Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Dorotheenst. Realschule.
Ostern 1882.

Die Inhaltsermittlung der Körper
aus ihren Projektionen.

Vom

Oberlehrer **Dr. Carl Gufserow.**

BERLIN.
Weidmannsche Buchhandlung.
1882.

BERL
17 (1882)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Inhaltsermittlung der Körper aus ihren Projektionen.

Häufig findet die diskursive Behandlung räumlicher Anschauungen — und nicht nur bei Anfängern — Schwierigkeiten, welche der Einfachheit des Unterrichtsstoffes nicht entsprechen, mithin auch nicht als sachgemäfs gelten können. Wenn nun auch zugegeben werden mufs, dafs die durch Überwindung solcher Schwierigkeiten erlangte Gewandtheit des Geistes ein an und für sich erstrebenswertes Ziel ist, so scheint es pädagogisch doch richtiger, dieselbe in angemessener Aufeinanderfolge überwinden zu lassen, als sie dem Schüler in gelegentlicher Häufung zu bieten. Ist also die Annahme gerechtfertigt, dafs dem Schüler die Beschreibung einer räumlichen Anschauung, trotzdem er letztere richtig erfafst hat, in stilistischer Beziehung zu schwer fallen kann, so wäre es unpädagogisch, dieses Kunststück von ihm zu verlangen. Die Beschreibung durch Anfertigung körperlicher Modelle zu ersetzen, ist nicht bei allen Schülern zu ermöglichen, und durch Vorzeigung solcher zur Unterstützung seines Vortrages wird der Lehrer häufig genug auch nur ein oberflächliches Verständnis erzielen, weil die Anschauung so mühelos sie für den Augenblick gewonnen ist, so schnell wieder zerrinnt, wenn das Modell aufser Sicht ist. Es erübrigt also nur noch die Hülfe einer durchdachten Zeichnung, zu deren Anfertigung die technische Geschicklichkeit des Schülers ausreicht, beziehentlich ausgebildet werden kann und soll, — d. h. die Verwendung nicht nur, wie gebräuchlich, von perspektivischen sondern auch von projektivischen Figuren beim Unterricht.

Es fehlt hier an Raum, um im Einzelnen zu untersuchen, in wie weit bei Vertrautheit des Schülers mit den Vorstellungen des Projizierens, des Grund-, Auf- und Seitenrisses durch Verwendung dieser Begriffe die Sätze über die Gerade und die Ebene, die Ecke und dergl. sich einfacher darstellen lassen; ich will mich daher auf die Inhaltsermittlung der Körper beschränken und nur noch kurz darauf hinweisen, dafs die Arbeit, aus den erforderlichen Daten die Projektionen einer räumlichen Vorstellung zu zeichnen, das selbständige Nachdenken des Schülers und die Vorstellungsfähigkeit desselben in hohem Mafse erfordert und anregt, also eine an sich fördernde Thätigkeit ist. Auch kann sie hinsichtlich ihrer Schwierigkeit durch passende Direktive des Lehrers leicht reduziert werden, so dafs sie in der Regel von den Schülern gern geleistet wird. Ferner ist die geistige Thätigkeit aus der fertigen Zeichnung leicht zu übersehen und kann diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch nicht geistlos nachgebildet werden, zumal wenn die Wahl der konkreten Maſse dem Schüler überlassen bleibt. Kann man die Seitenebene so zum Grundriſs stellen, daſs sie einer besonders wichtigen Ebene parallel ist, so hat man den nicht zu unterschätzenden Vorteil, daſs die Figuren, welche zur Erläuterung planimetrischer Betrachtung dienen, sich in wahrer Gröſse und in richtiger Beziehung zu dem Übrigen darstellen.

Die Inhaltsermittlung der Körper ist wohl der Teil der elementaren Mathematik, welcher einer systematischen Durchbildung am meisten entbehrt. Die Verwendung des Cavalerischen Satzes ist eine bestrittene, seine Vermeidung wird sehr umständlich. Aber auch abgesehen hiervon lassen viele Lehrbücher mehr das Bestreben erkennen, jeden einzelnen Körper so elementar oder auch so elegant wie möglich zu behandeln und so durch eine Reihe von Kunstgriffen eine Reihe von Resultaten losen Zusammenhangs zu erzielen, als das, dem Schüler diejenige Übung zu verschaffen, welche das Eindringen in eine consequent durchgeführte Methode gewährt. Ist dies der Grund, weshalb so oft auf höheren Lehranstalten dieses Gebiet verhältnismäſsig kurz behandelt wird, so läſst sich diese Vernachlässigung des geringeren Bildungswertes wegen vielleicht rechtfertigen, ist aber sehr bedauerlich. Denn gerade diese Disciplin bietet Beziehungen zum praktischen Leben, welche richtig benutzt manchen Schüler mathematischen Studien zuführen, der ihnen sonst — weil zu abstrakt — mehr oder weniger fern bleibt. Andererseits entbehrt der Schüler einer Fachschule, auf welcher dieses Gebiet als unumgänglicher Unterrichtsstoff eingehender behandelt werden muſs, hierbei derjenigen Schulung des Geistes, welcher von der Beschäftigung mit der Mathematik zu erwarten ist. Der in folgendem skizzierte Lehrgang entwickelt, von den wesentlichsten Eigenschaften der Körper ausgehend, nämlich, daſs sie allseitig umgrenzt und rücksichtlich ihres Inhalts von der Anordnung ihrer Teile unabhängig sind, für alle Körper dieselbe Regel der Inhaltsermittlung, gewährt also die zwiefache Übung, der Abstraktion des Allgemeinen aus den wesentlichen Eigenschaften des Besonderen, und des Subsumierens eines einzelnen Falles unter die allgemeine Regel. Die Schluſsergebnisse sind allerdings, selbst wo sie in neuem Gewande erscheinen, auf andere Weise auch abzuleiten. Doch scheint mir die hier befolgte so einfach und hinsichtlich der Allgemeingültigkeit ihrer Resultate so durchsichtig, daſs sie einer Darstellung nicht unwert sein dürfte, zumal da diese bei der Einfachheit des Stoffes kaum mehr als Andeutungen erfordert.

§ 1.

Wird ein ebenflächiger, überall konvexer, Körper in beliebiger Richtung auf eine Grundebene, welche im Allgemeinen den Körper nicht schneidet, parallel projiziert, so mögen die Projektionen derjenigen seiner Seiten, deren Punkte nur von solchen Geraden projiziert werden, welche nicht mehr als den einen Punkt mit dem Körper gemeinsam haben, als unter den andern liegend bezeichnet werden. Unter Beobachtung der Zeichenregel, daſs diese negativ, die andern positiv zu nehmen sind, hat man allgemein:

$$\Sigma P = 0 \tag{1}$$

wenn mit P der Flächeninhalt je einer Projektion der Seiten des Körpers bezeichnet wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unter jeder Seite des Körpers steht ein im allgemeinen schief abgeschnittenes Prisma, dessen Inhalt der Wert der Seite heifsen möge, welcher bei der Inhaltsermittlung des Körpers in Rechnung zu stellen ist. Werden diese Werte mit V bezeichnet und diejenigen mit negativen Projektionen als Grundfläche subtraktiv genommen, so hat man allgemein:

$$J = \Sigma V \tag{2}$$

wenn J den Inhalt des Körpers bezeichnet. Es läfst sich nun V für jede beliebige Figur folgendermafsen bestimmen.

§ 2.

I. Bei Normalprojektion hat man, wenn die Figur*) parallel der Grundebene ist, für ein Rechteck: $V = Ph$ d. h. den Rauminhalt eines geraden rechtwinkligen Parallelepipedons mit der Grundfläche P und der Höhe h.

Lehrsatz: Jedes rechtwinklige gerade Parallelepipedon wird durch eine Diagonalebene in zwei kongruente dreiseitige Prismen geteilt.

II. Für ein rechtwinkliges Dreieck (und somit für jedes Vieleck) parallel der Grundebene ist bei Normalprojektion: $V = Ph$.

Lehrsatz. Jedes schiefe Prisma ist einem geraden inhaltsgleich, welches zur Grundfläche den Normalschnitt durch die Seitenkanten des schiefen Prismas und zur Höhe die Seitenkante desselben hat.

Beweis: Ein Normalschnitt, welcher keine der Grundflächen des schiefen Prismas schneidet, teilt dieses in zwei Teile, welche zu einem geraden zusammengesetzt werden können. Ist ein Normalschnitt, welcher keine der Grundflächen schneidet, zu führen nicht möglich, so vervielfältige man das schiefe Prisma und setze es so oft (n mal) mit den kongruenten Grundflächen an einander bis der erste Fall vorliegt. Man erhält dann den Inhalt des n fachen Primas gleich dem Produkte ans dem Normalschnitt und der n fachen Seitenkante.

III. Für ein Parallelogramm, von welchem zwei Eckenhöhen h_1 und zwei h_2 über der Grundebene sind, ist bei beliebiger Projektionsrichtung: $V = \frac{1}{2} P (h_1 + h_2) = Ps$, wenn s die Mittelpunktshöhe des Parallelogramms über der Grundebene ist.

Der Wert des Parallelogramms wird dargestellt durch ein schiefes Prisma, dessen Grundflächen und dessen Normalschnitt Trapeze sind. Ist a die Länge der Parallelen im Parallelogramm, welche der Grundebene parallel sind, und b die Projektion ihres Abstandes von einander, so ist leicht zu zeigen, dafs der Flächeninhalt des Normalschnittes $\frac{1}{2} b (h_1 + h_2)$, der Rauminhalt des schiefen Prismas also $\frac{1}{2} ab (h_1 + h_2)$ oder, da $ab = P$, $V = \frac{1}{2} P (h_1 + h_2) = Ps$ ist.

IV. Für ein Parallelogramm mit beliebigen Eckenhöhen ist bei beliebiger Projektionsrichtung $V = Ps$, wenn s die Höhe seines Mittelpunktes ist.

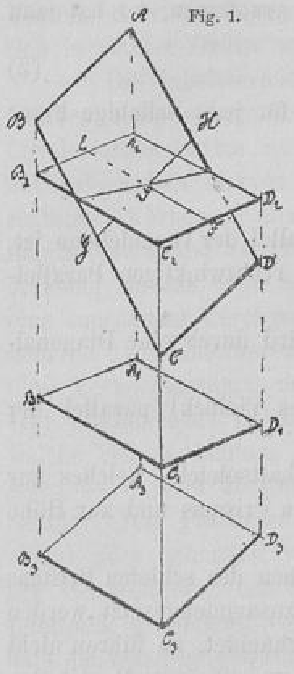
---

*) Es sei P stets die Projektion einer Figur F, und h oder h_1, h_2 u. s. w., ebenso s, s_1, s_2 u. s. w. Höhen über der Grundebene.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Ist (Fig. 1) ABCD das Parallelogramm, S sein Mittelpunkt mit der Höhe s und $A_1B_1C_1D_1$ die Projektion, so lege man durch S eine Ebene parallel der Grundebene, welche die Projizierenden in $A_2B_2C_2D_2$ schneidet. Ist nun EF eine Mittelparallele in $A_2B_2C_2D_2$ und GH eine in ABCD und beide so gewählt, dafs sie nicht in einer und derselben projizierenden Ebene liegen, ist ferner $A_3B_3C_3D_3$ die gemeinschaftliche Projektion der Parallelogramme auf eine Ebene, welche parallel EF und GH ist, so haben ABCD und $A_2B_2C_2D_2$ in Bezug auf die Grundebene $A_3B_3C_3D_3$ gleichen Werte nach III. Wird von diesen beiden Werten, wenn die Ebene $A_1B_1C_1D_1$ zwischen $A_3B_3C_3D_3$ einerseits und den beiden Parallelogrammen andrerseits liegt, der Wert von $A_1B_1C_1D_1$ in Bezug auf die neue Grundebene $A_3B_3C_3D_3$ abgezogen, so folgt, dafs ABCD und $A_2B_2C_2D_2$ gleiche Werte auch in Bezug auf die Grundebene $A_1B_1C_1D_1$ haben, d. h. $V = Ps$.

Fig. 1.



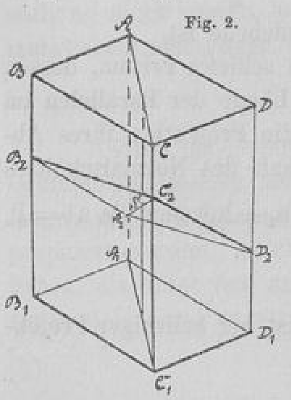
Insoweit nun eine Figur (unter der erforderlichen Grenzbetrachtung) in Parallelogramme geteilt werden kann, ist für sie:

$$V = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots$$

wenn P_1, P_2, P_3 u. s. w. die Projektionen der Parallelogramme sind, in welche die Figur geteilt wird, und s_1, s_2, s_3 u. s. w. die Mittelpunktshöhen dieser Parallelogramme über der Grundebene. Setzt man hierfür $V = Ps$, wo P die Projektion der ganzen Figur ist, so wird s die Schwerpunktshöhe von F und $J = \Sigma Ps$.

Ehe ich zeige, wie sich diese Entwicklung für den Unterricht möglichst einfach gestaltet, und wie der Schwerpunktsbegriff als ein rein mathematischer in die Rechnung einzuführen ist, will ich auf das theoretisch wichtige Resultat hinweisen, welches hieraus ohne Benutzung algebraischer Beziehungen folgt, dafs nämlich symmetrische Körper raumgleich sind.

Fig. 2.



Ist S in dem geraden Parallelepipedon mit den Grundflächen ABCD und $A_1B_1C_1D_1$ und dem Rauminhalte J (Fig. 2) der Mittelpunkt (die Mitte der Schwerkante), so ist das schief abgeschnittene Parallelepipedon $A_2B_2C_2D_2\,A_1B_1C_1D_1 = \frac{1}{2}J$. Das dreiseitige Prisma $ABC\,A_1B_1C_1$ ist aber ebenfalls gleich $\frac{1}{2}J$, also: $ABC\,A_2B_2C_2 = A_2C_2D_2\,A_1C_1D_1$. Beide schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismen sind aber symmetrische Körper. Dies genügt, um unter Anwendung von (2) die Inhaltsgleichheit je zweier zu einer Grundebene symmetrischen Körper zu zeigen, wenn ihre Seiten in Dreiecke zerlegt werden.

Für den Unterricht wird man den vorbezeichneten Lehrgang wohl etwas elementarer darstellen und vielleicht folgendermafsen verfahren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach III gehe man über auf ein Dreieck, dessen eine Transversale parallel der Grundebene in der Höhe s über dieser liegt. Man erhält: $V = P \cdot s$ durch folgende Betrachtung. Ist ABC das Dreieck (F), BD die der Grundebene parallele Transversale, so teile man das Dreieck in Streifen parallel zu AC und wähle deren Breite so gering, dafs sie als Parallelogramme F_1, F_2 u. s. w. betrachtet werden können, deren kurze Seiten der Grundebene parallel sind. Unter der erforderlichen Grenzbetrachtung setze man:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots\cdots = F \text{ und ebenso}$$
$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots = P,$$

man hat dann, da die Mittelpunkte jener Parallelogramme alle auf der Transversale BD liegen:

$$V = P_1 s + P_2 s + P_3 s + \cdots\cdots = Ps.$$

Für jedes Dreieck bei beliebiger Projektionsrichtung ist:

$$V = P \cdot s = P \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right),$$

wenn S der Durchschnittspunkt der Transversalen und s seine Höhe über der Grundebene ist, h_1, h_2 und h_3 dagegen die Eckenhöhen des Dreiecks sind. Beweis wie IV. Man wähle zwei Transversalen, welche nicht von korrespondierenden Ecken gezogen sind. Hiermit ist der Rauminhalt einer Pyramide ohne Hülfe algebraischer Beziehungen ermittelt.

Werden nun die Seiten eines Körpers — durch Diagonalen, um die Eckenhöhen nicht zu vermehren — in Dreiecke geteilt, so hat man allgemein:

$$J = \frac{1}{3} \Sigma P (h_1 + h_2 + h_3), \tag{3a}$$

kann also den Inhalt eines jeden ebenflächigen Körpers, von dem Grund- Auf- und Seitenrifs oder, was dasselbe ist, die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken bekannt sind, ermitteln.

Für Aufmessungen ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Höhenbestimmung der Ecken des Körpers und die Ermittlung der Projektionen von Dreiecken, deren Seiten direkt gemessen werden können.

Wird normal projiziert, so ist für diese Ermittlung nur die Kenntnis des Pythagoreischen Lehrsatzes und der Formel für den Inhalt eines Dreieckes aus seinen drei Seiten erforderlich.

§ 3.

Heifst der Durchschnittspunkt der Transversalen im Dreieck der Schwerpunkt desselben, so heifse s die Höhe des Schwerpunktes eines Vieleckes F über der Grundebene, wenn die Gleichung:

$$Fs = F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3 + \cdots\cdots$$

erfüllt ist, wo F_1, F_2 und F_3 u. s. w. Dreiecke, in welche F geteilt ist, und s_1, s_2, s_3 u. s. w. ihre Schwerpunktshöhen sind.

Ein Punkt, dessen Höhen über drei Grundebenen in dieser Weise bestimmt sind, heifst der Schwerpunkt der Figur F. (Dafs F_1, F_2, F_3 u. s. w. nicht notwendiger Weise Dreiecke sein müssen, läfst sich leicht zeigen).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist F ein Dreieck, so ist die Projektion seines Schwerpunktes (S) auch der Schwerpunkt (S_1) seiner Projektion, und ist σ die Höhe von S_1 über der Ebene von F, so ist: $F\sigma = Ps$, da beide den Inhalt desselben Körpers ausdrücken.

Werden nun mehrere Dreiecke in derselben Ebene auf dieselbe Grundebene in gleicher Richtung projiziert, so hat man:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{\sigma_1}{s_1}, \quad \frac{P_2}{F_2} = \frac{\sigma_2}{s_2} \text{ u. s. w.}$$

Aus ähnlichen Dreiecken läfst sich aber leicht zeigen, dafs $\frac{\sigma_1}{s_1} = \frac{\sigma_2}{s_2}$ u. s. w. ist, so dafs, wenn c den Wert dieses Bruches bezeichnet:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_2}{F_2} = \frac{P_3}{F_3} = \cdot = \cdot = c \text{ ist, oder auch:}$$

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots} = \frac{P}{F} = c,$$

wo F ein Vieleck ist, zusammengesetzt aus den Dreiecken F_1, F_2, F_3 u. s. w. und P seine Projektion. Der Wert dieses Vielecks ist nun die Summe der Werte der einzelnen Dreiecke, mithin:

$$V = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots\cdots \text{ oder}$$
$$V = c\,(F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3 + \cdots\cdots) = c \cdot F \cdot s = Ps,$$

also auch:

(3b) $$J = \Sigma Ps,$$

wenn mit P die Projektionen der einzelnen Seiten des Körpers und mit s die Schwerpunktshöhen dieser Seiten über der Grundebene bezeichnet werden.

Lehrsatz*): Die Flächeninhalte von Figur und Projektion verhalten sich wie ihre gegenseitigen Schwerpunktshöhen d. i. $\frac{P}{F} = \frac{\sigma}{s}$, wenn σ die Schwerpunktshöhe von P über F ist.

Ps und $F\sigma$ drücken beide den Inhalt desselben Körpers aus.

Es ist also auch $\frac{\sigma}{s} = c$, da $\frac{P}{F} = c$ ist, d. h. der Schwerpunkt der Projektion liegt in derselben Höhe über der Ebene der Figur, wie die Projektion ihres Schwerpunktes. Ist nämlich x die Höhe dieser Projektion über der Ebene der Figur, so mufs $\frac{x}{s} = c$ sein, aus demselben Grunde wie $\frac{\sigma_1}{s_1} = \frac{\sigma_2}{s_2} = \cdots c$ ist.

Dafs beide Punkte zusammenfallen, ist für die Verwendung des Schwerpunktsbegriffes als eines r e i n   m a t h e m a t i s c h e n zu wichtig, als dafs ich den Beweis nicht wenigstens andeuten sollte. Ist F in die beiden Teile F_1 und F_2 geteilt, so dafs die Gleichung besteht $Fs = F_1 s_1 + F_2 s_2$ und sind S, S_1, S_2 die drei Schwerpunkte, welche

---

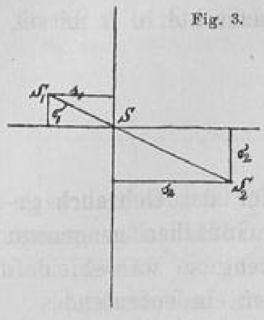
*) Anwendung. Man projiziere eine Ellipse normal auf eine Grundebene, welche sie im Endpunkt der grofsen Achse tangiert, so dafs die Projektion ein Kreis mit dem Radius b wird. Dann ist:

$$F = P\frac{s}{\sigma} = b^2 \cdot \pi \cdot \frac{s}{\sigma} \text{ und (aus ähnlichen Dreiecken) } \frac{s}{\sigma} = \frac{a}{b}, \text{ also } F = ab\pi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in Betracht kommen, so mufs S auf der Verbindungslinie von S_1 und S_2 liegen. Zum Beweise wähle man F als erste Grundebene, die beiden andern senkrecht zu einander und zu ihr, und zwar durch den Punkt S gehend und diesen als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten. Es ist dann $F_1 s_1 = F_2 s_2$ und $F_1 \sigma_1 = F_2 \sigma_2$, wenn s_1 und s_2 die Schwerpunktshöhen von F_1 und F_2 über der zweiten, σ_1 und σ_2 die über der dritten Grundebene sind (s_1, s_2 und σ_1, σ_2 sind absolut genommen).

Fig. 3.



Man hat im Grundrifs die Fig. 3 und erkennt, da $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(= \frac{F_2}{F_1} \right)$ ist, die Richtigkeit der Behauptung. Hiernach läfst sich der Schwerpunkt einer jeden Figur durch lineare Konstruktionen bestimmen, welche, in ihren Projektionen verfolgt, erkennen lassen, dafs die Projektion des Schwerpunkts der Schwerpunkt der Projektion ist*).

§ 4.

Die Anwendung der Gleichungen (3a) und (3b) gestaltet sich nun äufserst einfach.

Prisma. Wird die Deckfläche (D) parallel mit den Seitenkanten auf die Grundfläche (G) projiziert, so folgt:

$$J = G s \text{ oder } J = G h,$$

je nachdem das Prisma schief abgeschnitten ist oder nicht.

Pyramide. Man projiziere (am einfachsten) die Spitze so auf die Grundfläche, dafs sie in diese fällt, so hat man:

$$J = \frac{G \cdot h}{3}.$$

Prismatoid. Liegen die Ecken eines Körpers teils auf einer Ebene (D) teils auf einer andern (G), so hat man ein Prismatoid, wenn D ‖ G ist.

Man unterscheide unter den Seitenflächen, Oberdreiecke d. h. solche, welche eine Deckkante und Unterdreiecke d. h. solche, welche eine Grundkante zur Seite haben, und projiziere die Deckfläche in beliebiger Richtung auf die Grundfläche, so folgt:

$$J = \frac{h}{3}(3D + 2O + U), \tag{4a}$$

wenn unter Beobachtung der Zeichenregel O die Summe der Projektionen der Oberdreiecke und U die der Unterdreiecke bezeichnet.

Mit Hülfe der Gleichung (1), welche die Gestalt $D + O + U = G$ annimmt, läfst sich (4a) in folgende Formen umschreiben:

$$J = \frac{h}{3}(2D + G + O) \tag{4b}$$

$$J = \frac{h}{3}(2G + D - U) \tag{4c}$$

*) Vergl. „Der Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen." Vom Oberlehrer Dr. Flohr. Jahresbericht der Dorotheenstädtischen Realschule. Berlin. 1869. Seite 7.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$J = \frac{h}{3}(3\,G - 2\,U - O), \tag{4d}$$

welche man auch erhält, wenn man das Prismatoid umgekehrt betrachtet d. h. D mit G, O mit — U und U mit — O vertauscht.

Eine Unterform ist noch aus (4b) und (4c):

$$J = \frac{h}{6}(3\,G + 3\,D + O - U) \tag{4e}$$

abzuleiten. Im Allgemeinen erweist sich die Formel (4b) als die für den Gebrauch geeignetste, besonders wenn als Deckfläche diejenige der beiden Grundflächen genommen wird, welche weniger Ecken hat. Kann man die Projektionsrichtung so wählen, dafs negative Werte verschwinden, so vereinfacht dies die Rechnung um ein bedeutendes.

Bei einem Keile projiziere man die Schneide parallel einer Seitenkante. Ist sie, wie gewöhnlich, z. B. die First bei einem Walmdach parallel einer Grundkante, so fällt sie in diese und es ergiebt sich nur ein (positives) Oberdreieck.

Bei einem Ponton projiziere man ebenfalls die Deckfläche parallel einer Seitenkante und hat zwei (positive) Oberdreiecke, deren Flächeninhalte sich leicht ermitteln lassen.

Man sieht hierbei, dafs ein Prismatoid seinen Rauminhalt nicht ändert, wenn die Deckfläche in sich ohne Drehung verschoben wird, oder auch: Prismatoide mit gleicher Höhe sind raumgleich, wenn sie kongruente Projektionen haben.

Für die abgestumpfte Pyramide erhält man, wenn die Deckfläche in die Grundfläche projiziert wird, zu $O + U = G - D$ noch $\frac{U}{O} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{D}}$ und hieraus die gebräuchlichen Formeln.

Um die Vorteile zu zeigen, welche die freie Verfügung über die Projektionsrichtung gewährt, gestatte ich mir noch eine praktische Anwendung.

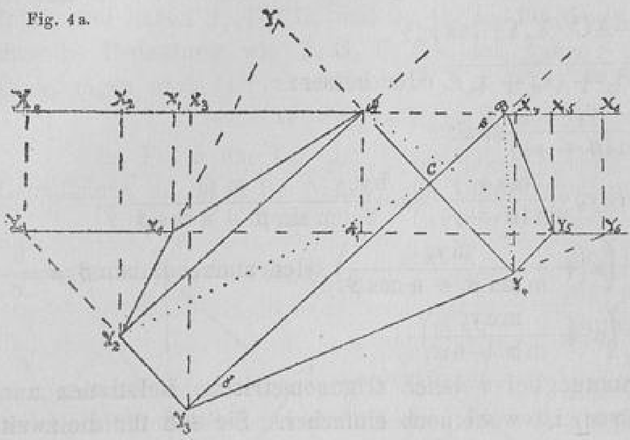
Bei Wegüberführungen über Eisenbahndämme od. dergl. ergeben sich häufig, als Rampen, Prismatoide von solcher Form, dafs ihr Rauminhalt nach den bisher bekannten Formeln zu bestimmen nicht möglich war, weil die für diese erforderlichen Daten nicht gemessen werden können.

Es seien Fig. 4a und Fig. 4b Grundrisse solcher Rampen. Von dem Damm ist nur eine Seitenböschung dargestellt, und zwar ist X_0X_6 der obere Rand Y_0Y_6 der untere derselben. Die Deckfläche des Prismatoids ist das rechtwinklige Dreieck ABC in gleicher Höhe h wie der Damm, parallel der horizontalen Grundfläche $Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5$ in Fig. 4a, $Y_1Y_2Y_3Y_6$ in Fig. 4b. Das Dreieck ABC ist durch den Winkel $ABC = \beta$, unter welchem der Weg den Damm schneidet und die Breite $AC = b$ dieses Weges gegeben. Das Rechteck ACY_2Y_3 ist der schiefe Teil des letzteren. Ist seine Steigung $1 : m$ und die der Böschungen $1 : n$ gegeben, so hat man zur Konstruktion des Grundrisses in beiden Figuren: $AB = c = \frac{b}{\sin\beta}$, $BC = a = b \cot g\,\beta$, $AY_2 = mh$, $YA = CY_4 = AA_1 = nh$, und wenn Winkel $BY_3Y_6 = \gamma$ ist, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{n}{m}$. (Eigentlich müfste, wenn die Böschung,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

z. B. $\triangle CY_3Y_4$ die Steigung 1 : n haben sollte, ein Lot von C auf $Y_3Y_4 = nh$ und $\sin \gamma = \frac{n}{m}$ sein. Doch ist die angewendete Bezeichnung die in der Praxis gebräuchliche.)

Fig. 4 a.



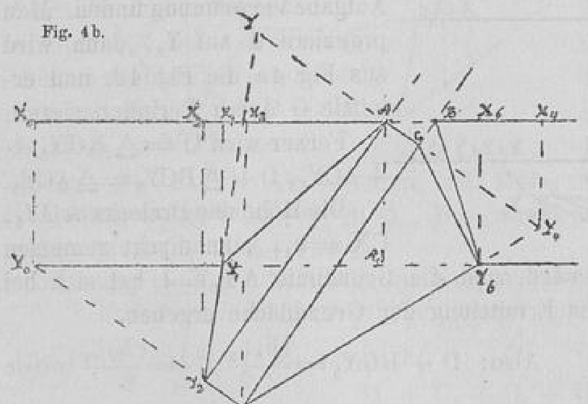
Es sind nun folgende zwei Aufgaben zu lösen:

1) Aus der gegebenen Steigung des Weges und der Böschungen ist die Lage der Ecken des Prismatoids bekannt, es soll der Rauminhalt desselben berechnet worden.

2) Aus Messungen an der fertigen Rampe soll ihr Rauminhalt ermittelt werden.

1) Die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte Y_1, Y_2 u. s. w. sind x_1, x_2 u. s. w. und y_1, y_2 u. s. w., wenn der u n t e r e Rand des Dammes als Abscissenachse und A_1 (die rechtwinklige Projektion des Punktes A) als Anfangspunkt genommen wird.

Fig. 4 b.



Wählt man zur Inhaltsermittlung für den in Fig. 4 a dargestellten Fall die Normalprojektion, so ist:

$$D = \frac{ab}{2}$$

$$G = \triangle Y_0Y_3Y_6 - \triangle Y_0Y_2Y_1 - \triangle Y_4Y_5Y_6$$

d. i.

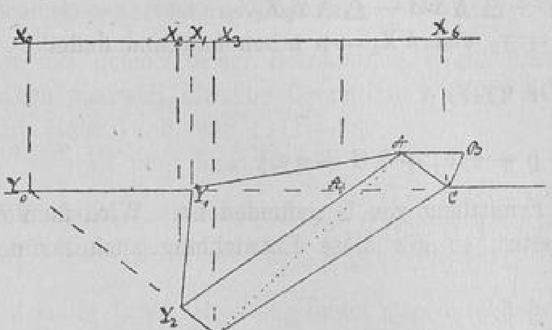
$$G = \frac{1}{2}\left[(x_0 + x_6)\, y_3 - (x_0 - x_1)\, y_2 - (x_6 - x_5)\, y_4\right]$$

$$O = \triangle BY_4C + \triangle AY_2C - \triangle AY_5B$$

d. i.

$$O = \frac{h}{2}\,(an + bm - cn).$$

Fig. 4 c.



Für den Fall in Fig. 4 b macht bei Normalprojektion das Dreieck BCY_6 einige Schwierigkeit; deshalb wähle man eine Projektion, bei welcher es verschwindet d. h. man projiziere C auf Y_6. Es ist dann Fig. 4 c:

$$D = \frac{ab}{2}$$

$$G = \triangle Y_0Y_3C - \triangle Y_0Y_2Y_1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. i.

$$G = \frac{1}{2}\left[(x_0 + x_6)\,y_3 - (x_0 - x_1)\,y_2\right]$$

$$O = \triangle\, AY_3C - \triangle\, ABC.$$

$$\triangle\, AY_3C = \frac{1}{2}\, AC \cdot Y_3C \cdot \cos\gamma$$

$$Y_3C = \sqrt{y^2_3 + (x_3 + x_6)^2} \text{ oder besser:}$$

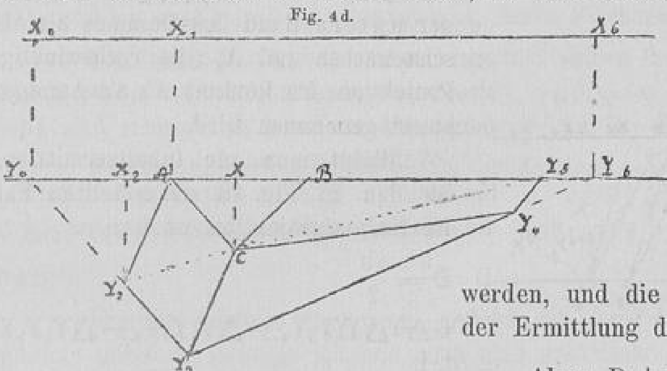
$$Y_3C = \frac{y_3}{\sin(\beta - \gamma)} \text{ also:}$$

$$\triangle\, AY_3C = \frac{1}{2}\, b y_3 \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{b y_3}{2} \frac{m}{m \sin\beta - n \cos\beta}$$

mithin: $$O = \frac{b}{2}\left(a + \frac{m y_3}{m \sin\beta - n \cos\beta}\right)$$ oder auch, da $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$ ist: $$O = \frac{b}{2}\left(a + \frac{m c y_3}{m b - n a}\right).$$

Eine andere Projektionsrichtung, bei welcher trigonometrische Relationen auch bei dem zweiten Falle vermieden wären, ist wohl noch einfacher. Sie soll für die zweite Aufgabe Verwendung finden. Man projiziere A auf Y_1, dann wird aus Fig. 4a die Fig. 4d, und ermittle G durch Peripheriesieren.

Fig. 4d.



Ferner wird $O = \triangle\, BCY_5 + ACY_2$, $D + \triangle\, BCY_5 = \triangle\, ACY_5$. Die Höhe des Dreiecks ACY_5, $CX = h_1$, kann direkt gemessen werden, und die Grundlinie $AY_5 = l$ hat sich bei der Ermittlung der Grundfläche ergeben.

Also: $D + BCY_5 = \frac{l h_1}{2}$, $D = \frac{c h_1}{2}$, wo c direkt zu messen ist.

$$\triangle\, ACY_2 = X_2XCY_2 - \triangle\, AXC - \triangle\, AY_2X_2.$$

Man messe $AX = q$, während man $X_2Y_2 = y_2$ und $AX_2 = p$ schon hat, und findet:

$$\triangle\, ACY_2 = \frac{1}{2}(p h_1 + q y_2)$$

mithin: $$J = \frac{h}{6}\left[(l + p + c)\, h_1 + 2\, G + q y_2\right].$$

Man beachte, dafs $l + p = X_2Y_5$ bei der Ermittlung von G gefunden ist. Wird im Vorhergehenden Y_6 für Y_5 also $AY_6 = l$ gesetzt, so gilt diese Entwicklung auch für den Fall der Fig. 4b.

§ 5.

Wird ein Prismatoid parallel zu der Grundfläche durch eine Ebene geschnitten, so sind beide Teile ebenfalls Prismatoide. Die Schnittkanten sind in den Oberdreiecken parallel den Deckkanten, in den Unterdreiecken parallel den Grundkanten. Die Seitenkanten werden in demselben Verhältnis geteilt wie die Höhe. Dasselbe gilt auch von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

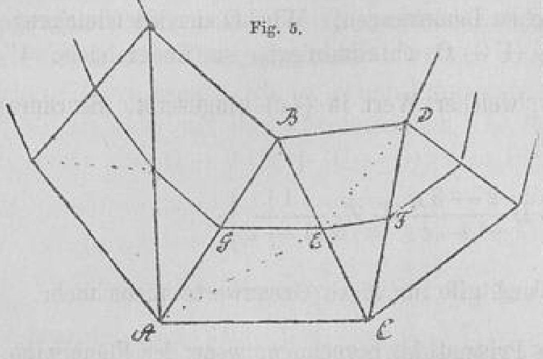
der Projektion, und es läfst sich aus dieser der Flächeninhalt (Z) eines Schnittes in jeder beliebigen Höhe zh, wo z ein echter Bruch ist, berechnen.

Ist $h_1 = zh$ die Höhe des unteren, $h_2 = (1 - z)\,h$ die Höhe des oberen Prismatoids, und haben J_1, O_1, U_1 und J_2, O_2, U_2 für das untere beziehentlich obere Prismatoid dieselbe Bedeutung wie J, O, U für das ganze, so hat man die übereinstimmenden Gleichungen nach (1):

$$G - O_1 - U_1 = Z \text{ und } D + O_2 + U_2 = Z.$$

Ist Fig. 5 ein Teil der Projektion des Prismatoids, BD eine Deckkante, AC eine Grundkante, so ist z. B. $\triangle$ AEC ein Unterdreieck im untern Prismatoid, und es verhält sich $\triangle ABC : \triangle AEC = 1 : z$, da beide dieselbe Grundlinie haben. Dies Verhältnis gilt von jedem Gliede der beiden Summen, also: $U_1 = Uz$.

Fig. 5.



Die Oberdreiecke im unteren Prismatoid zerfallen in zwei Gruppen, für welche AGE und EFC als Beispiele dienen mögen. Man hat: $\triangle ABC : \triangle AGE = 1 : z\,(1 - z)$, da sich die Grundlinien AC und GE wie $1 : (1 - z)$ und ihre Höhen wie $1 : z$ verhalten, also $\triangle AGE = z\,(1 - z)\,\triangle ABC$. Die Summe der Dreiecke dieser Gruppe ist also $Uz\,(1 - z)$. Es verhalten sich ferner als ähnliche Dreiecke BCD und EFC wie $1 : z^2$ also $\triangle EFC = z^2\,\triangle BCD$. Die betreffende Summe ist demnach gleich Oz^2 und es folgt: $O_1 = Oz^2 + Uz\,(1 - z)$.

In ähnlicher Weise würde man finden:

$$O_2 = O\,(1 - z) \text{ und } U_2 = Oz\,(1 - z) + U\,(1 - z)^2.$$

Die Probe giebt, wie zu erwarten:

$$O_1 + U_1 + O_2 + U_2 = O + U.$$

Bemerkenswert ist das Verhältnis $\frac{O_1}{U_2} = \frac{z}{1 - z}$, was ebenso aus den aufgestellten Formeln (5) wie aus geometrischer Betrachtung folgt. Die einzelnen Glieder der Summe O_1 und U_2 haben paarweis dieselbe Grundlinie z. B. $\triangle$ AGE und $\triangle$ BGE, verhalten sich also wie ihre Höhen d. h. wie $z : (1 - z)$.

Es folgt nun:

$$Z = G - Oz^2 - Uz\,(2 - z) \text{ oder}$$
$$Z = D + O\,(1 - z^2) + U\,(1 - z)^2$$

d. i.

$$Z = G - 2\,Uz + (U - O)\,z^2.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung findet man durch eine in elementare Form gekleidete Integration:

$$J = \frac{h}{3}\,(3\,G - 2\,U - O) \text{ und}$$

$$s = \frac{h}{4} \cdot \frac{3\,G + 3\,D - 2\,U}{2\,G + D - U},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn s die Höhe des Schwerpunktes vom Prismatoid über seiner Grundfläche ist. Die hierzu erforderlichen Integralformeln:

$$\frac{1}{n}\Sigma_1^n \frac{v}{n} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n}\Sigma_1^n \frac{v^2}{n^2} = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{n}\Sigma_1^n \frac{v^3}{n^3} = \frac{1}{4}$$

für $n = \infty$ erhält man leicht, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks dadurch, dafs man es als Summe von Parallelogrammen, ferner den Rauminhalt einer Pyramide dadurch, dafs man dieselbe als Summe von Prismen darstellt, und drittens die Höhe des Schwerpunktes einer Kugel über einer sie tangierenden Ebene bestimmt. Nimmt man zu diesem Behufe eine der Pyramiden, deren Rauminhalt ohne Grenzbetrachtungen ermittelt werden kann (teilt z. B. einen Würfel in 6 kongruente Pyramiden), so hat man diese Werte unabhängig von eingehenderen stereometrischen Beziehungen. Wird O aus den Gleichungen: $G = D + O + U$ und $Z = G - 2\,Uz + (U - O)\,z^2$ eliminiert, so findet sich: $U = G\frac{1+z}{2\,z} + D\frac{z}{z(1-z)} - Z\frac{1}{2\,z(1-z)}$, welcher Wert in (4c) eingesetzt, die Sinram-sche Formel giebt:

$$J = \frac{h}{6}\left\{G\frac{3\,z-1}{z} + D\frac{2-3\,z}{1-z} + Z\frac{1}{z(1-z)}\right\}.$$

Dieselbe wird $\frac{0}{0}$, wenn $z = 0$ oder 1 ist und gilt für diese Grenzwerte nicht mehr.

Man kann aus ihr den Inhalt eines Prismatoids berechnen, wenn der Flächeninhalt eines Schnittes Z in der Höhe zh bekannt ist; umgekehrt aber auch für jede gegebene Höhe den Schnitt berechnen, wenn der Inhalt des Prismatoids d. h. irgend ein Schnitt mit seiner Höhe bekannt ist.

Dieselbe liefert für den Fall, dafs das zu vermessende Prismatoid nur teilweise zugänglich ist, die bekannten Formeln für $z = \frac{1}{3}$ und $z = \frac{2}{3}$, in welchen eine der Grundflächen verschwunden ist. Ehe ich zeige wie der für den Unterricht wichtigste Fall $z = \frac{1}{2}$ direkt gefunden werden kann, will ich noch eine Formel für den Fall der teilweisen Unzugänglichkeit des Prismatoids angeben.

Ist J_n der Rauminhalt eines Prismatoids, welches als Teil aus einem gröfseren (J) durch Ebenen, welche den Grundflächen parallel sind, herausgeschnitten ist, so hat man:

$$Z_n = G_n - 2\,U_n\,z + (U_n - O_n)\,z^2.$$

Ist nun als Schnittfläche im grofsen Prismatoid:

$$G_n = G - 2\,U\zeta + (U - O)\,\zeta^2, \text{ so ist ebenfalls:}$$
$$Z_n = G - 2\,U(\zeta + z) + (U - O)(\zeta + z)^2$$

und hieraus:

$$U_n - O_n = U - O.$$

Will man also zur Inhaltsermittlung eines Prismatoids die Gleichung (4e) anwenden, so kann der Wert $U - O$ durch Messungen an einer beliebigen Stelle bestimmt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6.

Ist H der Flächeninhalt eines Schnittes in halber Höhe, so wende man für den unteren Teil (4b) für den oberen (4c) an und man hat:

$$J_1 = \frac{h}{6}(2H + G + O_1)$$

$$J_2 = \frac{h}{6}(2H + D - U_2) \text{ und durch Addition}$$

$$J = \frac{h}{6}(G + D + 4H), \text{ da nach (5) } O_1 = U_2 \text{ für } z = \frac{1}{2} \text{ ist.} \qquad (6)$$

Dafs diese Formel für jeden Körper gilt, dessen Schnitte parallel zu einer Grundebene durch eine Funktion zweiten Grades ihres Abstandes von dieser Grundebene hinsichtlich des Flächeninhalts bestimmt sind, läfst sich leicht nachweisen, indem man zeigt, dafs ein solcher Körper raumgleich ist einem Prismatoid, welches in Höhe, Grundfläche, Deckfläche und Mittelschnitt mit ihm übereinstimmt. Ist für den Körper $Z = A + Bz + Cz^2$, für das Prismatoid $Z = G - 2Uz + (U - O)z^2$, so ist:

$$G = A$$
$$D = A + B + C$$
$$4H = 4G - 3U - O = 4A + 2B + C$$

d. h. $\quad 3U + O = -(2B + C)$

und beachtet man, dafs $U + O = G - D = -(B + C)$,

so folgt: $\quad -2U = B$ und $U - O = C$.

Es haben also der Körper und das Prismatoid in jeder Höhe gleiche Schnittflächen. Wird nun der Körper durch Parallelschnitte in so viel Schichten geteilt, dafs jede Schicht als Prismatoid berechnet werden darf, so erkennt man aus (6), dafs die beiden Körper Schicht für Schicht übereinstimmen*).

Der Verwendung der Formel (6) für die eben charakterisierten Körper, also z. B. für die Kugel und ihre Teile und für die gebräuchlichen Gewölbe hat bisher wohl hauptsächlich ihre algebraische Ableitung entgegengestanden, nach der hier gegebenen hoffe ich, dafs sie eine häufigere werden möge.

§ 7.

Die weniger bedeutende Vereinfachung, welcher die Formel (2) für das schief abgeschnittene Prismatoid fähig ist, übergehe ich und füge zum Schlufs noch eine andere Art der Inhaltsermittlung für das Prismatoid an, welche für Aufmessungen eine gewisse Bedeutung hat, da alle für sie erforderlichen Messungen ausschliefslich auf den Grundflächen ausgeführt werden können.

Man projiziere das Prismatoid normal auf eine Grundebene, welche senkrecht auf seinen Grundflächen steht. Haben die Ecken der Deckfläche die Höhen x_1, x_2 u. s. w. und die der Grundfläche y_1, y_2 u. s. w. über der Grundebene, steht p für die Projektion einer Deckkante, q für die einer Grundkante, so hat man die Projektion jeder Grund-

*) Ebenso liefse sich die Richtigkeit der Sinramschen Formel für diese Körper beweisen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fläche gleich Null, die eines Oberdreiecks $\frac{ph}{2}$ und die eines Unterdreiecks $\frac{qh}{2}$ und somit:

$$J = \frac{h}{6}\left\{\Sigma p\,(x_1 + x_2 + y) + \Sigma q\,(y_1 + y_2 + x)\right\}, \tag{7}$$

wo x_1, x_2 und y die Eckenhöhen des Oberdreiecks sind, dessen Projektion $\frac{ph}{2}$, und ebenso y_1, y_2 und x die des Unterdreiecks, dessen Projektion $\frac{qh}{2}$ ist.

Wird nun die Grundebene so gewählt, dafs sie die Deckfläche schneidet, so lassen sich die p und die x durch Messungen auf der Deckfläche, die q und die y durch Peripheriesieren ermitteln.

Zur Kontrolle dieser neuen Formel beachte man, dafs:

$$\Sigma \frac{p\,(x_1 + x_2)}{2} = D$$

$$\Sigma \frac{q\,(y_1 + y_2)}{2} = G \text{ und}$$

$$\Sigma p\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + y\right) + \Sigma q\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + x\right) = 4\,H \text{ ist.}$$

Es ist nämlich die Projektion einer Kante des Schnittes in halber Höhe entweder $\frac{p}{2}$ oder $\frac{q}{2}$, je nachdem die Schnittkante in einem Ober- oder einem Unterdreieck liegt, und die Ordinaten der Endpunkte von $\frac{p}{2}$ sind: $z_1 = \frac{x_1 + y}{2}$ und $z_2 = \frac{x_2 + y}{2}$, und die von $\frac{q}{2}$ identisch hiermit: $z_1 = \frac{y_1 + x}{2}$ und $z_2 = \frac{y_2 + x}{2}$.

Die Formel (6) folgt also unmittelbar aus (7). Diese Art der Messung läfst sich auch mit Vorteil anwenden, wenn das Prismatoid schief abgeschnitten ist, z. B. bei den in den Figuren 4 dargestellten Rampen, wenn der Damm steigt und das Terrain hängt. Es mufs der Winkel, welchen D und G mit einander bilden, ermittelt und die Neigungsebene beider als Grundebene gewählt werden.

Rostock. Im Dezember 1881.

Druck von W. Pormetter in Berlin C., Neue Grünstrafse 30.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fläche gleich Null, die eines Obe … cks $\frac{qh}{2}$ und somit:

(7) $J = \frac{h}{6} \{ \Sigma p$ …

wo x_1, x_2 und y die Eckenhöhen … tion $\frac{ph}{2}$, und eben-

so y_1, y_2 und x die des Unterdr …

Wird nun die Grundeben … schneidet, so lassen sich die p und die x durch Mes … die y durch Peripheriesieren ermitteln.

Zur Kontrolle dieser ne …

$\Sigma \frac{p (x_1 +}{2}$ …

$\Sigma \frac{q (y_1 +}{2}$ …

$\Sigma p \left(\frac{x_1 +}{2} \right.$ … ist.

Es ist nämlich die Projektion … Höhe entweder $\frac{p}{2}$

oder $\frac{q}{2}$, je nachdem die Schn … Unterdreieck liegt,

und die Ordinaten der Endpunk … $= \frac{x_2 + y}{2}$, und die

von $\frac{q}{2}$ identisch hiermit: $z_1 =$ …

Die Formel (6) folgt al … r Messung läfst sich auch mit Vorteil anwenden, we … n ist, z. B. bei den in den Figuren 4 dargestellten … das Terrain hängt. Es mufs der Winkel, welchen D … t und die Neigungsebene beider als Grundebene ge …

Rostock. Im Dezemb …

Druck von …

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf