung UN mit einer Kraft (P + Q) .cos. a; nach dieser Richtung wirkt nun noch das Gewicht O mit der Kraft $\frac{f}{BU}$. O, wie leicht zu beweisen ist.

Nach §. 7. wirkt das Gewicht der Stange BC in F nach der Richtung FV mit der Kraft M sin. a. Denkt man sich diese Kraft aus F weg, und dagegen in U eine andere Kraft M sin. a $\frac{BF}{BU}$ angebracht, so wirkt diese nach der Richtung UM eben so stark auf die Umdrehung der Stange BC um den Punkt B, als vorhin jene in F wirkte (§. 7.). Die Kraft, mit welcher die Kugel C nach der Richtung CT wirkt, ist R sin. a; denkt man sich nun diese Kraft aus C weg, und dagegen in U eine andere R sin. a $\frac{BC}{BU}$ angebracht, so ersetzt diese die Stelle jener Kraft R sin. a (§. 7.).

Demnach wirkt die Schwere nach der Richtung UM mit der Kraft M sin. a $\frac{BF}{BU}$ + R sin. a $\frac{BC}{BU}$, und die Schwungkraft nach der entgegengesetzten Richtung UN mit der Kraft (P + Q) cos. a. Hiezu kömmt nun noch die Kraft des Gewichts O, welches nach Obigem $\frac{f}{BU}$. O ist. Da nun diese Kräfte nach den entgegengesetzten Richtungen UM und UN einander gleich sind, so hat man folgende Gleichung:

(E)

$$\left[M\frac{BF}{BU} + R\frac{BC}{BU}\right] \sin. a = [P + Q] \cos. a + \frac{f}{BU}\, O.$$

Nach §. 9. ist

$$BU = \frac{(df + \frac{2}{3} d^2 \sin. a)\, M + (2\, d\, f + 2\, d^2 \sin. a)\, R}{(2\, f + d \sin. a)\, M + (2\, f + 2\, d \sin. a)\, R}.$$

Nach §. 5. ist

$$P = \frac{\pi^2\, N^2\, (2\, f + d \sin. a)}{3600\, g}\, M, \text{ und nach §. 8.}$$

$$Q = \frac{\pi^2\, N^2\, (f + d \sin a)}{1800\, g}\, R.$$

Ferner ist $BF = \frac{1}{2}\, d$ (§. 7.) und $BC = d$.

Werden diese Werthe von BU, P, Q, BF und BC in obige Gleichung E gesetzt, so erhält man nach einer mühsamen Rechnung:

$$(\text{IX.})\ N^2 = \frac{5400\, g \left[(M + 2\, R) \text{ tang. } a - \frac{2\, f}{d \cos\, a}\, O \right]}{\pi^2 [(3f + 2 d \sin. a)\, M + (6f + 6 d \sin a)\, R]}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $N = o$, so ist $(M + 2\, R) \text{ tang. } a - \frac{2\, f}{d \cos. a}\, O = o$.

Hieraus erhält man:

$$\sin.\ a = \frac{2\, f\, O}{d\, M + 2\, d\, R},$$ welches der Sinus des Winkels hBn ist.

Wird $a = 90°$ genommen, so ist $\sin.\ a = 1$ und $\cos.\ a = o$. Ist nun $M + 2\, R$ größer, als $\frac{2}{d}\, f\, O$, so ist in diesem Falle

$$(M + 2\, R) \text{ tang. } a - \frac{2\, f}{d \cos.\ a}\, O = \infty;$$

denn setzt man $\frac{\sin.\ a}{\cos.\ a} = \frac{1}{o}$ anstatt tang. a, so hat man:

$$(M + 2R)\ \text{tang}, a - \frac{2f}{d\ \cos. a} O = \frac{M + 2R - d\frac{2}{f} + O}{0} = \infty.$$

Hieraus erhellt, daß für a = h B p = 90° auch N unendlich ist.

Es sey a = o, so ist tang. a = o, sin. a = o und cos. a = 1; alsdann ist

$$N^2 = - \frac{3600\ g\ O}{\pi^2\ d\ (M + 2R)}$$

eine negative Größe, folglich N unmöglich.

Setzt man R = o, und O = o, so ist

$$N^2 = \frac{2700\ g\ \text{tang. a.}}{\pi^2\ (3/_2\ f + d\ \text{sin. a})},$$ wie in §. 7.

Ist M = o und O = o, so hat man:

$$N^2 = \frac{1800\ g\ \text{tang. a}}{\pi^2\ (f + d\ \text{sin. a})},$$ und

M = o und f = o

$$N^2 = \frac{1800\ g}{\pi^2\ d\ \cos.\ a}.$$

Setzt man R = o und f = o, so ist

$$N^2 = \frac{2700\ g.}{\pi^2\ d\ \cos.\ a}.$$ Ist

d = o und O = o, so erhält man:

$$N^2 = \frac{1800\ g\ \text{tang. a}}{\pi^2\ f}.$$

Setzt man in obige Gleichung IX. $\frac{5400\ g}{\pi^2} = P$; tang. a $= \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}$; cos. a = V (1 — sin. a²) und alsdann sin. a = x; so entsteht durch Quadrirung und gehörige Reduktion, nach den Patenzen von x geordnet, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r} 36\,d^2\,R^3\,N^4 \\ 24\,d^2\,MR\,N^4 \\ 4\,d^2\,M^2\,N^4 \end{array}\right\} x^4 \left.\begin{array}{l} +\,60\,df\,MR\,N^4 \\ +\,72\,df\,R^2\,N^4 \\ +\,12\,df\,M^2\,N^4 \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} -\,36\,d^2\,R^2\,N^4 \\ -\,4\,d^2\,M^2\,N^4 \\ -\,24\,d^2\,MR\,N^4 \\ +\,9\,f^2\,M^2\,N^4 \\ +\,36\,f^2\,R^2\,N^4 \\ +\,36\,f^2\,MR\,N^4 \\ +\,P^2\,M^2 \\ +\,4\,MP^2\,R \\ +\,4\,R^2\,P^2 \end{array}\right\} x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} -\,12\,df\,M^2\,N^4 \\ -\,60\,df\,MR\,N^4 \\ -\,72\,df\,R^2\,N^4 \\ -\,\frac{4}{d}\,f\,MOP^2 \\ -\,\frac{8}{d}\,f\,OP^2R \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +\,\frac{4}{d^2}\,f^2\,O^2\,P^2 \\ -\,9\,f^2\,M^2\,N^4 \\ -\,36\,f^2\,MB\,N^4 \\ -\,36\,f^2\,R^2\,N^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Werden in dieser Gleichung die bekannten Größen in Zahlen gegeben, so wird es doch zu mühsam seyn, aus denselben x und hieraus den Winkel a zu suchen; deswegen soll in der Folge ein Verfahren angegeben werden, wodurch sich aus diesen gegebenen Größen der dazu gehörige Winkel a leichter finden läßt.