Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule

in

BERLIN.

Oster-Programm 1876.

Lehrgang der Elemente der synthetischen Geometrie in der Oberprima der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule. Vom Direktor Wilhelm Gallenkamp.

Berlin 1876.

Druck von J. Draeger's Buchdruckerei (C. Feicht).

Die Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule hat die Aufgabe zu den Studien auf technischen Hochschulen vorzubilden. Für die Mehrheit dieser Studien ist die Mathematik die grundlegende Wissenschaft; dem Techniker, dem Ingenieur soll sie das stets bereite Werkzeug, das ihm völlig geläufige Organ bei seiner Arbeit sein. Für die akademischen Studien sind in der Regel 3 bis 4 Jahre bestimmt; höchstens ein Drittel dieser Zeit, vorwiegend das erste Studienjahr, kann auf rein mathematische Studien verwendet werden. Hieraus folgt mit Nothwendigkeit, dass der Studirende aus der Schule eine mathematische Vorbereitung mitzubringen hat, durch welche er in die grundlegenden Anschauungen und Methoden der höheren Mathematik eingeführt und zu wissenschaftlicher Arbeit in diesem Gebiete gebildet ist. — Der Techniker, der Ingenieur muss u. a. mit den Methoden und Resultaten der neueren synthetischen Geometrie, wie sie zunächst durch Steiner's bahnbrechende Arbeiten begründet und demnächst weiter entwickelt sind, vertraut sein, weil ihre Kenntnis für wesentliche Theile seiner Studien sachlich die Voraussetzung bilden und weil kein andres Gebiet der Mathematik in annähernd gleichem Masse geeignet ist, die Energie räumlicher Anschauung auszubilden, welche für ihn ein sehr wesentliches Element formaler Bildung ist. — Für diese Studien ist es nun besonders wichtig, dass der Studirende schon auf der Schule in sie eingeführt sei, dass er im lebendigen Wechselverkehr mit dem Lehrer sich in die neuen Anschauungen eingelebt habe, weil ohne diese Voraussetzung es ihm mit Rücksicht auf die anderweitigen Verhältnisse nicht möglich sein würde, den akademischen Vortrag in selbstständiger Weise zu verwerthen. Ich habe seit einer Reihe von Jahren die Grundlagen der neueren synthetischen Geometrie in der Oberprima der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule behandelt und ich kann die Versicherung geben, dass die Erfolge gute gewesen sind. Derselbe Gegenstand wird nur an wenigen höheren Lehranstalten in den Kreis des Unterrichts gezogen, vielleicht weil es an zur schulmässigen Benutzung geeigneten Büchern darüber fehlt. Ich habe deshalb geglaubt, etwas Nützliches zu thun, wenn ich den von mir befolgten Lehrgang veröffentliche, wodurch ich gleichzeitig meinen Schülern förderlich zu sein hoffe.

Ich muss bemerken, dass unsere Schüler in die Oberprima Kenntnis der analytischen Geometrie der graden Linie, speciell eines Theiles derjenigen Entwicklungen, welche sich in Hesse's »Vorlesungen« finden, und Kenntnis der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte mitbringen, wie sie Steiner in seiner populären Vorlesung entwickelt und wie sie Geiser auf Grund jener Vorlesung dargelegt hat. An diese Vorkenntnisse sowie an den Inhalt der beiden ersten Theile meiner »Elemente der Mathematik« hatte selbstverständlich meine Behandlung anzuknüpfen. Ich habe meiner Behandlung die Anschauungen der »Geometrie der Lage,« wie sie sich im Anschluss an die Arbeiten von Staudts entwickelt hat, zu Grunde gelegt, einerseits, weil ich es für gut halte, dass die Schüler, welche bis dahin fast ausschliesslich an der Hand metrischer Relationen fortgeschritten sind, sich eine Zeit lang und bis zu einem gewissen Ziele mit ganzer Energie der Betrachtung und Entwickelung von Lagenbeziehungen hingeben (ohne jedoch mit systematischer Strenge metrische Erörterungen gänzlich auszuschliessen), andrerseits, weil mir ein auf diesen Grundanschauungen beruhendes Buch zu Gebote stand, welches ich den Schülern als Hülfsmittel empfehlen konnte, nämlich der erste Theil von Reye's Geometrie der Lage, obgleich es kein eigentliches Schulbuch ist.

Ich bitte nicht aus dem relativen Umfange, welchen ich dem einen oder anderen Theile des Gegenstandes in der folgenden Darstellung gewidmet habe, auf die relative Wichtigkeit zu schliessen, welche ich ihnen beilege. — Da die folgende Abhandlung künftig auch von meinen Schülern benutzt werden soll, so habe ich mitunter Gegenstände, die ich für sehr wichtig, zugleich für sehr geeignet zu ganz selbstständiger Bearbeitung durch die Schüler halte, ganz kurz und nur andeutungsweise behandelt; in ähnlicher Weise haben andere Gesichtspunkte auf die Raumvertheilung Einfluss geübt.

Einleitung.

§ 1. Die synthetische Geometrie lässt die Gesammtheit geometrischer Gestalten aus Grundgebilden entstehen.

Die einfachsten Grundgebilde sind die Punktreihe erster Ordnung, das Strahlenbüschel I. O. und das Ebenenbüschel I. O. Die Punktreihe I. O. ist die Gesammtheit der Punkte einer Graden. Das Strahlenbüschel I. O. ist die Gesammtheit der geraden Linien einer Ebene, die durch einen Punkt gehen. Das Ebenenbüschel I. O. ist die Gesammtheit der Ebenen, welche eine Grade gemein haben. — Die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen Punkt gehen, nennt man ein Strahlenbündel, die Gesammtheit aller Punkte und Graden, die in einer Ebene liegen, ein ebenes System.

§ 2. Um die Elemente eines Grundgebildes von einander zu unterscheiden, einzeln zu fixiren, kann man sich analoger Mittel bedienen, wie die analytische Geometrie in den Koordinaten, speziell in den Verhältniskoordinaten.

Wenn man in einer Punktreihe I. O. 2 feste Anfangselemente (Punkte) a und b willkürlich annimmt, so ist die Lage jedes dritten Elementes l durch den absoluten Werth des Verhältnisses $\frac{al}{bl}$ zweideutig bestimmt; und wenn man die Zeichenbestimmung hinzufügt, dass al und bl gleiche Vorzeichen haben, wenn sie gleich gerichtet sind, entgegengesetzte im entgegengesetzten Falle, so ist die Lage des Punktes l durch den algebraischen Werth des Verhältnisses $\frac{al}{bl} = \lambda$ eindeutig bestimmt.

Ebenso wenn man in einem Strahlenbüschel 2 Anfangselemente (Strahlen) a und b willkürlich aber fest annimmt, so ist die Lage jedes anderen Strahles l durch den in gleicher Weise aufgefassten algebraischen Werth des Verhältnisses $\frac{\sin al}{\sin bl} = \lambda$ eindeutig bestimmt.

Ebenso in einem Ebenenbüschel.

§ 3. Die nächste Aufgabe ist, zwei Grundgebilde derart aufeinander zu beziehen, dass jedem Elemente des einem Gebildes ein und nur ein Element des anderen Gebildes (selbstverständlich gegenseitig) entspricht.

Es sind 6 Combinationen möglich, nämlich 3 für die Beziehung von 2 gleichartigen Gebilden

(2 Punktreihen, 2 Strahlenbüschel, 2 Ebenenbüschel) und 3 für die Beziehung von zwei ungleichartigen Gebilden (Punktreihe und Strahlenbüschel, Punktreihe und Ebenenbüschel, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.)

Gleichgiltig, welcher Art die auf einander zu beziehenden Gebilde seien, so werden in dem einen irgend zwei Anfangselemente a und b und in dem andern ebenfalls irgend zwei Anfangselemente a' und b' angenommen; zwischen diesen besteht gar keine gegenseitige Abhängigkeit. Soll nun irgend ein Element l des einen Gebildes irgend einem Elemente l' des andern Gebildes zugewiesen sein, so muss zwischen den sie bestimmenden Verhältnissen λ und λ' eine Abhängigkeit bestehen. Ist diese in der Weise der **analytischen** Geometrie ausgedrückt, so muss sie, da die Beziehung eine **eindeutige** sein soll, durch eine Gleichung ersten Grades, also durch eine Gleichung von der Form

$$p\lambda\lambda' + q\lambda + r\lambda' + s = 0 \tag{1}$$

ausgedrückt sein. Sobald die Constanten $p\,q\,r\,s$ d. h. deren Verhältnisse gegeben sind, ist die Abhängigkeit vollkommen bekannt und somit ersichtlich, dass die gegenseitige Abhängigkeit von 3 Constanten, von 3 Bestimmungen abhängt. Weist man insbesondere 3 willkürlich gewählten Elementen $l_1\,l_2\,l_3$ des einen Gebildes 3 ebenso willkürlich gewählte Elemente des andern Gebildes $l_1'\,l_2'\,l_3'$ zu, so müssen die sie bestimmenden Verhältnisse $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_1'\,\lambda_2'\,\lambda_3'$ den 3 Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} p\lambda_1\lambda_1' + q\lambda_1 + r\lambda_1' + s = 0 \\ p\lambda_2\lambda_2' + q\lambda_2 + r\lambda_2' + s = 0 \\ p\lambda_3\lambda_3' + q\lambda_3 + r\lambda_3' + s = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Durch dieselben sind die Grössen $p\,q\,r\,s$, d. h. ihre Verhältnisse, eindeutig bestimmt; durch Substitution in die Gleichung (1) erhält man die verlangte Relation in vollkommen bestimmter Form. Damit hat man aus den Gleichungen (1) und (2) die Grössen $p\,q\,r\,s$ eliminirt, und darauf allein kommt es an; es führt also jeder andere Eliminationsweg zu demselben Ziele; das Eliminations-Resultat ist einfach die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda' & \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda_1\lambda_1' & \lambda_1 & \lambda_1' & 1 \\ \lambda_2\lambda_2' & \lambda_2 & \lambda_2' & 1 \\ \lambda_3\lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3' & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

eine Gleichung, welche vollständig an die Stelle von (1) tritt und durch welche die Werthe von p $q\,r\,s$ für die gegebenen Bestimmungen unmittelbar ersichtlich sind.

§ 4. So einfach, analytisch gesprochen, die durch die Gleichung (3) gegebene Beziehung ist, so wenig geometrisch anschaulich ist sie in ihrer Allgemeinheit. Sie lässt sich folgendermassen auf eine sehr anschauliche Form bringen:

Wenn man als **Anfangselemente** $a\,b\,a'\,b'$ zwei Paar einander zugeordnete Elemente der beiden Gebilde nimmt, so muss die Gleichung (1) auch erfüllt sein, wenn l mit a und l' mit a' zusammenfällt, d. h. für $\lambda = 0$ und $\lambda' = 0$; ebenso wenn l mit b und l' mit b' zusammenfällt, d. h. für $\lambda = \infty$ und $\lambda' = \infty$; folglich müssen dann p und s den Werth Null haben, die Gleichung (1) also sich auf

$$q\lambda + r\lambda' = 0 \tag{4}$$

reduciren; diese sagt aber nur, dass $\frac{\lambda}{\lambda'}$ constant ist.

Wenn also 3 Elemente $a\,b\,l$ des einen Gebildes willkürlich 3 Elementen $a'\,b'\,l'$ des andern Gebildes zugewiesen sind, so ist zu jedem Elemente m des einen Gebildes das zugehörige m' des andern gegeben durch die Gleichung $\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$; daraus erhält man:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$$

§ 5. Das Doppelverhältnis $\frac{\lambda}{\mu}$ oder $\frac{al}{bl} : \frac{am}{bm}$ resp. $\frac{\sin al}{\sin bl} : \frac{\sin am}{\sin bm}$ welches schon vorher von Anderen, namentlich von Möbius in fruchtbarster Weise betrachtet worden war, ist von Steiner zur Grundlage der synthetischen Behandlung der Geometrie gemacht worden. Er ist dabei selbstverständlich von anderen Grundanschauungen ausgegangen. Dieselben sind auf den ersten Seiten seiner »Systematischen Entwickelung« klar dargelegt. Er weist daselbst nach, dass zwei Punktreihen I. O., zwei Strahlenbüschel I. O., eine Punktreihe I. O. und ein Strahlenbüschel I. O. derart auf einander bezogen werden können, dass jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern Gebildes gegenseitig zugewiesen ist, und dass zwischen je zwei Gruppen von 4 Elementen, die einander zugewiesen sind, die obige Gleichung besteht; diese Beziehungen nennt er projektivische.

Die »Geometrie der Lage,« welche bei dem Aufbau der geometrischen Gestalten die Massbeziehungen ausschliesst, fasst aus der Steinerschen Beziehung das Eine heraus, dass darin je 4 harmonische Elemente des einen Gebildes 4 harmonischen Elementen des andern zugewiesen sind, und definirt umkehrend zwei projektivisch auf einander bezogene Grundgebilde als solche, in welchen je 4 harmonische Elemente des einen Gebildes 4 harmonischen Elementen des andern zugeordnet sind. Sie hat aber um ihres selbstständigen Aufbaus willen dann vorab 3 Aufgaben selbstständig zu lösen:

1. Harmonische Elemente unabhängig von Massbestimmungen zu definiren.
2. Nachzuweisen, dass man von 3 Elementen eines Gebildes ausgehend durch harmonische Elemente zu allen Elementen des Gebildes gelangen kann.
3. Dass durch die obige Definition der projektivischen Beziehung die Elemente der beiden Gebilde gegenseitig eindeutig einander zugewiesen sind.

Harmonische Elemente.

§ 6. 1. Wenn zwei Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ in zwei verschiedenen Ebenen so gelegen sind, dass je zwei entsprechende (entsprechend bezeichnete) Seiten derselben sich schneiden (also in je einem Punkte der Durchschnittslinie der beiden Ebenen), so gehen die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Eckpunkte $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\gamma\gamma_1$ durch einen Punkt, die beiden Dreiecke sind Schnitte eines und desselben Dreikants.

2. Wenn zwei Dreikante abc und $a_1b_1c_1$ mit verschiedenen Scheiteln so beschaffen und gelegen sind, dass je zwei entsprechende Kanten in einer Ebene liegen (also in einer Ebene, welche die beiden Scheitelpunkte enthält), so haben die beiden Dreikante ein und dasselbe Dreieck zur Schnittfigur.

3. Der Satz (1) gilt auch dann, wenn die beiden Dreiecke in derselben Ebene liegen, wie sich durch eine einfache Grenzbetrachtung ergiebt; aber auch ohne eine solche lässt er sich elementar aus (1) ableiten. — Er heisst dann:

Wenn zwei Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ in einer Ebene so beschaffen und gelegen sind, dass die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer Graden liegen, so gehen die drei Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt.

Man lege durch die Grade, in welcher die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seiten liegen, eine Ebene, ziehe in derselben durch die drei Schnittpunkte drei Grade, welche ein Dreieck bestimmen, das entsprechend mit $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ bezeichnet sei, so sind $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ nach (1) Schnitte eines Dreikants, dessen Scheitel σ heisse; ebenso sind $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ Schnitte eines Dreikants, dessen Scheitel σ_1 heisse; hierdurch ergibt sich, dass α α_1 α_2 σ σ_1 in einer Ebene liegen, dass also

$\alpha\alpha_1$ durch denjenigen Punkt geht, in welchem $\sigma\sigma_1$ die Ebene der beiden gegebenen Dreiecke schneidet; aus demselben Grunde gehen $\beta\beta_1$ und $\gamma\gamma_1$ durch denselben Punkt.

4. Umgekehrt: Wenn 2 Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ in einer Ebene so beschaffen und gelegen sind, dass die drei Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt gehen, so liegen die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer Graden.

Der gemeinsame Punkt der 3 Graden heisse τ; durch denselben lege man eine beliebige Grade und wähle in ihr 2 Punkte σ und σ_1, mache σ zum Scheitel eines Dreikants über $\alpha\beta\gamma$ und σ_1 zum Scheitel eines Dreikants über $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so haben dieselben nach (2) ein Dreieck $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ gemein; $\alpha\beta$ und $\alpha_2\beta_2$ liegen in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte der Durchschnittslinie ihrer Ebenen; ebenso schneiden sich $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ in einem Punkte der Durchschnittslinie ihrer Ebenen, folglich schneiden sich $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ in einem Punkte derjenigen Linie, in welcher die Ebene des gegebenen Dreiecks von der Ebene des Dreiecks $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ geschnitten wird; in derselben schneiden sich aus gleichem Grunde $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma_1$, $\beta\gamma$ und $\beta_1\gamma_1$.

5. Wenn zwei vollständige Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ derselben Ebene so beschaffen und gelegen sind, dass 5 Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer Graden liegen, so liegt der Durchschnittspunkt des sechsten Paares entsprechender Seiten in derselben Graden.

Es mögen die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ $\beta\gamma$ $\beta\delta$ resp. mit $\alpha_1\beta_1$ $\alpha_1\gamma_1$ $\alpha_1\delta_1$ $\beta_1\gamma_1$ $\beta_1\delta_1$ in einer Graden liegen, so sind die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ in dem Falle (3), folglich gehen die Graden $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\gamma\gamma_1$ durch einen Punkt; ebenso sind die Dreiecke $\alpha\beta\delta$ und $\alpha_1\beta_1\delta_1$ in dem Falle (3), folglich gehen die Verbindungslinien $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\delta\delta_1$ ebenfalls durch einen Punkt, d. h. die 4 Graden $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\gamma\gamma_1$ $\delta\delta_1$ haben einen Punkt gemein, folglich sind die Dreiecke $\alpha\gamma\delta$ und $\alpha_1\gamma_1\delta_1$ in dem Falle (4), mithin liegen die Durchschnittspunkte von $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ $\gamma\delta$ mit resp. $\alpha_1\gamma_1$ $\alpha_1\delta_1$ $\gamma_1\delta_1$ in einer Graden. — Der analoge Satz gilt, wenn die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen.

6. Parallel mit 5. geht der Satz: Wenn 2 vollständige Vierseite $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$ derselben Ebene so beschaffen und gelegen sind, dass 5 Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt gehen, so geht auch die sechste Verbindungslinie entsprechender Eckpunkte durch denselben Punkt. — Der entsprechende Parallelismus findet für die folgenden Sätze statt.

7. Wenn ein vollständiges Viereck derart veränderlich ist, dass 5 seiner Seiten durch 5 feste, in grader Linie liegende Punkte gehen, so geht die sechste Seite stets durch einen festen Punkt derselben Graden.

Um ein vollständiges Viereck zu konstruiren, von welchem 5 Seiten durch 5 gegebene Punkte gehen, wähle man willkürlich einen Punkt in der Ebene als Eckpunkt, verbinde ihn mit 3 der gegebenen Punkte, so hat man 3 Seiten (einseitig begrenzt), wähle in einer derselben willkürlich einen Punkt als zweiten Eckpunkt, verbinde ihn mit den beiden andern gegebenen Punkten, so hat man zwei weitere Seiten und dadurch das Viereck.

8. Lässt man von den 5 festen Punkten in (7) zwei mal zwei Schnittpunkte gegenüberstehender Seiten des Vierecks mit der Graden in einen zusammenfallen, so erhält man den Satz:

Wenn ein vollständiges Vierseit derart veränderlich ist, dass 2 gegenüberstehende Eckpunkte und der Durchschnitt der sie verbindenden Diagonale mit einer zweiten Diagonale fest sind, so ist auch der Durchschnitt der festen Diagonale mit der dritten Diagonale fest.

Wenn 2 vollständige Vierseite ein Paar gegenüberstehende Eckpunkte sowie den Durchschnitt der sie verbindenden, also ihnen gemeinsamen Diagonale mit einer zweiten Diagonale gemein haben, so haben sie auch den Durchschnitt der gemeinsamen Diagonale mit der dritten Diagonale gemein.

§ 7. 1. Von drei Punkten einer geschlossenen Linie — auch einer Graden, die als eine durch das Unendliche gehende in sich geschlossene Linie betrachtet wird — sind je zwei als aufeinander folgende anzusehen; ebenso bei 3 Strahlen eines Strahlenbüschels I. O. und bei 3 Ebenen eines Ebenenbüschels I. O.

2. Vier Punkte einer geschlossenen Linie — auch einer Punktreihe I. O. — können auf dreifache Art in zwei Punktenpaare zusammengefasst werden; in einer und nur einer dieser drei Combinationen werden die Punkte des einen Paares durch die Punkte des anderen Paares getrennt. Ebenso bei 4 Strahlen eines Strahlenbüschels I. O. und 4 Ebenen eines Ebenenbüschels I. O.

3. Wenn durch 4 Punkte einer Punktreihe I. O. 4 Strahlen eines Strahlenbüschel I. O. oder 4 Ebenen eines Ebenenbüschels I. O. gelegt werden, so entspricht eine Combination von gegenseitig sich trennenden Punktenpaaren einer Combination von sich trennenden Strahlen- resp. Ebenenpaaren. — Entsprechendes gilt, wenn 4 Strahlen eines Strahlenbüschels I. O. durch eine Grade geschnitten werden oder wenn durch sie 4 Ebenen eines Ebenenbüschels I. O. gelegt werden; auch wenn 4 Ebenen eines Ebenenbüschels von einer Graden oder einer Ebene geschnitten werden.

4. Zwei gegenüberstehende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits werden stets durch die Schnittpunkte der sie verbindenden Diagonale mit den beiden andern Diagonalen des Vierseits von einander getrennt. — Folgt aus 2 und 3.

§ 8. Definition. Je 2 gegenüberstehende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits werden durch die beiden Schnittpunkte der sie verbindenden Diagonale mit den beiden andern Diagonalen desselben Vierseits harmonisch getrennt.

Folgerung. Auch die Schnittpunkte einer Diagonale mit den beiden andern Diagonalen werden durch die in der ersten Diagonale liegenden Eckpunkte harmonisch getrennt.

Beweis. Man nenne die 4 Seiten des vollständigen Vierseits $abcd$, die Diagonale, welche ab mit cd verbindet e, diejenige, welche ac mit bd verbindet f, diejenige, welche ad mit bc verbindet g; die Verbindungslinie von ab mit fg heisse l, die Verbindungslinie von cd mit fg heisse m; ab und cd werden durch ef und eg harmonisch getrennt. $almd$ bilden ein vollständiges Vierseit, welches mit dem ursprünglichen die Diagonale e vollständig, die Diagonale g der Lage nach gemein hat; die dritte, die Verbindungslinie von ld mit ma geht durch ef; ebenso geht die Verbindungslinie von lc mit bm durch ef; die Verbindungslinie von cl mit am durch eg und die Verbindungslinie von dl mit bm ebenfalls durch eg; folglich sind ef und eg zwei gegenüberstehende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, und die Schnittpunkte der sie verbindenden Diagonale mit der dritten Diagonale sind ab und cd, folglich werden auch ef und eg durch ab und cd harmonisch getrennt.

Man spricht demnach von einer Gruppe von 4 harmonischen Punkten und versteht darunter eine Gruppe von zwei Punktenpaaren einer Graden, die sich gegenseitig harmonisch trennen.

Eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten ist durch 3 derselben vollständig bestimmt, wenn zugleich die Art der Zuordnung gegeben ist. Man konstruirt zu $\alpha\beta\gamma$ den vierten, dem γ zugeordneten Punkt, indem man durch $\alpha\beta\gamma$ willkürlich 3 Grade abg legt, welche sich in einem Punkte schneiden, auf g einen Punkt beliebig wählt, ihn durch 2 Grade c und d mit α und β verbindet und in dem vollständigen Vierseit $abcd$ die dritte Diagonale zieht.

§ 9. Definition und Lehrsatz. 1. Ein vollständiges Vierseit bestimmt mit jedem ausser seiner Ebene liegenden Punkte ein Gebilde, welches vollständiges Vierseit im Raume genannt wird. Die Seiten des ebenen Vierseits bestimmen die Flächen des Vierseits im Raume, die Ecken die Kanten, die Diagonalen die Diagonalebenen.

2. Ein vollständiges Viereck bestimmt mit jedem ausserhalb seiner Ebene gelegenen Punkte ein Gebilde, welches vollständiges Vierkant genannt wird. Die Ecken bestimmen die Kanten, die Seiten die Flächen.

3. Eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten einer Graden s bestimmt mit jedem ausser-

halb der Graden gelegenen Punkte σ eine Gruppe von 4 Strahlen, welche 4 harmonische Strahlen (harmonisches Strahlenbüschel) genannt werden, weil sie von jeder durchgelegten Graden in 4 harmonischen Punkten geschnitten werden. — Denn man lege durch s eine beliebige Ebene, mache in ihr ein Paar zugeordnete Punkte von den gegebenen zu gegenüberstehenden Eckpunkten eines vollständigen Vierseits, das andre Paar zu Schnittpunkten der sie verbindenden Diagonale mit den beiden andern Diagonalen; dieses Vierseit bestimmt mit σ ein vollständiges Vierseit im Raume, welches von jeder durchgelegten Ebene in einem vollständigen ebenen Vierseit geschnitten wird.

Ein harmonischer Vierstrahl wird auch bestimmt durch ein Paar gegenüberstehende Seiten eines vollständigen Vierecks und die Verbindungslinien ihres Durchschnittspunktes mit den beiden andern Durchschnittspunkten gegenüberstehender Seiten.

4. Eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten bestimmt mit einer ihren Träger nicht schneidenden Graden eine Gruppe von 4 Ebenen eines Ebenenbüschels I. O., welche man 4 harmonische Ebenen oder ein harmonisches Ebenenbüschel nennt. Es hat die Eigenschaft, von jeder durch die zuerst gegebene Grade gelegten Ebene in einem harmonischen Strahlenbüschel geschnitten zu werden, demnach auch von jeder anderen Ebene, demnach auch von jeder Graden in 4 harmonischen Punkten.

Ein harmonisches Ebenenbüschel wird auch gebildet durch ein Paar gegenüberstehende Ebenen eines vollständigen Vierkants und durch die Verbindungsebenen ihrer Durchschnittslinie mit den beiden andern Durchschnittslinien gegenüberstehender Ebenen.

5. a. Eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten wird von jedem ausserhalb ihres Trägers liegenden Punkte durch ein harmonisches Strahlenbüschel und von einer jeden ihren Träger nicht schneidenden Graden durch ein harmonisches Ebenenbüschel projicirt.

b. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird durch jede Grade seiner Ebene in 4 harmonischen Punkten geschnitten und von jeder durch seinen Mittelpunkt gehenden Graden in einem harmonischen Ebenenbüschel projicirt.

c. Ein harmonisches Ebenenbüschel wird von jeder Graden in 4 harmonischen Punkten und von jeder Ebene in einem harmonischen Strahlenbüschel geschnitten.

Es ergeben sich hieraus zahlreiche Sätze und Konstruktionen, welche hier nicht aufgezählt werden sollen.

§ 10. Durch § 8 und 9 ist die erste der 3 in § 5 gestellten Fragen erledigt; folgendermassen erledigt sich die zweite. Es seien die Punkte $\alpha\beta\gamma$ in einer Graden gegeben; man konstruire zu ihnen den vierten harmonischen δ, indem man $\alpha\beta$ als zugeordnet betrachtet, den vierten harmonischen ε, indem man $\alpha\gamma$ als zugeordnet betrachtet, den vierten harmonischen ϑ, indem man $\beta\gamma$ als zugeordnet betrachtet; man bildet weitere Combinationen und gelangt dadurch zu einer unbeschränkten Zahl von Punkten der Graden; es ist die Frage, ob man so zu einem beliebig gewählten Punkte $\varkappa$ der Graden gelangen kann; wie viele einzelne Operationen dazu nöthig sind, ist gleichgültig, ihre Anzahl kann unendlich gross sein; folglich ist die Frage die, ob man sich jedem Punkte $\varkappa$ ins Unendliche nähern kann, oder umgekehrt, ob es eine endliche Strecke $\mu\nu$ giebt, zu deren Grenzen man gelangen kann, während kein innerhalb der Strecke gelegener Punkt erreichbar ist; die letzte Frage verneint sich sofort, denn zu $\mu\nu$ und jedem ausserhalb gelegenen Punkte giebt es einen diesem letzteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt, der zwischen μ und ν liegt. — Die gleiche Betrachtung gilt für Strahlenbüschel I. O. und Ebenenbüschel I. O.

Die projektivischen Beziehungen der Grundgebilde.

§ 11. Definition. Zwei Grundgebilde I. O. heissen projektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern Gebildes (gegenseitig eindeutig) derart zugewiesen ist, dass je 4 harmonischen Elementen des einen Gebildes 4 harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen.

Man kann, um zwei Grundgebilde projektivisch auf einander zu beziehen, 3 Elemente des einen willkürlich auswählen und ihnen 3 ebenso willkürlich gewählte des andern zuweisen; dadurch ist die Zuweisung durchaus vollzogen. Hier ist die dritte Frage des § 5 zu erledigen. — Fassen wir zunächst zwei Punktreihen ins Auge.

Es seien den Elementen $\alpha\beta\gamma$ der einen Graden die Elemente $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ der andern Graden zugewiesen. — Man gelange auf einem in § 10 vorgezeichneten Wege im ersten Gebilde zum Punkte λ und zum entsprechenden Punkte λ_1 des zweiten Gebildes; man gelange auf einem andern Wege, ebenfalls nach § 10, im ersten Gebilde nochmals zum Punkte λ und im zweiten entsprechend zum Punkte λ_1', es fragt sich, ob λ_1 von λ_1' verschieden sein kann. Man kann die Frage folgendermassen formuliren: Man kehre den ersten der Wege, auf welchem man zu λ gelangt war, um und schliesse an ihn den zweiten an, so gelangt man im ersten Gebilde von λ durch $\alpha\beta\gamma$ zu λ zurück auf einem sich cyklisch schliessenden Wege; entsprechend gelangt man von λ_1 durch $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ zu λ_1'; schliesst sich dieser Weg auch cyklisch?

Man lege die beiden Punktreihen so, dass ihre Träger die Punkte λ und λ_1 gemeinsam haben, so liegen von $\lambda\lambda_1$ ausgehend je 2 entsprechende Punkte in grader Linie, welche sämmtlich durch einen Punkt gehen; daraus folgt, dass λ_1' mit λ folglich mit λ_1 zusammenfällt.

Ebenso erledigt sich die Frage für Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

§ 12. 1. Zwei ungleichnamige Grundgebilde sind insbesondere dann projektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Elemente des einen Gebildes das in ihm liegende, resp. das durch ihn gehende Element des andern Gebildes zugewiesen ist; für eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel ist dabei vorausgesetzt, dass sie in einer Ebene, für ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel, dass sie in demselben Strahlenbündel liegen. — In dieser Lage heissen die Gebilde perspektivisch liegend. Zwei projektivisch auf einander bezogene ungleichnamige Gebilde liegen perspektivisch, sobald drei Elemente des einen durch die entsprechenden Elemente des andern gehen resp. in ihnen liegen.

2. Zwei in einer Ebene liegende Punktreihen sind insbesondere dann projektivisch auf einander bezogen, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämmtlich durch einen Punkt gehen; in den gemeinsamen Punkten der beiden Graden sind dann stets entsprechende Punkte vereinigt. In dieser Lage heissen die Punktreihen perspektivisch liegend. — Zwei in derselben Ebene liegende projektivische Punktreihen liegen perspektivisch, sobald 3 Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen. — Es findet das stets dann statt, wenn in dem gemeinsamen Punkte der beiden Graden zwei entsprechende Punkte vereinigt sind.

Man hat darin ein sehr einfaches Mittel, 2 projektivische Grade in perspektivische Lage zu bringen und dadurch zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende Element des andern Gebildes zu konstruiren. — Gleiche Entwickelungen ergeben sich für 2 Strahlenbüschel in einer Ebene, für 2 Strahlenbüschel in einem Strahlenbündel, für 2 Ebenenbüschel in einem Strahlenbündel.

§ 13. A. 1. Wenn 2 projektivisch auf einander bezogene in einer Ebene liegende Strahlenbüschel I. O., σ und σ_1 nicht perspectivisch (schief) liegen, so kann man auch ohne sie nach § 12 in perspektivische Lage zu bringen, zu jedem Elemente des einen Büschels das entsprechende Element des andern Büschels durch Konstruktion finden. Die projektivische Beziehung sei dadurch gegeben, dass den Strahlen $a\,b\,c$ des Büschels σ die Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$ des Büschels σ_1 zugewiesen sind. — Man lege durch den Schnittpunkt von a und a_1 die beiden Graden s und s_1, betrachte sie als Träger zweier Punktreihen, welche projektivisch und perspektivisch auf σ und σ_1 bezogen sind, so sind sie auch projektivisch auf einander bezogen und liegen perspektivisch, weil im gemeinsamen Punkte von a und a_1 entsprechende Punkte vereinigt sind. Die Schnittpunkte von s mit $a\,b\,c$ heissen $\alpha\,\beta\,\gamma$; die Schnittpunkte von s_1 mit $a_1\,b_1\,c_1$ heissen $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$; der Schnittpunkt von $\beta\beta_1$ und $\gamma\gamma_1$ sei σ_2, so bestimmt jede durch σ_2 gezogene Grade auf s und s_1 ein Paar entsprechende Punkte und somit ein Paar entsprechende Strahlen der Strahlenbüschel σ und σ_1. Wählt man also im Strahlenbüschel σ einen willkürlichen Strahl d, welcher s in δ schneidet, zieht $\delta\sigma_2$, welche Linie s_1 in δ_1 schneidet, so ist die Linie $\sigma_1\delta_1$ der Strahl d_1.

2. Der Schnittpunkt dd_1 heisse π. Man lasse d in kontinuirlicher Drehung alle Lagen im Strahlenbüschel σ einnehmen, so wird d_1 in kontinuirlicher Drehung alle Lagen im Strahlenbüschel σ_1 annehmen; der Punkt π wird eine kontinuirliche Punktreihe, eine Curve durchlaufen, welche mit jeder Graden höchstens 2 Punkte gemein hat; sie heisst deshalb eine Punktreihe oder eine Curve zweiter Ordnung. — Zu den Punkten dieser Curve gehören auch σ und σ_1, denn dem Strahle $\sigma\sigma_1$ des Strahlenbüschels σ entspricht ein Strahl des Strahlenbüschels σ_1; diese beiden Strahlen schneiden sich in σ_1; aus gleichem Grunde ist σ ein Punkt der Curve.

3. Die in 1. gegebene Konstruktion lehrt auf jedem durch σ resp. σ_1 gezogenen Strahle d resp. d_1 den zweiten Schnittpunkt π mit der Curve finden. — Fällt d mit $\sigma\sigma_1$ zusammen, so fällt π mit σ_1 zusammen; der dem Strahle $\sigma\sigma_1$ des Strahlenbüschels σ zugeordnete Strahl des Strahlenbüschels σ_1 ist Tangente der Curve im Punkte σ. Ebenso bestimmt man die Tangente der Curve im Punkte σ.

4. $\sigma_1\sigma_2$ schneide s im Punkte μ und $\sigma\sigma_2$ schneide s_1 im Punkte λ_1, so sind auch μ und λ_1 Punkte der Curve. — Da s und s_1 willkürlich durch irgend einen Punkt der Curve gezogene Linien sind, so ist hierdurch gelehrt, wie man in jeder durch einen gegebenen Punkt der Curve gezogenen Graden den zweiten Schnittpunkt mit der Curve konstruiren kann.

5. Lässt man s mit a_1 und s_1 mit a zusammenfallen, so fällt σ_2 in den Schnittpunkt der Tangenten in σ und σ_1, ist also von der Wahl derjenigen entsprechenden Strahlen a und a_1, mit welchen man s_1 und s zusammenfallen lässt, unabhängig; demnach gehen die Verbindungslinien von a_1b mit ab_1, von a_1c mit ac_1, von b_1c mit bc_1 u. s. w. sämmtlich durch einen Punkt. In Worten: Fasst man irgend 2 Paare zugeordneter Strahlen zusammen und bringt sie kreuzweise zum Durchschnitt, so gehen deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt.

6. Das einfache Sechseck $\sigma\pi\sigma_1\mu\alpha\lambda_1\sigma$ hat die Eigenschaft, dass die 3 Durchschnittspunkte gegenüberstehender Seiten in einer Graden liegen $(\delta\sigma_2\delta_1)$. In diesem Sechseck sind $\pi\,\mu\,\alpha\,\lambda_1$ ganz willkürliche Punkte der Curve; σ und σ_1 sind auch Punkte der Curve, aber sie nehmen zunächst als Mittelpunkte der Strahlenbüschel, durch welche die Curve erzeugt wird, eine singuläre Stellung ein; es ergibt sich jedoch, dass alle andern Punkte der Curve an ihre Stelle treten können.

Man lasse zu dem Ende a und a_1 andre Lagen annehmen, jedoch so, dass sie immer entsprechende Strahlen der Strahlenbüschel σ und σ_1 bleiben, so durchläuft aa_1 die vorher erzeugte Curve; die 5 übrigen Eckpunkte des obigen Sechsecks bleiben fest, die Seiten $\sigma\pi$, $\sigma_1\pi$, $\sigma_1\mu$ und $\sigma\lambda_1$ bleiben ebenfalls fest; die Seiten $\mu\alpha$ und $\lambda_1\alpha_1$ drehen sich um die festen Punkte μ und λ_1 und erzeugen auf den Graden $\sigma\pi$ und $\sigma_1\pi$ 2 Punktreihen δ und δ_1, auf welche sie projektivisch und perspektivisch bezogen sind; somit sind die Punktreihen δ und δ_1 zu einander projektivisch und liegen perspektivisch, da alle Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den Punkt σ_2 gehen. Folglich sind die beiden Strahlenbüschel μ und λ_1 projektivisch auf einander bezogen, sobald je 2 solche Strahlen einander zugewiesen sind, welche sich auf der Curve II. O. schneiden. — Hieraus folgt;

7. Zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte auf einer Curve II. O. liegen, sind projektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Strahle des einen Büschels derjenige Strahl des andern Büschels zugewiesen ist, welcher mit ihm einen Punkt der Curve gemein hat.

Wenn 4 Punkte einer Curve II. O. mit einem Punkte der Curve ein harmonisches Strahlenbüschel bestimmen, so bestimmen sie mit jedem Punkte der Curve ein harmonisches Strahlenbüschel. 4 solche Punkte heissen harmonische Punkte.

Eine Curve II. O. ist durch 5 Punkte vollständig bestimmt. — Hierin ist auch der Fall enthalten, wo 2 Punkte in einen zusammenfallen, sofern nur die Richtung ihrer Verbindungslinie, der Tangente in dem Punkte, gegeben ist; ebenso wenn 2 Paar Punkte zusammenfallen. Diese Bemerkung gilt für alle folgenden Entwicklungen.

In jedem einer Curve II. O. eingeschriebenen einfachen Sechseck liegen die 3 Schnittpunkte gegenüberstehender Seiten auf einer Graden. (Pascal'scher Satz). Auch die Umkehrung des Pascal'schen Satzes folgt aus der obigen Entwickelung; doch lässt sie sich folgendermassen direkt ableiten. Sie lautet:

Wenn die 3 Schnittpunkte gegenüberstehender Seiten eines einfachen Sechsecks auf einer Graden liegen, so liegen die 6 Eckpunkte auf einer Curve II. O. Es seien 1 2 3 4 5 6 die Eckpunkte eines einfachen Sechsecks, die Schnittpunkte (12, 45) (23, 56) (34, 61) liegen in einer Graden; man projicire von zweien der 4 Eckpunkte, die weder gegenüberliegende noch aufeinanderfolgende sind, von 1 und 5, die 4 übrigen Eckpunkte und zwar von 1 auf 34 und von 5 auf 23 (3 ist von 1 und 5 durch je einen Eckpunkt getrennt, 4 und 2 liegen 1 und 5 gegenüber), so erhält man die beiden Punktreihen

	(12, 34)	3	4	(34, 61)
und	2	3	(23, 45)	(23, 56)

Dieselben haben einen Punkt gemein und die 3 Verbindungslinien der übrigen Paare entsprechender Punkte, nämlich 12, 45 und die Verbindungslinie von (23, 56) mit (34, 61) gehen nach der Voraussetzung durch einen Punkt, wodurch der Satz bewiesen ist.

8. Von einer Curve II. O. seien 5 Punkte gegeben; es soll der zweite Schnittpunkt einer durch einen der 5 Punkte gelegten Graden mit der Curve, und die Tangente in irgend einem der gegebenen Punkte konstruirt werden. — Auflösung mittelst des Pascal'schen Satzes.

9. Wenn die beiden Strahlenbüschel perspektivisch liegen, so ist in diesem Grenzfalle das Erzeugnis ein System zweier Punktreihen I. O. als Grenzfall einer Punktreihe II. O.

10. Eine metrische Relation: Wenn man ein Strahlenbüschel doppelt gelegt denkt und das eine derselben in der Ebene verschiebt und dann um einen beliebigen Winkel dreht, so sind diese beiden Strahlenbüschel projektivisch auf einander bezogen, wenn man je zwei Strahlen einander zuweist, welche in der ursprünglichen Lage sich deckten; sie liegen schief und erzeugen einen Kreis.

B. Ganz analoge Entwicklungen ergeben sich für 2 nicht perspektivisch (schief) liegende projektivische Punktreihen. Es ergibt sich insbesondere: Die Gesammtheit der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier in einer Ebene schief liegenden projektivischen graden Punktreihen ist ein geometrisches Gebilde, welches zunächst die Eigenschaft hat, dass durch keinen Punkt der Ebene mehr als 2 der Verbindungslinien gehen, und welches deshalb Strahlenbüschel zweiter Ordnung genannt wird. — Dasselbe umhüllt eine krumme Linie. Durch jeden Punkt eines Strahles geht noch ein zweiter Strahl; die Grenzlage, welche der Schnittpunkt eines festen Strahles mit einem beweglichen Strahle beim Zusammenfallen beider annimmt, heisst der **Berührungspunkt** des festen Strahles. — Die beiden projektivischen Punktreihen, welche das Strahlenbüschel II. O. erzeugen, gehören auch zu den Strahlen des Büschels; ihrem gemeinsamen Punkte entsprechen die beiden Berührungspunkte. — Zwei grade Punktreihen, deren Träger Strahlen eines Strahlenbüschels II. O. sind, sind projektivisch auf einander bezogen, wenn je zwei solche Punkte derselben auf einander bezogen sind, die auf einem Strahle des Büschels liegen. — Wenn 4 feste Strahlen des Büschels auf einem Strahle des Büschels eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten bestimmen, so bestimmen sie auf jedem Strahle eine solche Gruppe. Solche 4 Strahlen werden harmonische genannt. — Ein Strahlenbüschel II. O. ist durch 5 seiner Strahlen, die ganz willkürlich gewählt werden, vollständig bestimmt. — In einem einfachen Sechsseit, dessen Seiten Strahlen eines Strahlenbüschels II. O. sind, schneiden sich die 3 Hauptdiagonalen in einem Punkte (**Brianchonscher** Satz); und umgekehrt. — Darauf gründet sich eine Reihe von Konstruktionen.

(AB). Die Sätze unter A. und B. finden eine wichtige und folgenreiche Vereinigung in dem Satze: Wenn 2 Dreiecke so beschaffen und gelegen sind, dass ihre 6 Eckpunkte auf einer Curve II. O. liegen, so sind ihre 6 Seiten Strahlen eines Strahlenbüschels II. O., und umgekehrt. Der erste dieser beiden Sätze erweist sich folgendermassen: Es seien die 3 Eckpunkte des einen Dreiecks 1 2 3, die des andern 4 5 6, so ergibt sich aus dem Pascal'schen Satze, dass die 3 Schnittpunkte (12, 45) (23, 56) (34, 61) in einer Graden liegen, folglich gehen die 3 Verbindungslinien von 6 mit 1, von 3 mit 4, von (12, 45) mit (23, 56) durch einen Punkt, folglich sind 6 (23, 56) 3 1 (12, 45) 4 die Eckpunkte eines einfachen Sechsseits, dessen Seiten Strahlen eines Strahlenbüschels II. O. sind; diese Seiten sind 56, 23, 31, 12, 45, 46 und das sind zugleich die Seiten der beiden gegebenen Dreiecke.

C. Durch Projektion der Figur in A erhält man analoge Entwickelungen für 2 projektivisch schief liegende Ebenenbüschel im Strahlenbündel; das Erzeugnis heisst: **Kegel** II. O. Dem entsprechend wird eine Curve II. O. auch ein **Kegelschnitt** genannt.

D. Durch Projektion der Figur in B. erhält man entsprechende Entwickelungen für 2 schief liegende projektivische Strahlenbüschel im Strahlenbündel; das Erzeugnis heisst **Ebenenbüschel** II. O.

§ 14. A. 1. Es seien $\alpha\beta\gamma\delta$ 4 Punkte einer Curve II. O. und resp. $a\,b\,c\,d$ die Tangenten in ihnen an dieselbe Curve. Das durch die Durchschnittspunkte gegenüberstehender Seiten des vollständigen Vierecks $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gebildete Dreieck und das durch die Diagonalen des vollständigen Vierseits $a\,b\,c\,d$ bestimmte Dreieck sind **dieselbe Figur**. Ergibt sich leicht aus dem Pascalschen Satze.

2. **Die Gesammtheit der Tangenten einer Curve II. O. bilden ein Strahlenbüschel II. O.**

Beweis. In der Figur unter 1 betrachte man $\beta\,\gamma\,\delta$ und $b\,c\,d$ als fest und lasse α die Curve durchlaufen und gleichzeitig a die Curve umrollen, so dass a eine Tangente in α bleibt; a schneide die Tangenten b und c in den Punkten β_1 und γ_1, so ist zu beweisen, dass die auf den Graden b und c erzeugten Punktreihen β_1 und γ_1 **projektivisch** sind.

Man nenne den Schnittpunkt von $\alpha\beta$ mit $\gamma\delta$ 1
» » » $\alpha\gamma$ mit $\beta\delta$ 2
» » » $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$ 3

und die ihnen gegenüberliegenden Seiten I II III,

so ist I die Diagonale, welche ab mit cd verbindet
» II » » ac mit bd »
» III » » ad mit bc »

dann liegt β_1 stets in I, einem Strahle des Strahlenbüschels (cd)
γ_1 » II, » » » (bd)

Diese Strahlen I und II schneiden einander in dem beweglichen Punkte 3 der festen Graden $\beta\gamma$, folglich sind die Strahlenbüschel (cd) und (bd) perspektivisch und somit projektivisch auf einander bezogen; also die Graden b und c rücksichtlich der Punktreihen β_1 und γ_1 projektivisch auf einander bezogen.

B. Die ganz analoge Entwicklung gilt für Strahlenbüschel II. O. Insbesondere ergibt sich der Satz: Die Gesammtheit der Berührungspunkte eines Strahlenbüschels II. O. bilden eine Curve II. O. (Punktreihe II. O.)

(A.B.) In derselben Figur wie in A. 2. ist δ der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, welches dem Strahlenbüschel (cd) projektivisch ist, indem der bewegliche Strahl δa dem beweglichen Strahle I entspricht; die beiden Büschel liegen perspektivisch, da δa und I sich im Punkte 3 der festen Graden $\beta\gamma$ schneiden. Daraus ergibt sich, dass das Strahlenbüschel δ rücksichtlich des Strahles δa der Punktreihe b rücksichtlich des Punktes β_1 und auch der Punktreihe c rücksichtlich des Punktes γ_1 projektivisch ist; und daraus folgt der Satz:

Wählt man einen beliebigen Punkt einer gegebenen Curve II. O. und eine beliebige Tangente derselben Curve, macht den Punkt zum Träger eines Strahlenbüschels I. O. und die Tangente zum Träger einer Punktreihe I. O., und weist jedem Strahle des Strahlenbüschels denjenigen Punkt der Punktreihe zu, in welchem sie von der Tangente geschnitten wird, welche die Curve im zweiten Schnittpunkte des Strahles berührt, so sind die beiden Gebilde projektivisch auf einander bezogen.

Folglich auch: Die Tangenten in 4 harmonischen Punkten einer Curve II. O. schneiden jede fünfte Tangente der Curve in 4 harmonischen Punkten; sie heissen harmonische Tangenten. — Ausdruck derselben Sätze für Strahlenbüschel II. O.

C.D. Analoge Sätze für Kegel II. O. und Ebenenbüschel II. O.

§ 15. 1. Zwei Punktreihen II. O. (Curven II. O.) sind projektivisch auf einander bezogen, wenn je 4 harmonischen Punkten der einen 4 harmonische Punkte der andern zugewiesen sind; die projektivische Beziehung ist vollständig bestimmt, wenn irgend 3 Punkten der einen Punktreihe irgend 3 Punkte der andern zugewiesen sind.

2. Eine und dieselbe Curve II. O. kann Träger zweier projektivisch auf einander bezogenen Punktreihen sein. Wenn dieselben mehr als 2 Paar Punkte entsprechend gemein haben, so fallen sie mit allen entsprechenden Punkten deckend auf einander.

3. Es seien $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ resp. entsprechende Punkte zweier solcher Punktreihen, welche dieselbe Curve II. O. zum Träger haben, so sind die beiden Strahlenbüschel I. O $\alpha\,(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$[1] und $\alpha_1\,(\alpha\beta\gamma\ldots)$ projektivisch auf einander bezogen und liegen, da sie den Strahl $\alpha\alpha_1$ entsprechend gemein haben, projektivisch, d. h. die Schnittpunkte von $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$, von $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma\ldots$ liegen auf einer Graden; vermöge des Pascal'schen Satzes liegt auf derselben Graden auch der Schnittpunkt von $\beta\gamma_1$ mit $\beta_1\gamma$ (Sechseck $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$). Folglich: Wenn man die Punkte zweier projektivischen Punktreihen, welche dieselbe Curve II. O. zum Träger haben, kreuzweise mit einander verbindet, so liegen die Schnittpunkte je zweier zusammengehörigen Verbindungslinien auf einer Graden. — Wenn diese Grade die Curve schneidet, so sind in solchem Schnittpunkte 2 entsprechende Punkte der beiden Punktreihen vereinigt; wenn sie mit der Curve keinen Punkt gemein hat, so haben die beiden Punktreihen keine zusammenfallenden entsprechenden Punkte. —

4. Wenn ein Punkt Mittelpunkt zweier projektivisch auf einander bezogenen Strahlenbüschel I. O. ist und dieselben mehr als 2 Paar Strahlen entsprechend gemein haben, so fallen sie mit allen

[1]) $\alpha(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ bedeutet ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt α ist, dessen Strahlen $\alpha\alpha_1$ $\alpha\beta_1$ $\alpha\gamma_1\ldots$ sind.

Paaren entsprechender Strahlen deckend auf einander. — Um zu untersuchen, ob 2 konzentrische projektivische Strahlenbüschel Strahlen entsprechend gemein haben, legt man durch ihr gemeinsames Centrum eine Curve II. O. (einen Kreis), bezieht die beiden Strahlenbüschel perspektivisch auf diese Curve und ermittelt die gemeinsamen Punkte dieser Punktreihen II. O. nach 3.

5. Wenn eine Grade Träger zweier projektivisch auf einander bezogenen Punktreihen I. O. ist und dieselben mehr als 2 Paar Punkte entsprechend gemein haben, so fallen sie mit allen Paaren entsprechender Punkte deckend auf einander. — Um zu untersuchen, ob 2 projektivische Punktreihen I. O., die denselben Träger haben, Punkte entsprechend gemein haben, projicirt man sie von einem und demselben Punkte aus, bezieht die beiden so entstehenden konzentrischen Strahlenbüschel perspektivisch auf die Punktreihen und untersucht nach 4., ob und welche Strahlen dieselben entsprechend gemein haben.

6. Aufgabe. Eine Curve II. O. ist durch 5 Punkte gegeben; es sollen die Punkte gesucht werden, welche sie mit einer gegebenen Graden gemein hat. Man mache 2 der 5 Punkte σ und σ_1 zu Mittelpunkten zweier projektivischen Strahlenbüschel, welche die Curve erzeugen, indem man sie mit den 3 andern gegebenen Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma$ verbindet und die Strahlen $\sigma\alpha$ $\sigma\beta$ $\sigma\gamma$ den Strahlen $\sigma_1\alpha$ $\sigma_1\beta$ $\sigma_1\gamma$ zuweist, so bestimmen die beiden Strahlenbüschel perspektivisch auf der gegebenen Graden 2 Punktreihen, welche denselben Träger haben und projektivisch auf einander bezogen sind; es handelt sich nur darum, nach 4. diejenigen Punkte zu finden, welche diese Punktreihen entsprechend gemein haben. — Ist die Curve durch 5 Tangenten gegeben, so führt man die Aufgabe auf die vorige zurück, indem man in den Tangenten (oder in 3 derselben) die Berührungspunkte konstruirt.

6. Aufgabe. Eine Curve II. O. ist durch 5 Tangenten gegeben; es sollen von einem gegebenen Punkte Tangenten an dieselbe gelegt werden. —

§ 16. Einige Form-Eigenschaften der Curven II. O.

1. Eine Curve II. O. kann unendlich entfernte Punkte haben; man kann zwei Strahlenbüschel projektivisch so auf einander beziehen, dass zweimal 2 entsprehende Strahlen einander parallel sind, und zwar auf unendlich viele Arten.

2. Wenn 2 Strahlenbüschel projektivisch so auf einander bezogen sind, dass sie mehr wie 2 Paare paralleler Strahlen haben, so sind je zwei entsprechende Strahlen parallel, die Strahlenbüschel liegen perspektivisch; ihr perspektivischer Durchschnitt ist die unendlich entfernte Grade; das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ist ein System von 2 Graden, von welchen die eine in unendlicher Entfernung liegt. — Abgesehen von diesem Grenzfalle hat demnach eine Curve II. O. nie mehr als 2 unendlich entfernte Punkte.

3. Wenn in einer Curve II. O. 2 verschiedene unendlich entfernte Punkte vorhanden sind, so liegen die Tangenten in ihnen in endlicher Entfernung; sie heissen dann Asymptoten.

Beweis. Es seien 1 2 3 4 5 gegebene Punkte einer Curve II. O., 1 2 3 in endlicher Entfernung, 4 und 5 in unendlicher Entfernung, durch zwei nicht parallele Richtungslinien gegeben; es soll die Tangente im Punkte 5 gefunden werden; es werde der mit 5 im Berühruugspunkte vereinigte Punkt 6 genannt, so dass also die Seite 56 zu konstruiren ist. — Der Schnitt von 12 mit 45 ist der unendlich entfernte Punkt von 12; der Schnitt von 34 mit 61 ist der Punkt, wo eine von 3 parallel zur Richtungslinie nach 4 gezogene Grade eine andere von 1 parallel zur Richtungslinie nach 6 d. h. nach 5 gezogene Grade schneidet; dieser Schnitt liegt nothwendig in endlicher Entfernung; die Pascal'sche Linie ist die Parallele von diesem Schnittpunkte mit der Linie 12; dieselbe schneidet die Linie 23 in endlicher Entfernung; die Grade, welche von diesem Punkte parallel zur Richtungslinie nach 5 gezogen wird, ist die Tangente in 5, die Asymptote.

4. Eine Curve II. O. kann nur eine Tangente in unendlicher Entfernung haben. — Eine

Curve II. O. kann stets durch 2 projektivische grade Punktreihen erzeugt werden; sie hat nur dann eine Tangente in unendlicher Entfernung, wenn die unendlich entfernten Punkte der beiden Punktreihen einander entsprechen; dann sind alle andern Projektionsstrahlen Verbindungslinien von Punkten in endlicher Entfernung, liegen also selbst in endlicher Entfernung.

5. Eine Curve II. O. welche einen und nur einen unendlich entfernten Punkt hat, hat eine unendlich entfernte Tangente, das ist die Tangente in diesem Punkte. Denn sobald eine Curve II. O. eine Asymptote, d. h. eine Tangente in endlicher Entfernung mit unendlich entferntem Berührungspunkte hat, hat sie noch eine zweite; es ergibt sich das sofort, wenn man die Curve durch 2 Strahlenbüschel entstehen lässt, von welchen das eine den gegebenen unendlich entfernten Punkt σ zum Mittelpunkt hat (es ist ein Parallel-Strahlenbüschel), das andere irgend einen beliebigen Punkt σ_1 der Curve. — Die gegebene Asymptote als Strahl des Parallelstrahlenbüschels σ entspricht demjenigen Strahle von σ_1, welcher der Asymptote parallel ist; in dem Strahlenbüschel σ_1 giebt es einen ganz bestimmten, welcher dem unendlich entfernten Strahle des Parallelenstrahlenbüschels σ zugewiesen ist; der unendlich enfernte Punkt dieses Strahles von σ_1 gehört demnach der Curve an.

6. Eine Curve II. O. kann auch ausschliesslich Punkte in endlicher Entfernung haben. — Wenn zwei gegebene Graden derart zu Trägern zweier projektivischen Punktreihen gemacht werden, dass derjenige Punkt in jeder von ihnen bestimmt wird, welcher dem unendlich entfernten Punkte der anderen entspricht und gleichzeitig der Berührungspunkt der einen der beiden gegebenen Graden, so ist die projektivische Beziehung vollständig hergestellt. — Wenn der Berührungspunkt zwischen dem Schnittpunkte der beiden Graden und dem in derselben Graden dem unendlich entfernten Punkte der andern Graden zugewiesenen Punkte liegt, so umhüllt das durch die beiden projektivischen Punktreihen erzeugte Strahlenbüschel eine Curve, welche keinen unendlich entfernten Punkt hat.

7. Eintheilung der Curven II. O. in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln je nachdem die Curve mit der unendlich entfernten Graden keinen Punkt, zwei getrennte Punkte oder einen Punkt (zwei zusammenfallende Punkte) gemein hat. — (Die hier definirten Namen, auch andere wie Kegelschnitt u. s. w., sind dem Schüler schon früher auf Grund anderer Definitionen bekannt geworden. Wann und wie der Nachweis zu führen ist, dass nicht verschiedene Gebilde mit demselben Namen bezeichnet sind, ist nach individuellen Verhältnissen des Unterrichtsganges zu entscheiden.)

§ 17. 1. In jedem Punkte einer Curve II. O. gibt es eine und nur eine Tangente; diese hat ausser dem Berührungspunkte keinen Punkt mit der Curve gemein.

In jeder Tangente einer Curve II. O. gibt es einen und nur einen Berührungspunkt; durch ihn lässt sich keine zweite Tangente an die Curve legen.

2. Jede Grade, welche mit einer Curve II. O. einen Punkt gemein hat und nicht Tangente an sie in diesem Punkte ist, hat mit ihr noch einen zweiten Punkt gemein.

Von jedem Punkte, durch welchen es eine Tangente an eine Curve II. O. gibt und welcher nicht Punkt der Curve ist, lässt sich noch eine zweite Tangente an die Curve legen.

Diese Sätze 1. und 2. sind schon vollständig in § 13 enthalten und hier nur des Zusammenhanges mit dem Folgenden wegen rekapitulirt.

3. Ein Punkt, von welchem sich keine Tangente an eine Curve II. O. legen lässt, heisst ein innerer; ein Punkt von welchem sich 2 Tangenten an die Curve legen lassen, heisst ein äusserer.

Eine Grade, welche keinen Punkt mit einer Curve II. O. gemein hat, heisst eine äussere; eine Grade, welche mit der Curve 2 Punkte gemein hat, heisst eine schneidende, eine Sekante.

4. a. Es bezeichne γ einen Punkt in endlicher Entfernung auf einer Curve II. O., c und

c_1 zwei durch γ gezogene Sekanten derselben (von welchen sich keine im Grenzfalle der Tangente befindet); wenn ein Punkt β die Curve durchläuft, so werden von demselben beim Ueberschreiten von γ beide Sekanten c und c_1 überschritten, β geht aus einem Winkelraume in dessen Scheitelwinkelraum über. — Es ergibt sich das sofort, wenn man die Curve durch 2 projektivische Strahlenbüschel erzeugt denkt, deren Mittelpunkte σ und σ_1 da liegen, wo die Sekanten c und c_1 die Curve zum zweiten Male schneiden.

Wenn dagegen c eine Tangente ist, c_1 nicht, so wird c nicht überschritten, wol aber c_1. Dies ergibt sich auf dieselbe Weise, wenn man σ in γ annimmt. (Eine Curve II. O. hat weder einen Wendepunkt noch eine Spitze).

b. Es bezeichne c eine Tangente einer Curve II. O., welche nicht Asymptote ist, (deren Berührungspunkt in endlicher Entfernung liegt), γ und γ_1 2 Punkte der Tangente, von welchen keiner im Berührungspunkte liegt. Wenn eine Tangente b die Curve umrollt, so wird sie, wenn sie c überschreitet, keinen der Punkte $\gamma\ \gamma_1$ überschreiten, d. h. wenn sie vorher c in einem Punkte, der zwischen γ und γ_1 liegt, schnitt, so wird sie das auch nachher; entsprechend im entgegengesetzten Falle. Es ergibt sich das sofort, wenn man die Curve durch 2 projektivische Punktreihen erzeugt denkt, deren Träger s und s_1 die zweiten Tangenten durch γ und γ_1 sind.

Ist dagegen γ Berührungspunkt, γ_1 nicht, so wird γ überschritten, nicht aber γ_1. — Ergibt sich auf dieselbe Weise, indem man c selbst als Träger der Punktreihe s annimmt.

5. a. Es bezeichne γ einen Punkt in unendlicher Entfernung, die Tangente in γ liege in endlicher Entfernung (sei eine Asymptote). Es seien c und c_1 zwei nach γ gerichtete Sekanten, doch keine die Tangente in γ, so ergibt sich auf dieselbe Weise wie unter 4., dass wenn ein beweglicher Punkt β die Curve durchläuft, er beim Ueberschreiten von γ in demjenigen Parallelstreifen cc_1, dem zwischen c und c_1 liegenden oder dem durchs Unendliche sich erstreckenden bleibt, in welchem er vorher war, so dass von den beiden Linien c und c_1 keine überschritten wird. Wenn dagegen c die Tangente in γ (die Asymptote) ist, so wird c überschritten, c_1 nicht.

b. Es bezeichne c eine Asymptote der Curve, γ und γ_1 2 Punkte der Asymptote in endlicher Entfernung. Wenn eine Tangente b die Curve umrollt, so wird sie, wenn sie durch c hindurch geht, keinen der Punkte $\gamma\gamma_1$ überschreiten; sie wird nach wie vor durch einen äusseren Punkt von $\gamma\gamma_1$ gehen. Ist dagegen γ der Berührungspunkt, γ_1 nicht, so wird γ überschritten, γ_1 nicht; es folgt das wie oben.

7. Es sei γ ein fester Punkt einer Curve II. O. und c die Tangente in demselben; δ sei ein beweglicher Punkt, welcher die Curve kontinuirlich durchläuft, ohne umzuwenden. — Wenn δ während seiner Bewegung immer mit einem festen Punkte $\varkappa$ in c verbunden ist, so wendet $\varkappa\delta$, wenn δ den Punkt γ überschreitet, in seiner Drehung um; wenn dagegen δ während seiner Bewegung stets mit einem festen Punkte $\varkappa_1$ ausserhalb c verbunden ist, so wendet $\varkappa_1\delta$ nicht in dem Augenblicke um, wo δ den Punkt γ überschreitet, sondern überschreitet $\varkappa_1\gamma$. —

Es sei c eine Tangente einer Linie II. O. und γ ihr Berührungspunkt; d sei ein beweglicher Strahl, welcher die Curve in kontinuirlicher Drehung umhüllt, d. h. so umhüllt, dass ihr Schnittpunkt mit irgend einer Tangente diese stets in gleicher Richtung durchläuft. — Der Schnitt von d mit einer durch γ gezogenen Graden k wird, wenn d durch die Lage c hindurchgeht, in γ umwenden; dagegen wendet der Schnitt von d mit einer festen Graden k_1, welche nicht durch γ geht, nicht in dem Augenblicke um, wo d durch die Lage c hindurch geht, sondern überschreitet den Punkt $k_1\,c$.

8. Umgekehrt: Wenn man einen festen Punkt $\varkappa$ in der Ebene einer Curve II. O. mit einem beweglichen Punkte δ der Curve verbindet, welcher dieselbe in kontinuirlicher Bewegung, d. h. ohne dass

einer der erzeugenden Strahlen umwendet, durchläuft, so wird der Strahl $\varkappa\delta$ in seiner Drehung umwenden, so oft er die Lage einer Tangente annimmt, und nie anders. Wenn also $\varkappa$ ein äusserer Punkt ist, so wendet der Strahl $\varkappa\delta$ zweimal um, und diese beiden Lagen theilen das Strahlenbüschel $\varkappa$ in 2 Abtheilungen, von welchen die eine diejenigen Strahlen enthält, welche die Curve zweimal schneiden, die andere diejenigen, welche mit ihr keinen Punkt gemein haben. Ist $\varkappa$ ein innerer Punkt, so wendet $\varkappa\delta$ nie um; jeder innere Punkt hat also die Eigenschaft, dass jede durch ihn gezogene Grade die Curve in 2 Punkten schneidet.

Wenn man eine feste Grade k in der Ebene einer Curve II. O. mit der beweglichen Tangente d dieser Curve zum Durchschnitt bringt, und man lässt die bewegliche Tangente die Curve in kontinuirlicher Bewegung, d. h. so umrollen, dass der erzeugende Punkt in jeder von 2 Tangenten, welche die Träger der erzeugenden Punktreihen sind, die betreffende Tangente ohne umzuwenden durchläuft (oder dass der Berührungspunkt die Curve ohne umzuwenden durchläuft), so wird der Punkt kd in seiner Richtung umwenden, so oft er mit einem Punkte der Curve zusammenfällt, also zweimal, wenn k die Curve in 2 Punkten schneidet; jede die Curve schneidende Grade wird also durch den Schnittpunkt in 2 Abtheilungen getheilt, von welchen die eine ausschliesslich innere Punkte, die andere ausschliesslich äussere Punkte enthält. Ist dagegen k eine die Curve nicht schneidende Grade, so wird kd dieselbe in ihrer ganzen Länge stets in gleicher Richtung durchlaufen; jede die Curve nicht schneidende Grade hat also die Eigenschaft, dass sie ausschliesslich äussere Punkte enthält.

Polarität.

§ 18. A. 1. In der Figur zu § 14. A. 2. gehören der Punkt 1 und die Grade I der Art zusammen, dass letztere die 6 folgenden Punkte enthält: den Schnittpunkt von $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$, den Schnittpunkt von $\alpha\gamma$ mit $\beta\delta$, den Punkt ab, den Punkt cd, denjenigen Punkt, welcher von 1 durch α und β harmonisch getrennt ist, und denjenigen Punkt, welcher von 1 durch γ und δ harmonisch getrennt ist. — Die Linie I ist durch 2 dieser 6 Punkte vollständig bestimmt. Dadurch ergibt sich bei neuer Bezeichnung Folgendes:

2. In der Ebene einer Curve II. O. sei ein fester Punkt γ gegeben; durch denselben werde eine die Curve in zwei Punkten $\varkappa$ und λ schneidende Grade gezogen; man lege in $\varkappa$ und λ 2 Tangenten an die Curve, welche sich in ε schneiden und konstruire zu $\varkappa\ \lambda\ \gamma$ den vierten, dem γ zugeordneten harmonischen Punkt δ, so ist die Lage der Linie $\delta\varepsilon$ von der Richtung der durch γ gezogenen Graden $\varkappa\lambda$ unabhängig; sie heisst die Polare des Punktes γ und soll mit c bezeichnet werden; γ heisst der Pol von c.

3. Man konstruirt nach 1. und 2. die Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve II. O., indem man durch denselben 2 Grade zieht, welche die Curve schneiden, in dem hierdurch bestimmten vollständigen Viereck, dessen Eckpunkte auf der Curve liegen, die beiden andern Paare gegenüberstehender Seiten zieht und deren Durchschnitte verbindet. — Die Verbindungslinie ist die Polare. — Konstruktion der Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf eine Curve II. O., die durch 5 Punkte gegeben ist.

4. Die Polare eines äusseren Punktes ist zugleich die Berührungssehne der beiden von dem Punkte an die Curve gezogenen Tangenten. Die Polare eines inneren Punktes hat mit der Curve keinen Punkt gemein. Die Polare eines Punktes der Curve selbst ist die Tangente in diesem Punkte.

Wenn der Punkt γ ein innerer Punkt ist, und man lässt die Linie $\varkappa\lambda$ in kontinuirlicher Drehung in einem und demselben Sinne alle Richtungen annehmen, so durchläuft der Punkt δ die ganze Linie c in einem und demselben Sinne; ebenso durchläuft ε die ganze Linie c in einem und demselben Sinne (§ 17. 8.). — Beide Richtungen sind dieselben; denn wären sie entgegengesetzt, so müssten δ und ε jedenfalls einmal zusammenfallen; das ist aber unmöglich, weil solches Zusammentreffen nur in einem Punkte der Curve möglich ist. — Die Pnnkte jedes Paares $\delta\varepsilon$ werden dabei durch die Punkte eines jeden anderen solchen Punktenpaares getrennt; denn nenne man eine feste Lage von $\delta\ \delta_1$ und eine feste Lage von $\varepsilon\ \varepsilon_1$ und lasse δ resp. ε von δ_1 resp. ε_1 ausgehend die ihnen zukommenden Lagen einnehmen, so werden zunächst $\delta\varepsilon$ und $\delta_1\varepsilon_1$ sich gegenseitig trennen, und wenn δ den Punkt ε_1 erreicht und überschreitet, wird gleichzeitig ε den Punkt δ_1 erreichen und überschreiten; denn $\varepsilon_1\gamma$ ist nach der Definition die Polare von δ_1, folglich ist $\varepsilon_1\gamma$ auch die Berührungssehne zweier von δ_1 an die Curve gelegten Tangenten, woraus folgt, dass δ_1 und ε_1 mit einander vertauscht werden können. — Wenn der Punkt γ ein äusserer ist und man die Linie $\varkappa\lambda$ alle ihr dann zukommenden Lagen annehmen lässt, so durchläuft der Punkt δ alle inneren Punkte der Linie c, der Punkt ε alle äusseren Punkte derselben Linie; die beiden Punkte δ und ε werden dabei stets durch diejenigen beiden Punkte, in welchen die Curve von der Linie c geschnitten wird, harmonisch getrennt.

B. Eine entsprechende Entwicklung knüpft sich an die Betrachtung des Strahlenbüschels II. O. Insbesondere ergiebt sich der Satz: In der Ebene einer Curve II. O. sei eine feste Grade c gegeben; in derselben werde ein äusserer Punkt gewählt, von welchem die beiden Tangenten k und l an die Curve gezogen werden; die Verbindungslinie der Berührungspunkte heisse e und der vierte harmonische Strahl zu klc, dem c zugeordnet, heisse d, so ist die Lage des Punktes de unabhängig davon, welcher Punkt in der Linie c gewählt wird; er ist der Pol von c.

(C.D.) Entsprechende Sätze für den Kegel II. O.

§ 19. (A.B.) 1. Die Polaren aller Punkte einer Graden schneiden sich in einem Punkte, dem Pole der Graden. Für alle äusseren Punkte der Graden folgt das aus § 18. B.; für alle inneren Punkte daraus, dass sie von dem Pole der Graden durch die Curve harmonisch getrennt sind. — Die Pole aller Graden, die durch einen Punkt gehen, liegen auf einer Graden, der Polaren des Punktes. Für alle die Curve schneidenden Strahlen folgt dies aus § 18. B.; für alle die Curve nicht schneidenden Strahlen daraus, dass sie von der Polare des Punktes durch die Curve harmonisch getrennt sind.

2. Hieraus ergibt sich eine einfache Construktion des Poles einer Graden in Bezug auf eine Curve II. O., die durch ihre Punkte, resp. durch 5 derselben, und der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve, die durch ihre Tangenten, resp. durch 5 derselben gegeben ist.

3. Ein Dreieck in der Ebene einer Curve II. O., welches die Eigenschaft hat, dass jeder seiner Eckpunkte Pol der gegenüberstehenden Seite in Bezug auf die Curve ist, heisst Polardreieck. Jeder Punkt γ ist gemeinschaftlicher Eckpunkt von unendlich vielen Polardreiecken; jeder Punkt β in der Polare von γ ist ein zweiter Eckpunkt eines solchen Dreiecks; durch γ und β ist das Dreieck vollständig bestimmt. — Von den 3 Eckpunkten eines Polardreiecks ist stets einer und nur einer ein innerer.

4. Wenn in einer Curve II. O. 3 Punkte $\alpha\beta\gamma$ gegeben sind und ausserdem die Bedingung dass ein gegebener Punkt λ Pol einer gegebenen Graden l_1 in Bezug auf die Curve sein soll, so ist dadurch die Curve im Allgemeinen vollständig bestimmt, denn es sind dadurch noch 2 Punkte der Curve bestimmt. Nur in dem Falle, wo λ in einer der 3 Seiten des $\varDelta\ \alpha\beta\gamma$ liegt, ist die Aufgabe einerseits überbestimmt, andrerseits unbestimmt. Es muss nämlich, wenn λ in $\alpha\beta$ liegt, l_1 von λ durch α und β harmonisch getrennt sein; wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist auch derjenige Punkt δ, welcher von γ durch λ und l_1 harmonisch getrennt ist, ein Punkt der Curve; alle Kegelschnitte durch $\alpha\beta\gamma\delta$ genügen den Bedingungen und keine anderen. — Hieraus folgt der Satz:

Wenn von einer Curve II. O. 1 Punkt a und die 2 Bedingungen gegeben sind, dass ein gegebener Punkt λ Pol einer gegebenen Graden l_1 und ein anderer gegebener Punkt μ Pol einer ebenfalls gegebenen Graden m_1 sei, so ist die Curve dadurch vollständig bestimmt. — Wenn von einer Curve II. O. 3 Tangenten abc gegeben sind und ausserdem die Bedingung, dass eine gegebene Grade l Polare eines gegebenen Punktes λ_1 in Bezug auf die Curve sein soll, so ist dadurch die Curve im Allgemeinen vollständig bestimmt. Nur in dem Falle, wo l durch einen der drei Eckpunkte des Δ abc geht, ist die Aufgabe einerseits überbestimmt, andrerseits unbestimmt; wie zuvor. — Wenn von einer Curve II. O. eine Tangente a und die zwei Bedingungen gegeben sind, dass eine gegebene Grade l Polare eines Punktes λ_1 und eine Grade m Polare eines Punktes μ_1 sei, so ist dadurch die Curve vollständig bestimmt.

(C.D.) Entsprechende Sätze für die Kegel II. O.

§ 20. (A.B.) 1. Die Polaren von 4 harmonischen Punkten einer Graden bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Beweis. Nach § 19. 1. gehen die 4 Polaren durch einen Punkt. — Man mache von den 4 gegebenen Punkten ein Paar zugeordnete zu gegenüberstehenden Eckpunkten eines vollständigen Vierseits und das andere Paar zugeordneter Punkte zu Diagonal-Schnittpunkten dieses Vierseits, so sind die Pole der Seiten dieses Vierseits Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, die Polaren des einen Paares der gegebenen Punkte sind ein Paar gegenüberstehende Seiten dieses Vierecks und die Polaren des anderen Paares sind Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den beiden andern Schnittpunkten gegenüberstehender Seiten. — Damit ist der Satz bewiesen.

2. Umkehrung von 1.

3. Eine Punktreihe I. O. und das von ihren Polaren in Bezug auf eine gegebene Curve II. O. gebildete Strahlenbüschel I. O. sind projektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Punkte der Punktreihe seine Polare zugewiesen ist.

4. Die Polaren der Punkte einer Curve II. O. in Bezug auf eine andre gegebene Curve II. O. umhüllen eine Curve II. O.

Denn man wähle auf der ersten Curve 2 Punkte σ und σ_1, mache dieselben zu Mittelpunkten zweier Strahlenbüschel I. O., welche die Curve erzeugen, so sind dieselben projektivisch auf einander bezogen. — Diesen Strahlenbüscheln entsprechen polar 2 Punktreihen, die dadurch projektivisch auf einander bezogen sind und somit ein ebenes Strahlenbüschel II. O. erzeugen; die Projektionsstrahlen sind die Polaren der Punkte der ersten Curve, wodurch der Satz bewiesen ist.

5. Umkehrung von 4.

(C.D.) Entsprechende Sätze für den Kegel II. O.

§ 21. Man nennt zwei Punkte in Bezug auf eine Curve II. O., mit welcher sie in einer Ebene liegen, polar konjugirt oder kurz konjugirt, wenn der eine in der Polare des andern liegt. Man nennt 2 Graden in Bezug auf eine Curve II. O., mit welcher sie in einer Ebene liegen, polar konjugirt oder kurz konjugirt, wenn die eine durch den Pol der andern geht. Man nennt 2 Strahlen in Bezug auf einen Kegel II. O., durch dessen Mittelpunkt sie gehen, konjugirt, wenn der eine in der Polarebene des andern liegt. Man nennt 2 Ebenen in Bezug auf einen Kegel II. O., durch dessen Mittelpunkt sie gehen, konjugirt, wenn die eine durch die Polare der andern geht.

§ 22.[1]) 1. Der Pol der unendlich entfernten graden Linie einer Ebene in Bezug auf eine Curve II. O. in dieser Ebene heisst ihr Mittelpunkt. Derselbe ist in der Ellipse ein innerer, in der Hyperbel ein äusserer Punkt; in der Parabel ist er der unendlich entfernte Punkt der Curve.

2. Jede durch den Mittelpunkt gezogene Grade ist die Polare eines unendlich entfernten

1) Die in diesem § entwickelten Beziehungen sind vorwiegend metrische.

Punktes, halbirt somit alle Sehnen einer gegebenen Richtung. Umgekehrt: Der geometrische Ort der Mitte einer Sehne von gegebener Richtung ist eine grade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht; sie heisst Durchmesser.

3. Je 2 Durchmesser, die im Sinne des § 21 konjugirte Linien sind, heissen konjugirte Durchmesser. — In der Parabel ist jeder Durchmesser der unendlich entfernten Graden konjugirt. — In der Ellipse und in der Hyperbel halbirt jeder Durchmesser die dem konjugirten Durchmesser parallelen Sehnen. — In der Hyperbel lassen sich vom Mittelpunkte als äusserem Punkte 2 Tangenten an die Curve legen; es sind die Asymptoten; ihre Berührungspunkte liegen in unendlicher Entfernung. In jeder Asymptote sind ein Paar konjugirte Durchmesser vereinigt. Jedes andre Paar konjugirter Durchmesser wird durch die Asymptoten harmonisch getrennt.

4. Je zwei Durchmesser einer Ellipse bestimmen durch ihre Endpunkte ein der Curve eingeschriebenes Parallelogramm; dasselbe gilt für die Hyperbel, sofern sie von den Durchmessern geschnitten wird. In jedem einer Ellipse oder einer Hyperbel eingeschriebenen Parallelogramme sind die Seiten konjugirten Durchmessern parallel; die Diagonalen sind Durchmesser; die Eckpunkte Berührungspunkte der Seiten eines der Curve umschriebenen Parallelogramms. — Die Verbindungslinien eines Punktes der Curve mit den Endpunkten eines Durchmessers sind konjugirten Durchmessern parallel und heissen Ergänzungssehnen.

5. Die Diagonalen des einer Curve II. O. umschriebenen Parallelogramms sind konjugirte Durchmesser, die Berührungspunkte der Seiten sind Eckpunkte eines eingeschriebenen Parallelogramms.

6. Durch 2 Paare konjugirter Durchmesser und 1 Punkt, resp. 1 Tangente ist eine Curve II. O. vollständig bestimmt.

7. Unter den konjugirten Durchmesserpaaren einer Ellipse und einer Hyperbel gibt es stets 1 Paar, die aufeinander senkrecht stehen; sie heissen die Axen der Curve. — Entsprechender Satz für die Parabel. — Im Kreise sind je 2 konjugirte Durchmesser auf einander senkrecht. — Wenn in einer Ellipse 2 Paar konjugirte Durchmesser auf einander senkrecht stehen, so ist dieselbe ein Kreis. — Eine Hyperbel, in welcher die Asymptoten auf einander senkrecht stehen, heisst gleichseitig. — Einige Spezial-Eigenschaften der Parabel ergeben sich als Grenzfälle der obigen Entwicklungen.

8. In einer durch 5 Punkte oder 5 Tangenten gegebenen Curve II. O. den Mittelpunkt und zu irgend einem Durchmesser den konjugirten zu konstruiren. — Eine Curve II. O. ist durch 3 Punkte und den Mittelpunkt vollständig bestimmt; ebenso durch 3 Tangenten und den Mittelpunkt.

Involution.

§ 23. 1. Wenn eine Grade Träger zweier projektivischen Punktreihen ist, so ist jeder Punkt gleichzeitig ein Element der einen und der andern Punktreihe. — Es sei α ein Punkt der einen Punktreihe, α_1 der entsprechende Punkt der andern; mit α_1 ist ein Punkt β der ersten Punktreihe vereinigt; ihm entspricht im Allgemeinen nicht der mit α vereinigte Punkt der zweiten Punktreihe. — Wenn dieser besondere Fall eintritt, dass der mit α vereinigte Punkt der dem β entsprechende Punkt β_1 ist, so sagt man, die beiden Punkte α und α_1, oder β und β_1, oder auch α und β entsprechen einander doppelt. —

Dieselbe Erwägung und dieselbe Bezeichnung gilt auch für 2 projektivische Strahlenbüschel I. O. einer Ebene, die denselben Mittelpunkt haben, für 2 Ebenenbüschel I. O,, welche dieselbe Axe haben, für 2 Punktreihen II. O., welche dieselbe Curve II. O. zum Träger haben, für 2 ebene Strahlenbüschel II. O., welche dieselbe Curve zum Träger haben, für 2 Strahlenbüschel II. O. im Strahlenbündel, welche denselben Kegel II. O. zum Träger haben, für 2 Ebenenbüschel II. O., welche denselben Kegel zum Träger haben. —

2. Wenn $\alpha\beta\gamma\delta \ldots$ und $\varkappa\lambda\mu\nu \ldots$ paarweis entsprechende Punkte zweier projektivischen Punktreihen sind, so dass α dem $\varkappa$, β dem λ etc. entspricht ist, so soll diese Beziehung durch die Bezeichnung $\alpha\beta\gamma\delta \ldots \barwedge \varkappa\lambda\mu\nu \ldots$ angegeben werden.

3. Wenn in einer Graden, welche der Träger zweier projektivisch auf einander bezogenen Punktreihen ist, ein Paar Elemente einander doppelt entsprechen, so findet dasselbe für alle Paare statt.

Beweis. Es seien $\alpha\beta\gamma\delta$ irgend 4 ganz willkürlich gewählte Punkte der Graden; man mache dieselbe zum Träger zweier projektivischen Punktreihen, indem man den Punkten $\alpha\beta\gamma$ resp. die Punkte $\beta\alpha\delta$ zuweist, so dass also α und β einander doppelt entsprechen, so handelt es sich darum, zu δ als Punkt der ersten Reihe den entsprechenden Punkt der anderen Reihe zu konstruiren. — Man ziehe durch α eine beliebige zweite Grade, verbinde einen beliebig in der Ebene der beiden Graden, ausserhalb beider Graden gewählten Punkt o mit $\beta\gamma\delta$, nenne die Punkte, in welchen diese Verbindungslinien die zweite Grade schneiden, resp. $\beta_1\gamma_1\delta_1$, den Schnittpunkt von $\delta\gamma_1$ mit $o\beta_1$ nenne man μ, so ist
$$\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \alpha\beta_1\gamma_1\delta_1 \barwedge \beta\beta_1\mu o \barwedge \beta\alpha\delta\gamma,$$
folglich entspricht dem Punkt δ der ersten Punktreihe der Punkt γ der zweiten; die Punkte γ und δ entsprechen einander doppelt, weil α und β einander doppelt entsprechen. — Dadurch ist der Satz bewiesen.

4. In gleicher Weise ergibt sich allgemein: Wenn in zwei gleichartigen Gebilden I. oder II. O., welche denselben Träger haben und projektivisch auf einander bezogen sind, ein Paar Elemente einander doppelt entsprechen, so findet dies für alle Paare statt.

5. Definition. Wenn in 2 gleichartigen projektivischen Gebilden I. oder II. O., welche denselben Träger haben, ein Paar entsprechende Elemente einander doppelt entsprechen, so dass dies für alle Paare entprechender Elemente stattfindet, so sagt man, die beiden Gebilde liegen involutorisch oder bilden eine Involution. — Man fasst auch häufig die beiden Gebilde als ein einziges auf und nennt es ein involutorisches. —

Ein involutorisches Gebilde ist durch 2 Punktenpaare vollständig bestimmt. — Wenn in einer Involution ein Paar entsprechende Elemente zusammenfallen, so werden diese beiden Elemente als eins aufgefasst, und dieses Element wird Ordnungselement genannt. Ein involutorisches Gebilde kann nie mehr wie 2 Ordnungselemente haben.

6. Beispiele. a. Die polar konjugirten Punkte einer Graden in Bezug auf eine Curve II. O. bilden eine involutorische Punktreihe. Wenn die Grade die Curve nicht schneidet, so trennen je 2 Punktenpaare der Involution einander gegenseitig. — Wenn die Grade die Curve schneidet, so ist jeder der beiden Schnittpunkte ein Ordnungselement. Jedes andere Paar zugeordneter Punkte wird durch die Ordnungselemente harmonisch getrennt. — Die Gesammtheit der Punktenpaare, welche 2 feste Punkte harmonisch trennen, bilden eine involutorische Punktreihe, in welcher die festen Punkte die Ordnungselemente sind.

Wenn in zwei projektivischen Punktreihen I. O., welche denselben Träger haben, derjenige Punkt der ersten Reihe, welcher dem unendlich entfernten Punkt der zweiten Reihe entspricht, mit demjenigen Punkte der zweiten Reihe vereinigt ist, welcher dem unendlich entfernten Punkte der ersten Reihe entspricht, so liegen die beiden Reihen involutorisch; und umgekehrt. — Der Punkt, welcher dem unendlich entfernten Punkte (doppelt) entspricht, heisst der Mittelpunkt der Involution. — Zwei projektivische Punktreihen I. O. lassen sich stets so in dieselbe Grade legen, dass die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte zusammen fallen, und zwar kann dies auf doppelte Weise geschehen, nämlich so, dass entsprechende Hälften der beiden Punktreihen auf einander fallen, oder nicht entsprechende Hälften, d. h. dass im ersten Falle je 2 entsprechende Punkte durch den Mittelpunkt der Involution und den unendlich entfernten Punkt nicht getrennt werden, und dass im zweiten Falle je 2 entsprechende Punkte durch die genannten Punkte getrennt werden. — Hieraus folgt die metrische Relation, dass in 2 projektivischen Punktreihen stets 2 Reihen von unendlich vielen Paaren entsprechender gleich langer Strecken existiren; jeder Punkt ist gemeinsamer Endpunkt zweier Strecken, welche den entsprechenden Strecken der andern Punktreihen gleich sind.

b. Die polar konjugirten Strahlen eines Strahlenbüschels I. O. in Bezug auf eine Curve II. O. bilden ein involutorisches Strahlenbüschel. Ist der Mittelpunkt desselben ein innerer, so trennen je 2 Strahlenpaare einander gegenseitig; ist derselbe ein äusserer, so sind die beiden von ihm ausgehenden Tangenten Ordnungselemente: durch sie werden je zwei andre Strahlenpaare harmonisch getrennt. — Insbesondere sind die konjugirten Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels. — Im Falle der Ellipse hat dieses Strahlenbüschel keine Ordnungselemente; je 2 Paare trennen einander gegenseitig. Im Falle der Hyperbel sind die Asymptoten Ordnungselemente, welche jedes andre Strahlenpaar harmonisch trennen. In Folge hiervon nennt man häufig ein involutorisches Gebilde I. oder II. O., welches keine Ordnungselemente hat, ein elliptisches, und ein solches, das Ordnungselemente hat, ein hyperbolisches.

Die Gesammtheit der Strahlenpaare eines Strahlenbüschels I. O., welche durch 1 Strahlenpaar desselben Büschels harmonisch getrennt werden, bilden ein involutorisches Strahlenbüschel.

c. Einige metrische Relationen: Zwei Strahlenbüschel I. O., welche denselben Mittelpunkt haben, in derselben Ebene liegen und so auf einander bezogen sind, dass jedem Strahle des einen der auf ihm senkrechte des andern zugewiesen ist, sind projektivisch auf einander bezogen und liegen involutorisch; indem man das Gebilde als ein Strahlenbüschel auffasst, nennt man es ein rechtwinklig involutorisches Strahlenbüschel.

Schneidet man dasselbe durch eine beliebige Grade, welche nicht durch das Centrum des Büschels geht, so wird dieselbe Träger einer involutorischen Punktreihe, sobald man diejenigen Punkte als einander zugeordnet ansieht, welche auf zugeordneten Strahlen des Büschels liegen. — Derjenige Strahl, welcher auf der Graden senkrecht steht, bestimmt den Mittelpunkt der involutorischen Punktreihe. — Der Abstand des Centrums des Strahlenbüschels von der Graden ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen je zweier zugeordneten Punkte vom Involutionsmittelpunkte. Je zwei zugeordnete Punkte sind Endpunkte des Durchmessers eines Kreises, welcher durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht; alle diese Kreise haben also denjenigen Strahl des rechtwinkligen Strahlenbüschels, welcher auf dem Träger der Punktreihe senkrecht steht, zur gemeinsamen Sehne. — Da eine involutorische Punktreihe I. O. durch 2 Punktenpaare, insbesondere also durch den Mittelpunkt und ein Paar zugeordnete Punkte vollständig bestimmt ist, so ist in jeder involutorischen Punktreihe, in welcher ein Paar zugeordnete Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts liegen, das letztere für je 2 zugeordnete Punkte der Fall; das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkte ist konstant; die Gesammtheit der Kreise, welche über den Abständen je zweier zugeordneten Punkte als Durchmessern beschrieben werden können, haben eine gemeinsame Sehne.

Wenn man von den beiden projektivischen Punktreihen I. O., welche involutorisch liegen und von welchen je 2 zugeordnete Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Involutionsmittelpunktes liegen, die eine um den Involutionsmittelpunkt herumdreht, so dass die beiden Hälften mit einander vertauscht werden, so liegen die beiden projektivischen Punktreihen auch in dieser neuen Lage involutorisch; es liegen dann je 2 entsprechende Punkte der Involution auf ein und derselben Seite des Mittelpunktes; die Involution hat Ordnungselemente, welche gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sind. — Jede involutorische Punktreihe I. O. mit Ordnungselementen lässt sich auf diese Weise entstanden denken. — Die Gesammtheit der Kreise, welche die Abstände zweier zugeordneten Punkte zu Durchmessern haben, haben auch in diesem Falle die Grade, welche auf dem Träger der involutorischen Punktreihe in dem Mittelpunkte senkrecht steht, zur Linie gleicher Potenzen, die aber in diesem Falle keinen der Kreise schneidet, so dass auch die Kreise keinen Punkt unter sich gemein haben. —

§ 24. A. 1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte einer involutorischen Punktreihe II. O. gehen sämmtlich durch 1 Punkt. Derselbe heisst das Involutionscentrum, seine Polare die Involutionsaxe.

Ein Paar entsprechender Punkte werde mit $(\alpha\beta_1)$ und $(\alpha_1\beta)$ bezeichnet und dadurch angedeutet, dass jeder Punkt beiden projektivischen Punktreihen angehört, welche involutorisch liegen; ein zweites Punktenpaar sei $(\gamma\delta_1)$ und $(\gamma_1\delta)$. — Man mache α zum Mittelpunkte eines Strahlenbüschels $\alpha(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ und α_1 zum Mittelpunkte eines Strahlenbüschels $\alpha_1(\alpha\beta\gamma\delta)$, so sind dieselben projektivisch auf einander bezogen, da $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ ist; dieselben haben den Strahl $\alpha\alpha_1$ entsprechend gemein, folglich liegen die Schnittpunkte von $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$ (den Tangenten in α und α_1), von $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma$, von $\alpha\delta_1$ und $\alpha_1\delta$ in einer Graden; und bezeichnet man irgend ein andres Paar entsprechender Punkte mit $(\varepsilon\varkappa_1)$ und $(\varepsilon_1\varkappa)$, so schneiden sich auch $\alpha\varepsilon_1$ und $\alpha_1\varepsilon$, sowie $\alpha\varkappa_1$ und $\alpha_1\varkappa$ in derselben Graden; demnach gehen die Linien $\alpha\alpha_1$ $\gamma\gamma_1$ $\varepsilon\varepsilon_1$ sämmtlich durch 1 Punkt, den Pol jener Graden.

Ist das Involutionscentrum ein äusserer Punkt, so hat die Involution Ordnungselemente, kein Paar entsprechender Elemente wird durch ein andres getrennt; ist es ein innerer Punkt, so hat sie keine Ordnungselemente; je 2 Paare zugeordneter Elemente trennen einander gegenseitig.

2. Umkehrung von 1. Wenn man eine Curve II. O. durch ein beliebig gelegenes Strahlenbüschel I. O. schneidet, so bilden die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe II. O., in welcher je zwei solche Punkte einander zugeordnet sind, welche auf ein und demselben Strahle liegen.

3. Wenn eine involutorische Punktreihe II. O. Ordnungselemente hat, so wird jedes andre Paar zugeordneter Elemente durch die Ordnungselemente harmonisch getrennt. — Es seien μ und ν die beiden Ordnungselemente, α und α_1 ein Paar zugeordneter Elemente, so bilden die Tangente im Punkte μ und die Verbindungslinien desselben Punktes μ mit α ν und α_1 ein harmonisches Strahlenbüschel. Der Satz folgt auch aus § 23. 6 b.

4. Um in einem involutorischen Strahlenbüschel I. O., welches durch 2 Paare zugeordneter Strahlen a und a_1, b und b_1 gegeben sei, beliebig viele Paare zugeordneter Strahlen zu konstruiren, verfährt man am einfachsten so, dass man durch den Scheitel σ des Strahlenbüschels ein Curve II. O. (z. B. einen Kreis) legt; dann erzeugt das Strahlenbüschel auf der Curve eine ihm perspektivische involutorische Punktreihe II. O. $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$; der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ ist das Involutionscentrum; jede durch ihn gezogene Grade, welche die Curve in γ und γ_1 schneidet, bestimmt dadurch 2 einander zugeordnete Strahlen $\sigma\gamma$ und $\sigma\gamma_1$. —

Ist die Curve ein Kreis und $\gamma\gamma_1$ ein Durchmesser, so stehen die beiden Strahlen auf einander senkrecht; demnach gibt es in jedem involutorischen Strahlenbüschel I. O. ein Paar auf einander senkrechte Strahlen; sobald mehr wie 1 Paar senkrechte Strahlen vorhanden sind, sind sie sämmtlich paarweise auf einander senkrecht; dann ist das Involutionscentrum der Mittelpunkt des zur Konstruktion verwandten Kreises.

5. Die Konstruktion entsprechender Punkte einer involutorischen Punktreihe I. O., welche durch 2 Punktenpaare gegeben ist, und entsprechender Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels

I. O., welches durch 2 Ebenenpaare gegeben ist, wird auf 4. zurückgeführt, indem man ein Strahlenbüschel konstruirt, welches zu der Punktreihe, resp. zu dem Ebenenbüschel perspektivisch liegt.

6. Aufgabe. In einer durch 5 Punkte oder 5 Tangenten gegebenen Curve II. O. zu einem beliebigen Durchmesser den konjugirten, ferner die Axen, im Falle der Hyperbel die Asymptoten zu konstruiren.

(B.C.D.) Entsprechende Sätze für das Strahlenbüschel II. O. in der Ebene, das Strahlenbüschel II. O. im Strahlenbündel und das Ebenenbüschel II. O.

§ 25. A. 1. Die drei Paare gegenüberstehender Seiten eines vollständigen Vierecks werden von einer Graden in 3 Punktenpaaren einer involutorischen Punktreihe I. O. geschnitten.

Beweis. Es seien $\varkappa\lambda\mu\nu$ die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, die Grade g werde von $\varkappa\mu$ und $\lambda\nu$ in α und α_1, von $\varkappa\lambda$ und $\mu\nu$ in β und β_1, von $\varkappa\nu$ und $\lambda\mu$ in γ und γ_1 geschnitten. — Der Schnittpunkt eines Paares gegenüberstehender Seiten — $\varkappa\mu$ und $\lambda\nu$ — heisse o. — Dann ist (durch Vermittlung von λ) $\alpha\varkappa o\mu \barwedge \alpha\beta\alpha_1\gamma_1$ und (durch Vermittlung von ν) $\alpha\varkappa o\mu \barwedge \alpha\gamma\alpha_1\beta_1$; nach § 23. 3. ist $\alpha\gamma\alpha_1\beta_1 \barwedge \alpha_1\beta_1\alpha\gamma$, folglich ist $\alpha\beta\alpha_1\gamma_1 \barwedge \alpha_1\beta_1\alpha\gamma$, mithin entsprechen α und α_1 einander doppelt, wodurch der Satz bewiesen ist.

2. Wenn von den Punkten $\varkappa\lambda\mu\nu$ keiner in dem von den 3 andern gebildeten Dreiecke liegt, so hat die involutorische Punktreihe Ordnungselemente, wenn auf jeder Seite der Graden g eine grade Anzahl der gegebenen Punkte liegt, und hat keine Ordnungselemente, wenn auf jeder Seite von g eine ungrade Anzahl der gegebenen Punkte liegt. Wenn dagegen die 4 Punkte solche Lage haben, dass einer in dem von den 3 andern gebildeten Dreiecke liegt, so hat grade umgekehrt die involutorische Punktreihe Ordnungselemente, wenn auf jeder Seite von g eine ungrade Anzahl der gegebenen Punkte liegt, und hat keine Ordnungselemente, wenn auf jeder Seite von g eine grade Anzahl der Punkte liegt.

3. Aus (1.) ergeben sich andre Auflösungen von Aufgaben, die in § 24 gelöst sind:

a. Eine involutorische Punktreihe I. O. sei durch 2 Paare zugeordneter Punkte α und α_1, β und β_1 gegeben; zu einem beliebigen Punkte γ den zugeordneten γ_1 zu konstruiren. — Man lege durch $\alpha\beta\gamma$ 3 Grade abc, welche ein Dreieck bilden, verbinde ac mit β_1 durch die Grade b_1, bc mit α_1 durch die Grade a_1, so sind $abca_1b_1$ 5 Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen sechste Seite, die Verbindungslinie von ab mit a_1b_1, die gegebene Grade im gesuchten Punkte γ_1 schneidet.

b. Ein involutorisches Strahlenbüschel sei durch 2 Strahlenpaare a und a_1, b und b_1 gegeben; zu einem beliebigen Strahle c den zugeordneten c_1 zu konstruiren. — Man beziehe das Strahlenbüschel auf eine beliebige grade Transversale und führe dadurch die Aufgabe auf die vorige zurück. — Insbesondere kann man als Transversale die unendlich entfernte Grade wählen.

4. Wählt man auf einer Curve II. O. 4 beliebige Punkte, betrachtet dieselben als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks und schneidet die Figur durch eine beliebige Grade, so sind auch die Schnittpunkte mit der Curve ein Paar zugeordnete Punkte derjenigen involutorischen Punktreihe, welcher die Schnittpunkte mit je zwei gegenüberstehenden Seiten des Vierecks angehören.

Beweis. Die Eckpunkte des Vierecks heissen, wie in (1) $\varkappa\lambda\mu\nu$, die Schnittpunkte seiner Seiten mit g seien ebenso bezeichnet wie in (1), die Schnittpunkte von g mit der Curve heissen δ und δ_1, so sind die Strahlenbüschel $\lambda(\varkappa\mu\delta\delta_1)$ und $\nu(\varkappa\mu\delta\delta_1)$ nach § 13 projektivisch auf einander bezogen, folglich ist $\beta\gamma_1\delta\delta_1 \barwedge \gamma\beta\delta\delta_1 \barwedge \beta_1\gamma\delta_1\delta$, wodurch der Satz bewiesen ist.

5. Die Gesammtheit der Curven II. O., welche sich durch 4 gegebene Punkte legen lassen, heisst ein Kegelschnittbüschel. — Zu den Kegelschnitten des Büschels gehören auch die 3

Paare gegenüberstehender Seiten des Vierecks als Grenzfälle. Man kann die Curven des Büschels sämmtlich erhalten, indem man durch einen der gegebenen Punkte eine Grade willkürlich aber fest legt, und jeden ihrer Punkte als fünften Punkt eines Kegelschnittes ansieht; oder auch, indem man einen der 4 Punkte als Mittelpunkt eines Strahlenbüschel I. O. ansieht und jeden Strahl als Tangente eines durch ihn und die 4 Punkte vollständig bestimmten Kegelschnitts betrachtet. — Auf diese Weise wird das Kegelschnittsbüschel zu einer Punktreihe I. O. und zu einem Strahlenbüschel I. O. in eine sehr wichtige und folgenreiche Beziehung gesetzt; sie kann des Raumes wegen hier nicht weiter entwickelt werden.

6. Die Curven eines Kegelschnittbüschels bestimmen auf einer Graden, sofern sie dieselbe schneiden, die Punktenpaare einer Involution.

Wenn die Involution Ordnungselemente hat, so gibt es unter den Curven zwei, welche die Grade berühren. —

7. Aufgabe. Eine Curve II. O. zu konstruiren, welche durch 4 gegebene Punkte geht und eine gegebene Grade berührt. — Aus dem Vorigen ergibt sich die Auflösung, sowie auch, dass die Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen hat, welche in eine zusammenfallen und unmöglich werden können.

8. Ein wichtiger Grenzfall ergibt sich, wenn (nach der Bezeichnung unter 1) bei Festhaltung der Graden $\varkappa\lambda$ und $\mu\nu$ die Punkte $\varkappa$ und λ in einen zusammenfallen, ebenso die Punkte μ und ν in einen zusammenfallen. — Dann besteht das Kegelschnittbüschel aus der Gesammtheit der Curven, welche die beiden gegebenen Graden in den Punkten $(\varkappa\lambda)$ und $(\mu\nu)$ berühren; die 4 übrigen Seiten des Vierecks fallen in eine Grade, die Berührungssehne, zusammen. Auf jeder durchgelegten Graden ist deshalb der Schnitt mit der Berührungssehne ein Ordnungselement der involutorischen Punktreihe, deren Träger die Grade ist. Hieraus ergibt sich die Auflösung der

Aufgabe: Eine Curve II. O. zu konstruiren, von welcher 3 Punkte und 2 Tangenten gegeben sind. Die 3 Punkte seien $\alpha\beta\gamma$, die Tangenten d und e. Man ziehe die Grade $\alpha\beta$; dieselbe schneide d und e in δ und ε; man konstruire in derjenigen involutorischen Punktreihe, welche durch die Punktenpaare $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$ gegeben ist, die Ordnungselemente; sie heissen λ und λ'; man ziehe die Grade $\alpha\gamma$, welche d und e in δ_1 und ε_1 schneide, konstruire in derjenigen involutorischen Punktreihe, welche durch die Punktenpaare $\alpha\gamma$ und $\delta_1\varepsilon_1$ gegeben ist die Ordnungselemente; sie heissen μ und μ', so ist $\lambda\mu$ die Berührungssehne einer Curve II. O., welche der Aufgabe genügt, und von welcher hierdurch 5 Punkte gegeben sind; da die Graden $\lambda\mu'$, $\lambda'\mu$ und $\lambda'\mu'$ in gleicher Weise der Aufgabe genügen, so hat dieselbe 4 Auflösungen, sofern nicht 2 der 3 Punkte $\alpha\beta\gamma$ durch die Graden $d\ e$ getrennt werden, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich sein würde.

9. Aufgabe. Zwei Curven II. O. seien durch je 5 Punkte $\alpha\beta\gamma\varepsilon_1\eta_1$ und $\alpha\beta\gamma\lambda_2\mu_2$ gegeben, so dass sie also 3 Punkte gemeinsam haben; den vierten gemeinsamen Punkt δ zu konstruiren. Man ziehe $\varepsilon_1\lambda_2$, konstruire ihre zweiten Schnittpunkte λ_1 und ε_2 mit den beiden Curven (wo λ_1 der ersten, ε_2 der zweiten Curve angehört), so sind $\varepsilon_1\lambda_1$ und $\varepsilon_2\lambda_2$ Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe I. O., welche durch das Kegelschnittbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt wird. Man bringe $\alpha\beta$ zum Durchschnitt mit $\varepsilon_1\lambda_2$ in o, konstruire den zu o zugeordneten Punkt ω in der involutorischen Punktreihe $\varepsilon_1\lambda_2$, so enthält $\gamma\omega$ den Punkt δ, der somit konstruirbar ist.

10. Aufgabe. Zwei Curven II. O. seien durch je 5 Punkte $\alpha\beta\varepsilon_1\eta_1\vartheta_1$ und $\alpha\beta\lambda_2\mu_2\nu_2$ gegeben, so dass sie also 2 Punkte gemein haben; die beiden andern gemeinsamen Punkte γ und δ zu konstruiren (sofern deren vorhanden sind). — Man ziehe $\varepsilon_1\lambda_2$, konstruire ihre zweiten Schnittpunkte $\lambda_1\varepsilon_2$ mit den Curven, so sind $\varepsilon_1\lambda_1$ und $\varepsilon_2\lambda_2$ Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe I. O., die durch das Kegelschnittbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt ist; man ziehe $\eta_1\mu_2$, bestimme ihre zweiten Schnitte

μ_1 und η_2 mit den Curven, so sind $\eta_1\mu_1$ und $\eta_2\mu_2$ Punktenpaare einer zweiten involutorischen Punktreihe, die durch dasselbe Kegelschnittbüschel bestimmt ist; es seien die Punkte, in welchen die Träger der beiden involutorischen Punktreihen $\varepsilon_1\lambda_2$ und $\eta_1\mu_2$ von $\alpha\beta$ geschnitten werden, o und o', so wie die ihnen resp. zugeordneten Punkte ω und ω', so geht $\omega\omega'$ durch die Punkte $\gamma\delta$, die also konstruirbar sind, sofern sie existiren.

11. Aufgabe. Zwei Curven II. O. seien durch je 5 Punkte gegeben; eine dritte Curve II. O. zu konstruiren, welche durch die ihnen gemeinsamen Punkte geht, (sofern deren vorhanden sind.) Die gegebenen Punkte seien $\varepsilon_1\eta_1\vartheta_1\lambda_1\mu_1$ und $\varepsilon_2\eta_2\vartheta_2\lambda_2\mu_2$. — Die Aufgabe ist unbestimmt; man kann, um sie zu einer bestimmten zu machen, einen Punkt ν der Curve willkürlich annehmen. Man lege durch ν eine Grade n, welche jede der beiden Curven in 2 Punkten schneidet; die Grade n ist Träger einer involutorischen Punktreihe, in welcher die Schnittpunkte mit je einer der beiden gegebenen Curven einander zugeordnet sind; konstruirt man den zu ν zugeordneten Punkt, so hat man einen Punkt der gesuchten Curve; auf diesem Wege kann man 4 Punkte der Curve konstruiren, die mit ν zusammen dieselbe vollständig bestimmen.

12. Wenn zwei Curven II. O. zwei Punkte α und β gemein haben, so ist die gemeinsame Sekante $\alpha\beta$ Träger einer involutorischen Punktreihe, deren zugeordnete Punkte in Bezug auf jede der beiden Curven polar konjugirt sind, und in welcher α und β Ordnungselemente sind. — Wenn eine Grade zu zwei Curven II. O. die Beziehung hat, dass je zwei Punkte derselben, welche in Bezug auf die eine Curve polar konjugirt sind, auch in Bezug auf die andere polar konjugirt sind, die involutorische Punktreihe aber, deren Träger sie hierdurch ist, keine Ordnungselemente hat, so hat die Grade mit keiner der beiden Curven einen Punkt gemein, hat aber Beziehungen zu ihnen, welche wesentlich mit denen übereinkommen, die eine gemeinsame Sehne zweier Curven, die 2 Punkte gemein haben, zu den Curven hat. — Aus diesem Grunde heisst die Grade eine ideale gemeinsame Sekante; man nennt sie auch die Verbindungslinie zweier imaginären Punkte, welche die Curven gemein haben. — Hierdurch lässt sich der Begriff des Kegelschnittbüschels dahin erweitern, dass es durch 4 reelle, oder durch 2 reelle und 2 imaginäre, oder durch 4 imaginäre Punkte bestimmt ist. — Auf die hieran sich anschliessende ausserordentlich reiche Entwicklungsreihe — auf welche u. a. schon die Aufgaben in 10 und 11 hinweisen — soll hier, des beschränkten Raumes wegen, nicht eingegangen werden.

B. An das vollständige Vierseit schliesst sich eine Reihe von Entwicklungen, welche der an das Viereck angeschlossenen vollständig parallel geht. — Der wichtigste Satz derselben ist:

Die Gesammtheit der Tangentenpaare, welche sich von einem gegebenen Punkte an diejenigen Curven II. O. legen lassen, welche 4 gegebene Graden zu Tangenten haben (eine Kegelschnittschaar), bilden ein involutorisches Strahlenbüschel. Daraus folgt die Auflösung der beiden wichtigsten Aufgaben: Eine Curve II. O. zu konstruiren, welche 4 gegebene Graden zu Tangenten hat und durch einen gegebenen Punkt geht. Und: Eine Curve II. O. zu konstruiren, welche 3 gegebene Graden zu Tangenten hat und durch 2 gegebene Punkte geht.

CD. Entsprechende Entwicklungen ergeben sich im Anschluss an das vollständige Vierkant und das vollständige Vierseit im Raume für den Kegel II. O.

§ 26. Brennpunkte. (Metrische Relationen.) Es sei eine Curve II. O. k und ein Strahlenbüschel I. O. σ gegeben; die Pole der Strahlen von σ in Bezug auf k erfüllen eine Punktreihe I. O. s, welche zu σ projektivisch ist, wenn man jedem Strahle von σ seinen Pol zuweist. — Fällt man von den Punkten von s auf die bezüglichen Polaren Lothe, so sind dieselben den Strahlen eines Strahlenbüschels I. O. σ_1 parallel, dessen Mittelpunkt beliebig gewählt ist, dessen Strahlen auf den Strahlen des

Büschels σ senkrecht stehn, und welches zu diesem projektivisch ist, wenn man jedem Strahle von σ den auf ihm senkrechten Strahl von σ_1 zuweist. — Dieses Strahlenbüschel σ_1 werde projektivisch und perspektivisch auf die unendlich entfernte Grade bezogen, so sind die Lothe, welche von den Punkten von s auf ihre Polaren gefällt sind, die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektivisch auf einander bezogenen Graden, von welchen die eine in unendlicher Entfernung liegt; sie umhüllen also im Allgemeinen eine Parabel.

2. Die beiden erzeugenden Graden liegen im Allgemeinen schief gegen einander, denn der Pol desjenigen Strahles von σ, auf welchem s selbst senkrecht steht, liegt im Allgemeinen in endlicher Entfernung auf s; dieser Punkt entspricht dem Punkte der unendlich entfernten Graden, welchen sie mit s gemein hat (ist der Berührungspunkt der Parabel in s). Die Durchmesserrichtung der Parabel steht auf dem durch σ gelegten Durchmesser der gegebenen Curve k senkrecht; die Tangente im Scheitel der Parabel erhält man, indem man durch den Pol desjenigen Strahles von σ, welcher die Durchmesserrichtung der Parabel hat, ein Loth auf die Durchmesserrichtung fällt, d. h eine Parallele zu dem durch σ gehenden Durchmesser der Curve k zieht. — Nur wenn σ ein Punkt einer der beiden Axen der Curve ist, liegen die Graden s und die unendlich entfernte Grade perspektivisch; in diesem Falle gehen die sämmtlichen Linien, um die es sich handelt, durch einen Punkt derselben Axe. — Es lässt sich dies auch folgendermassen beweisen: Es sei σ ein Punkt einer Axe a; man lege durch den Pol eines Strahles von σ ein Loth gegen den Strahl, derselbe schneide die Axe a im Punkte τ, so ist τ Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, welches zu σ projektivisch ist, wenn man jedem Strahle von σ den ihm konjugirten von τ zuweist; 3 von diesen Strahlenpaaren stehen senkrecht zu einander, folglich alle.

3. Es sei σ ein Strahlenbüschel I. O., dessen Mittelpunkt auf einer Axe a liegt, τ der Mittelpunkt desjenigen Büschels, welches von den auf den Strahlen von σ senkrechten und gleichzeitig ihnen (polar) konjugirten Strahlen gebildet wird, so sind diese beiden Strahlenbüschel projektivisch auf einander bezogen, wenn jedem Strahle des einen der ihm konjugirte des andern zugewiesen ist; dieselben erzeugen auf der andern Axe 2 ihnen perspektivische, demnach projektivisch auf einander bezogene Punktreihen. — Es seien σ' und τ' 2 einander zugeordnete Punkte dieser Punktreihen, so sind sie nach 2. die Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel von solcher Beziehung, dass jeder Strahl des einen Büschels auf dem ihm konjugirten Strahle des andern Büschels senkrecht steht. — Die Punktreihen σ' τ' liegen involutorisch, denn die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. — Wenn die Punkte σ τ vom Mittelpunkte aus nach derselben Seite liegen, so liegen σ' τ' auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, und umgekehrt. — Demnach ergibt sich:

In jeder der beiden Axen einer Curve II. O. bilden die Mittelpunkte je zweier Strahlenbüschel von solcher gegenseitigen Beziehung, dass die Strahlen des einen auf den konjugirten Strahlen des andern senkrecht stehen, eine involutorische Punktreihe, in welcher je 2 zusammengehörige Mittelpunkte einander zugeordnet sind; ausserhalb der Axen gibt es solche Punktreihen, solche Paare von Strahlenbüscheln I. O. nicht. — In jeder der beiden Axen ist der Mittelpunkt der Curve Mittelpunkt der Involution. — In der einen Axe hat die Involution Ordnungspunkte, in der andern nicht. — Die Ordnungspunkte der Involution heissen Brennpunkte. Ein Brennpunkt ist demnach der Träger eines rechtwinklig involutorischen Strahlenbüschels, in welchem die einander zugeordneten Strahlen polar konjugirt sind.

4. Jede Curve II. O. hat 2 Brennpunkte in einer Axe. — Die Axe, welche die Brennpunkte enthält, heisst Hauptaxe. Die Brennpunkte sind innere Punkte; denn jedes involutorische Strahlenbüschel I. O. aus konjugirten Strahlen, dessen Mittelpunkt ein äusserer Punkt ist, hat Ordnungsstrahlen, kann also kein rechtwinkliges sein. — In der Ellipse liegen die Brennpunkte in der

grossen Axe; denn wenn man in demjenigen Rechtecke, welches der Ellipse umschrieben ist, von einem Eckpunkte ein Loth auf seine Polare (die Verbindungslinie der Scheitel der Haupt- und der Nebenaxe) fällt, so schneiden dieselben die grosse Axe auf derjenigen Seite vom Mittelpunkte, auf welcher der betreffende Eckpunkt liegt, die Nebenaxe auf der entgegengesetzten. — In der Hyperbel ist die Hauptaxe diejenige, welche die Hyperbel schneidet, denn die andere Axe hat keinen innern Punkt. In der Parabel liegt ein Brennpunkt in unendlicher Entfernung; der andere Brennpunkt liegt in der Mitte zwischen den Punkten, wo die Tangente und die Normale eines Punktes der Parabel die Axe schneiden.

5. Wenn man von einem Punkte ausserhalb einer Curve II. O. 2 Tangenten an die Curve legt und deren Winkel halbirt, so sind diese beiden Halbirungsstrahlen konjugirte Strahlen in Bezug auf die Curve und stehen auf einander senkrecht, bestimmen also in der Hauptaxe 2 zugeordnete Punkte derjenigen Involution, deren Ordnungspunkte die Brennpunkte sind; deshalb bilden sie auch mit denjenigen Strahlen, welche den Ausgangspunkt der beiden Tangenten mit den Brennpunkten verbinden, gleiche Winkel. — Daraus folgt: Wenn man von einem äusseren Punkte einer Curve II. O. 2 Tangenten an die Curve zieht und denselben Punkt mit beiden Brennpunkten verbindet, so bildet die eine Tangente mit der einen Verbindungsline denselben Winkel, wie die andre Tangente mit der anderen Verbindungslinie. — Eine Curve II. O. ist durch einen Brennpunkt und 3 Tangenten vollständig bestimmt.

Eine Tangente einer Curve II. O. bildet mit den Verbindungslinien ihres Berührungspunktes mit den Brennpunkten gleiche Winkel. — Daraus folgt:

Wenn man an die Gesammtheit derjenigen Curven II. O., welche dieselben Brennpunkte haben, (Ellipsen und Hyperbeln, wenn beide Brennpunkte in endlicher Entfernung liegen, Parabeln, wenn einer in unendlicher Entfernung liegt, wo also die Parabeln den einen Brennpunkt und die Lage der Axe gemein haben) von einem festen Punkte die Tangentenpaare zieht, so bilden dieselben ein involutorisches Strahlenbüschel mit Ordnungsstrahlen.

6. Zwei durch einen Brennpunkt gezogene senkrecht gegeneinander stehende Strahlen sind konjugirt, d. h. der Pol des einen liegt auf dem andern. Zieht man also von einem äusseren Punkte des einen Strahles 2 Tangenten an die Curve, so wird die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch die beiden vom Brennpunkte aus gezogenen Strahlen harmonisch getheilt, also bilden die Verbindungslinien des Brennpunktes mit den Berührungspunkten mit den beiden ersten Strahlen gleiche Winkel. — Demnach: Der Winkel der Verbindungslinien eines Brennpunktes mit den beiden Berührungspunkten zweier Tangenten wird durch die Verbindungslinie desselben Brennpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten (resp. durch den darauf senkrechten Strahl) halbirt. — Nennt man die Polare eines Brennpunktes Leitlinie, so hat man den Satz: Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit einem Punkte λ der zugehörigen Leitlinie steht auf der Verbindungslinie desselben Brennpunktes mit dem Berührungspunkte einer vom Punkte λ an die Curve gezogenen Tangente senkrecht.

7. Es seien α β irgend 2 Punkte einer Curve II. O., φ ein Brennpunkt, δ der Schnittpunkt der Tangenten in α und β, $\varkappa$ der Schnittpunkt von $\alpha\beta$ mit der zu φ gehörigen Leitlinie l, so stehen $\varphi\delta$ und $\varphi\varkappa$ auf einander senkrecht, $\varphi\delta$ sowohl wie $\varphi\varkappa$ bildet mit $\varphi\alpha$ und $\varphi\beta$ gleiche Winkel, α und β werden durch $\varkappa$ und $\varphi\delta$ harmonisch getrennt. Hieraus ergibt sich, dass eine Curve II. O. durch einen Brennpunkt und 3 ihrer Punkte vierdeutig bestimmt ist.

8. Zieht man von α und β Parallelen zu $\varphi\delta$, welche die Leitlinie l in α_1 und β_1 schneiden, so werden auch diese Punkte α_1 und β_1 durch $\varkappa$ und $\varphi\delta$ harmonisch getrennt, also auch die Strahlen $\varphi\alpha_1$ und $\varphi\beta_1$ durch $\varphi\delta$ und $\varphi\varkappa$ harmonisch getrennt, folglich bildet $\varphi\delta$ sowohl wie $\varphi\varkappa$ auch mit $\varphi\alpha_1$ und $\varphi\beta_1$ gleiche

Winkel, folglich ist $\Delta\ \varphi a a_1 \sim \varphi\beta\beta_1$, folglich: $\varphi a : \varphi\beta = a a_1 : \beta\beta_1$. Fällt man von a und β Lothe $a a_2$ und $\beta\beta_2$ auf l, so ist $a a_1 : \beta\beta_1 = a a_2 : \beta\beta_2$ folglich $\varphi a : \varphi\beta = a a_2 : \beta\beta_2$; $\varphi a : a a_2 = \varphi\beta : \beta\beta_2$, d. h. das Verhältnis des Abstandes eines Punktes der Curve von einem Brennpunkte zum Abstand desselben Punktes der Curve von der zugehörigen Leitlinie ist für alle Punkte ein und dasselbe. — Der konstante Werth dieses Verhältnisses für den Brennpunkt φ soll ε heissen.

9. Heissen die beiden Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel φ und φ', ihre beiden Leitlinien l und l', der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente a, ihre Schnittpunkte mit l und l' λ und λ', so sind die rechtwinkligen Dreiecke $\varphi a\lambda$ und $\varphi' a\lambda'$ ähnlich, folglich $\varphi a : a\lambda = \varphi' a : \varphi'\lambda'$; folglich, wenn man von a ein Loth auf l fällt, welches l und l' resp. in a_1 und a_1' schneidet, so ist $\varphi a : a a_1 = \varphi' a : a a_1'$ d. h. der konstante Werth von ε ist für beide Brennpunkte derselbe. Und ferner

$$\varepsilon = \frac{\varphi a + \varphi' a}{a a_1 + a a_1'} = \frac{\varphi a - \varphi' a}{a a_1 - a a_1'}.$$

Nun ist aber im Falle der Ellipse $a a_1 + a a_1'$ und im Falle der Hyperbel $a a_1 - a a_1'$ der Abstand der beiden Leitlinien von einander, also konstant, mithin ist im Falle der Ellipse die Summe der Abstände eines Punktes von den Brennpunkten, im Falle der Hyperbel die Differenz der Abstände eines Punktes von den beiden Brennpunkten konstant. Diese konstante Summe oder Differenz ist der Abstand der beiden Hauptscheitel, ist die Länge der Hauptaxe. Im Falle der Ellipse ist die Hauptaxe kleiner als der Abstand der Leitlinien, ist $\varepsilon < 1$; im Falle der Hyperbel ist die Hauptaxe grösser als der Abstand der Leitlinien, ist $\varepsilon > 1$. — Versteht man in der Doppelgleichung $\varepsilon = \frac{\varphi a + \varphi' a}{a a_1 + a a_1'} = \frac{\varphi a - \varphi' a}{a a_1 - a a_1'}$, unter a speziell einen der beiden Scheitel, folglich unter a_1 und a_1' die Schnittpunkte der Hauptaxe mit den beiden Leitlinien, so ergibt sich, dass ε auch das Verhältnis des Abstandes der Brennpunkte von einander zur Hauptaxe ist.

Im Falle der Parabel ist $\varepsilon = 1$, da der Scheitel in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitlinie liegt. — Hierdurch ist der Zusammenhang mit den elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte vollständig hergestellt.

Regelschaaren und Regelflächen.

§ 27. 1. Zwei projektivisch auf einanander bezogene Graden s und s_1 im Raume, welche keinen Punkt mit einander gemein haben (nicht in einer Ebene liegen), erzeugen eine Regelschaar, d. h. eine kontinuirliche Folge von Graden, welche die entsprechenden Punkte von s und s_1 mit einander verbinden. Diese Regelschaar erfüllt also eine Fläche, die man Regelfläche nennt. — Keine 2 Graden der Schaar haben einen Punkt mit einander gemein.

2. Wenn man s zum Träger eines Ebenenbüschels I. O. macht, welches perspektivisch auf s_1 bezogen ist, und s_1 zum Träger eines Ebenenbüschels, welches perspektivisch auf s bezogen ist, so sind dadurch die Ebenenbüschel projektivisch auf einander bezogen, die Schnittlinien entsprechender Ebenen sind die Strahlen der unter 1. erzeugten Schaar; das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen, deren Träger keinen Punkt gemein haben, ist also dasselbe, wie das Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel, deren Axen keinen Punkt gemein haben.

3. Wählt man 3 beliebige Projektionsstrahlen $t\, t_1\, t_2$ der Punktreihen s und s_1 (drei Strahlen der durch sie erzeugten Regelschaar) und zieht eine Grade s_2, welche die 3 Graden $t\, t_1\, t_2$ schneidet, so schneidet sie die sämmtlichen Strahlen der Regelschaar. Denn macht man s und s_1 wie in 2. zu Trägern zweier Ebenenbüschel, so erzeugen dieselben auf s_2 2 projektivisch auf einander bezogene Punktreihen; diese haben vermöge $t\, t_1\, t_2$ 3 Punkte entsprechend gemein, folglich alle. — Die Grade

s_2 ist Träger einer Punktreihe, welche zu s resp. s_1 projektivisch ist, wenn diejenigen Punkte dieser Strahlen einander zugewiesen sind, welche durch die Strahlen der Schaar $t\,t_1\,t_2\ldots$ verbunden sind. Es gibt unendlich viele Graden, welche die Graden $t\,t_1\,t_2$ schneiden; sie erfüllen dieselbe Regelfläche, wie die durch s und s_1 erzeugte Regelschaar; sie theilen je 2 der 3 Strahlen $t\,t_1$ und t_2 etwa t_1 und t_2 projektivisch, wie man sofort erkennt, wenn man t zur Axe eines Ebenenbüschels macht, welches man perspektivisch auf t_1 und t_2 bezieht. — Demnach ist eine Regelfläche vollständig bestimmt durch 3 Graden, von denen nicht 2 einen Punkt gemein haben. Sie ist der Träger von 2 Regelschaaren von solcher Beschaffenheit, dass nie 2 Strahlen derselben Schaar einen Punkt gemein haben, dagegen jeder Strahl der einen Schaar durch jeden Strahl der andern Schaar geschnitten wird. — Je zwei Strahlen der einen Schaar werden durch die sämmtlichen Strahlen der anderen Schaar in projektivischen Punktreihen geschnitten. — Je zwei Strahlen der einen Schaar sind die Axen projektivischer Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen durch die Strahlen der anderen Schaar bestimmt sind. — Wenn 4 Strahlen der einen Schaar einen Strahl der anderen Schaar in 4 harmonischen Punkten schneiden, so schneiden sie jeden anderen Strahl dieser Schaar in 4 harmonischen Punkten und heissen **harmonische** Strahlen. — Sie bestimmen gleichzeitig mit jedem Strahle der anderen Schaar ein harmonisches Ebenenbüschel und können ebenso gut hierdurch definirt werden.

§ 28. 1. Wenn man einen Strahl s der einen Schaar festhält, und den Strahl t der anderen Schaar alle seine Lagen durchlaufen lässt, indem man ihn längs eines anderen Strahles s_1 der ersten Schaar entlang gleiten lässt, ohne dass $s_1 t$ umwendet, so durchläuft der Punkt st die Grade s kontinuirlich ohne umzuwenden, und die Ebene st dreht sich kontinuirlich um s, ebenfalls ohne umzuwenden. — Demnach:

Durch jeden Punkt einer Regelfläche gehen 2 Grade, welche ganz in derselben liegen; durch keinen mehr wie 2. Jede Ebene, welche 1 Strahl einer Regelfläche enthält, enthält noch einen zweiten Strahl derselben, niemals 3. Eine Grade, welche mit einer Regelfläche 3 Punkte gemein hat, liegt ganz in derselben. Eine Ebene, welche mit einer Regelfläche 2 Graden s und t gemein hat, hat ausser denselben keinen Punkt mit der Fläche gemein, da jede in ihr durch einen solchen Punkt gezogene Grade ganz in der Fläche liegen, die Fläche also mit der Ebene zusammenfallen würde. — Alle durch den Punkt st in der Ebene st gezogenen graden Linien haben mit der Fläche nur den Punkt st gemein; sie sind **Tangenten** der Fläche; alle durch den Punkt st ausser der Ebene st und alle in der Ebene st ausser durch den Punkt st gezogene Graden haben 2 Punkte mit der Fläche gemein und sind nicht Tangenten. Die Ebene st, der geometrische Ort der Tangente im Punkte st, ist die **Tangentialebene** in st; der Punkt st, der Schnittpunkt aller Tangenten der Regelfläche in der Ebene st, ist der **Berührungspunkt**.

Eine Grade, welche Träger von 3 Tangentialebenen ist, liegt in der Fläche und ist Träger von unendlich vielen Tangentialebenen. — Eine Grade, welche mit der Fläche 2 Punkte gemein hat, ist Träger von 2 Tangentialebenen. — Eine Grade, welche die Fläche berührt, mit ihr 1 Punkt gemein hat, ist Träger 1 Tangentialebene. — Eine Grade, welche mit der Fläche keinen Punkt gemein hat, ist Träger keiner Tangentialebene. — Umkehrung dieser Sätze.

§ 29. 1. a. Der Schnitt einer Regelschaar mit einer Ebene, die nicht Tangentialebene ist, ist eine Curve II. O. — Denn betrachtet man die Regelschaar als das Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel, deren Axen irgend zwei Strahlen der anderen Schaar sind, so werden dieselben durch die Ebene in zwei projektivischen Strahlenbüscheln geschnitten, deren Erzeugnis die Curve II. O. ist. — Dieselbe Curve ist auch der Schnitt derselben Ebene mit der zweiten Regelschaar. Folglich ist der Schnitt einer Regelfläche mit einer Ebene, die nicht eine ihrer Tangentialebenen ist, eine Curve II. O. Durch jeden Punkt der Curve gehen 2 Strahlen, die den beiden Schaaren angehören, und ihre Ebene schneidet die Schnittebene in einer Graden, welche Tangente der Fläche und der Schnittcurve ist.

1. b. Wenn man die Strahlen einer Regelschaar von einem Punkte, der nicht der Regelschaar angehört, projicirt, so bilden die projicirenden Ebenen ein Ebenenbüschel II. O. (umhüllen einen Kegel II. O.). — Denn betrachtet man die Regelschaar als das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen, deren Träger irgend 2 Strahlen der anderen Schaar sind, so bestimmen dieselben mit dem gegebenen Punkte 2 projektivische Strahlenbüschel mit demselben Mittelpunkte in verschiedenen Ebenen; die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen sind dieselben, wie diejenigen, welche die Strahlen der gegebenen Regelschaar von den gegebenen Punkten aus projiciren. — Dasselbe Ebenenbüschel II. O. projicirt auch die zweite Regelschaar von demselben Punkte aus. — Man kann also sagen, dass eine Regelfläche II. O. von einem Punkte, der nicht in der Fläche liegt, durch ein Ebenenbüschel II. O. projicirt wird. — Jede Ebene des Ebenenbüschels II. O. enthält zwei Strahlen, die den beiden Regelschaaren angehören; die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem gegebenen Punkte ist Tangente sowohl der Regelfläche als des Ebenenbüschels.

2. a. Die Gesammtheit der Tangentialebenen einer Regelfläche II. O., deren Berührungspunkte in einer Ebene, die nicht Tangentialebene der Fläche ist, liegen, also nach 1. a. eine Curve II. O. erfüllen, ist ein Ebenenbüschel II. O. — Denn man wähle 3 der Tangentialebenen $A\,B\,C$, deren Berührungspunkte $\alpha\,\beta\,\gamma$ seien, so schneiden dieselben einander in einem Punkte σ; dieselben Ebenen $A\,B\,C$ schneiden die Ebene der Curve in 3 Graden $a\,b\,c$, welche Tangenten der Curve sind. Projicirt man nun von σ aus einerseits die Gesammtheit der Tangenten der Curve, andererseits die Gesammtheit der Strahlen der einen oder der anderen Regelschaar, so erhält man 2 Ebenenbüschel II. O., welche 3 Ebenen und die in ihnen liegenden Berührungsstrahlen gemein haben, also identisch sind.

2. b. Die Gesammmtheit der Punkte einer Regelfläche, in welchen sie von den Ebenen eines Ebenenbüschels II. O. berührt werden, welches die Strahlen der einen oder der anderen Schaar von einem gegebenen Punkte aus projicirt, liegen in einer Ebene, erfüllen also eine Curve II. O. — Denn man wähle 3 solche Berührungspunkte $\alpha\,\beta\,\gamma$, deren Tangentialebenen $A\,B\,C$ seien, so liegen dieselben in einer Ebene S. Diese schneidet nun sowohl die Regelfläche II. O. als auch denjenigen Kegel II. O., welcher von dem gegebenen Ebenenbüschel II. O. umhüllt wird, in einer Curve II. O.; diese beiden Curven stimmen in 3 Punkten und den Tangenten in ihnen überein; sie sind also identisch.

§ 30. 1. Die Regelflächen unterscheiden sich danach, ob zu ihren Tangentialebenen die unendlich entfernte Ebene gehört oder nicht gehört. Der Fall, dass die unendlich entfernte Ebene mit der Fläche keinen Punkt gemein hat, kann nicht vorkommen. Eine Regelfläche, welche die unendlich entfernte Ebene zur Tangentialebene hat, nennt man **hyperbolisches Paraboloid**; eine solche, welche die unendlich entfernte Ebene nicht zur Tangentialebene hat, nennt man **einschaliges Hyperboloid**.

2. Da jede Tangentialebene eine Grade der einen Regelschaar und gleichzeitig eine Grade der anderen Schaar enthält, so muss im **hyperbolischen Paraboloid** die eine Schaar sowohl wie die andere Schaar eine unendlich entfernte Grade enthalten. Eine unendlich entfernte Grade ist durch eine in endlicher Entfernung liegende Ebene gegeben; demnach müssen die Strahlen jeder einzelnen der beiden Schaaren einer bestimmten Ebene parallel sein. Und umgekehrt, wenn die Strahlen der einen Schaar einer Ebene parallel sind, was zur Folge hat, dass dasselbe auch für die Strahlen der anderen Schaar stattfindet, so ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. — Dasselbe wird von einer Ebene in einer Hyperbel oder in einer Parabel geschnitten; das Letztere nur dann, wenn die

Schnittebene durch den Berührungspunkt der unendlich entfernten Ebene geht, d. h. wenn die Schnittebene der Schnittlinie der beiden Ebenen parallel ist, welchen die Strahlen der beiden Schaaren parallel sind.

Anm. Es lässt sich leicht direkt elementar mit Massbestimmungen beweisen, dass, wenn die Strahlen der einen Schaar einer Regelfläche einer Ebene parallel sind, dies auch für die Strahlen der anderen Schaar stattfindet. — Es seien $a\,a_1\,a_2$ irgend drei Strahlen der einen Schaar, $b\,b_1\,b_2$ irgend 3 Strahlen der anderen Schaar. — Das einfache Viereck aba_1b_1 wird durch die Ebene a_2b_2 so geschnitten, dass die 2 mal 4 Abschnitte der 4 Seiten in 2 Gruppen von 4 nicht zusammenstossenden zerfallen, welche die Bedingung erfüllen, dass das Produkt aus den 4 Strecken der einen Gruppe gleich dem Produkte aus den 4 Strecken der anderen Gruppe ist; sind nun $b\,b_1\,b_2$ einer Ebene parallel, so sind die Abschnitte auf a den Abschnitten auf a_1 proportional, folglich sind auch die Abschnitte auf b den entsprechenden auf b_1 proportional, folglich auch $a\,a_1\,a_2$ einer Ebene parallel.

3. Das einschalige Hyperboloid wird von der unendlich entfernten Ebene in einer Curve II. O. geschnitten; die Gesammtheit der Tangentialebenen, welche die Fläche in ihren unendlich entfernten Punkten berühren, bildet einen Kegel II. O., Asymptotenkegel; jeder Strahl dieses Kegels ist einem Strahle der einen Schaar und zugleich einem Strahle der anderen Schaar parallel; jeder Strahl der Fläche ist einem Strahle des Asymptotenkegels parallel; die Strahlen der Regelfläche sind einander paarweise parallel. — Das einschalige Hyperboloid wird von einer Ebene in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel geschnitten, je nachdem die Schnittebene keinem Strahle, zweien Strahlen oder einem Strahle des Asymptotenkegels parallel ist.

§ 31. 1. a. Durch eine gegebene Curve II. O. lassen sich unendlich (unendlich mal unendlich) viele Regelflächen II. O. legen. — Man wähle 2 willkürliche Punkte der Curve σ und σ_1, mache sie zu Mittelpunkten zweier Strahlenbüschel in der Ebene der Curve und beziehe dieselben projektivisch so auf einander, dass sie die gegebene Curve erzeugen, lege durch σ und σ_1 2 Graden s und s_1, die weder mit einander noch mit der gegebenen Curve in einer Ebene liegen, mache s und s_1 zu Trägern zweier Ebenenbüschel I. O., welche perspektivisch auf die beiden Strahlenbüschel σ und σ_1 und dadurch projektivisch auf einander bezogen sind, so erzeugen dieselben eine Regelfläche II. O., welche die gegebene Curve zur Schnittcurve hat. — Dieselbe lässt sich auch so erzeugen, dass man eine Grade längs der Graden s und s_1 und der Curve gleiten lässt.

1. b. Zu einem gegebenen Kegel II. O. gibt es unendlich (unendlich mal unendlich) viele Regelflächen II. O., welche mit ihm von demselben Ebenenbüschel II. O. umhüllt werden. Man wähle 2 willkürliche Ebenen des Ebenenbüschels, S und S_1, mache sie zu Trägern zweier Strahlenbüschel, welche den Mittelpunkt des Kegels zum gemeinsamen Mittelpunkte haben, und beziehe dieselben projektivisch so auf einander, dass sie das gegebene Ebenenbüschel erzeugen; wähle in S und S_1 2 Grade s und s_1, von denen keine durch den Mittelpunkt des Kegels geht und die einander nicht schneiden; mache s und s_1 zu Trägern zweier Punktreihen I. O., welche perspektivisch auf die beiden Strahlenbüschel und dadurch projektivisch auf einander bezogen sind, so erzeugen dieselben eine Regelfläche II. O., welche von dem gegebenen Ebenenbüschel umhüllt wird. — Dieselbe lässt sich auch so erzeugen, dass man eine Grade längs der beiden Graden s und s_1 und des gegebenen Kegels II. O. gleiten lässt.

2. a. Durch 2 Curven II. O., welche 2 Punkte mit einander gemein haben und in 2 verschiedenen Ebenen liegen, lassen sich unendlich viele Regelflächen legen. — Die beiden Curven seien a und b, ihre gemeinsamen Punkte σ und σ_1. Die Tangenten der Curven a und b im Punkte σ müssen auch Tangenten der gesuchten Fläche sein; die beiden Tangenten bestimmen eine Ebene S, in welcher die beiden durch σ gehenden Strahlen einer durch die beiden Curven gelegten Regel-

fläche liegen müssen; ebenso bestimmt sich für den Punkt σ_1 eine Ebene S_1. — Zieht man in der Ebene S durch den Punkt σ eine beliebige Grade s, legt durch dieselbe eine Ebene, welche die Curve a im Punkte α, die Curve b im Punkte β zum zweiten Male schneidet, legt durch $\alpha\beta$ und σ_1 eine Ebene, welche S_1 in einer Graden s_1 schneidet, und macht nun die Graden s und s_1 zu Axen zweier Ebenenbüschel und bezieht dieselben projektivisch auf einander, indem man der Ebene S die Ebene $s_1\sigma$, der Ebene $s\sigma_1$ die Ebene S_1, der Ebene $s\alpha\beta$ die Ebene $s_1\alpha\beta$ zuweist, so erzeugen die beiden Ebenenbüschel eine Regelschaar, welche die Curven a und b zu Schnittcurven hat. — So wie die Lage von s gewählt ist, ist die Regelfläche eindeutig bestimmt.

Statt den Strahl s in S durch σ willkürlich zu wählen, kann man α und β willkürlich wählen; wenn man dem α eine feste Lage anweist und β die ganze Curve b durchlaufen lässt, so erhält man alle Regelflächen, welche die beiden gegebenen Curven enthalten. Wenn $\alpha\beta$ die Ebene S in λ und die Ebene S_1 in λ_1 schneidet, so sind $\sigma\lambda$ und $\sigma_1\lambda_1$ die Linien s und s_1, die Träger der beiden die Regelschaar erzeugenden Ebenenbüschel. — Wenn λ und λ_1 in einem Punkte der Schnittlinie von S und S_1 zusammenfallen, so ergibt sich der Grenzfall des Kegels; man erhält denselben, indem man durch α und die Grade SS_1 eine Ebene legt; dieselbe schneidet die Curve b im Allgemeinen und höchstens in 2 Punkten; es gibt deshalb im Allgemeinen und höchstens unter den durch a und b zu legenden Regelflächen zwei, welche sich im Grenzfalle des Kegels befinden. — Im Falle des Kegels liegen die Tangenten in α und β an a und b in einer Ebene, gehen also durch einen Punkt von $\sigma\sigma_1$. Wenn demnach das begrenzte Stück von $\sigma\sigma_1$ in Bezug auf beide Curven a und b innere Punkte oder in Bezug auf beide Curven äussere Punkte enthält, so gibt es 2 Kegel; wenn dagegen das begrenzte Stück von $\sigma\sigma_1$ in Bezug auf die eine der beiden gegebenen Curven innere Punkte, in Bezug auf die andere äussere Punkte enthält, so gibt es keinen Kegel.

Wenn die Curven a und b Hyperbeln sind, und man nimmt für α einen unendlich entfernten Punkt von a, gleichzeitig für β einen unendlich entfernten Punkt von b, so ist die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. — Sind also a und b Hyperbeln, so gibt es unter den erzeugten Regelflächen 4 hyperbolische Paraboloide, welche in 2 resp. in 1 zusammenfallen, wenn an die Stelle einer Hyperbel eine Parabel tritt oder wenn beide Hyperbeln in Parabeln übergehen.; in diesem letzten Falle bietet das Paraboloid einen besonders zu beachtenden Grenzfall. — Fernere lehrreiche Grenzfälle treten ein, wenn die gemeinsamen Punkte der beiden Curven nicht beide in endlicher Entfernung liegen.

2. b. Zu 2 gegebenen Ebenenbüscheln II. O. mit verschiedenen Mittelpunkten, welche 2 Paare Ebenen gemein haben, gibt es unendlich viele Regelflächen, welche von beiden Ebenenbüscheln umhüllt werden. — Die Entwickelung geht der unter 2. a. parallel. —

§ 32. Die Entwickelungen in § 27 bis 31 enthalten eine Anzahl von Grenzfällen, welche besondere Berücksichtigung verdienen; einige derselben sind schon berücksichtigt worden. — Dieselben entstehen dadurch, dass die Träger der die Regelschaaren erzeugenden Punktreihen oder Ebenenbüschel I. O. einen Punkt gemein haben; ferner dadurch, dass die Schnittebenen die Flächen in graden Linien schneiden, endlich dadurch, dass der Mittelpunkt der Projektion in der Fläche liegt.

§ 33. 1. Man kann irgend 2 Regelschaaren projektivisch auf einander beziehen, d. h. so auf einander beziehen, dass je 4 harmonische Strahlen der einen Schaar 4 harmonischen Strahlen der anderen entsprechen; man kann zu dem Ende irgend 3 Strahlen der einen Schaar 3 Strahlen der anderen Schaar zuweisen. — Man kann insbesondere die beiden Regelschaaren derselben Regelfläche projektivisch auf einander beziehen. Man schneide zu dem Ende die Regelfläche durch eine beliebige Ebene, die nicht Tangentialebene ist, mache die Schnittcurve zum Träger zweier projektivischen Punktreihen, indem man den Punkten α β γ der Curve die Punkte α_1 β_1 γ_1 derselben Curve zuweist, wähle 2 Punkte derselben Curve σ_1 und σ, so sind die beiden Strahlenbüschel $\sigma_1(\alpha\beta\gamma\ldots)$ und $\sigma(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ projektivisch auf einander bezogen; fasst man nun die durch $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\sigma$ gehenden Strahlen der einen Regelschaar, und die durch $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\ldots\sigma_1$ gehenden Strahlen der anderen Schaar ins Auge und nennt sie resp. $a\,b\,c\ldots s$ und $a_1\,b_1\,c_1\ldots s_1$ so ist das Ebenenbüschel $s_1(abc\ldots)\;\overline{\wedge}\;s(a_1b_1c_1\ldots)$ und dadurch $a\,b\,c\ldots\;\overline{\wedge}\;a_1\,b_1\,c_1\ldots$.

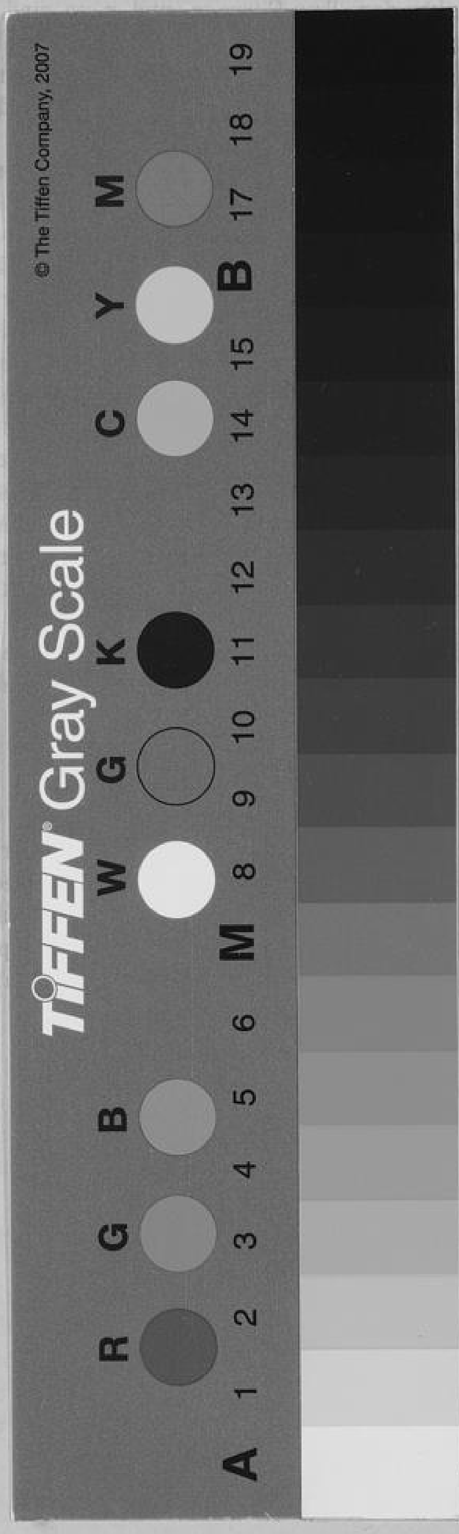
Die 3 Ebenen aa_1 bb_1 cc_1 gehen durch einen Punkt; die Ebenen berühren die Regelfläche in 3 Punkten $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$; die Ebene $\alpha'\beta'\gamma'$ schneidet die Fläche in einer Curve II. O. und die Strahlen s und s_1 in 2 Punkten σ' und σ_1'; dieselben sind Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel I. O., welche die Schnittcurve $\sigma'\sigma_1'\alpha'\beta'\gamma'$ erzeugen und vollständig bestimmen; demnach liegen alle Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Regelschaaren in der genannten Schnittebene und erfüllen eine Curve II. O., welche von den Ebenen des Ebenenbüschels umhüllt wird. — Demnach umhüllen die Strahlen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ eine Curve II. O.; ebenso in jeder anderen Schnittebene; wenn insbesondere die Schnittebene durch den Mittelpunkt des Ebenenbüschels II. O. gelegt wird, so gehen sämmtliche Verbindungslinien durch einen Punkt. — Da umgekehrt sich durch jede Curve II. O. unendlich viele Regelflächen legen lassen, so ergibt sich: Wenn eine Curve II. O. Träger zweier projektivischen Punktreihen ist, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve II. O.; dieselbe kann sich auf einen Punkt reduziren; dann tritt der Fall der Involution ein. —

2. Die Erzeugung der Curven II. O. durch 2 projektivisch schief liegende Graden erscheint hier als Spezialfall des Vorigen, insbesondere die perspektivische Lage zweier projektivischen Punktreihen I. O. als ein Spezialfall der involutorischen Lage zweier projektivischen Punktreihen II. O.

3. Der Entwickelung unter 1. und 2. geht eine andere, die sich an den Kegel II. O. anschliesst, durchaus parallel. — Entsprechende Sätze ergeben sich auch für das Strahlenbüschel II. O. in der Ebene und das Ebenenbüschel II. O.

Die Rücksicht auf die dem Umfange des Programms durch den Etat gezogenen Grenzen nöthigt mich hier abzubrechen. — Der synthetischen Geometrie werden im Sommer-Semester vier wöchentliche Stunden in Ober-Prima gewidmet; es wird ausser dem Vorstehenden hauptsächlich noch die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch reziproke Strahlenbündel resp. durch reziproke ebene Systeme nebst einigen ihrer wichtigsten Eigenschaften durchgenommen.

Gallenkamp.


TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007