Durchgang der Strahlen durch eine Linse.

§. 1.

Der Brechungsexponent für den Uebergang des Lichtes aus Luft in ein anderes Mittel sei n. Liegen mehrere brechende Mittel vor, so werden die zugehörigen n durch angehängte Indices von einander unterschieden. Gleichzeitig seien die n eine Bezeichnung für die Mittel selbst.

Auf einer geraden Linie sei gegeben ein Punkt C. Um denselben als Mittelpunkt denke man eine Kugel beschrieben. Einer ihrer Durchschnittspunkte mit der geraden Linie heisse N, der Scheitel der Fläche, die gerade Linie selbst heisse Axe. Ein beliebig begrenztes Stück der Kugelfläche, welches aber den Punkt N enthält, sei die Trennungsfläche eines Mittels n von einem Mittel n_1. Aus dem Mittel n fallen auf die Trennungsfläche Lichtstrahlen, die entweder divergirend von einem Punkte des Mittels n ausgehen, oder convergirend durch einen Punkt des Mittels n_1 verlaufen, also überhaupt durch einen beliebig liegenden Punkt P gehen. Diese Strahlen werden an der Trennungsfläche gebrochen und verlaufen im Mittel n_1. *Es soll über das Vorhandensein und die Lage des Durchschnittspunktes der gebrochenen Strahlen entschieden werden.* (a.)

Bekanntlich wird diese Aufgabe in allen Lehrbüchern der Physik und vielen besonderen Arbeiten einer mehr oder weniger ausführlichen Behandlung unterworfen. Aber alle mir bekannten Darstellungen, mit wenigen Ausnahmen, machen ausser anderen willkürlichen Annahmen, die ich hier nicht weiter erwähnen will, entweder die:

> *Von allen einfallenden Strahlen brauchen nur die betrachtet zu werden, welche mit der Axe in einer Ebene liegen,* (b.)

oder die:

> *Von allen einfallenden Strahlen brauchen nur die betrachtet zu werden, welche mit der Linie PC, der Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte der brechenden Fläche gleiche und kleine (§. 2, d.) Winkel bilden.* (b_1.)

Aber das Licht verbreitet sich, von einem leuchtenden Punkte ausgehend, thatsächlich nach allen Seiten. In jeder der unendlich vielen durch den Punkt P gelegten und die brechende Fläche schneidenden Ebenen giebt es also unendlich viele Strahlen, welche wirklich zur Brechung kommen. Wo bleiben diese Strahlen bei der Annahme (b.)?

Bei der Annahme (b_1.) wählt man zu jedem Punkte P einen besondern Punkt der brechenden Fläche, nämlich den Durchschnittspunkt der Linie PC mit derselben, und betrachtet nun allein die Strahlen, welche in unmittelbarer Nähe dieses Punktes einfallen. Warum wählt man gerade diesen Punkt, und wo bleibt auch hier die grosse Zahl aller übrigen wirklich zur Brechung gelangenden Strahlen?

Ohne vorhergehende besondere Begründung kann also weder die Annahme (b.) noch (b_1.) gemacht werden und doch dürfte man in den vorher erwähnten Darstellungen vergeblich nach einer solchen suchen, wenn nicht etwa die Thatsache dafür gelten soll, dass ohne diese Annahmen die auf sie begründete mathematische Entwicklung unmöglich wäre.

Aber jede noch so elegante analytische oder geometrische Betrachtung kann niemals etwas anderes ergeben als die sicheren Folgen derjenigen Voraussetzungen, unter welchen sie angestellt wurde, und so bleibt denn, wenn diese Folgerungen physikalische Bedeutung haben sollen, immer noch die Frage nach der physikalischen Begründung der Annahmen, mit welchen die mathematische Betrachtung beginnt.

Nun kann vor jeder geometrischen oder analytischen Behandlung der Aufgabe der Vorgang experimentell untersucht werden. Dann zeigt zunächst der Fall der Reflexion an einer Kugelfläche, dass bei einer grossen Zahl von Stellungen eines leuchtenden Gegenstandes vor derselben von diesem Gegenstande scharfe, demselben ähnliche reelle oder virtuelle[1]) Bilder entstehen. Es zeigt sich ferner, dass bei gewissen anderen Stellungen des leuchtenden Gegenstandes die Bilder wohl noch vorhanden sind, aber aufhören, deutlich und ähnlich zu sein. Dasselbe lässt sich experimentell nachweisen bei dem Durchgange des von einem leuchtenden Gegenstande ausgehenden Lichtes durch eine Linse (ein von zwei Kugelflächenstücken begrenztes brechendes Mittel), und es darf dann in einer physikalischen Betrachtung nach Analogie geschlossen werden, dass unter übrigens gleichen Bedingungen auch in den Fällen scharfe, dem Gegenstande ähnliche Bilder entstehen werden, welche sich der direkten experimentellen Untersuchung entziehen, nämlich bei dem Uebergange des Lichtes aus einem beliebigen Mittel durch Brechung an *nur einer* Kugelfläche in ein anderes Mittel.

In allen diesen Fällen, in welchen man also durch den Versuch das Vorhandensein scharfer Bilder als nachgewiesen betrachtet, wird man nun annehmen müssen, dass jedem leuchtenden Punkte des Gegenstandes ein bestimmter reeller oder virtueller Punkt des Bildes entspricht, weil sonst das Entstehen deutlicher Bilder nicht zu erklären wäre. Oder mit anderen Worten: Die oben aufgeworfene Frage (a.) wird dahin beantwortet: *In allen den Fällen, in welchen der Versuch das Entstehen scharfer, dem Gegenstande ähnlicher Bilder nachweist, ist auch das Vorhandensein eines Durchschnittspunktes aller zur Wahrnehmung beitragenden gebrochenen oder reflectirten Strahlen als nachgewiesen zu betrachten, so dass nur noch die Frage nach der Lage desselben zu entscheiden bleibt.* (c.)

Sobald nun der in (c.) liegende Schluss gestattet wird, darf auch wohl die Annahme (b.) oder (b_1.) gemacht werden, und ich wüsste nicht, wie (b.) oder (b_1.) anders begründet werden sollte, als durch (c.).

Wird aber (c.) zugestanden, also das Vorhandensein des in (a.) erwähnten Durchschnittspunktes als nachgewiesen erachtet, so *braucht man*, um über die Lage desselben zu entscheiden, die Annahme (b.) oder (b_1.) *gar nicht mehr. Es genügt dann, zwei beliebig ausgewählte, durch den Punkt P gehende einfallende Strahlen zu betrachten, die beiden zu diesen gehörigen gebrochenen Strahlen und den Durchschnittspunkt des letzteren. Dieser ist dann der in* (a.) *gesuchte Punkt. Die Auswahl der beiden einfallenden Strahlen ist nach* (c.) *nur dadurch beschränkt, dass die zu ihnen gehörigen gebrochenen Strahlen auch wirklich zur Wahrnehmung beitragen müssen.* (d.)

Durch das Vorstehende erachte ich für nachgewiesen, dass die gewöhnlich gemachten Annahmen (b.) oder (b_1) wenigstens einer Begründung durch den Versuch bedürfen, dass eine solche Begründung zugleich (c.) als richtig nachweist, und dass man dann (b.) oder (b_1.) gar nicht mehr braucht, sondern so verfahren kann, wie in (d.) angegeben ist. Dadurch wird aber, wie ich im Folgenden zu zeigen beabsichtige, die analytische Behandlung der weiteren Frage nach der Lage des Durchschnittspunktes sehr viel einfacher und doch ebenso weit gültig, als mit den Annahmen (b.) oder (b_1).

---

[1]) *reell*, wenn das Bild sich auf einem Schirm auffangen lässt, *virtuell*, wenn es nur mit den Augen wahrnehmbar ist.

§. 2.

Die Versuche, welche zur Begründung von (c.) §. 1. vor einer analytischen Behandlung der Frage (a.) §. 1. angestellt sein müssen,[1]) lehren nun ferner, dass die Bilder um so schärfer und dem Gegenstande um so ähnlicher werden, je mehr folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Das das Mittel n vom Mittel n_1 trennende Kugelflächenstück muss von einer Curve begrenzt sein, deren Punkte zu N und C (§. 1.) möglichst symmetrisch liegen. Man denke es sich also entstanden durch den Durchschnitt einer auf der Axe NC senkrechten Ebene mit der Kugel um C.

b) Die Axe NC geht durch einen Punkt G des leuchtenden Gegenstandes, welcher möglichst symmetrisch liegen muss zu der den Gegenstand begrenzenden Curve.[2]) Ist dann ferner P irgend ein Punkt des leuchtenden Gegenstandes, auch seiner Grenze, so muss das Verhältniss von $PG:NG$ eine *kleine* Grösse sein.

c) Alle in Betracht zu ziehenden Winkel müssen *klein* sein.

d) Mit *klein* werden hier Grössen bezeichnet, deren Masszahlen so beschaffen sind, dass ihre Quadrate und höheren Potenzen gegen die Masszahl selbst vernachlässigt werden dürfen. Auf Winkel angewendet heisst dies, dass der sinus arcus[3]) und tangens als gleich zu erachten sind, der cosinus aber gleich 1 ist.

Von dem Punkte P (§. 1.) fälle man ein Loth auf die Axe, der Fusspunkt sei X. In der nach beiden Seiten hin unbegrenzt gedachten Axe nehme man willkürlich einen Punkt O im Mittel n an, möglichst weit entfernt von N, und bestimme die Lage des Punktes X der Axe durch die Masszahl der Linie OX. Gelangt man von O nach X im Sinne der Richtung *von Punkten des Mittels n zur brechenden Fläche*, so sei die Masszahl von OX *positiv*, dagegen negativ wenn X zu O im entgegengesetzen Sinne liegt. Der Einfachheit wegen werde die mit ihrem Vorzeichen behaftete Masszahl der Entfernung eines Punktes der Axe von O mit dem Zeichen des Punktes selbst benannt, also X für OX geschrieben, ebenso N für ON, C für OC.

Die beiden durch P gehenden einfallenden Strahlen, welche nach (d.) §. 1. willkürlich auszuwählen und allein zu betrachten sind, seien:

1. der Strahl PC, also der durch P gehende einfallende Strahl, der die Richtung nach dem Mittelpunkte der Fläche hat;
2. der Strahl PN, also der im Scheitel der Fläche auffallende Strahl.

Von diesen beiden muss nach (d.) §. 1. nachgewiesen sein, dass die zu ihnen gehörigen gebrochenen Strahlen *zur Wahrnehmung beitragen.* Aber wegen der Voraussetzung c) dieses §., wonach $PG:NG$, also hier PX zu NX, immer eine *kleine* Grösse ist, liegen die Strahlen 1. und 2. jedenfalls innerhalb des von P auf die Fläche auffallenden Strahlenkegels, und es werden daher die

---

[1]) Hat man durch Versuche gezeigt, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden und an einer concaven Fläche reflectirten oder durch eine biconvexe Linse gegangenen Strahlen einen reellen Vereinigungspunkt haben, so kann man in den Verlauf des reflectirten oder zweimal gebrochenen Strahlenbüschels eine zweite reflectirende Kugelfläche oder eine neue Linse stellen, so dass die Strahlen reflectirt oder zum Durchgang gezwungen werden, *ehe sie sich vereinigt haben.* Hierdurch lässt sich experimentell das zeigen, was in Frage (a.) §. 1. eingeschlossen und auch in der oben folgenden Behandlung mit einbegriffen sein soll, dass die aus dem Mittel n einfallenden Strahlen auch *dann einen reellen oder virtuellen Vereinigungspunkt haben können, wenn sie convergirend nach einem Punkte des Mittels n_1 auf die das Mittel n vom Mittel n_1 trennende Fläche fallen.*

[2]) Da im optischen Sinne der leuchtende Gegenstand eine Fläche ist, so wird der obige Ausdruck gestattet sein.

[3]) Die Masszahl des zum Winkel als Centriwinkel gehörigen Bogens eines Kreises, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist.

Strahlen 1. und 2. ebenso gut zur Wahrnehmung beitragen, wie irgend welche anderen Strahlen dieses Strahlenkegels. Genauer lässt sich die Sache experimentell nicht nachweisen.[1])

Beide Strahlen 1. und 2. liegen in der durch P und die Axe gelegten Ebene, so dass von jetzt ab die ganze weitere Betrachtung auf das zurückgeführt ist, was in dieser Ebene vor sich geht, also auch durch Zeichnung verfolgt werden kann.

In der Ebene durch P und die Axe liegt P auf einer beliebigen aber bestimmten Seite der Axe. Die mit ihren Vorzeichen behafteten Masszahlen aller Lothe von Punkten dieser Ebene auf die Axe werden mit y bezeichnet und von einander unterschieden, falls dies nöthig wird, durch angehängte Indices. Liegen die Lothe mit P auf derselben Seite der Axe, so werden ihnen positive Masszahlen zuertheilt, negative im entgegengesetzten Falle.

Betrachten wir nun zunächst Strahl 1.

Derselbe geht bekanntlich ungebrochen durch die Fläche, oder *der zugehörige gebrochene Strahl liegt in einer der Richtungen der Linie PC und zwar in der Richtung von der Fläche zu Punkten des Mittels n_1*. Desshalb *liegt auch der zu suchende Punkt P_1*, nämlich der Durchschnittspunkt der zu den Strahlen 1. und 2. gehörigen gebrochenen Strahlen, *in der Linie PC.* Von dem Punkte P_1 denke man ebenfalls ein Loth auf die Axe gefällt, welches in X_1 treffe. Die mit ihrem Vorzeichen versehene Masszahl des Lothes P_1X_1 werde mit y_1 und, wie oben festgesetzt, OX_1 mit X_1 bezeichnet.

Liegt ein Punkt p so zu einem Punkte q, dass man auf der Verbindungslinie pq von p nach q gelangt in der Richtung von Punkten des Mittels n zu Punkten des Mittels n_1, so soll der *Punkt p vor q liegend* genannt werden. Im entgegengesetzen Falle heisst p *hinter q liegend.* (e.)

Der Punkt P kann nun zwei verschiedene Lagen haben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ P \textit{ liegt so, dass } X \textit{ vor } C, \textit{ dann ist } C-X \textit{ positiv}, \\ \beta)\ P \textit{ liegt so, dass } X \textit{ hinter } C, \textit{ dann ist } C-X \textit{ negativ}, \end{array}\right\} \text{(wegen (e.))}$$

y ist, wie festgesetzt, *immer positiv.*

Der spitze Winkel, den PC mit der Axe bildet, so wie sein arcus werde mit γ bezeichnet. Dann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \text{im Falle } \alpha)\quad tg\gamma = \dfrac{y}{C-X} = \gamma \\[2ex] \text{im Falle } \beta)\quad tg\gamma = \dfrac{y}{-(C-X)} = \gamma \end{array}\right\} \text{(wegen c) und d) dieses §.) (1.)}$$

[1]) Die grosse Zahl der in §. 1. und §. 2. gemachten und durch den Versuch nur theilweise sicher zu begründenden Annahmen macht es sowohl vom physikalischen wie besonders vom mathematischen Standpunkte aus wünschenswerth, die Aufgabe ohne diese Annahmen zu behandeln. Hier hat nun zunächst *Gauss* in seinen *dioptrischen Untersuchungen* gezeigt, dass die Annahmen a) bis d) des §. 2. hinreichen, um nachzuweisen, dass *alle* gebrochenen Strahlen sich *in einem* Punkte schneiden, so dass also (c.) §. 1. eine *nothwendige Folge* der obigen Annahmen wird. Ferner hat Herr *Seidel in den Sitzungsberichten der Münchener Academie 1866 II. pag. 263 ff.* den Durchgang des Lichtes durch ein System von Kugelflächen *ohne beschränkende Annahmen* untersucht und zur numerischen Berechnung des Verlaufs der Strahlen besonders geeignete Formeln gegeben. Endlich sind alle möglichen Probleme der Brechung und Reflexion einer strengen also von beschränkenden Annahmen freien Behandlnng nach einer einheitlichen Methode unterworfen worden in dem Werke: *Röthig, die Probleme der Brechung und Reflexion, Leipzig, bei Teubner 1876.* Dort hat auch das hier vorliegende Problem ein strenge Behandlung erfahren und dann ist gezeigt worden, wie durch Anbringung einer praecis definirten Vernachlässigung aus den streng richtigen Formeln die hier zu entwickelnden *Gauss*'schen entstehen. Aehnlich kann jetzt mit jedem beliebigen speciellen Probleme verfahren werden, denn man hat nur nöthig, die Besonderheiten eines speciellen Problemes in die von mir gegebenen allgemeinen Formeln in vorgeschriebener Weise einzusetzen, um jedes Problem streng gelöst zu haben.

P_1, ein Punkt der Linie PC, kann ebenfalls zwei verschiedene Lagen haben. Durch den Punkt C ist nämlich die ganze Linie PC in zwei Theile getheilt, es kann nun:

α_1) *P_1 liegen auf dem Theile der Linie PC, der P enthält.*

β_1) *P_1 liegen auf dem Theile der Linie PC, der P nicht enthält.*

Finden gemeinschaftlich statt die Fälle:

α) und α_1) so ist: $C-X_1$ positiv, y_1 positiv

$$tg\gamma = \frac{y_1}{C-X_1} = \gamma$$

α) und β_1) so ist: $C-X_1$ negativ, y_1 negativ

$$tg\gamma = \frac{-y_1}{-(C-X_1)} = \gamma$$

β) und α_1) so ist: $C-X_1$ negativ, y_1 positiv

$$tg\gamma = \frac{y_1}{-(C-X_1)} = \gamma$$

β) und β_1) so ist: $C-X_1$ positiv, y_1 negativ

$$tg\gamma = \frac{-y_1}{C-X_1} = \gamma.$$

Setzt man die so eben gefundenen Werthe von γ gleich den zugehörigen vorher in (1.) gefundenen, *so entsteht in allen Fällen dieselbe Gleichung*:

$$\frac{y}{C-X} = \frac{y_1}{C-X_1} \tag{2.}$$

Dies wäre also *eine* Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Grössen y_1 und X_1 durch die gegebenen y und X. Es handelt sich jetzt darum, eine zweite Gleichung aufzufinden. *Betrachten wir dazu Strahl* 2.

Der spitze Winkel, den der im Mittel n verlaufende Theil der Linie PN, *der einfallende Strahl*, mit der Axe bildet, so wie sein arcus, werde mit ν bezeichnet. ν ist dann der Einfallswinkel. Die Axe ist das Einfallsloth. Der zugehörige *gebrochene Strahl*, also der im Mittel n_1 verlaufende Theil der Linie NP_1, bilde mit der Axe den spitzen Winkel ν_1. Dann ist ν_1 der Brechungswinkel und zugleich der spitze Winkel den Linie NP_1 überhaupt mit der Axe bildet, gleichgültig, ob der Theil der Linie NP_1 gemeint ist, der mit dem gebrochenen Strahle identisch ist, oder der andere. Nach dem Brechungsgesetz ist dann:

$$n \sin \nu = n_1 \sin \nu_1$$

oder wegen c) und d) dieses §.:

$$n\nu = n_1\nu_1 \tag{3.}$$

Nun kann P wieder zwei verschiedene Lagen haben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2)\ \textit{P liegt so, dass X vor N, dann ist } N-X \textit{ positiv} \\ \beta_2)\ \textit{P liegt so, dass X hinter N, dann ist } N-X \textit{ negativ} \end{array}\right\}\ \text{(wegen (e.))}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Im Falle } \alpha_2) \text{ ist: } tg\nu = \dfrac{y}{N-X} = \nu \\[2ex] \text{Im Falle } \beta_2) \text{ ist: } tg\nu = \dfrac{y}{-(N-X)} = \nu \end{array}\right\}\ \text{(wegen c) und d) dieses §.)} \tag{4.}$$

Nach dem Brechungsgesetze *müssen der einfallende Strahl*, also der im Mittel n verlaufende Theil der Linie PN *und der gebrochene Strahl*, also der im Mittel n_1 verlaufende Theil der Linie P_1N, *auf verschiedenen Seiten der Axe liegen.* (f.)

Finden nun gemeinschaftlich statt die Fälle:

α) α_1) α_2) so befindet sich P vor der Fläche im Mittel n, da $N-X$ positiv (α_2)). Weil y_1 positiv ist (α) und α_1)) so liegt wegen (f.) P_1 auf der Rückverlängerung des gebrochenen Strahls über N hinaus, also auch im Mittel n. Es ist daher auch $N-X_1$ *positiv*. Dann folgt:

$$tg\nu_1 = \frac{y_1}{N-X_1} = \nu_1$$

α) α_1) β_2) so befindet sich P hinter der Fläche im Mittel n_1, da $N-X$ negativ (β_2)). Weil y_1 positiv ist (α) und α_1)), so liegt wegen (f.) P_1 auf dem gebrochenen Strahle, also auch im Mittel n_1. Es ist daher auch $N-X_1$ *negativ*. Dann folgt:

$$tg\nu_1 = \frac{y_1}{-(N-X_1)} = \nu_1$$

$\alpha)$ $\beta_1)$ $\alpha_2)$ so liegt P vor der Fläche, wie in $\alpha)$ $\alpha_1)$ $\alpha_2)$. Weil y_1 negativ ist, so liegt wegen (f.) P_1 auf dem gebrochenen Strahle, also im Mittel n_1. Es ist also $N-X_1$ *negativ*. Dann folgt:

$$tg\nu_1 = \frac{-y_1}{-(N-X_1)} = \nu_1$$

$\alpha)$ $\beta_1)$ $\beta_2)$ so liegt P hinter der Fläche, wie in $\alpha)$ $\alpha_1)$ $\beta_2)$. Weil y_1 negativ ist, so liegt wegen (f.) P_1 auf der Rückverlängerung des gebrochenen Strahls über N hinaus, also im Mittel n. Es ist daher $N-X_1$ *positiv*. Dann folgt:

$$tg\nu_1 = \frac{-y_1}{N-X_1} = \nu_1$$

$\beta)$ $\alpha_1)$ $\alpha_2)$ so folgt dasselbe wie für $\alpha)$ $\alpha_1)$ $\alpha_2)$
$\beta)$ $\alpha_1)$ $\beta_2)$ so folgt dasselbe wie für $\alpha)$ $\alpha_1)$ $\beta_2)$
$\beta)$ $\beta_1)$ $\alpha_2)$ so folgt dasselbe wie für $\alpha)$ $\beta_1)$ $\alpha_2)$
$\beta)$ $\beta_1)$ $\beta_2)$ so folgt dasselbe wie für $\alpha)$ $\beta_1)$ $\beta_2)$

weil es in allen Fällen nur auf das Vorzeichen von y_1 und die Lage des Punktes X zu N ankommt.

Setzt man nun in allen Fällen die gefundenen Werthe von ν_1 und die zugehörigen Werthe von ν aus (4.) in die Gleichung (3.), *so entsteht wieder in allen Fällen dieselbe Gleichung*:

$$n \cdot \frac{y}{N-X} = n_1 \cdot \frac{y_1}{N-X_1} \tag{5.}$$

Dies ist also die *zweite* Gleichung zur Bestimmung der Grössen y_1 und X_1 aus den gegebenen y und X. *Mit den Gleichungen (2.) und (5.) kann also jetzt der zu einem gegebenen Punkte P gehörige Punkt P_1 gefunden werden.*[1])

§. 3.

Die Gleichungen (2.) und (5.) des §. 2. enthalten jede beide Unbekannten. Um eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu gewinnen, dividire man (5.) §. 2. durch (2.) §. 2. Dann folgt:

$$n \frac{C-X}{N-X} = n_1 \frac{C-X_1}{N-X_1}$$

Hierin sind sowohl die Entfernungen der Punkte X und X_1 von C als auch die von N enthalten. Um nur die Entfernungen von einem dieser Punkte, für welchen man dann naturgemäss N nehmen wird, in der Gleichung zu haben, setze man:

$$C-X = N-X-(N-C) \qquad\qquad C-X_1 = N-X_1-(N-C)$$

in die vorstehende Gleichung ein. Dann geht sie über in:

---

[1]) Die Betrachtung der zahlreichen Fälle, welche dennoch zu denselben Gleichungen führen, ist unvermeidlich, weil sie in der That alle möglich sind. Die brechende Fläche kann nämlich concav sein, $N-C$ positiv, oder convex, $N-C$ negativ. In jedem dieser Fälle kann P vor oder hinter der Fläche liegen und in jedem der nun entstandenen Fälle kann $n > n_1$ oder $n < n_1$ sein. Dies giebt, wie oben, ebenfalls acht Fälle. Eine Reduction derselben könnte man durch folgende Betrachtung versuchen. *Die Gleichungen (2.) und (5.) bleiben ungeändert, wenn man n, y, X mit n_1, y_1, X_1, vertauscht.* Da für die geometrische Betrachtung ferner der einfallende Strahl mit dem gebrochenen vertauscht werden kann, so wird klar, dass, wenn die Richtigkeit der Gleichungen (2.) und (5.) für den Uebergang aus dem Mittel n in das Mittel n_1 durch Brechung an einer concaven Fläche, z. B. in allen Fällen bewiesen ist, (2.) und (5.) auch richtig bleiben für den Uebergang aus einem Mittel n_1 in ein Mittel n durch Brechung an einer convexen Fläche. Hieraus erhellt, *dass die Anzahl der so eben erwähnten acht Fälle auf die Hälfte reducirt werden kann.* Aber abgesehen davon, dass auch oben eigentlich nur vier Fälle zu betrachten waren, und dass, wie man sich leicht überzeugen kann, die hier vergeschlagene Form der Herleitung der Gleichungen (2.) und (5.) eigentlich nicht einfacher wird, wie die oben gewählte, wünschte ich hauptsächlich eine Darstellung zu vermeiden, welche, wenn auch nur in der Form derselben, ein erst später zu gewinnendes Resultat vorwegnimmt.

$$n - n\frac{N-C}{N-X} = n_1 - n_1\frac{N-C}{N-X_1}$$

oder in:

$$\frac{n_1}{N-X_1} - \frac{n}{N-X} = \frac{n_1 - n}{N-C} \qquad (1.)$$

hierzu nehme man (5.) §. 2:

$$n\frac{y}{N-X} = n_1\frac{y_1}{N-X_1} \qquad (2.)$$

so sind (1.) und (2.) jetzt die beiden Gleichungen, welche die Unbekannten bestimmen.

Im Falle *der Reflexion an einer Kugelfläche* ist in (1.) und (2.) $n:n_1 = -1$[1]) zu setzen. Dann wird

$$\frac{1}{N-X} + \frac{1}{N-X_1} = \frac{2}{N-C}$$

$$-\frac{y}{N-X} = \frac{y_1}{N-X_1}$$

Ist der absolute Werth des Radius der reflectirenden Fläche ρ, so ist, wenn die Fläche concav, $N-C=\rho$, ist sie convex, $N-C=-\rho$. Führt man dies in die vorstehenden Gleichungen ein, so sind dadurch die beiden Fälle getrennt.

Fallen aber die aus dem Mittel n kommenden Strahlen nach der Brechung an der ersten Fläche auf eine zweite des Mittel n_1 von einem Mittel n_2 trennende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt C_1 und Scheitel N_1, so erhält man den Durschnittspunkt P_2 (X_2, y_2) der an dieser Fläche gebrochenen und im Mittel n_2 verlaufenden Strahlen, indem man in (1.) und (2.) P_1 (X_1, y_1), n_1 an Stelle von P (X, y), n und P_2 (X_2, y_2), n_2 an die Stelle von P_1 (X_1, y_1), n_1 schreibt. Es ist daher:

$$\frac{n_2}{N_1-X_2} - \frac{n_1}{N_1-X_1} = \frac{n_2-n_1}{N_1-C_1} \qquad (3.)$$

$$n_1\frac{y_1}{N_1-X_1} = n_2\frac{y_2}{N_1-X_2} \qquad (4.)$$

und es handelt sich jetzt darum, den Punkt P_2 oder die Grössen X_2, y_2 direkt auszudrücken durch den Punkt P oder die gegebenen Grössen X, y. *Es sind also die Grössen X_1, y_1 aus den Gleichungen* (1.) *bis* (4.) *zu eliminiren.* Nach (1.) ist:

$$\frac{n_1}{N-X_1} = \frac{n_1-n}{N-C} + \frac{n}{N-X}$$

Für (3.) kann geschrieben werden:

$$\frac{n_2}{N_1-X_2} - \frac{1}{\dfrac{N_1-N}{n_1} + \dfrac{N-X_1}{n_1}} = \frac{n_2-n_1}{N_1-C_1}$$

Führt man hier den so eben gefundenen Werth für $N-X_1:n_1$ ein, so folgt:

$$\frac{n_2}{N_1-X_2} - \frac{1}{\dfrac{N_1-N}{n_1} + \dfrac{1}{\dfrac{n_1-n}{N-C} + \dfrac{n}{N-X}}} = \frac{n_2-n_1}{N_1-C_1} \qquad (5.)$$

In (5.) ist die verlangte Elimination von X_1 geleistet. Zur Vereinfachung, und weil die Constanten des Problems in (5.) in eigenthümlichen Verbindungen auftreten, führe man folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\frac{N_1-N}{n_1} = \frac{d}{n_1}, \quad \frac{n_1-n}{N-C} = t\,; \quad \frac{n_2-n_1}{N_1-C_1} = t_1\,. \qquad (6.)$$

---

1) Den Beweis dieser leicht zu begründenden und sehr bekannten Behauptung unterlasse ich hier. Ein solcher befindet sich in meinem oben citirten Werke pag. 2.

Bringt man nun das erste Glied auf der linken Seite von (5.) nach rechts und nimmt dann von beiden Seiten die umgekehrten Werthe, so folgt:

$$-\frac{d}{n_1}-\frac{1}{t+\frac{n}{N-X}}=\frac{1}{t_1-\frac{n_2}{N_1-X_2}} \quad \text{oder:} \quad \frac{n_1}{t_1-\frac{n_2}{N_1-X_2}}+\frac{n_1}{t+\frac{n}{N-X}}=-d \qquad (7.)$$

$N_1-N=d$, die Entfernung der beiden Scheitel ist die sogenannte Dicke der Linse. d ist der Natur der Sache nach positiv, weil die zweite Fläche im Sinne des Verlaufs der Strahlen auf die erste Fläche folgen muss.

Zur Elimination von y_1 multiplicire man (2.) mit (4.), wobei $n_1 y_1$ sich heraushebt, so dass man erhält:

$$n\frac{y}{(N-X)(N_1-X_1)}=n_2\frac{y_2}{(N-X_1)(N_1-X_2)}$$

Auch hier ist wieder X_1 zu entfernen. Dazu setze man die Gleichung in die Form:

$$\frac{ny}{n_2 y_2}=\frac{N-X}{N_1-X_2}\cdot\frac{N_1-X_1}{N-X_1}=\frac{N-X}{N_1-X_2}\cdot\left[\frac{N_1-N}{N-X_1}+1\right]$$

Mit Hülfe des oben gegebenen Werthes von $n_1 : N-X_1$ und der in (6.) eingeführten Bezeichnungen folgt nun weiter:

$$\frac{ny}{n_2 y_2}=\frac{N-X}{N_1-X_2}\cdot\left[1+\frac{d}{n_1}\left(t+\frac{n}{N-X}\right)\right] \qquad (8.)$$

Aus der Gleichung (7.) ist X_2 direkt zu bestimmen durch X und dann aus (8.) y_2 durch y. Die gestellte Aufgabe der Elimination des Punktes P_1 (X_1, y_1) ist also gelöst.

§. 4.

Es ist natürlich, den Versuch anzustellen, ob die Gleichungen (7.) und (8.) nicht durch Einführung anderer Constanten in einfachere Formen übergehen.

Sei zu diesem Zwecke $X=\infty$, y endlich, also:

$$\frac{y}{N-X}=0 \qquad (1.)$$

Es gehen also die einfallenden Strahlen durch einen Punkt P des Unendlichen, der sich in endlicher Entfernung von der Axe befindet, *oder alle einfallenden Strahlen sind der Axe parallel.*

Bezeichnet man das zu diesem Punkte gehörige X_2 mit F_2, so folgt aus (7.) §. 3.:

$$\frac{n_1}{t_1-\frac{n_2}{N_1-F_2}}+\frac{n_1}{t}=-d$$

oder

$$n_1\left[t+t_1-\frac{n_2}{N_1-F_2}\right]=-dtt_1+dt\frac{n_2}{N_1-F_2} \quad ; \quad \frac{n_1(t+t_1)+dtt_1}{n_1+dt}=\frac{n_2}{N_1-F_2}$$

$$N_1-F_2=\frac{n_2(n_1+dt)}{n_1(t+t_1)+dtt_1} \qquad (2.)$$

Aus (8.) §. 3. folgt mit (1.) dieses §.:

$$\frac{ny}{n_2(N-X)}=0=\frac{y_2}{N_1-F_2}\left[1+\frac{d}{n_1}\cdot t\right]$$

dieser Gleichung ist nur zu genügen durch:

$$y_2=0$$

da alle übrigen Grössen endliche Werthe haben. Man erhält also mit (c.) und (d.) des §. 1. das Resultat:

Alle parallel der Axe einfallenden Strahlen schneiden sich nach dem Durchgange durch die Linse in dem durch (2.) bestimmten Punkte der Axe F_2. Dieser heisst *zweiter Brennpunkt.* (a.)

Sei ferner $X_2 = \infty$, y_2 endlich, also

$$\frac{y_2}{N_1 - X_2} = 0 \qquad (3.)$$

Man sucht also den Punkt $P(X, y)$ von solcher Eigenschaft, dass die durch denselben gehenden einfallenden Strahlen nach der Brechung *parallel der Axe austreten*. Das X dieses Punktes werde mit F bezeichnet. Dann ist nach (7.) §. 3.:

$$\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_1}{t + \frac{n}{N-F}} = -d$$

$$n_1\left[t + t_1 + \frac{n}{N-F}\right] = -dtt_1 - dt_1\frac{n}{N-F} \quad ; \quad \frac{n}{N-F} = -\frac{n_1(t+t_1) + dtt_1}{n_1 + dt_1}$$

$$N - F = -\frac{n(n_1 + dt_1)}{n_1(t+t_1) + dtt_1} \qquad (4.)$$

Aus (8.) §. 3. und mit (3.) dieses §. folgt:

$$\frac{n(N_1 - X_2)}{n_2 y_2} = \infty = \frac{N-F}{y}\left[1 + \frac{d}{n_1}\left(t + \frac{n}{N-F}\right)\right]$$

Dieser Gleichung ist nun zu genügen durch:

$$y = 0.$$

Man erhält also mit (c.) und (d.) des §. 1. das Resultat:

Alle durch den Punkt F (bestimmt durch (4.)) der Axe gehenden einfallenden Strahlen treten nach dem Durchgange durch die Linse parallel der Axe aus. Dieser Punkt heisst *erster Brennpunkt.* (b.)

Man bestimme jetzt X_2 aus (7.) §. 3.

Zunächst folgt:

$$\frac{n_1}{t_1 - \frac{n_2}{N_1 - X_2}} = -\frac{n_1 + dt + d\frac{n}{N-X}}{t + \frac{n}{N-X}} = -\frac{(n_1 + dt)(N-X) + dn}{t(N-X) + n}$$

Hieraus:

$$t_1 - \frac{n_2}{N_1 - X_2} = -\frac{n_1 t(N-X) + nn_1}{(n_1 + dt)(N-X) + dn}$$

Also:

$$\frac{t_1(n_1 + dt)(N-X) + dnt_1 + n_1 t(N-X) + nn_1}{(n_1 + dt)(N-X) + dn} = \frac{n_2}{N_1 - X_2} \qquad (5.)$$

Fasst man die beiden Glieder des Zählers auf der linken Seite zusammen, welche $N - X$ enthalten, so wird der Coëfficient $n_1(t + t_1) + dtt_1$. Dies ist aber der Nenner auf den rechten Seiten der Gleichungen (2.) und (4.) dieses §. Wird er der Abkürzung wegen mit q bezeichnet, so ist also:

$$n_1(t + t_1) + dtt_1 = q$$

und nach (2.) und (4.):

$$n_2(n_1 + dt) = (N_1 - F_2)q \quad ; \quad n(n_1 + dt_1) = -(N-F)q \qquad (6.)$$

Mit (6.) folgt jetzt aus (5.)

$$\frac{1}{N_1 - X_2} = \frac{(N-X)q - (N-F)q}{(N_1 - F_2)q(N-X) + dnn_2} = \frac{(F-X)q}{(N_1 - F_2)q(N-X) + dnn_2}$$

also:

$$N_1 - X_2 = \frac{(N_1 - F_2)q(N-X) + dnn_2}{(F-X)q} \qquad (7.)$$

In (7.) tritt rechts die Grösse $F - X$, oder die Entfernung des Punktes X vom ersten Brennpunkt auf, ferner die Grösse $N_1 - F_2$. Es ist daher natürlich, diese letztere Grösse auch links einzuführen, oder $(N_1 - F_2) + (F_2 - X_2)$ für $N_1 - X_2$ zu schreiben. Thut man dies und schafft dann $N_1 - F_2$ auf die rechte Seite, so wird:

$$F_2 - X_2 = \frac{(N_1 - F_2)q(N - X) + dnn_2 - (N_1 - F_2)(F - X)q}{(F - X)q}$$

Durch Zusammenfassen des ersten und letzten Gliedes im Zähler rechts *fällt X fort*, so dass man erhält:

$$(F - X)(F_2 - X_2) = \frac{(N - F)(N_1 - F_2)q + dnn_2}{q} \tag{8.}$$

Hierdurch ist also die Gleichung (7.) des §. 3. durch Einführung der in (2.) und (4.) definirten Constanten in eine höchst einfache Form gebracht. Zur weiteren Vereinfachung der auf der rechten Seite von (8.) neu entstandenen Constanten bemerke man, dass nach den Gleichungen (6.):

$$-(N - F)(N_1 - F_2)q^2 = nn_2[n_1^2 + n_1 dt + n_1 dt_1 + d^2 tt_1] = nn_2(n_1^2 + dq)$$

ist, oder:

$$(N - F)(N_1 - F_2)q^2 + dnn_2 q = -nn_2 n_1^2 \tag{9.}$$

Desshalb geht (8.) über in:

$$(F - X)(F_2 - X_2) = -\frac{nn_2 n_1^2}{q^2} \tag{10.}$$

Versuchen wir nun, die Gleichung (8.) des §. 3. in ähnlicher Weise zu vereinfachen. Nach derselben ist:

$$\frac{ny}{n_2 y_2} = \frac{(n_1 + dt)(N - X) + dn}{n_1(N_1 - X_2)}$$

oder wegen (6.) dieses §.:

$$\frac{y}{y_2} = \frac{(N_1 - F_2)q(N - X) + dnn_2}{nn_1(N_1 - X_2)}$$

Setzt man hier den Werth von $N_1 - X_2$ aus (7.) ein, *so hebt sich der Zähler rechts heraus*, und es bleibt:

$$\frac{y}{y_2} = \frac{q}{nn_1}(F - X) = -\frac{n_1 n_2}{q(F_2 - X_2)} \tag{11.}$$

Der zweite Werth rechts ist wegen (10.) gleich dem ersten ursprünglich entstandenen.

Die Gleichungen (10.) und (11.) gestatten nun die Berechnung des X_2, y_2 zu gegebenen X, y oder umgekehrt in bedeutend einfacherer Weise als die Gleichungen (6.) und (7.) des §. 3. Sie werden also von jetzt ab statt dieser angewendet.

§. 5.

Fasst man den durch die Gleichungen (10.) und (11.) gesetzten Zusammenhang des Punktes P mit dem Punkt P_2 rein mathematisch, also unabhängig von jeder physikalischen Bedeutung auf, so ist durch diese Gleichungen jedem Punkte P einer beliebigen durch die Axe gelegten Ebene ein Punkt P_2 derselben Ebene in eindeutiger Weise zugeordnet. Man kann sich dann die Aufgabe stellen, solche Punkte P und P_2 aufzusuchen, *für welche diese Zuordnung in willkürlich vorgeschriebener Weise* stattfindet. Unter der grossen Zahl hierdurch möglicher Aufgaben, wählen wir zunächst die folgende: *Es sollen diejenigen Punkte P und P_2 gesucht werden, für welche*

$$y = y_2 \tag{1.}$$

ist.

Bezeichnet man die X und X_2 dieser Punkte mit H und H_2, so ist wegen (1.) dieses §. und mit (11.) des §. 4. sofort:

$$F - H = \frac{nn_1}{q}\ ; \quad F_2 - H_2 = -\frac{n_1 n_2}{q} \tag{2.}$$

Der Punkt H heisst nach Gauss *erster Hauptpunkt* H_2 *zweiter Hauptpunkt*. Sie liegen auf der Axe, ihre Lage ist eindeutig bestimmt durch die Gleichungen (2.) und sie haben wegen (1.) folgende bemerkenswerthe Eigenschaft:

Legt man durch H und H_2 Ebenen senkrecht zur Axe, so trifft jede der Axe parallele Linie Ebene H in P und Ebene H_2 in dem durch die Gleichungen (10.) und (11.) des §. 4. zugeordneten Punkte P_2. (a.)

Man kann die weitere Frage stellen: Giebt es Punkte die sich selbst entsprechen, für welche also $X = X_2$ und $y = y_2$ ist? Die Frage ist näher untersucht in meinem oben citirten Werke pag. 92. Hier will ich nicht weiter darauf eingehen.

Nach der Annahme (c.) des §. 1. gehen *alle* durch P gehenden einfallenden Strahlen nach der Brechung durch den zugehörigen Punkt P_2. *Desshalb muss ein einfallender Strahl* PP', der also durch zwei willkürliche seiner Punkte bestimmt ist, *nach der Brechung auch durch die den Punkten P und P' zugeordneten P_2 und P_2' gehen, oder der zugehörige gebrochene Strahl muss $P_2\,P_2'$ sein.* (b.)

Man kann desshalb die weitere Frage aufwerfen:

Giebt es feste einander zugeordnete Punkte L und L_2 von der Beschaffenheit, dass jeder beliebige einfallende Strahl PL parallel wird seinem zugehörigen gebrochenen Strahle P_2L_2? (c.)

Das Loth vom Punkte L auf die Axe treffe diese in K. Es habe die mit ihrem Vorzeichen versehene Masszahl m. Dieselben Grössen für L_2 werden mit K_2 und m_2 bezeichnet. Dann ist nach den Gleichungen (10.) und (11.) §. 4:

$$\left.(F-K)(F_2-K_2) = -\frac{nn_2n_1^2}{q^2}\;;\quad \frac{m}{m_2} = \frac{q}{nn_1}(F-K) = -\frac{n_1n_2}{q(F_2-K_2)}\right\} \tag{3.}$$

Der Strahl PL schneide die Axe im Punkte R. Dann ist, wie auch P und L zur Axe liegen mögen, die Tangente des spitzen Winkels, den PL mit derselben bildet, gegeben durch:

$$\frac{y}{R-X} = \frac{m}{R-K}\ ^{1)} \tag{4.}$$

Der Strahl P_2L_2 schneide die Axe im Punkte R_2. Dann ist die Tangente des spitzen Winkels, den P_2L_2 mit der Axe bildet, wie vorher:

$$\frac{y_2}{R_2-X_2} = \frac{m_2}{R_2-K_2} \tag{5.}$$

da *PL parallel P_2L_2 sein soll, so müssen die Brüche in* (4.) *gleich denen in* (5.) *sein*, was zu der Gleichung führt:

$$\frac{m}{R-K} = \frac{m_2}{R_2-K_2} \tag{6.}$$

aus (4.) folgt:
$$R = \frac{Ky-mX}{y-m}\;;\quad R-K = \frac{m(K-X)}{y-m}$$

aus (5.) ebenso:
$$R_2-K_2 = \frac{m_2(K_2-X_2)}{y_2-m_2}$$

führt man diese Werthe von $R-K$ und R_2-K_2 in (6.) ein, so folgt:

$$\frac{y-m}{K-X} = \frac{y_2-m_2}{K_2-X_2}\ ^{2)} \tag{7.}$$

Drückt man m aus (3.) dieses §. durch m_2 und y aus (11.) §. 4. durch y_2 aus, so folgt:

$$y-m = \frac{q}{nn_1}\Big[(F-X)y_2-(F-K)m_2\Big] \tag{8.}$$

Für K_2-X_2 schreibe man $(F_2-X_2)-(F_2-K_2)$.

Bestimmt man nun F_2-X_2 aus (10.) §. 4. und F_2-K_2 aus (3.) dieses §., so erhält man:

$$K_2-X_2 = -\frac{nn_2n_1^2}{q^2}\Big[\frac{1}{F-X}-\frac{1}{F-K}\Big] = \frac{nn_2n_1^2}{q^2}\cdot\frac{K-X}{(F-X)(F-K)} \tag{9.}$$

---

1) Diese Gleichung folgt genau, wie (2.) §. 2. R hier: tritt an die Stelle von C dort; m an Stelle von y_1, K an Stelle von X_1.

2) Diese Gleichung kann ohne Hülfe von (4.) (5.) und (6.) sofort gewonnen werden. Denn der Bruch links bestimmt die Tangente des spitzen Winkels, den PL mit der Axe bildet und in gleicher Weise der Bruch rechts die Tangente des spitzen Winkels, den P_2L_2 mit der Axe bildet. Dies wäre aber durch eine neue geometrische Betrachtung erst zu zeigen und desshalb ist die obige Herleitung vorgezogen worden.

Führt man (8.) und (9.) in (7.) ein, so folgt:

$$(F-X)y_2-(F-K)m_2 = (y_2-m_2)\,.\,(F-X)(F-K)\,.\,\frac{q}{n_1 n_2}$$

indem alles übrige sich heraushebt, oder:

$$y_2(F-X)\left[1-(F-K)\frac{q}{n_1 n_2}\right]-m_2(F-K)\left[1-(F-X)\frac{q}{n_1 n_2}\right]=0 \qquad (10.)$$

Der gestellten Forderung (c.) gemäss soll diese Gleichung *identisch* erfüllt sein, für *alle* Werthe von X und y_2. Dies ist nicht anders möglich, als durch

$$0=1-(F-K)\frac{q}{n_1 n_2} \quad ; \quad m_2=0 \qquad (11.)$$

mit den Gleichungen (11.) und aus (3.) folgt dann:

$$\left.\begin{array}{lcl} F-K=\dfrac{n_1 n_2}{q} & ; & F_2-K_2=-\dfrac{nn_1}{q} \\ m=0 & ; & m_2=0 \end{array}\right\}(12.)$$

Die oben gesuchten Punkte L und L_2 sind also durch die Gleichungen (12.) gefunden. Man ersieht daraus, dass *nur zwei Punkten der Axe* die oben in (c.) geforderte Eigenschaft zukommt. Die Punkte werden daher jetzt mit K und K_2 bezeichnet. Auch kann man das Resultat aussprechen:

Die durch (12.) bestimmten Punkte der Axe K und K_2 haben die Eigenschaft, dass der zu einem Strahle PK gehörige gebrochene Strahl durch K_2 geht und PK parallel ist. Diese Punkte heissen *Knotenpunkte.* (d.)

Ist $n_2 = n$, oder das Mittel n_2 dasselbe wie das Mittel n, gehen also z. B. die Strahlen aus Luft durch eine Linse in Luft, so lehren die Gleichungen (2.) und (12.), dass *K mit H und K_2 mit H_2 zusammenfällt. Dann haben also die Hauptpunkte auch die in (d.) aufgestellte Eigenschaft der Knotenpunkte.* (e.)

Aus dem Vorstehenden erhellt endlich folgende geometrische Construction des Punktes P_2 zu einem gegebenen P.

Durch P ziehe man eine Parallele zur Axe. Die Durchschnittspunkte mit den in H und H_2 zur Axe senkrechten Ebenen sind einander zugeordnete Punkte (Satz (a.) §. 5.). Sie mögen p und p_2 heissen. Der Strahl Pp geht als ein zur Axe paralleler durch den Punkt $X=\infty$, y endlich. Der zugehörige gebrochene Strahl ist also die Linie p_2F_2 (Satz (a.) §. 4., (a.) und (b.) §. 5.). Dann ziehe man PF. Der Durchschnittspunkt mit der Ebene durch H sei p'. Durch p' ziehe man eine Parallele zur Axe, welche die Ebene durch H_2 in p'_2 schneide. Diese Parallele zur Axe $p'p'_2$ geht durch den Punkt $X_2=\infty$, y_2 endlich, also durch den F zugehörigen Punkt. Desshalb, und weil sie durch p'_2, den p' zugeordneten Punkt geht, ist sie der zum Strahle PF zugehörige gebrochene Strahl. (Satz (b.) §. 4., (a.) und (b.) §. 5.) Der Durchschnitt der durch p' zur Axe Parallelen mit der Linie p_2F_2 ist der gesuchte Punkt P_2. ((c.) §. 1.)

Zieht man PK und durch K_2 eine Parallele zu PK, so muss diese durch P_2 gehen. (Satz (d.) §. 5.) Dies kann auch zur Construction von P_2 benutzt werden.

Druck von J. Dræger's Buchdruckerei (C. Feicht) in Berlin.

Führt man (8.) und (9.) in (7.) ein, so folgt:

$$(F-X)y_2-(F \quad \ldots \quad) \cdot \frac{q}{n_1 n_2}$$

indem alles übrige sich heraushebt,

$$y_2(F-X)\Big[1-(F-K) \quad \ldots \quad \Big] = 0 \qquad (10.)$$

Der gestellten Forderung (c.) gemä … llt sein, für *alle* Werthe von X und y_2. Dies ist nicht ande …

$$0 = \quad \ldots \qquad (11.)$$

mit den Gleichungen (11.) und aus …

$$\left.\begin{aligned} F-K &= \ldots \\ m &= \ldots \end{aligned}\right\} (12.)$$

Die oben gesuchten Punkte … ngen (12.) gefunden. Man ersieht daraus, dass *nur zwei Pun* … rte Eigenschaft zukommt. Die Punkte werden daher jetzt mit … das Resultat aussprechen:

Die durch (12.) bestimmten … *e Eigenschaft, dass der zu einem Strahle PK gehörige* … *K parallel ist.* Diese Punkte heissen *Knotenpunkte.* (d.)

Ist $n_2 = n$, *oder das Mitt* … n also z. B. die Strahlen aus Luft durch eine Linse in Luft, … 2.), dass K *mit* H *und* K_2 *mit* H_2 *zusammenfällt. Dann habe* … *) aufgestellte Eigenschaft der Knotenpunkte.* (e.)

Aus dem Vorstehenden erhe … struction des Punktes P_2 zu einem gegebenen P.

Durch P ziehe man eine P … unkte mit den in H und H_2 zur Axe senkrechten Ebenen sin … (a.) §. 5.). Sie mögen p und p_2 heissen. Der Strahl Pp geh … Punkt $X = \infty$, y endlich. Der zugehörige gebrochene St … §. 4., (a.) und (b.) §. 5.). Dann ziehe man PF. Der Durchsc … p'. Durch p' ziehe man eine Parallele zur Axe, welche die E … arallele zur Axe $p'p'_2$ geht durch den Punkt $X_2 = \infty$, y_2 endl … nkt. Desshalb, und weil sie durch p'_2, den p' zugeordneten … F zugehörige gebrochene Strahl. (Satz (b.) §. 4., (a.) und (… h p' zur Axe Parallelen mit der Linie p_2F_2 ist der gesuchte …

Zieht man PK und durch K … durch P_2 gehen. (Satz (d.) §. 5.) Dies kann auch zur Co …

Druck von J. Draeger's Buchdruckerei (C. Feicht) in Berlin.