Eine neue Form der elliptischen Kugelkoordinaten. Anwendung derselben 1. auf die Rektifikation und Quadratur der sphärischen Kegelschnitte, 2. auf die Geometrie und die Kubatur der Wellenoberfläche.

Die Aufgaben, welche sich in der Theorie der doppelten Strahlenbrechung an die Wellenoberfläche zweiaxiger Krystalle knüpfen, werden am elegantesten durch die Einführung zweier Variablen gelöst, welche die Winkel zwischen einem beliebigen Radius Vektor der Oberfläche und den beiden Strahlenaxen darstellen. Es scheinen diese beiden Variablen auch in der reinen Mathematik mit Vortheil angewandt werden zu können. In wie weit das der Fall ist, mag aus den nachfolgenden Untersuchungen beurtheilt werden.

I. Relationen zwischen den geradlinigen Koordinaten und den neuen Variablen. Geometrische Deutung der letzteren.

Denken wir uns in einer der drei Hauptebenen eines geradlinig-rechtwinkligen Koordinatensystems z. B. in der zx Ebene zwei durch den Anfangspunkt O gehende, symmetrisch zur z Axe liegende, feste gerade Linien S und S_1. Der Winkel, den jede von ihnen mit der z Axe bildet, heisse s, der also, den sie miteinander bilden, $2s$. S liege zwischen der positiven z und der positiven x Richtung, S_1 zwischen der positiven z und der negativen x Richtung. Eine jede durch O gehende gerade Linie L kann dann ihrer Richtung nach durch diejenigen beiden Winkel u und v bestimmt werden, die sie mit S resp. S_1 bildet. Wir verstehen aber unter u und v diejenigen Winkel, welche ganz auf der einen oder auf der anderen Seite der xy Ebene liegen. Alsdann ist:

$$\cos u = \cos(S,x)\cos(L,x) + \cos(S,y)\cos(L,y) + \cos(S,z)\cos(L,z)$$
$$= \sin s \cos(L,x) + \cos s \cos(L,z)$$
$$\cos v = -\sin s \cos(L,x) + \cos s \cos(L,z)$$

Hieraus folgt:

$$\sin s \cos(L,x) = \tfrac{1}{2}(\cos u - \cos v) = \sin\frac{v+u}{2}\sin\frac{v-u}{2}$$
$$\cos s \cos(L,x) = \tfrac{1}{2}(\cos u + \cos v) = \cos\frac{v+u}{2}\cos\frac{v-u}{2},$$

oder, wenn ich $\frac{v+u}{2}=\sigma$, $\frac{v-u}{2}=\delta$ setze:

$$\sin s \cos(L,x) = \sin\sigma \sin\delta$$
$$\cos s \cos(L,z) = \cos\sigma \cos\delta$$
$$\sin s \cos s \cos(L,y) = \sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\delta)}\,.$$

Bezeichnen wir nun mit r die Entfernung irgend eines Punktes (xyz) der Richtung L vom Anfangspunkte der Koordinaten, so ergeben sich mit Hülfe der Formeln:

$$x = r \cos(r,x)$$
$$y = r \cos(r,y)$$
$$z = r \cos(r,z)$$

die allgemeinen Relationen zwischen den geradlinigen Koordinaten und den neuen Variablen:

$$x = \frac{r \sin\sigma \sin\delta}{\sin s}$$

(1) $$y = \frac{r\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\delta)}}{\sin s \cos s}$$

$$z = \frac{r \cos\sigma \cos\delta}{\cos s}\,.$$

Es stellen r, σ, δ ein Koordinatensystem im Raume, σ und δ ein solches auf der mit r als Radius um O beschriebenen Kugel dar. Wir werden daher ein klares Bild von der geometrischen Bedeutung unserer Variablen erlangen, wenn wir für einen Augenblick r als konstant ansehen und das durch σ und δ auf der zugehörigen Kugeloberfläche dargestellte Kurvensystem betrachten.

Die Durchschnittspunkte dieser Kugeloberfläche mit den beiden festen Axen mögen fortan auf der positiven Seite der xy Ebene — d. h. auf derjenigen, auf welcher sich die positive z Richtung befindet — mit S und S_1, auf der negativen Seite mit S' und S'_1 bezeichnet werden. Aehnlich mögen L und L' die entsprechenden Durchschnittspunkte der variablen Richtung mit der Kugel bedeuten.

Dann ist $\sigma = a$ die Gleichung einer sphärischen Ellipse, deren grosse Halbaxe gleich a, und deren Brennpunkte S und S_1 sind. Es entspricht dieser Kurve eine andere sphärische Ellipse auf der zweiten Halbkugel, deren Gleichung $\sigma' = a$ ist, wenn wir unter σ' die Grösse $\frac{v'+u'}{2}$ und unter u' und v' diejenigen Winkel verstehen, welche OL' mit OS' resp. OS'_1 bildet. Die Brennpunkte dieser Ellipse sind S' und S'_1. Beide Kurven sind der Durchschnitt unserer Kugel mit einem Kegel 2. O., dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel, und dessen Fokalhalbaxen OS und OS_1 resp. OS' und OS_1' sind.

$\delta = a_1$ ist die Gleichung einer sphärischen Hyperbel, deren Brennpunkte wiederum S und S_1 sind, und deren Haupthalbaxe gleich a_1 ist. Auch dieser Kurve entspricht auf der zweiten Halbkugel eine andere Hyperbel mit der Gleichung $\delta' = \frac{v'-u'}{2} = a_1$, deren Brennpunkte S' und S'_1 sind. Beide Hyperbeln sind der Durchschnitt der Kugeloberfläche mit einem Kegel 2. O., dessen Fokalhalbaxen OS und OS'_1 resp. OS_1 und OS' sind, der also mit dem ersten Kegel konfokal ist.

In Bezug auf die sphärischen Kegelschnitte bemerke ich hier allgemein, dass sich die Hyperbeln und Ellipsen nicht in derselben Weise wie die gleichnamigen Kurven in der Ebene von einander unterscheiden, vielmehr kann man von einer sphärischen Hyperbel nur dann sprechen, wenn man darunter die auf derselben Halbkugel liegenden Hälften derjenigen beiden Ellipsen versteht, welche ein Kegel 2. O., dessen Spitze im Mittelpunkte liegt, aus der Kugeloberfläche herausschneidet. In der That verwandelt sich die Gleichung der Hyperbel $\frac{v-u}{2} = a_1$ sofort in die Gleichung einer Ellipse, wenn man für v und u diejenigen beiden Winkel einführt, die der Radius Vektor mit OS und OS'_1 oder mit OS_1 und OS' bildet. Die Brennpunkte dieser beiden Ellipsen sind natürlich nicht mehr S und S_1 resp. S' und S'_1, sondern S und S'_1 resp. S_1 und S'.

Wir haben gefunden, dass σ und δ auf der Kugeloberfläche zwei Schaaren konfokaler Kegelschnitte darstellen. Die Kurven der einen Schaar durchschneiden daher die der anderen unter rechten Winkeln. Analytisch ergiebt sich diese Eigenschaft sofort aus der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y}{\partial \delta} + \frac{\partial z}{\partial \sigma}\frac{\partial z}{\partial \delta} = o\,.$$

Jeder Punkt der Kugeloberfläche bestimmt einen Werth von σ und einen von δ, durch jeden Punkt der Oberfläche geht also auch eine Kurve der einen und eine der anderen Schaar. Unsere beiden Variablen repräsentiren also auf der Kugel ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das demjenigen der elliptischen Koordinaten in der Ebene vollständig analog ist. Zwar durchschneiden sich die zu einem bestimmten Werthe von σ und δ gehörigen Kurven in acht oder, wenn man die beiden Halbkugeln auf der positiven und auf der negativen Seite der xy Ebene auseinander hält und etwa durch positive resp. negative Werthe des Radius Vektors charakterisirt, in vier zu den Koordinatenebenen symmetrisch gelegenen Punkten, doch sind jene elliptischen Koordinaten nichts destoweniger zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes in allen den Fällen brauchbar, in denen es möglich ist, aus der Natur des Problems zu bestimmen, in welchem Quadranten der Kugeloberfläche der fragliche Punkt liegen muss.

Die Grenzen von σ und δ ergeben sich am einfachsten aus der geometrischen Bedeutung der Variablen. Da σ für alle Punkte einer sphärischen Ellipse, δ für alle Punkte einer sphärischen Hyperbel denselben Werth behält, so genügt es, die Werthe von σ und δ für gewisse charakteristische Punkte sämmtlicher Kurven der einen wie der anderen Schaar festzustellen. Da alle Hyperbeln dieselben Brennpunkte S und S_1 haben, so befinden sich ihre Scheitelpunkte sämmtlich auf dem Kreisbogen SS_1, und zwar die des einen Zweiges zwischen S und z, die des anderen Zweiges zwischen z und S_1. An diesen Scheitelpunkten durchläuft aber δ die Werthe von o bis s in kontinuirlicher Folge, folglich sind o und s überhaupt die Grenzen, zwischen denen sich die Werthe von δ bewegen müssen. Ebenso befinden sich die Endpunkte der kleinen Axe sämmtlicher Ellipsen auf dem in der zy Ebene liegenden Halbkreise. An diesen Punkten durchläuft σ die Werthe von s bis $\frac{\pi}{2}$ in stetiger Folge, mithin sind s und $\frac{\pi}{2}$ überhaupt die Grenzen, zwischen denen sich die Werthe von σ bewegen müssen. Wir haben daher das für alle Anwendungen wichtige Resultat gefunden, dass δ und σ stets folgender Reihenfolge unterworfen sind:

$$o < \delta < s < \sigma < \frac{\pi}{2}.$$

$\delta = o$ und $\delta = s$ sind die Gleichungen für die Grenzkurven der Hyperbelschaar; $\delta = o$ repräsentirt den in der zy Ebene liegenden Halbkreis, $\delta = s$ diejenigen beiden Kreisbögen, welche den Bogen SS_1 nach beiden Seiten hin bis zur xy Ebene verlängern. Bei der ersten dieser beiden Grenzkurven fallen die beiden Hyperbelzweige zusammen, bei der anderen verwandelt sich jeder einzelne Zweig in eine ebene Kurve. Ein Analogon zu dieser Auffassung der Grenzkurven bieten in der Geometrie der Oberflächen die Grenzflächen 2. O. Den Werthen $\sigma = s$ und $\sigma = \frac{\pi}{2}$ entsprechen resp. der begrenzte Kreisbogen SS_1 und der in der xy Ebene liegende grösste Kreis. Den Bogen SS_1 hat man folgerecht nicht als Theil eines Kreises, sondern als eine in sich geschlossene sphärische Kurve, als eine Grenzkurve 2. O. aufzufassen.

Da sich durch jeden Punkt des Raumes eine Kugel legen lässt, deren Mittelpunkt O ist, so stellen r, σ, δ ein Koordinatensystem im Raume dar und zwar dasjenige, welches man »Elliptische Kugelkoordinaten« zu nennen pflegt. Die Grenzen von r sind natürlich o und ∞.

Dass unsere Form dieser Koordinaten nicht in allen Fällen die brauchbarste sein wird, ist sicher, dass sie aber in vielen Fällen von Nutzen ist, wird aus den nachfolgenden Anwendungen wohl hervorgehen.

II. Rektifikation und Quadratur der sphärischen Kegelschnitte.

Da σ und δ orthogonale Koordinaten sind, also

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y}{\partial \delta} + \frac{\partial z}{\partial \sigma}\frac{\partial z}{\partial \delta} = o \text{ ist,}$$

so wird das Bogenelement ds irgend einer Kurve auf der Kugel mit dem Radius r in den Variablen σ und δ durch folgende Formel ausgedrückt:

$$ds^2 = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2\right\} d\sigma^2 + \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \delta}\right)^2\right\} d\delta^2$$

oder, in abgekürzter Schreibweise, durch

$$ds^2 = \mathfrak{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma^2 + \mathfrak{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2 d\delta^2.$$

Die Gleichung irgend einer sphärischen Ellipse ist $\sigma = \sigma_1$, wenn σ_1 eine Konstante bedeutet, und daher ihr Bogenelement:

(α) $$ds_1 = \sqrt{\mathfrak{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2}\,.\,d\delta$$

(2) Die Gleichung irgend einer sphärischen Hyperbel ist $\delta = \delta_1$, und daher ihr Bogenelement:

(β) $$ds_2 = \sqrt{\mathfrak{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2}\,.\,d\sigma$$

Daher ist das Flächenelement do irgend eines sphärischen Kegelschnitts:

$$do = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2 \cdot S\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2} \cdot d\delta \; d\sigma. \qquad (3)$$

Die allgemeinen Relationen (1) lehren, dass sich $S\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2$ der Form nach nicht von $S\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2$ unterscheiden kann. Es wird daher nicht nothwendig sein, beide Formeln (2), sondern nur eine von ihnen zu integriren. In der That wissen wir ja aus der geometrischen Betrachtung, dass sich sphärische Hyperbeln und Ellipsen ihrer Natur nach nicht von einander unterscheiden.

Es ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{r}{\sin s} \cdot \sin \delta \; \cos \sigma$$

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{r}{\sin s \; \cos s} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 s - \sin^2 \delta}{\sin^2 \sigma - \sin^2 s}} \cdot \sin \sigma \; \cos \sigma$$

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\cos s} \cdot \cos \delta \; \sin \sigma$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = \frac{r}{\sin s} \sin \sigma \; \cos \delta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} = -\frac{r}{\sin s \; \text{sos}\, s} \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 s}{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} \cdot \sin \delta \; \cos \delta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \delta} = -\frac{r}{\cos s} \cos \sigma \; \cos \delta .$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = r^2 \cdot \frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 \delta}{\sin^2 \sigma - \sin^2 s}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \delta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \delta}\right)^2 = r^2 \cdot \frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 \delta}{\sin^2 s - \sin^2 \delta} .$$

Bezeichne ich daher mit U den Umfang des sphärischen Kegelschnitts $\sigma = \sigma_1$, mit $\mathcal{F}$ seinen Flächeninhalt, so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass die Punkte jedes einzelnen Ellipsenquadranten durch die Grenzen $\delta = o$ und $\delta = s$ beherrscht werden:

$$U = 4r \int_o^s \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \delta}{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} \cdot d\delta \qquad (4)$$

$$\mathcal{F} = 4r^2 \int_s^{\sigma_1}\int_o^s \frac{(\sin^2 \sigma - \sin^2 \delta) \; d\sigma \; d\delta}{\sqrt{(\sin^2 \sigma - \sin^2 s)\;(\sin^2 s - \sin^2 \delta)}} . \qquad (5)$$

Die Formel für U kann zunächst an den beiden speziellen Fällen $\sigma = s$ und $\sigma = \frac{\pi}{2}$ bewahrheitet werden. Für $\sigma = s$ wird

$$U = 4r \int_o^s d\delta = 4rs; \text{ für } \sigma = \frac{\pi}{2} \text{ wird:}$$

$$U = 4r \int_o^s \frac{\cos\delta \; d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} = 4r \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2r\pi.$$

Es stellen diese beiden Werthe die Peripherieen der Grenzkurven dar, die wir besprochen haben.

Das allgemeine Integral

$$4r \int_o^s \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \delta}{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} \, d\delta$$

ist ein elliptisches Integral der dritten Gattung. Durch die Substitution

$$\frac{\sin^2 s - \sin^2 \delta}{\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \delta} = \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi$$

kann es leicht auf die Normalform gebracht werden. Da

$$o < \delta < s < \sigma < \frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

so ist φ ein reeller Bogen zwischen o und $\frac{\pi}{2}$. Den Grenzen o und s in Bezug auf δ entsprechen die Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und o in Bezug auf φ.

Aus der Substitutionsformel folgt sofort:

$$d\delta = \left(\frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} - 1\right) \frac{\sin^2 s \, \sin\varphi \, \cos\varphi \, d\varphi}{\sin\delta \, \cos\delta \left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi\right)^2}$$

$$\sin^2 \delta = \frac{\sin^2 s \, \cos^2 \varphi}{1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{\cos^2 s \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 s}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi\right)}{1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}, \text{ also}$$

$$\sin\delta \, \cos\delta = \frac{\sin s \, \cos s \, \cos\varphi \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 s}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}}{1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}.$$

Daher ist $d\delta = \left(\frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} - 1\right) \operatorname{tg} s \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 s}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}}$

und

$$\sqrt{\frac{\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \delta}{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} \, d\delta = \frac{\sin \sigma_1}{\cos s} \left(\frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} - 1\right) \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 s}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi}}.$$

Setze ich nun

$$\frac{\operatorname{tg}^2 s}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1} = \varkappa^2 ,$$

so wird:

$$U = 4r \cdot \frac{\sin \sigma_1}{\cos s} \left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1}\right) \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} .$$

Ich bemerke, dass hierin $\varkappa^2$ ein reeller, positiver, echter Bruch ist.

Die entwickelte Form des Integrals ist die Legendre'sche Normalform der dritten Gattung. Es folgt aus ihr die Jacobi'sche vermittelst der Substitution

$$\begin{array}{l} \varphi = \operatorname{am} u \\ d\varphi = \Delta \operatorname{am} u \, du \end{array} .$$

Den Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$ in Bezug auf φ entsprechen in Bezug auf u die neuen o und K. Die Bezeichnungen der elliptischen Funktionen und Transzendenten sind durchgehends hier und in dem Folgenden die Jacobi'schen.

Es wird das transformirte Integral:

$$U = 4r \cdot \frac{\sin \sigma_1}{\cos s} \left(1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1}\right) \int_o^K \frac{du}{1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 am\, u} .$$

Da $\frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} = \varkappa^2 \frac{\cos^2 s}{\cos^2 \sigma_1}$ und $\frac{\cos^2 s}{\cos^2 \sigma_1} > 1$ ist, so ist:

$$\varkappa^2 < \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} < 1 .$$

Daher setze ich

$$\frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} = \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K) \text{ und erhalte:}$$

$$\int_o^K \frac{du}{1 - \frac{\sin^2 s}{\sin^2 \sigma_1} \sin^2 \operatorname{am} u} = \int_o^K \frac{du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K) \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$= \int_o^K \left(1 + \frac{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K) \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K) \sin^2 \operatorname{am} u}\right) du$$

$$= K + \frac{\sin \operatorname{am} (ia + K)}{\cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K)} \int_o^K \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} (ia + K) \cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K) \, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K) \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$= K + \frac{\sin \operatorname{am} (ia + K)}{\cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K)} \Pi (K, ia + K) .$$

Man erkennt, dass $\Pi (K, ia + K)$ zu der dritten Art der cirkulären Klasse der elliptischen Integrale dritter Gattung gehört, zu derjenigen nämlich, bei welcher

$-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(ia+K)$ zwischen $-\varkappa^2$ und -1 liegt. Wäre es für irgend einen Zweck nöthig, Π in Reihen zu entwickeln, so wäre diese Bemerkung von Wichtigkeit.

Vermittelst der Formeln:

$$\Pi\,(K, ia+K) = K\,Z\,(ia+K)$$

$$\text{und } Z\,(ia+K) = \frac{\Theta'(ia+K)}{\Theta\,(ia+K)} \text{ lässt sich}$$

unser Integral auch durch die Θ-Funktion ausdrücken. Es wird dann:

$$\int_0^K \frac{du}{1-\dfrac{\sin^2 s}{\sin^2\sigma_1}\sin^2 \mathrm{am}\, u} = K\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,(ia+K)}{\cos\mathrm{am}\,(ia+K)\,\Delta\mathrm{am}\,(ia+K)}\cdot\frac{\Theta'(ia+K)}{\Theta(ia+K)}\right)$$

und daher:

$$U = 4r\,.\,\frac{\sin\sigma_1}{\cos s}\left(1-\frac{\sin^2 s}{\sin^2\sigma_1}\right) K\left(1+\frac{\sin\mathrm{am}\,(ia+K)}{\cos\mathrm{am}\,(ia+K)\,\Delta\mathrm{am}\,(ia+K)}\cdot\frac{\Theta'(ia+K)}{\Theta\,(ia+K)}\right)$$

$$= 4rK\,.\,i\left(\frac{\cos\mathrm{am}\,(ia+K)\,\Delta\mathrm{am}\,(ia+K)}{\sin\mathrm{am}\,(ia+K)} + \frac{\Theta'(ia+K)}{\Theta\,(ia+K)}\right)$$

Die elliptischen Funktionen dieser Formel beziehen sich sämmtlich auf den Modul

$$\varkappa^2 = \frac{\mathrm{tg}^2 s}{\mathrm{tg}^2\sigma_1}.$$

Die Konstante a ist durch die Gleichung definirt:

$$\sin^2\mathrm{am}\;(ia+K) = \frac{\cos^2 s}{\cos^2\sigma_1}.$$

Wollte man nicht den ganzen Umfang des sphärischen Kegelschnitts, sondern nur ein Stück desselben rektificiren, so hätte man in dem Integral (4) statt o und s diejenigen beiden Werthe von δ als Grenzen einzuführen, welche den Endpunkten des betreffenden Ellipsenbogens entsprächen. Lägen die beiden Grenzwerthe von δ in verschiedenen Quadranten, so würde man das Integral theilen müssen, im übrigen aber dieselben Transformationen wie oben anwenden.

Für den Flächeninhalt des Kegelschnitts $\sigma = \sigma_1$ hatten wir die Formel gefunden:

$$\mathscr{F} = 4\,r^2 \int_s^{\sigma_1}\int_o^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\delta)\,d\sigma\,d\delta}{\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)\,(\sin^2 s - \sin^2\delta)}}$$

$$= 4\,r^2\left\{\int_s^{\sigma_1}\frac{\sin^2\sigma\,d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma-\sin^2 s}}\int_o^s\frac{d\delta}{\sqrt{\sin^2 s-\sin^2\delta}} - \int_o^s\frac{\sin^2\delta\,d\delta}{\sqrt{\sin^2 s-\sin^2\delta}}\int_s^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma-\sin^2 s}}\right\}.$$

Diese Integrale lassen sich, da in ihnen die Variablen separirt vorkommen, leicht durch elliptische Funktionen integriren.

$$1)\ \int_o^s \frac{d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2 \delta}}. \quad \text{Wir setzen:}$$

$$\sin^2 s - \sin^2 \delta = \sin^2 s \cos^2 \varphi.$$

Da $\sin^2 s > \sin^2 \delta$ ist, so ist φ ein reeller Bogen zwischen o und $\frac{\pi}{2}$. Den Grenzen o und s entsprechen in Bezug auf φ die neuen o und $\frac{\pi}{2}$.

Es ist:

$$d\delta = \frac{\sin^2 s \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{\sin\delta \cos\delta},$$

$$\sin^2\delta = \sin^2 s \sin^2\varphi,$$

$$\cos^2\delta = 1 - \sin^2 s \sin^2\varphi, \text{ also}$$

$$d\delta = \frac{\sin s \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2\delta}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2\varphi}}.$$

Setze ich nun $\sin^2 s = \varkappa^2$, woraus folgt, dass $\varkappa^2$ ein reeller, positiver, echter Bruch ist, so wird:

$$\int_o^s \frac{d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2\delta}} = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = K.$$

$$2)\ \int_s^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2 s}} = \int_s^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos^2 s - \cos^2\sigma}}.$$

Man setze $\cos^2 s - \cos^2\sigma = \cos^2 s \cos^2\varphi$, so wird

$$\cos^2\sigma = \cos^2 s \sin^2\varphi,$$

$$\sin^2\sigma = 1 - \cos^2 s \sin^2\varphi, \text{ oder, wenn ich}$$

$$\cos^2 s = 1 - \varkappa^2 = \varkappa_1^2 \text{ setze:}$$

$$\sin^2\sigma = 1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi.$$

Den Grenzen s und σ_1 entsprechen die neuen:

$$\frac{\pi}{2} \text{ und } \varphi_1 = \text{arc}\sin\left(\frac{\cos^2\sigma_1}{\cos^2 s}\right).$$

Dann wird:

$$d\sigma = -\frac{\cos s \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\int_s^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos^2 s - \cos^2\sigma}} = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}} - \int_o^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= K(\varkappa_1) - F(\varphi_1),$$

oder, wenn ich u_1 durch die Gleichung definire $\operatorname{am} u_1 = \varphi_1$

$$\int_s^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos^2 s - \cos^2 \sigma}} = K(\varkappa_1) - u_1 .$$

3) Das Integral $\int_o^s \frac{\sin^2\delta \, d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2 \delta}}$ geht mittelst der bei dem ersten Integral angewandten Substitution über in:

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 s \sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \, d\varphi$$

$$= \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} - \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi .$$

Das zweite Integral ist ein elliptisches von der zweiten Gattung. Mittelst der Substitution $\varphi = \operatorname{am} u$ geht es sofort in die Jacobi'sche Normalform über:

$$\int_o^K \Delta^2 \operatorname{am} u \, du = \mathrm{E}(K),$$ wofür wir kurz $\mathcal{E}$ setzen wollen.

Dann wird also:

$$\int_o^s \frac{\sin^2\delta \, d\delta}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2\delta}} = K - \mathcal{E} .$$

4) Das letzte Integral $\int_s^{\sigma_1} \frac{\sin^2\sigma \, d\sigma}{\sqrt{\cos^2 s - \cos\sigma}}$ wird mittelst der Substitution $\cos^2 s - \cos^2\sigma = \cos^2 s \cos^2\varphi$ transformirt in $\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi$, oder, wenn ich wieder $\varphi = \operatorname{am} u$ setze und u_1 durch die Gleichung definire: $\operatorname{am} u_1 = \varphi_1$, in:

$$\int_{u_1}^{K(\varkappa_1)} \Delta^2 \operatorname{am} u \, du = \int_o^{K(\varkappa_1)} \Delta^2 \operatorname{am} u \, du - \int_o^{u_1} \Delta^2 \operatorname{am} u \, du$$
$$= \mathcal{E}(\varkappa_1) - \mathrm{E}(u_1, \varkappa_1) .$$

Wir haben daher gefunden:

$$\mathcal{F} = 4r^2 \Big\{ K(\varkappa) \big(\mathcal{E}(\varkappa_1) - \mathrm{E}(u_1, \varkappa_1) \big) - \big(K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa) \big) \big(K(\varkappa_1) - u_1 \big) \Big\}$$
$$= 4r^2 \Big\{ K(\varkappa)\, \mathcal{E}(\varkappa_1) + K(\varkappa_1)\, \mathcal{E}(\varkappa) - K(\varkappa)\, K(\varkappa_1) - K(\varkappa)\, \mathrm{E}(u_1, \varkappa_1) + u_1 \big(K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa) \big) \Big\} .$$

Nach einem bekannten Satze von Legendre ist aber

$$K(\varkappa)\, \mathcal{E}(\varkappa_1) + K(\varkappa_1)\, \mathcal{E}(\varkappa) - K(\varkappa)\, K(\varkappa_1) = \frac{\pi}{2},$$

folglich ist:

$$\mathcal{F} = 2\pi r^2 - 4r^2 \Big\{ K(\varkappa)\, \mathrm{E}(u_1, \varkappa_1) - u_1 \big(K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa) \big) \Big\} .$$

Das erste Glied dieser Formel bedeutet den Flächeninhalt einer Halbkugel, das zweite Glied muss daher den Flächeninhalt desjenigen Kugelstückes darstellen, welches die sphärische Ellipse $\sigma = \sigma_1$ zu jener Halbkugel ergänzt. Bedenken wir nun, dass die Quadraturformel für dieses Ergänzungsstück offenbar

$$\mathcal{F}_1 = 4r^2 \int_{\sigma_1}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\delta)\, d\sigma\, d\delta}{\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\delta)}} \text{ ist,}$$

so werden wir die Integralformel aufstellen dürfen:

$$\int_{\sigma_1}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\delta)\, d\sigma\, d\delta}{\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)\ (\sin^2 s - \sin^2\delta)}} = K(\varkappa)\, \mathrm{E}(u_1 \varkappa_1) - u_1 \left(K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa)\right).$$

Die Flächeninhalte der beiden Grenzkurven ergeben sich aus der Formel für $\mathcal{F}$ sofort, wenn man $\sigma_1 = s$ resp. $= \frac{\pi}{2}$ setzt. Für $\sigma_1 = s$ wird $u_1 = K(\varkappa_1)$ und daher $\mathcal{F} = o$; für $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$ wird $u_1 = o$ und daher $\mathcal{F} = 2\pi r^2$. Ginge man umgekehrt davon aus, dass für $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{F}$ gleich dem Flächeninhalte der Halbkugel, also gleich $2\pi r^2$ sein muss, und dass gleichzeitig die von u_1 abhängigen Glieder verschwinden, so erhielte man rückwärts den Legendre'schen Satz.

III. Die geometrischen Eigenschaften der Wellenoberfläche.

Die Haupteigenschaften der Wellenoberfläche sind bekannt. Ich werde mich daher hier darauf beschränken, zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sie bei Benutzung unserer Variablen erkannt werden können.

Indem ich die Variablen σ und δ auf die Wellenoberfläche anwende, wähle ich zu festen Axen die beiden Strahlenaxen. Im übrigen werden die Vorstellungen und Bezeichnungen des ersten Abschnitts festgehalten. Wenn dann die Gleichung der Wellenoberfläche in der Form

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = o \text{ gegeben,}$$

und für a, b, c die Reihenfolge $a > b > c$ festgesetzt ist, so wird der Winkel s durch die Gleichung definirt:

$$\cos^2 s = \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}, \text{ oder durch: } \sin^2 s = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}.$$

Wenn ich nun die Gleichung der Wellenoberfläche mittelst der Formeln (1) transformire und dabei berücksichtige, dass

$$\frac{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\delta)}{\sin^2 s\cos^2 s} = 1 - \frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} - \frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s} \text{ ist,}$$

so wird sie:

$$\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2}\cdot\frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} + \frac{b^2 r^2}{b^2 - r^2}\left(1 - \frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} - \frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s}\right) + \frac{c^2 r^2}{c^2 - r^2}\cdot\frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s} = o,$$

$$\text{oder: } \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}}\cdot\frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} + \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}}\cdot\frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s} + 1 - \frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} - \frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s} = o,$$

oder endlich:

$$1 + \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}}\cdot\frac{\sin^2\sigma\sin^2\delta}{\sin^2 s} + \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}}\cdot\frac{\cos^2\sigma\cos^2\delta}{\cos^2 s} = o.$$

Führt man nun für $\sin^2 s$ und $\cos^2 s$ die vorhin angegebenen Werthe ein, so ergiebt sich die Gleichung:

$$1 - \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}}\cdot\sin^2\sigma\sin^2\delta + \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}}\cdot\cos^2\sigma\cos^2\delta = o\,.$$

Wenn ich nun für einen Augenblick

$$\frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = x,\ \sin^2\sigma = m^2,\ \sin^2\delta = n^2 \text{ setze,}$$

so wird meine Gleichung:

$$\frac{m^2 n^2}{x} + \frac{(1 - m^2)(1 - n^2)}{1 - x} - 1 = o \text{ oder}$$

$$x^2 - x(m^2 + n^2) + m^2 n^2 = o\,.$$

Hieraus aber folgen die beiden Wurzeln:

$$x_1 = m^2\,, \qquad x_2 = n^2 \qquad \text{d. h.}$$

(6, α), (6, β)
$$\frac{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \sin^2\sigma\,,\quad \frac{\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \sin^2\delta\,,$$

oder in etwas anderer Form:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1^2} &= \frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos 2\sigma \qquad (\alpha) \\
\frac{1}{r_2^2} &= \frac{1}{a^2}\cos^2\delta + \frac{1}{c^2}\sin^2\delta \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos 2\delta\,. \qquad (\beta)
\end{aligned} \qquad (7)$$

Diese Gleichungen sind den Physikern bekannt, sind aber meines Wissens niemals direkt aus der Gleichung der Wellenoberfläche, sondern stets durch ganz andere Betrachtungen abgeleitet worden. Wir knüpfen an sie die weitere Diskussion.

Die Gleichungen (6) bestimmen im allgemeinen für jeden Werth von u und v d. h. für jede Richtung des Radius Vektors zwei verschiedene Längen desselben. Die Oberfläche besteht also aus zwei Nappen. Gemeinsame Punkte finden sich nur in den durch $u = o$ resp. $v = o$ charakterisirten Richtungen. Da $\sin\sigma$ stets grösser als $\sin\delta$ ist, so ist $\frac{1}{r_1}$ stets grösser als $\frac{1}{r_2}$, also $r_2 > r_1$. Daher ist (6, α) die Gleichung der inneren, (6, β) diejenige der äusseren Nappe.

Da r_1 allein von σ, r_2 allein von δ abhängt, so liegen die Radien Vektoren von gleicher Länge sowohl der einen, als auch der anderen Nappe je auf einem Kegel 2. O. Beide Kegel haben die Strahlenaxen zu Fokalaxen, sind also konfokal und schneiden sich daher unter rechten Winkeln. Die Radien Vektoren der Wellenoberfläche stellen sich daher als Kanten zweier Schaaren von konfokalen Kegeln dar, so zwar, dass jeder Radius Vektor sowohl auf einem Kegel der ersten, als auch auf einem der zweiten Schaar liegt. Die Radien Vektoren jeder einzelnen Nappe gehören immer nur zu den Kegeln einer und derselben Schaar. Hieraus folgt weiter sofort:

Alle Punkte der Wellenoberfläche, welche gleich lange Radien Vektoren haben, bilden sowohl auf der einen, als auch auf der anderen Nappe sphärische Kegelschnitte (für $r_1 = c$ wird ja σ, und für $r_2 = c$ wird δ konstant) und zwar — wenn es gestattet ist, diese Unterscheidung festzuhalten — auf der inneren Nappe sphärische Ellipsen, auf der äusseren sphärische Hyperbeln. Es ist bekannt — und kann z. B. aus der Fresnelschen punktweisen Konstruktion der Wellenoberfläche leicht nachgewiesen werden — dass die einer konstanten Länge des Radius Vektors der einen Nappe entsprechenden Radien Vektoren der anderen Nappe variiren wie die Radien Vektoren eines Ellipsoids, dass ihre Endpunkte also auf der Oberfläche eines Ellipsoids liegen. Daher schneidet das System von Kegeln, dessen Kanten die Radien Vektoren der inneren Nappe sind, die äussere Nappe in ellipsoidischen Kegelschnitten und zwar ellipsoidischen Ellipsen, das zweite System die innere Nappe in ellipsoidischen Hyperbeln.

Wenn man in den Formeln (1) irgend eine der drei Variablen r, σ, δ vermittelst der Gleichungen (7) eliminirt, so erfüllen die resultirenden Werthe von x, y, z die allgemeine Gleichung der Wellenoberfläche identisch, gleichviel, ob man zu jener Elimination (7, α) oder (7, β) benutzt hat. Die beiden übrig bleibenden Variablen stellen daher ein Koordinatensystem auf der Wellenoberfläche dar und zwar auf der inneren oder auf der äusseren Nappe, je nachdem man die Gleichung (7, α) oder (7, β) zur Elimination benutzt hat. In der That bedeutet ja diese Elimination geometrisch nichts anderes, als dass man sich auf diejenigen Punkte des Raumes zu beschränken gedenkt, welche auf der einen oder auf der anderen Nappe der Wellenoberfläche liegen.

Wir haben schon erkannt, dass, wenn wir r eliminiren, jenes Koordinatensystem auf jeder der beiden Nappen aus einer Schaar sphärischer und einer Schaar ellipsoidischer Kegelschnitte besteht. Dass sich die Kurven der beiden Schaaren unter rechten Winkeln schneiden, folgt schon aus unseren geometrischen Betrachtungen, folgt aber auch analytisch aus der leicht zu beweisenden Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial x}{\partial \delta}+\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y}{\partial \delta}+\frac{\partial z}{\partial \sigma}\frac{\partial z}{\partial \delta}=o\,.$$

Offenbar könnte man an dieser Stelle in Bezug auf die ellipsoidischen Kegelschnitte ähnliche Aufgaben behandeln, wie wir sie in dem zweiten Abschnitte in Bezug auf die sphärischen Kegelschnitte gelöst haben, indessen würde uns dies Thema hier zu weit führen und mag daher späterer Bearbeitung vorbehalten bleiben.

Dass die Grenzen der Variablen δ und σ wieder o und s resp. s und $\frac{\pi}{2}$ sein müssen, folgt, unabhängig von unseren früheren allgemeinen Betrachtungen, leicht auf folgende Weise:

Die Gleichung der inneren Nappe ist

$$\frac{\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}=\sin^2\sigma\,.$$

Ihre Radien Vektoren variiren von c bis b. Für $r_1=c$ ist $\sigma=\frac{\pi}{2}$. Dieser Werth von σ repräsentirt einen in der xy Ebene liegenden Kreis mit dem Radius c. An diesen Kreis reihen sich die sphärischen Ellipsen an, deren allgemeine Gleichung $\sigma=\sigma_1$ ist. Den Schluss bildet diejenige Kurve, deren Gleichung man erhält, wenn man $r_1=b$ setzt. Diese Gleichung ist:

$$\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}=\sin^2\sigma\text{, oder, was dasselbe ist:}$$

$$\sin^2 s=\sin^2\sigma\text{, woraus }\sigma=s\text{ folgt.}$$

Es ist diese Kurve ein in der xz Ebene liegender, zwischen den Strahlenaxen ausgespannter, begrenzter Kreisbogen mit dem Radius b. Die Gleichung der äusseren Nappe ist:

$$\frac{\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}=\sin^2\delta\,.$$

Ihre Radien Vektoren variiren von b bis a. Für $r_2 = b$ wird die Gleichung wieder

$$\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \sin^2 \delta \text{, woraus } \delta = s \text{ folgt.}$$

Diese Gleichung stellt zwei Kreisbögen mit dem Radius b dar, welche von den Strahlenaxen bis zur xy Ebene reichen. An diese Grenzkurven schliessen sich die sphärischen Hyperbeln mit der allgemeinen Gleichung $\delta = \delta_1$ an und enden mit derjenigen Kurve $\delta = o$, deren Gleichung man für $r_2 = a$ erhält. Diese Gleichung repräsentirt einen in der zy Ebene liegenden Halbkreis mit dem Radius a.

Man erkennt, dass die vorliegenden Betrachtungen nicht nur die Grenzen von δ und σ festgestellt, sondern auch ein vollständiges Bild von dem geometrischen Baue der Wellenoberfläche geliefert und namentlich auch diejenigen Kurven ermittelt haben, in denen die Oberfläche von den drei Hauptebenen geschnitten wird.

III. Die Kubatur der Wellenoberfläche.

Das Raumelement $dx dy dz$ wird in den Variablen r, σ, δ durch das folgende ersetzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial x}{\partial \sigma}, & \frac{\partial x}{\partial \delta} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial \sigma}, & \frac{\partial y}{\partial \delta} \\ \frac{\partial z}{\partial r}, & \frac{\partial z}{\partial \sigma}, & \frac{\partial z}{\partial \delta} \end{vmatrix} dr\, d\sigma\, d\delta .$$

Aus den Formeln (1) folgt ganz allgemein:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\sin \sigma \sin \delta}{\sin s}; \quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{r \cos \sigma \sin \delta}{\sin s}; \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = \frac{r \sin \sigma \cos \delta}{\sin s};$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{\sin s \cos s} \cdot \sqrt{(\sin^2 \sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2 \delta)};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{r}{\sin s \cos s} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 s - \sin^2 \delta}{\sin^2 \sigma - \sin^2 s}} \sin \sigma \cos \sigma;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} = - \frac{r}{\sin s \cos s} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 s}{\sin^2 s - \sin^2 \delta}} \sin \delta \cos \delta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\cos \sigma \cos \delta}{\cos s}; \quad \frac{\partial z}{\partial \sigma} = - \frac{r \sin \sigma \cos \delta}{\cos s}; \quad \frac{\partial z}{\partial \delta} = - \frac{r \cos \sigma \sin \delta}{\cos s}.$$

Daher ist das Raumelement in den neuen Variablen gleich:

$$\frac{r^2\, dr\, d\sigma\, d\partial}{\sin^2 s \cos^2 s}\begin{vmatrix} \sin\sigma\sin\partial\;, & \cos\sigma\sin\partial\;, & \sin\sigma\cos\partial \\ \sqrt{(\sin^2\sigma-\sin^2 s)(\sin^2 s-\sin^2\partial)}\,, & \sqrt{\dfrac{\sin^2 s-\sin^2\partial}{\sin^2\sigma-\sin^2 s}}\sin\sigma\cos\sigma, & -\sqrt{\dfrac{\sin^2\sigma-\sin^2 s}{\sin^2 s-\sin^2\partial}}\sin\partial\cos\partial \\ \cos\sigma\cos\partial\;, & -\sin\sigma\cos\partial\;, & -\cos\sigma\sin\partial \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$\frac{r^2\, dr\, d\sigma\, d\partial}{\sin^2 s\,\cos^2 s}\Big\{(\cos^2\sigma\sin^2\partial-\sin^2\sigma\cos^2\partial)\sqrt{(\sin^2\sigma-\sin^2 s)(\sin^2 s-\sin^2\partial)}$$
$$-\sin^2\sigma\cos^2\sigma\sqrt{\frac{\sin^2 s-\sin^2\partial}{\sin^2\sigma-\sin^2 s}}-\sin^2\partial\cos^2\partial\sqrt{\frac{\sin^2\sigma-\sin^2 s}{\sin^2 s-\sin^2\partial}}\Big\}$$
$$=\frac{r^2(\sin^2\partial-\sin^2\sigma)\, dr\, d\sigma\, d\partial}{\sqrt{(\sin^2\sigma-\sin^2 s)(\sin^2 s-\sin^2\partial)}}\,.$$

Da $\sin^2\partial < \sin^2\sigma$ ist, so ist der entwickelte Ausdruck für das Raumelement negativ. Es ist dies nur ein Fingerzeig für die Aufeinanderfolge der Integrationsgrenzen, ob man nämlich von dem kleineren zum grösseren oder von dem grösseren zu dem kleineren Werthe der Variablen zu integriren habe. In der Folge wird es sich rechtfertigen, dass, wenn man die Grenzen in der von uns angenommenen Reihenfolge einführt, das Element positiv genommen werden darf. Ich werde daher von vorneherein das Vorzeichen des Zählerfaktors umkehren.

Wir erhalten den Rauminhalt irgend eines Körpers, wenn wir das Element

in Bezug auf r von o bis r
» » » σ » s » $\frac{\pi}{2}$
» » » ∂ » o » s

integriren und das Resultat mit 8 multipliciren.

Nenne ich den Rauminhalt $\mathfrak{J}$, so ist also ganz allgemein:

$$\mathfrak{J}=8\int_o^r\int_s^{\frac{\pi}{2}}\int_o^s\frac{r^2(\sin^2\sigma-\sin^2\partial)\, dr\, d\sigma\, d\partial}{\sqrt{(\sin^2\sigma-\sin^2 s)(\sin^2 s-\sin^2\partial)}}$$

oder, indem ich die Integration nach r ausführe:

$$\mathfrak{J}=\frac{8}{3}\int_s^{\frac{\pi}{2}}\int_o^s\frac{r^3(\sin^2\sigma-\sin^2\partial)\, d\sigma\, d\partial}{\sqrt{(\sin^2\sigma-\sin^2 s)(\sin^2 s-\sin^2\partial)}}\,.$$

Dies Integral zeigt, dass man mittelst der Variablen σ und ∂ den Rauminhalt aller derjenigen Oberflächen berechnen kann, deren Radius Vektor eine solche Funktion von σ und ∂ ist, welche die Variablen separirt enthält. Zu diesen Oberflächen gehört die Wellenoberfläche. Bevor ich zu derselben übergehe, mache ich von der allgemeinen Formel in aller Kürze eine Anwendung auf die Kugel.

Bei der Kugel ist r konstant und daher:

$$\mathfrak{J} = \frac{8}{3} \cdot r^3 \int_s^{\frac{\pi}{2}} \int_o^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\partial)\, d\sigma\, d\partial}{\sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\partial)}} \; .$$

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes sphärischer Kegelschnitte haben wir den Werth dieses Integrals gleich $\frac{\pi}{2}$ ermittelt. Es ergiebt sich daher für $\mathfrak{J}$ der bekannte Werth $\frac{4}{3}\pi r^3$. Ebenso leicht liesse sich der Inhalt kegelförmiger Stücke der Kugel ermitteln, deren Spitze der Mittelpunkt und deren Grundfläche ein Kegelschnitt einer der beiden Schaaren wäre.

Um den Rauminhalt der äussseren Nappe der Wellenoberfläche zu erhalten, habe ich in der Formel (8) für r den sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial$$

ergebenden Werth zu setzen. Bezeichne ich diesen Rauminhalt mit W_a, so wird:

$$W_a = \frac{8}{3} \int_s^{\frac{\pi}{2}} \int_o^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\partial)\, d\sigma\, d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial\right)^3} \cdot \sqrt{(\sin^2\sigma - \sin^2 s)\,(\sin^2 s - \sin^2\partial)}}$$

$$= \frac{8}{3}\left\{ \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\sigma\, d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2 s}} \int_o^s \frac{d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial\right)^3} \cdot \sqrt{\sin^2 s - \sin^2\partial}} \right.$$

$$\left. - \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2 s}} \int_o^s \frac{\sin^2\partial\, d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial\right)^3} \cdot \sqrt{\sin^2 s - \sin^2\partial}} \right\} .$$

Die Integrale in Bezug auf σ sind uns bekannt. Wir haben gefunden, dass, wenn wir $\sin^2 s = \varkappa^2$, also $\cos^2 s = \varkappa_1{}^2$ setzten:

$$\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\sigma\, d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2 s}} = \mathfrak{E}(\varkappa_1) ,$$

$$\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2 s}} = K(\varkappa_1) \text{ wurde.}$$

Daher wird:

$$V_a = \frac{8}{3}\left\{ \mathfrak{E}(\varkappa_1) \int_o^s \frac{d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial\right)^3 (\sin^2 s - \sin^2\partial)}} - K(\varkappa_1) \cdot \int_o^s \frac{\sin^2\partial\, d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\partial + \frac{1}{c^2}\sin^2\partial\right)^3 (\sin^2 s - \sin^2\partial)}} \right\} .$$

Um die Natur der noch übrig bleibenden Integrale zu erkennen, bringen wir sie auf eine algebraische Form. Setzen wir zunächst

$$\cos^2\delta = \frac{1+\cos 2\delta}{2},\ \sin^2\delta = \frac{1-\cos 2\delta}{2},\ \sin^2 s = \frac{1-\cos 2s}{2},$$

so wird das erste Integral:

$$\int_o^s \frac{d\delta}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos 2\delta\right)^3\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 2\delta-\cos 2s\right)}}$$

$$= \frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_o^s \frac{d\delta}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-\cos 2\delta\right)^3(\cos 2\delta-\cos 2s)}},$$

und das zweite:

$$\int_o^s \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2\delta)\,d\delta}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos 2\delta\right)^3\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\delta-\cos 2s)}}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_o^s \frac{(1-\cos 2\delta)\,d\delta}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-\cos 2\delta\right)^3(\cos 2\delta-\cos 2s)}}.$$

Setzen wir $\cos 2\delta = y$, so wird

$$d\delta = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Den Grenzen o und s entsprechen in Bezug auf y die neuen: 1 und $\cos 2s$, und daher gehen die beiden Integrale in die folgenden über:

$$1)\quad -\frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_1^{\cos 2s}\frac{dy}{\left(\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-y\right)\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-y\right)(y-\cos 2s)\,(1-y^2)}},$$

oder, wenn wir die Faktoren des Radikandus nach der Grösse ihrer Parameter ordnen:

$$\frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_1^{\cos 2s}\frac{dy}{\left(y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)\sqrt{\left(y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}.$$

$$2)\quad -\frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int\limits_1^{\cos 2s}\frac{(y-1)\,dy}{\left(y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)\sqrt{\left(y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}\,.$$

Man erkennt, dass beide Integrale elliptische von der zweiten Gattung sind.

Da $\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} > 1 > \cos 2s > -1$ ist, und da die Variable y sich zwischen den Grenzen 1 und $\cos 2s$ bewegt, so reduzire ich die Integrale auf die Normalform mittelst der Substitution:

$$\frac{y-1}{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}=\frac{\cos 2s-1}{\cos 2s-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}\,.\sin^2\varphi=\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\,.\sin^2\varphi\,.$$

Diese Substitution bestimmt einen Bogen φ, der zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Den Grenzen 1 und $\cos 2s$ entsprechen in Bezug auf φ die neuen: o und $\frac{\pi}{2}$.

Aus der Substitutionsformel folgt sofort:

$$\frac{dy}{\left(y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)^2}=-\frac{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\frac{1}{a^2}\,.\,\frac{1}{b^2}}\,.\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi\,,$$

$$\frac{y-\cos 2s}{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}=\frac{1-\cos 2s}{1-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}\,.\cos^2\varphi=-\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}\,.\cos^2\varphi\,,$$

$$\frac{y+1}{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}=-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}\left\{1-\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}}\,.\,\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,.\sin^2\varphi\right\},$$

oder, wenn wir:

$$\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}} \cdot \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = \lambda^2 \text{ setzen,} \qquad = -\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi) .$$

Man erkennt leicht, dass $o < \lambda^2 < 1$ ist, denn es ist:

$$\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}} \cdot \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = \frac{1-\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}}{1-\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}}}, \text{ und } \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}} \text{ ist kleiner als } \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}.$$

Wir brauchen endlich noch die Formel:

$$y - \frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = -2 \cdot \frac{\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}{1-\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\sin^2\varphi} .$$

Wenn wir diese Werthe in die Integrale substituiren, so wird:

$$\frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \int_1^{\cos 2s} \frac{dy}{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\} \sqrt{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)(y-\cos 2s)(y+1)}} = \frac{2}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left\{1-\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\sin^2\varphi\right\} d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}},$$

$$-\frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \int_1^{\cos 2s} \frac{y-1}{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)(y-\cos 2s)(y+1)}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} .$$

Setzen wir jetzt:

$$\frac{\varphi = \operatorname{am} u}{d\varphi = \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} u}\; du}\text{, so wird:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \dfrac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} \sin^2\varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{K(\lambda)} du - \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} \int_0^{K(\lambda)} \sin^2 \operatorname{am} u\, du$$

$$= K(\lambda) - \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{K(\lambda)} (1-\Delta^2 \operatorname{am} u)\, du$$

$$= K(\lambda) - \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \Big(K(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda)\Big)$$

$$= K(\lambda) - \frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}} \Big(K(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda)\Big)$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}} K(\lambda) + \frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}}\, \mathcal{E}(\lambda).$$

Daher ist:

$$\frac{2}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \dfrac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} \sin^2\varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} = 2\left\{\frac{1}{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{b}} K(\lambda) + \frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\, \mathcal{E}(\lambda)\right\}.$$

Ebenso wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{K(\lambda)} \sin^2 \operatorname{am} u\, du = \int_0^{K(\lambda)} \frac{1}{\lambda^2}(1-\Delta^2 \operatorname{am} u)\, du = \frac{1}{\lambda^2}\Big(K(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda)\Big),$$

folglich:

$$\frac{2}{\frac{1}{b^3}} \cdot \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}} \left\{K(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda)\right\}.$$

Wir haben daher für den Rauminhalt der äusseren Nappe folgenden Ausdruck gefunden:

$$W_a = \frac{16}{3}\left\{\mathcal{E}(\varkappa_1)\left(\frac{1}{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{b}}K(\lambda) + \frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\mathcal{E}(\lambda)\right) - K(\varkappa_1)\left(\frac{1}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\left\{K(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda)\right\}\right)\right\}$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\left\{K(\lambda)\left(\mathcal{E}(\varkappa_1) - K(\varkappa_1)\right) + \mathcal{E}(\lambda)\left(\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}\mathcal{E}(\varkappa_1) + K(\varkappa_1)\right)\right\}.$$

Die Moduln $\varkappa$ und λ sind durch folgende Relationen mit einander verbunden:

$$\lambda^2 = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\sin^2 s = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\varkappa^2$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\cos^2 s = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\varkappa_1^2\,.$$

Um den Rauminhalt der inneren Nappe zu finden, habe ich in der Formel (8) für r denjenigen Werth zu setzen, der sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma \text{ ergiebt.}$$

Bezeichne ich diesen Rauminhalt mit W_i, so wird:

$$W_i = \frac{8}{3}\int_s^{\frac{\pi}{2}}\int_0^s \frac{(\sin^2\sigma - \sin^2\partial)\,d\sigma\,d\partial}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3(\sin^2\sigma - \sin^2 s)(\sin^2 s - \sin^2\partial)}}$$

$$= \frac{8}{3}\left\{\int_0^s \frac{d\partial}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2\partial}}\int_s^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\sigma\,d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3(\sin^2\sigma - \sin^2 s)}}\right.$$

$$\left. - \int_0^s \frac{\sin^2\partial\,d\partial}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2\partial}}\int_s^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3(\sin^2\sigma - \sin^2 s)}}\right\}.$$

Die Integrale in Bezug auf ∂ sind uns bekannt. Wir haben früher gefunden:

$$\int_0^s \frac{d\partial}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2 \partial}} = K(\varkappa),$$

$$\int_0^s \frac{\sin^2 \partial \, d\partial}{\sqrt{\sin^2 s - \sin^2 \partial}} = K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa).$$

Daher wird:

$$\mathrm{W}_i = \frac{8}{3} \left\{ K(\varkappa) \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \sigma \, d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3 (\sin^2\sigma - \sin^2 s)}} \right.$$

$$\left. - \left(K(\varkappa) - \mathcal{E}(\varkappa)\right) \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3 (\sin^2\sigma - \sin^2 s)}} \right\}.$$

Die beiden Integrale dieser Formel sind von derselben Natur wie diejenigen, die wir soeben behandelt haben. Nichts destoweniger können wir ihre Werthe nicht ohne weiteres aus den vorigen ableiten, weil ihre Grenzen ganz andere geworden sind. Von den Grenzen aber hängt die Reduktionsformel und der Werth des Moduls ab.

Es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als auch in Bezug auf diese Integrale diejenigen Transformationen vorzunehmen, die wir bei jenen als nützlich erkannt haben.

Es ist:

$$\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\sigma \, d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3 (\sin^2\sigma - \sin^2 s)}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 2\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} - \cos 2\sigma\right\}^3 (\cos 2s - \cos 2\sigma)}},$$

$$\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\sigma + \frac{1}{c^2}\sin^2\sigma\right)^3 (\sin^2\sigma - \sin^2 s)}} = \frac{4}{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} - \cos 2\sigma\right\}^3 (\cos 2s - \cos 2\sigma)}}.$$

Setzen wir nun wie früher $\cos 2\sigma = y$

$$d\sigma = -\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$ so entsprechen

den Grenzen s und $\frac{\pi}{2}$ in Bezug auf y die neuen: $\cos 2s$ und -1. Dann wird das erste Integral gleich:

$$-\frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_{\cos 2s}^{-1}\frac{(1-y)\,\mathrm{d}y}{\left\{\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-y\right\}\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}-y\right\}(\cos 2s-y)\,(1-y^2)}}$$

oder geordnet:

$$-\frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_{\cos 2s}^{-1}\frac{(y-1)\,\mathrm{d}y}{\left\{y+\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}\sqrt{-\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}\,.$$

Das andere Integral wird:

$$\frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_{\cos 2s}^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}\sqrt{-\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}\,.$$

Da die Wurzeln des Radikandus, von der grössten angefangen, wieder in der früheren Ordnung

$$\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}},\ 1\,,\ \cos 2s\,,\ -1$$

auf einanderfolgen, die Grenzen des Integrals jetzt aber $\cos 2s$ und -1 sind, y also in dem letzten Intervall liegt, so bewirke ich die Reduction auf die Normalform durch folgende Substitution:

$$\frac{y-\cos 2s}{y-1}=\frac{1+\cos 2s}{2}\sin^2\varphi=\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\sin^2\varphi\,.$$

Der Winkel φ ist reell und liegt zwischen o und $\frac{\pi}{2}$. Den Grenzen $\cos 2s$ und -1 entsprechen die neuen: o und $\frac{\pi}{2}$.

Aus der Substitutionsformel folgt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2}=-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}=-2\cdot\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\cdot\frac{1-\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\cdot\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\sin^2\varphi}{1-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\cdot\sin^2\varphi}=-2\cdot\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\cdot\frac{1-\lambda_1^2\sin^2\varphi}{1-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\sin^2\varphi}.$$

λ_1^2 bedeutet das Komplement des Moduls λ^2, ist also gleich $1-\lambda^2$.

$$\frac{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}{y-1}=\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)\,;\quad \frac{y+1}{y-1}=-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\cos^2\varphi\,.$$

Setze ich diese Werthe in die Integrale ein, so wird:

$$-\frac{2}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_{\cos 2s}^{-1}\frac{(y-1)\,dy}{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}\sqrt{-\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{b^3}}\cdot\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)^3}}\,,$$

$$\frac{4}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}\int_{\cos 2s}^{-1}\frac{dy}{\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}\sqrt{-\left\{y-\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right\}(y-1)\,(y-\cos 2s)\,(y+1)}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{b^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{1-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\sin^2\varphi\right\}d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)^3}}\,.$$

Durch die Substitution: $\varphi=\mathrm{am}u$

geht $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)^3}}$ über in $\int_0^{K(\lambda_1)}\frac{du}{\Delta^2\,\mathrm{am}\,u}$.

Es gilt aber ganz allgemein die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial\,\omega}\left(\frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am}(\omega\,,\varkappa)\,.\,\cos \operatorname{am}(\omega\,,\varkappa)}{\varDelta \operatorname{am}(\omega\,,\varkappa)}\right) = \varDelta^2 \operatorname{am}(\omega\,,\varkappa) - \frac{\varkappa_1^2}{\varDelta^2 \operatorname{am}(\omega\,,\varkappa)}\,,$$

folglich ist in unserem Falle:

$$\frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{\lambda_1^2 \sin \operatorname{am}(u\,,\lambda_1) \cos \operatorname{am}(u\,,\lambda_1)}{\varDelta \operatorname{am}(u\,,\lambda_1)}\right) = \varDelta^2 \operatorname{am}(u\,,\lambda_1) - \frac{\lambda^2}{\varDelta^2 \operatorname{am}(u,\lambda_1)}\,.$$

Integrire ich diese Formel von o bis $K(\lambda_1)$, so verschwindet die linke Seite und ich erhalte:

$$\int_o^{K(\lambda_1)} \frac{\mathrm{du}}{\varDelta^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\lambda^2} \int_o^{K(\lambda_1)} \varDelta^2 \operatorname{am} u \,\mathrm{du} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathrm{E}\,(K,\,\lambda_1) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathcal{E}\,(\lambda_1)\,.$$

Daher ist:

$$2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^3}} \cdot \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda_1^2 \sin^2\varphi)^3}} = 2 \,.\, \frac{1}{\frac{1}{b^3}} \cdot \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \,.\, \mathcal{E}\,(\lambda_1) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c^2}} \mathcal{E}\,(\lambda_1)\,.$$

Ferner wird:

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left\{1 - \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \sin^2\varphi \right\} d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda_1^2 \sin^2\varphi)^3}} = \int_o^{K(\lambda_1)} \frac{\left\{1 - \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \sin^2 \operatorname{am} u \right\} \mathrm{du}}{\varDelta^2 \operatorname{am} u}$$

$$= \int_o^{K(\lambda_1)} \frac{\mathrm{du}}{\varDelta^2 \operatorname{am} u} - \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2} \int_o^{K(\lambda_1)} \frac{(1 - \varDelta^2 \operatorname{am} u)\,\mathrm{du}}{\varDelta^2 \operatorname{am} u}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}} \int_o^{K(\lambda_1)} \frac{\mathrm{du}}{\varDelta^2 \operatorname{am} u} + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}} \int_o^{K(\lambda_1)} \mathrm{du}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathcal{E}\,(\lambda_1) + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}} K(\lambda_1)\,.$$

Daher ist:

$$2\cdot\frac{1}{\frac{1}{b^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\sin^2\varphi\right)}{\sqrt{(1-\lambda_1^2\sin^2\varphi)^3}}\,d\varphi = 2\cdot\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^3}}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}(\lambda_1)+2\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}K(\lambda_1)$$

$$=-2\cdot\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\mathcal{E}(\lambda_1)+2\,\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}K(\lambda_1).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$W_i=\frac{16}{3}\left\{\frac{1}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\cdot K(\varkappa)\,\mathcal{E}(\lambda_1)-\big(K(\varkappa)-\mathcal{E}(\varkappa)\big)\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}K(\lambda_1)-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\mathcal{E}(\lambda_1)\right)\right\}$$

$$=\frac{16}{3}\left\{\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}K(\varkappa)\mathcal{E}(\lambda_1)-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}}\mathcal{E}(\varkappa)\mathcal{E}(\lambda_1)-\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}\cdot K(\lambda_1)\cdot\big(K(\varkappa)-\mathcal{E}(\varkappa)\big)\right\}$$

$$=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}}\left\{K(\lambda_1)\big(\mathcal{E}(\varkappa)-K(\varkappa)\big)+\mathcal{E}(\lambda_1)\left(K(\varkappa)-\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}}\mathcal{E}(\varkappa)\right)\right\}$$

Der Rauminhalt des zwischen den beiden Nappen liegenden Stückes der Wellenoberfläche ist daher gleich:

$$W_a-W_i=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{b}}\left\{\frac{1}{\frac{1}{c^2}}K(\lambda)\,\big(\mathcal{E}(\varkappa_1)-K(\varkappa_1)\big)-\frac{1}{\frac{1}{a^2}}K(\lambda_1)\big(\mathcal{E}(\varkappa)-K(\varkappa)\big)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{1}{c^2}}K(\varkappa_1)\,\mathcal{E}(\lambda)-\frac{1}{\frac{1}{a^2}}K(\varkappa)\,\mathcal{E}(\lambda_1)+\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{c^2}}\big(\mathcal{E}(\varkappa_1)\,\mathcal{E}(\lambda)+\mathcal{E}(\varkappa)\,\mathcal{E}(\lambda_1)\big)\right\}.$$

E. Hutt.