Einige Trigonometrische und andere Sätze, die in Rechnungen häufig gebraucht werden.

I. Alle trigonometrische Linien, als Sinus, Tangenten, Secanten, u. s. w. sind in den Sinustafeln für den Sinus totus = 10000000 zu finden. Es ist aber bey vielen Rechnungen vortheilhafft, den Sinus totus = 1 zu setzen. Alsdenn werden bekantlich alle Sinus, und Cosinus, Brüche. Will man nun die trigonometrischen Linien für den Sinus totus = 1 finden, so darf man nur diejenigen, die in den Tafeln angegeben sind, mit 10000000 dividiren, d. h. von der rechten Hand gegen die Lincke 7 Decimalstellen abschneiden. Z. E. in den Tafeln ist für den Sin. tot. = 10000000, der Sinus von 28° = 4694716; der Sinus von 28° für den Sinus tot. = 1 würde also folgende Zahl 0, 4694716 seyn.

II. Da nun in den Tafeln der Logarithme des Sinus totus = 10 gesetzt wird, so erhellet aus (I) daß man von dem Tabellen-Logarithmen einer gewissen trigonometrischen Linie nur die Zahl 10 abziehen dürfe, um den Logarithmen dieser trigonom. Linie für den Sinus totus = 1 zu erhalten. Z. E. in den Tafeln ist log sin 28° = 9, 6716093; also wäre log sin 28° = 9, 6716093 — 10 = — 0, 3283907, wenn der Sin. tot = 1 angenommen würde.

Gewöhnlich zieht man aber die 10 nicht würklich ab, sondern setzt sie nur mit dem negativen Zeichen hinter den Tabellarlogarithmen, oder man schreibt auch in dem gegebenen Beyspiele 0, 6716093 — 1.

Umgekehrt, hat man den Log. einer trigonometrischen Linie für den sin tot = 1, so addirt man 10 hinzu, um den Logarithmen derselben für den sin tot = 10000000 zu bekommen.

III. Wenn der Halbmesser eines Kreises = 1 ist, so ist bekantermaasen die halbe Peripherie = 3, 141592 .... der Logarithme dieser Zahl ist = 0, 4971498.

IV. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, ein gewisser Bogen in Theilen des Halbmessers gegeben ist, so kann man die Anzahl von Secunden finden, die dieser Bogen hält, wenn man ihn mit der Zahl 206264 multipliciret.

Denn

Denn die halbe Peripherie eines Kreises hält 180 . 60 . 60 oder 648000 Secunden. Wenn man nun den gegebenen Bogen in Theilen des Halbmessers = a, und die diesem Bogen zugehörige Anzahl von Secunden = x nennt, so schliest man nach der Regel de Tri

$$3,141592 : a = 648000'' : x''$$

also $x = \frac{648000}{3,141592} . a$; Dividirt man nun 648000 würcklich mit 3, 141592, so kömmt 206264 zum Quotienten, und es ist daher

$$x = 206264 . a$$

V. Auch ist log 206264 = log 648000 — log 3, 141592 = 5, 8115750 — 0, 4971498 (III) = 5, 3144252 folglich log x = 5, 3144252 + log a

Ex. Wie viel Secunden hält ein Bogen der = 0, 3246 des Halbmessers ist. Also ist hier a = 0, 3246 Mithin

$$\begin{array}{ll} \log a = & 3,5113485 - 4 \\ \text{addirt} & 5,3144252 \\ \hline \log x = & 4,8257737 \end{array}$$

Daher

$$x = 66954,3\,\text{Sec} = 18^\circ 35'.53'',3$$

VI. Eben diese gefundenen 18°. 35'. 53'', 3 würden auch das Maaß des Winkels seyn, der dem Bogen a am Mittelpunkte des Kreises zugehörte.

VII. Wenn in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$ ist, α einen sehr kleinen Bogen, z. E. nur von einigen wenigen Minuten bedeutet, so kan man so wohl den Sinus, als auch die Tangente dieses kleinen Bogens, ohne merklichen Irrthum diesem kleinen Bogen selbst gleich setzen, oder es ist alsdann

$$\sin \alpha = \alpha$$
$$\tan \alpha = \alpha$$

das will sagen, so viel Theilgen des Halbmessers 1, auf den Sinus oder die Tangente dieses Bogens gehen, eben so viel dergleichen Theilgen, wird auch ohne mercklichen Fehler der Bogen selbst halten.

In Secunden wäre aber dieser Bogen $= 206264. \alpha$ nach IV.

VIII. Es ist bekanntermaaßen $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$: Nimmt man nun für x einen sehr kleinen Bruch an, so ist x^2 in Vergleichung mit $1 + 2x$ als unendlich gering anzusehen, und man kan daher in solchem Falle blos setzen $(1 + x)^2 = 1 + 2x$.

Man setze $2x = m$ also $x = \frac{1}{2} m$ so ist $(1 + \frac{1}{2} m)^2 = 1 + m$

Daher $\sqrt{(1 + m)} = 1 + \frac{1}{2} m$

Wenn also m einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so ist ohne merklichen Fehler

$$\sqrt{(1 + m)} = 1 + \frac{1}{2} m$$

IX. Ist m negativ so wird

$$\sqrt{(1 - m)} = 1 - \tfrac{1}{2} m$$

Anmerk. Völlig genau läßt sich $\sqrt{(1+m)}$, was auch m ist, durch eine unendliche Reihe ausdrücken und es ist

$$\sqrt{(1+m)} = 1 + \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{8}m^2 + \tfrac{1}{16}m^3 - \tfrac{5}{128}m^4 \&c.$$

S. Hr. H. Kästners Anal. d. Unendl. im 50 §. der neusten Ausgabe 1770.

X. Da $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$ ist, wenn man den Sinum totum $= 1$ setzet, so wird unter der Voraussetzung, daß α sehr klein ist, $\sin\alpha = \alpha$ (VII) Mithin

$$\cos\alpha = \sqrt{(1 - \alpha^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ (IX)}$$

XI. Einfache trigonometrische Formeln.

Wenn man sin tot $= 1$ setzet, und β einen gewissen Winkel oder Bogen bedeutet, so ist bekanntermaaßen

1) $\sin\beta^2 = 1 - \cos\beta^2$; oder $\sin\beta = \sqrt{(1 - \cos\beta^2)}$

2) $\cos\beta = \sqrt{(1 - \sin\beta^2)}$

3) $\tang\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

4) $\cot\beta = \dfrac{1}{\tang\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

5) $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{(1 + \tan\beta^2)}$

6) $\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{(1 + \cot\beta^2)}$

XII. Zusammengesetzte trigonom. Formeln.

1) $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta$
2) $\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta$
3) $\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$
4) $\cos(\beta - \gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$
5) $\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}$
6) $\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta\tan\gamma}$

Diese Sätze findet z. E. in Hr. H. Kästners Trigonometrie 19 Satz u. s. f.

Es folgen aber aus diesen 6 Lehrsätzen, die außerordentlich fruchtbar sind, noch sehr viel andere, die insgesamt von häufiger Anwendung sind, und einem Geometer zur Erfindung neuer Wahrheiten, und zur Erweiterung seiner Wissenschafft dienen. Wir wollen aus den angeführten 6 Formeln noch folgende herleiten.

XIII. Wenn man in XII, die Formeln (1. 2) zusammen addirt oder sie von einander abziehet, so wird

7)

7) $\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) = 2\sin\beta\cos\gamma$

8) $\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma) = 2\sin\gamma\cos\beta$

Eben dieses mit den Formeln 3, 4, vorgenommen, giebt

9) $\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma$

10) $\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 2\sin\beta\sin\gamma$

Wenn man $\beta+\gamma=\varphi$; $\beta-\gamma=\psi$ mithin $\beta = \frac{\varphi+\psi}{2}$; $\gamma = \frac{\varphi-\psi}{2}$ setzt, so verwandeln sich die Formeln 7, 8, 9, 10, in folgende

11) $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$

12) $\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right).\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$

13) $\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$

14) $\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$

Aus 11, 12 wird

15) $$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} . \frac{\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}$$

 =tang

$$= \tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \cot\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Aus 13, 14, wird eben so

$$16)\ \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\cos\psi + \cos\varphi} = \tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) . \tan\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Und wenn man in 11, 12, statt ψ setzet $90° - \psi$ so wird

$$17)\ \sin\varphi + \cos\psi = 2 \sin\left(\frac{\varphi - \psi + 90}{2}\right) . \cos\left(\frac{\varphi + \psi - 90°}{2}\right)$$

$$18)\ \sin\varphi - \cos\psi = 2 \cos\left(\frac{\varphi - \psi + 90°}{2}\right) . \sin\left(\frac{\varphi + \psi - 90°}{2}\right)$$

Aus 11. 13, wird

$$19)\ \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) =$$

cos

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi} \; (12.14)$$

Aus 12. 13. erhält man

$$20) \quad \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \text{tang}\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$$

Aus 1. 2, wird, $\gamma = \beta$ gesetzt,

21) $\sin 2\beta = 2 \sin\beta \cos\beta$

22) $\cos 2\beta = \cos\beta^2 - \sin\beta^2 = 2\cos\beta^2 - 1 = 1 - 2\sin\beta^2$

Aus (22) wird, wenn man statt 2β den Buchstaben φ setzt

$\cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - 1$. Mithin $1 + \cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$ und

$$23) \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$$

Eben so wird aus (22) wegen $\cos\varphi = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2$

$$24) \quad \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)}$$

Und wenn man in 23, 24 statt φ setzt $90^\circ - \varphi$ so wird

$$25) \quad \cos.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin\varphi}{2}\right)}$$

$$26)\ \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\varphi}{2}\right)}$$

Aus (20) wird, $\psi = 0$ gesetzt,

$$27)\ \tang \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ aus (19)}$$

$$28)\ \cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

Endlich wird aus (19.20) wenn man $90^\circ - \psi$ statt ψ setzt

$$29)\ \frac{\sin\varphi+\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \tang\left(\frac{\varphi-\psi+90^\circ}{2}\right)$$

$$30)\ \frac{\sin\varphi-\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi} = \tang\left(\frac{\varphi+\psi-90^\circ}{2}\right)$$

XIV. Dies sind zwar nicht alle, doch beyweiten die brauchbarsten trigonometrischen Formeln. Wenn es nöthig ist, so läßt sich aus ihnen noch eine grosse Menge anderer herleiten, die zwar nicht alle gleich brauchbar sind, von denen es aber gut ist, eine vollständige Samlung zu haben.

Nur muß man in einer solchen Samlung eine gewisse Ordnung halten, damit man weis, wo man jede Formel aufsuchen müsse. In dem

Falle ist es gut, die Formeln nach gewissen Gestalten zu ordnen, welches leicht wird geschehen können, da eine große Menge derselben einige Aehnlichkeit in Absicht ihres Ausdrucks untereinander haben. Ich habe mir eine solche Samlung verfertiget, die ziemlich vollständig ist, und mir wegen ihrer Einrichtung das Aufsuchen sehr erleichtert.

XV. Ohnerachtet ich die gewöhnliche trigonometrische Auflösung der Dreyecke, bey meinen Lesern zum voraus setzen muß, so können doch Fälle vorkommen, wo analytische Auflösungen theils brauchbarer theils bequemer sind. Ich gebe hier ein paar Formeln an, vermittelst derer man aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winckel: oder aus drey Seiten eines Dreyecks, sehr leicht die übrigen unbekannten Stücke desselben berechnen kan. Vorher muß ich aber folgendes beybringen.

XVI. 1. Wenn B und A ein paar Zahlen sind, und $A < B$ ist, so läßt sich $\surd\,(B^2 - A^2)$ durch die Sinustafeln berechnen, denn es ist

$$\surd\,(B^2 - A^2) = B\,\surd\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)$$

Da nun $A < B$ mithin $\frac{A^2}{B^2} < 1$ ist, so läßt sich, wenn die 1 den Sinum totum bedeutet, der Bruch $\frac{A}{B}$ allemahl als ein Sinus eines gewissen Winkels ansehen, den ich ψ nennen will. Man suche also einen Winkel, dessen Sinus $= \frac{A}{B}$ ist, so wird

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)} = \sqrt{(1 - \sin\psi^2)} = \cos\psi$$

Mithin

$$\sqrt{(B^2 - A^2)} = B \cos\psi$$

wo man sowohl $\sin\psi = \frac{A}{B}$ als auch $B \cos\psi$ durch Logarithmen berechnen kan.

2. Eben so läßt sich auch $\sqrt{(B^2 + A^2)}$ durch die Sinustafeln finden. Denn es ist

$$\sqrt{(B^2 + A^2)} = B\sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)}$$

Hier suche man also einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{A}{B}$ ist, oder man setze $\tang\psi = \frac{A}{B}$

so

so wird $\sec\psi = \sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)}$

Mithin $\sqrt{(B^2 + A^2)} = B \sec\psi$

Dieses zum vorausgesetzt so seyen

XVII. In dem Dreyecke DAF fig XXIII die Seiten $AD = a$, $AF = b$, der eingeschlossene Winkel $DAF = \varphi$

Man soll die dritte Seite $DF = c$ finden.

Aufl. Man fälle von D auf AF die Perpendiculär-Linie DC herab, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC, wenn man sin tot $= 1$ setzt,

$$AD : DC = 1 : \sin\varphi$$
$$AD : AC = 1 : \cos\varphi$$

Mithin $DC = AD \sin\varphi = a \sin\varphi$; $AC = a \cos\varphi$ Folglich $CF = AF - AC = b - a\cos\varphi$, daher in dem rechtwinklichten Dreyecke DCF; $DF^2 = DC^2 + CF^2$ oder

$$c^2 = a^2 \sin\varphi^2 + (b - a\cos\varphi)^2 =$$
$$a^2 (\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

aber $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$ (XI. 1) folglich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

XVIII. Diese Formel bestimmt aus den gegebenen Stücken a, b, φ, das Quadrat der dritten Seite c; um aber bey der Berechnung von

von c die Ausziehung der Quadratwurzel zu ersparen, so kan man folgende Einrichtung gebrauchen

Es ist auch $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab - 2\,ab - 2\,ab \cos\varphi$ oder

$$c^2 = (a+b)^2 - 2\,ab\,(1 + \cos\varphi)$$

aber $1 + \cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$, (XIII. 23) daher

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\,ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$c = \sqrt{\left((a+b)^2 - 4\,ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\right)}$$

diese Formel läßt sich nun mit der (XVI. 1) vergleichen, wenn das dortige B^2 hier $(a+b)^2$; und A^2 hier $4ab\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$ bedeuten läßt.

Mithin hat man $B = a+b$; $A = \sqrt{4ab}\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}$. Man suche also einen Winkel $= \psi$ dessen Sinus $= \dfrac{A}{B}$ oder hier $= \dfrac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{ab}}{a+b}$ ist so wird $c = B\cos\psi = (a+b)\cos\psi$

Will man alles durch Logarithmen rechnen, so wird erstlich

$$\log\sin\psi = \log 2 + \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) - \log(a+b)$$

und dann

$$\log c = \log(a+b) + \log\cos\psi$$

Ex. Es sey $a = 100$; $b = 87$, $\varphi = 30^\circ\, 18'$ so wird

log

$$\log 2 = 0,\ 3010300$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 9,\ 9846375 - 10 \text{ (nach II)}$$
$$\tfrac{1}{2}(\log a + \log b) = 1,\ 9697596$$

$$12,\ 2554271 - 10$$
$$\text{abgez.} \log(a+b) = 2,\ 2718416$$

giebt $\log \sin \psi = 9,\ 9835855 - 10$
folglich weil hier 9, 9835855 — 10 der Logarithme des Sinus vom Winkrl ψ ist, wenn sin tot = 1 gesetzt wird, so ist nach (II) 9, 9835855 der Logarithme von sin ψ für den gewöhnlichen sin tot = 10000000

Wenn man also in den Sinustafeln den nur genannten Logarithmen 9, 9835855 aufsuchet, so findet man dabey den Winkel $\psi = 74°. 20'. +$ Also

$$\log \cos \psi = 9,\ 4314286 - 10$$
$$\log (a+b) = 2,\ 2718416$$

$$\log\ c = 1,\ 7032702$$
daher $c = 60,\ 49$

Ich habe in diesem Exempel die Secunden in dem Winkel ψ weggelassen; Wollte man sie aber auch mitnehmen, so hätte man sich der gewöhnlichen Proportionaltheile bedienen müssen.

XIX. Es würden aber alsdann zwo Proportionen nöthig seyn, wenn man für die Secunden

den in dem Winkel ψ, den Logarithmen von cos ψ finden wollte. Nemlich 1) würde man vermittelst der Proportionaltheile die Secunden in dem Winkel ψ, und dann 2) vermittelst einer zwoten Proportion, für die gefundene Anzahl von Secunden, den log von cos ψ berechnen. Eigentlich braucht man aber den Winkel ψ nicht selbst, sondern blos dessen Cosinus, wenn man in XVIII die Seite c sucht. Es ist daher, um log cos ψ zu finden, nicht nöthig die Secunden in dem Winkel ψ erst würklich zu berechnen, sondern man kan kürzer so verfahren. Es ist aus den Sinustafeln

M) $\log \sin 74^\circ 20' = 9,\ 9835582$
N) $\log \sin \psi = \quad 9,\ 9835855$
O) $\log \sin 74^\circ 21' = 9,\ 9835936$

Um also die Secunden in dem Winkel ψ zu berechnen, würde man erstlich nach der gewöhnlichen Regel schliessen

$O - M : N - M = 60'' : x''$ da wäre folglich

$$x'' = \frac{N - M}{O - M}\ 60''$$

Nun ist aber ferner

P) $\log \cos 74^\circ 20' = 9,\ 4314286$
Q) $\log \cos 74^\circ 21' = 9,\ 4309776$

da also $\log \cos \psi = \log \cos (74^\circ 20' + x'')$ zwischen P und Q fallen muß, so setze man $\log \cos \psi$ =

$= P - y$ wo y den Proportionaltheil bedeutet, der denen x'' zugehöret. Um also y zu finden schliesse man

$$60'' : x'' = P - Q : y \text{ oder}$$

$$60'' : \frac{N - M}{O - M} \cdot 60'' = P - Q : y \text{ da würde also}$$

$$y = \frac{(P - Q)(N - M)}{O - M} \text{ Mithin}$$

$$O - M : N - M = P - Q : y$$

Also blos vermittelst dieser einzigen Proportion findet man sogleich den Proportionaltheil y, der in dem Cos ψ denen x'' zugehört, ohne daß es nöthig ist, durch eine besondere Proportion vorher die x'' selbst zu berechnen

Hier ist

$N - M = 0,0000273$
$O - M = 0,0000354$
$P - Q = 0,0004507$

Mithin die Proportion diese

$0,0000354 : 0,0000273 = 0,0004507 : y$
also $y = 0,0003475$

folglich $\log \cos \psi = P - y =$
$9,4314286 - 0,0003475$

oder

$\log \cos \psi = 9,4310811$

daß diese Rechnung weit leichter und bequemer ist, als wenn man erst würklich die x'', und dann hieraus den Proportionaltheil y berechnen wollte, wird man leicht einsehen. Ich habe es daher nicht undienlich erachtet, kürzlich diesen Rechnungsvortheil, der sich mit geringer Mühe auf ähnliche Fälle erstrecken läßt, hie beyzubringen.

XX. Aus der Formel XVII, nämlich

$$c^2 = a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2$$

folgt umgekehrt

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos \varphi$$

$$1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1 - \cos \varphi \text{ oder}$$

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} = 1 - \cos \varphi \text{ und}$$

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}=\frac{1-\cos\varphi}{2}=\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \text{ XIII.24}$$

Aber $c^2-(a-b)^2$ ist $=(c+a-b)(c-a+b)$

Es wird also $\sqrt{\frac{(c+a-b)\,(c-a+b)}{4ab}}=\sin\frac{1}{2}\varphi$

oder durch Logarithmen

$$\tfrac{1}{2}\log(c+a-b)+\tfrac{1}{2}\log(c-a+b)-$$
$$\tfrac{1}{2}(\log a+\log b+\log 4)=\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

diese Formel dienet, aus drey Seiten eines Dreyecks, oder aus a, b, c, den Winkel φ zu berechnen, der der Seite c gegenüber steht. Man muß aber zu dem Werthe, wodurch man $\log\sin\frac{1}{2}\varphi$ bekömt, noch 10 hinzu addiren, damit man $\log\sin\frac{1}{2}\varphi$ für den sin tot $=10000000$ erhalte (I)

Ex. Es sey $a=300$; $b=200$; $c=210$ so ist

$c+a-b=310$; $\frac{1}{2}\log(c+a-b)=1,2456808$

$c-a+b=110$; $\frac{1}{2}\log(c-a+b)=1,0206963$

addiret $10=10,0000000$

Summe $=12,2663771$

 abge-

$$\text{abgezogen}\ \tfrac{1}{2}(\log a+\log b+\log 4)=2,6901056$$

$$\text{giebt}\ \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi=9,5762715$$

Und durch Proportionaltheile $\frac{1}{2}\varphi=22^\circ.\ 8'.\ 39''$

folglich $\varphi=44^\circ.\ 17'\ 18''$

Es ist gar kein Zweifel, daß diese Rechnung, aus drey Seiten eines Dreyecks einen Winkel zu finden, weit kürzer und bequemer ist, als die gewöhnliche Regel, die in den gemeinen Elementen der Trigonometrie angegeben wird.

XXI. Aus XVII ist in dem Dreyecke DCF

$$\frac{CD}{CF}=\text{tang}\,F=\frac{a\sin\varphi}{b-a\cos\varphi}$$

und folglich

$$\cot F=\frac{1}{\text{tang}\,F}=\frac{b-a\cos\varphi}{a\sin\varphi}=\frac{b}{a\sin\varphi}-\cot\varphi$$

welche Formel dienet, aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks, oder aus den gegebenen a, b, φ, sogleich den Winkel F zu finden, der der Seite a gegenüber stehet. Hier kan man nun den Quotienten $\frac{b}{a\sin\varphi}$ durch Loga-

Logarithmen berechnen; cot φ hat man aber sogleich aus den Tafeln; Nur muß man von der zugehörigen Zahl, 7 Decimalstellen abschneiden, damit man, wie hier erfordert wird, cot φ für den Sinus totus = 1 bekomme (I).

Ex. Es sey $a = 100$; $b = 120$; $\varphi = 30°$ so ist

$$\log b = 2,0791712$$

abgezogen $\log a + \log \sin \varphi = 1,6989700$

läßt $\log \frac{b}{a \sin \varphi} = 0,3802112$

Mithin $\frac{b}{a \sin \varphi} = 2,4000000$

abgezogen $\cot \varphi = 1,7320508$

giebt $\cot F = 0,6679492$

und $F = 56° \; 15' +$

XXII. Es ist zu bemerken, daß wenn $\varphi > 90°$ ist, sowohl tang φ als auch cot φ negativ werden.

Es sey $\varphi = 90° + \alpha$ also um α größer als $90°$

so ist $\cot \varphi = \cot(90° + \alpha) = \frac{1}{\tang(90° + \alpha)} =$

$$\frac{1}{-\tang(90^\circ-\alpha)} = \frac{1}{-\cot\alpha} = -\tang\alpha.$$

Und alsdann in XXI

$$\cot F = \frac{b}{a\sin(90^\circ+\alpha)} + \tang\alpha$$

oder wegen $\sin(90^\circ+\alpha) = \sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$

$$\cot F = \frac{b}{a\cos\alpha} + \tang\alpha$$

XXIII. Wenn fig. XXIII von der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie AF eine Perpendiculärlinie DC herabgefället wird, so ist $DC^2 = AD^2 - AC^2$

Und eben so $DC^2 = DF^2 - CF^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$

Mithin

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - (AF - AC)^2$$

oder

$$AD^2 - AC^2 = DF^2 - AF^2 + 2AF.AC - AC^2$$

oder weil sich AC^2 auf beyden Seiten aufhebt, $AD^2 = DF^2 - AF^2 + 2AF.AC$

also AC =

$$AC = \frac{AD^2+AF^2-DF^2}{2\,AF}$$

Diese Formel bestimmt aus den 3 Seiten AD, AF, DF eines Dreyecks, das Stück AC der Grundlinie AF, welches von einer Perpendicularlinie DC, auf AF abgeschnitten wird.

Eben so wird das andere Stück CF=AF—AC

oder

$$CF = \frac{AF^2+FD^2-AD^2}{2\,AF}$$

Anwendungen dieser Formel werden sich in der Folge bey verschiedenen geometrischen Aufgaben zeigen.

XXIV. Die bisherigen Sätze habe ich kürzlich hie zum voraus schicken müssen, um mich in den folgenden Theilen dieser practischen Geometrie darauf beziehen zu können. Ich hielte es für nützlich, sie hier beysammen zu haben, weil ich sonst durch häufige Lehnsätze den ordentlichen Vortrag der practischen Lehren zu oft hätte unterbrechen müssen.

Statt der gewöhnlichen Lehrsätze aus der gemeinen Geometrie, die man oft den practischen Anleitungen zur Feldmeßkunst, voraus zu schicken pflegt, hielt ich das bisherige für fruchtbarer und nützlicher. Und was die gemeine Geometrie anbelangt, die muß ich bey meinen Lesern völlig zum voraussetzen.

Wer von der Elementargeometrie weiter nichts weiß, als die wenigen Lehrsätze, die man gewöhnlich ohne Beweis den Anleitungen zur practischen Geometrie vorauszuschicken pflegt, der wird nie im Feldmessen eine nur mittelmässige Kenntniß erlangen; eben so müssen einem Geometer auch die wichtigsten Sätze der Arithmetik, z. E. von Decimalbrüchen, Logarithmen u. s. w. zureichend bekannt, und geläufig seyn.

Anmerk. Wenn ich mich in der Folge auf die bisher beygebrachten trigonometrischen Sätze berufe, so wird dieses unter folgender Bezeichnung Trig. S. geschehen.

Die