Die Elemente der Form und Größe

(gewöhnlich Geometrie genannt)

nach

Pestalozzi's Grundsätzen

bearbeitet

von

Joseph Schmid,

ehemals Zögling und Lehrer am Pestalozzischen Institut in Iferten.

Dritter Theil.

Mit vier Kupfertafeln.

Heidelberg,
bey Mohr und Zimmer
1811.

Leser!

Ich habe in der Vorrede des ersten Theils der Größenlehre ꝛc. so viel gesagt, daß ich jetzt schweigen darf, und dafür thätiger arbeiten muß.

Nehmet die Uebungen dieses Heftes, so wie sie in demselben auf einander folgen; und seyd dabey ferner nicht weniger thätig mit euren Schülern, als diejenigen es seyn mußten, die diese Wahrheiten und Verhältnisse fanden; und ihr werdet dann mit mir behaupten können:

Der Schüler nimmt, so geführt, an Geisteskraft und Geistesthätigkeit zu, wie an Alter, und wie in demselben an Körperkraft und Körperthätigkeit; und nur dadurch, daß wir diese schöne, ja göttliche Harmonie, niemals stöhren, erziehen wir das Kind zum Jüngling, den Jüngling zum Mann, und den Mann zum Greise. Heil kann nur derjenigen Erziehung wiederfahren, die nie eins dieser Glieder überspringt, und jedes in seiner höchsten Reinheit vollendet ausbildet.

Ich wollte diesem Heft noch einen Anhang beylegen, der vieles über mein gesagtes in der Mathematik deutlich machen würde; und besonders, einiges von dem Ausgeführten verbesserte, neues hinzusetzte, entbehrliches wegließ ꝛc. —

Dieser Anhang ist für ein ähnliches Buch zu groß, und jetzt nicht so weit gereift, als ich es wünsche; zu diesem ist die Zeit dazu noch nicht da; denn die öffentlichen Urtheile haben noch nicht aufgehört, welche doch so wesentlich zur allseitigen Vollendung beytragen können, wenn die Sache ohne alle Nebenrücksichten mit aller Schärfe untersucht, und angegriffen wird, wo sie nicht Stich hält. Bey diesem Angreifen darf man aber niemals vergessen, daß meine aufgestellte Mathematik, eine pädagogische ist; und folglich für Kinder in ihrem ersten Schulalter passen, und dieselbe stufenweis selbstständig weiter führen soll; folglich kann man nicht nach einem willkührlichen System verfahren, die Natur muß Muster bleiben; und nur in so fern wir fähig sind, dieses Muster getreu und wahr von ihrem Anfang an zu kopieren, erhalten wir eine naturgemäße Mathematik für Kinder. Meine aufgestellte ist es freilich nicht in dem Grade, in dem sie es seyn sollte; das fehlende wird jetzt nachgeholt; und ihr werdet dann am Ende gewiß das von mir so stark ausgesprochene, als eine

Ahndung dessen erkennen lernen, was wirklich mög-
lich ist; und mit der Zeit in Erfüllung gehen kann,
und so Gott will in Erfüllung gehen wird.

Ich übergebe jetzt diesen 3ten Theil dem Drucke, um die ersten zwey wahrhaft nützlich und nothwendig zu machen; und zwar durch ihre Anwendung. Freylich steht die mathematische Geistesentwicklung erhaben über alle Anwendung da; sie ist dann aber nur eine Thätigkeit und Kraftübnng der Seele.

Körper und Seele ist hienieden vereiniget; laßt uns vereiniget erhalten, was der Allweise so weise schuf!

Was die reine Mathematik dem Geiste ist, ist die Anwendung davon dem Körper; wird also die reine Mathematik getrennt von der Anwendung betrieben, so ist das Wesen des Menschen, Seele und Körper, aus dem Gleichgewicht, aus dem natürlichen Zustande gebracht, und man erhält Menschen, die nur zu einer, statt zwey, so nothwendig vereinigten Kräften ausgebildet werden; nämlich: Menschen, deren Seele, oder deren Körper vorherrschend wird, bey denen es ihrer Natur nach, doch in ziemlicher Harmonie wäre; und zur noch größern Harmonie ausgebildet werden sollte. — Wir machen durch diese Trennung der Seele von dem Körper die Menschen unglücklich; denn das Gleichgewicht wird in ihnen durch Menschenhände gestöhrt, sie streben in dieser Stöhrung ohne Maaß und Schranken nach einer einzelnen aus dem Organismus herausgerissenen und ausgebildeten Seite, und je weiter sie darin kommen, desto mehr entfernen sie sich von dem glücklichen Mittelpunkte; in dem sich der Mensch so rein bewegt, und so reichlich findet, was er bedarf, und nicht sucht, was er nicht bedarf. —

Eine Folge dieser gestöhrten Harmonie ist die Unmäßigkeit, welche in unsern Tagen, geistig und körperlich, so viel zu Grunde richtet. —

Die Seele erhält ihre Anregungen durch die Sinne, durch den Körper; die Anregung der Sinne ist beym Kinde das erste; und folglich auch in der Mathematik für dasselbe.

Wenn die reine Mathematik dem Geiste das ist, was ihre Anwendung dem Körper, so müssen wir zu dem Schlusse kommen: eine angewandte Mathematik geht der reinen voran; und wirklich findet dieses bey Kindern statt; ich will es jetzt aber nicht mit Worten, sondern bald durch die That beweisen; Worte bringen nur wieder Worte hervor, nützen selten. — Ich begnüge mich daher mit ein paar Winken: —

Die Natur ergreift das Kind als ein Ganzes, sie trennt nichts; — folglich müssen die ersten Merkmahle der Mathematik für dasselbe, auch Merkmahle des ungetrennten Zustandes seyn; das Trennen lernt es erst später, fängt dann an, das Getrennte zu abstrahiren, und erhebt sich durch dasselbe zu einem zweyten Merkmahle der Mathematik, welches die reine, oder abstrakte ist; und was der kräftige Geist auf diesem Weg dann anfängt rein zu erkennen, und so schaft, will er im Leben wieder dargestellt haben, wenn er nicht aus seiner Harmonie heraus tritt. Der Geist fängt also später auch an, den Körper anzuregen und zu bethätigen, und der bethätigte Körper, bethätigt eben so die Seele wieder.

Die zweite Stufe der naturgemäßen Anwendung ist also wechselseitig, und je wechselseitiger und inniger dann diese Anwendung mit der reinen Mathematik; oder besser, praktisches Leben und Thätigkeit der Seele mit einander vereiniget sind, ja sogar eins machen, und so ausgebildet werden, desto mehr ist die Mathematik zur Veredlung und Befriedigung unseres wahren Daseyns, geeignet, und nur eine solche Mathematik ist eine wahr menschliche. —

Um einer solchen angewandten Mathematik die nöthige Ausdehnung und das hinlänglich freye Leben der Natur zu geben, erfordert es die Vereinigung der Zahl und Form; denn beyde sind in der Natur vereiniget, und dieselbe trennt nie, was zum wahren Organismus gehört. —

In diesem Heft ist Zahl und Form wieder vereiniget, und wird deswegen für jeden nöthig, der meine Anwendung in der Mathematik zu gebrauchen gedenkt.

München, den 24. Dezember 1810.

Der Verfasser.

§. 1.

Von dem geometrischen Verhältnisse.

Wird eine Größe mit einer andern verglichen, und bestimmt, so nennen wir diese Vergleichung eine organische.

Fg. Welches ist eine organische Vergleichung?

Geb't ein Beyspiel, in der eine Größe mit der andern organisch verglichen ist. Sie werden sagen: Wenn man angiebt, eine Größe sey die Hälfte, oder 3tel ꝛc. einer andern, so ist die Bestimmung organisch. —

Fg. Könnet ihr ein solches Verhältniß mit Linien darstellen? Antwort, ja — L. Thut es. —

Der Lehrer fährt weiter, und sagt: wenn zu 2 Linien, die in einem organischen Verhältnisse zu einander stehen, noch 2 hinzugesetzt werden, die in dem nämlichen organischen Verhältnisse stehen, so nennt man das Verhältniß dieser 4 Größen zu einander, ein geometrisches.

Fg. Wie entsteht ein geometrisches Verhältniß?

Fg. Könnet ihr 4 Linien machen, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen?

Lhr. Macht es. Worüber sie etwa eine Linie machen werden, die die Hälfte einer 2ten, und so eine 3te, die wieder die Hälfte einer 4ten ist. —

Fg. Aus wie viel organischen Vergleichungen ist ein geometrisches Verhältniß gebildet?

Fr. Geb't eine doppelt-organische Vergleichung an, die kein geometrisches Verhältniß bildet? Antwort: Wenn in der 1ten Vergleichung eine Größe die Hälfte einer 2ten ist; und in der 2ten, die eine $\frac{1}{3}$ der andern. —

Der Lehrer: Solche doppelte organische Vergleichungen nennt man unähnliche; und diejenigen, welche ein geometrisches Verhältniß bilden, ähnliche rc. —

Lhr. Stellt 2 Linien in ein organisches Verhältniß, und setzt dann zu diesen 2 Linien 2 andere, die ein organisches Verhältniß mit einander bilden, das dem 1ten unähnlich ist. —

Der Lehrer: Um zwey ähnlich-organische Verhältnisse, oder ein geometrisches aufzustellen, können die Theile der 2ten Verhältnisse ihrem Inhalt nach ungleich, und ihrer Anzahl nach gleich; oder ihrem Inhalt und ihrer Anzahl nach gleich seyn. —

Fg. Welcher kann in Linien, für den 1ten Fall, ein Beyspiel aufstellen?

Antw. Im 1ten organischen Verhältnisse kann man nur 2 zu 3 nehmen; desgleichen im 2ten; die 2 und 3 Theile des 2ten organischen Verhältnisses werden einander gleich, aber denen des 1ten ungleich gemacht. —

Fr. Was hat das doppelt-organische Verhältniß, das ein geometrisches bildet, immer unveränderliches?

Antw. Die 1te Größe des 1ten organischen Verhältnisses ist immer der gleiche, oder die gleichen Theile der 2ten ꝛc. —

So mit dem veränderlichen.

(Aus diesem vorausgegangenen ließ sich leicht eine Definition über das Wesen des geometrischen Verhältnisses geben; und würde dem Schüler nicht undeutlich als eine Beziehung mehrerer ähnlicher geometrischer Verhältnisse zu einander vor seiner Seele schweben; allein ich halte sie für unnöthig; denn wenn wir den Grundsatz streng verfolgen, so ergiebt sich aus demselben: daß der Schüler nur durch anhaltendes darin Leben und Arbeiten sich zu diesen allgemein geistigen Schlüssen emporhebt; und sie würde daher hier am unrechten Platze stehen; zu diesem ist das geometrische Verhältniß eine auf Raum angewandte Algebra, die folglich wie die Definition auf ein höheres Gebiet gehört, das ich jetzt nur so weit betrete, als es mir nöthig ist, um die geometrischen Verhältnisse der geradlinigen Figuren zu bestimmen. — Ich fahre mit dem angefangenen weiter.)

Der Lhr: Größen, die ein geometrisches Verhältniß bilden, nennt man auch Glieder desselben.

Fg. Aus wie viel Gliedern, oder Größen ist ein geometrisches Verhältniß gebildet?

Fg. Wie viel Glieder können davon gleich seyn?

Antw. Alle 4, oder 2 und wieder 2, oder 2 gleich und 2 ungleich, oder alle 4 ungleich.

Ein geometrisches Verhältniß 4 gleicher Glieder, ist die Vergleichung oder Wiederholung der Einheit. —

Bey 2 und 2 gleichen Größen werden die Schüler finden, daß sie unter 2 Formen ein geometrisches Verhältniß bilden können.

Bey 2 gleichen, und 2 ungleichen Größen, kann das geometrische Verhältniß als aus 3 Gliedern gebildet betrachtet werden, wobei ein Glied zweymal genommen wird, und in die Mitte der beyden andern fällt.

Allgemeine Sätze des geometrischen Verhältnisses durch die Verbindung des Hinzuthuns oder Hinwegnehmens.

Lhr. Untersucht, ob noch ein geometrisches Verhältniß bleibe, wenn man von 4 gleichen Gliedern, oder von 2 und 2 gleichen ꝛc. etwas wegthut, oder hinzusetzt.

Werden bey 4 gleichen Größen von einer etwas weggethan, so ist das geometrische Verhältniß aufgehoben; wird von 2 weggethan, so kann eins, oder auch keins bleiben ꝛc.

So allgemein diese Fragen sind, so leicht sind auch die Antworten; deswegen mag es ein jeder nach Bedürfniß ausführen. —

Verbindung mehrerer geometrischen Verhältnisse, durch das Hinzusetzen und Hinwegnehmen.

Fg. Wißt ihr noch, welches man ähnliche organische Vergleichungen nennt?

Fg. Welches nennt man ähnliche geometrische Verhältnisse?

Stellt mit Linien ähnliche geometrische Verhältnisse auf. —

Worüber sie etwa kommendes machen werden: 1 zu 3 wie 4 zu 12, seyn das 1te; 5 : 15 : : 6 : 18 das 2te. —

Lhr. Stellt mir 2 unähnliche geometrische Verhältnisse auf. —

Lhr. Stellt mir 2 gleiche geometrische Verhältnisse auf. —

1 : 2 : : 4 : 8
1 : 2 : : 4 : 8

Lhr. Untersucht, was für ein geometrisches Verhältniß entstehe, wenn man zu einem geometrischen Verhältniß ein ihm gleiches gleich hinzusetze. (Das heißt: das kleinste Glied muß zum kleinsten rc. gesetzt werden.) Antw. Ein dem 1ten, und dem hinzugesetzten, ähnliches.

Auflösung.

Die Linien a, b, c und d sollen das 1te geometrische Verhältniß bilden; A, B, C und D das 2te; a = A, b = B rc. —; wenn man diese 2 geometrische Verhältnisse verbindet, so muß A zu a, B zu b rc. gesetzt werden, folglich ist a und A das verdoppelte a, oder A; desgleichen b und B rc. —; also ist jedes Glied des 1ten geometrischen Verhältnisses verdoppelt worden, das verdoppelte des 1ten Glieds, ist der gleiche Theil des verdoppelten 2ten rc. —, wie das einfache des 1ten, vom einfachen des 2ten rc.; und folglich ist das entstandene geometrische Verhältniß dem 1ten ähnlich.

Lhr. Untersucht was für ein geometrisches Verhältniß entstehe, wenn man zu einem geometrischen Verhältniß, ein ihm ähnliches, ähnlich hinzusetzt. (Wie es ähnlich hinzugesetzt werden muß, ist in der vorhergehenden Bemerkung enthalten.)

Auflösung.

Die 4 Größen a, b, c und d sollen das 1te bilden; A, B. C und D das 2te, welches dem 1ten ähnlich ist, und ähnlich hinzugesetzt wird; — a ist das gleich vielfache von b, wie A von B, wird A zu a, und B zu b gesetzt, so hat man zu beyden ein gleich vielfaches des 1ten und 2ten geometrischen Verhältnisses gesetzt, also muß das entstehende des 1ten Glieds, oder a und A, auch wieder das gleich vielfache des 2ten, oder b und B werden, wie a von b, oder wie A von B; desgleichen findet mit dem 3ten und 4ten Gliede statt; folglich stehen die entstehenden 4 Glieder in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse mit dem gegebenen und hinzugesetzten geometrischen Verhältniß.

Lhr. Untersucht, was für ein geometrisches Verhältniß entstehe, wenn man zu einem geometrischen Verhältnisse ein ihm unähnliches hinzusetzt. Antw. Es kann ein geometrisches Verhältniß entstehen, oder auch nicht; dieses entstehende geometrische Verhältniß ist aber immer beiden geometrischen Verhältnissen unähnlich.

Auflösung des ersten Falls.

Daß das geometrische Verhältniß aufgehoben werden kann, ist so leicht zu beweisen, daß ich hierüber nichts sage. —

a, b, c und d bilden das 1te, A, B, C und D das 2te geometrische Verhältniß; soll durch die Vereinigung dieser unähnlichen geometrischen Verhältnisse wieder eins entstehen, so wird zu a und b zuerst A und B beliebig hinzugesetzt, zu c muß aber eine Größe C gethan werden, die so oft so groß ist, als c, a enthält, und hernach c noch so oft wiederholt werden, als A, a enthält; denn dadurch erhält man eine Größe C, die so oft c enthält, als dieses c so groß ist als das 1te Glied des 1ten und 2ten geometrischen Verhältnisses, das folglich ein C giebt, welches dem 1ten

Glied, des 1ten und 2ten geometrischen Verhältnisses entspricht, und also kann es auch als das 3te Glied des 2ten geometrischen Verhältnisses, oder als das 1te Glied in der 2ten organischen Vergleichung des 2ten geometrischen Verhältnisses betrachtet werden. Um aber eine solche Auflösung noch anschaulicher für Kinder zu machen, darf man sie im vorliegenden Fall etwa 4 Linien machen lassen, deren Verhältniß in Theilen ausgedrückt ist. Z. E. a = 1 b = 3, c = 5, d = 15, A = 2, B = 3, C = 10 und D = 15; die weitere Auflösung ist nach diesen Kennzeichen leicht —; daß die Theile des 2ten geometrischen Verhältnisses ungleich denen des 1ten seyn können, weiß man. —

Das gefundene geometrische Verhältniß ist dem angegebenen, und dem hinzugesetzten unähnlich; denn wenn zu einem geometrischen Verhältniß ein ähnliches hinzugesetzt wird, so erhält man wieder ein ähnliches geometrisches Verhältniß; nun ist aber dieses Verhältniß nicht ähnlich, sondern unähnlich, folglich muß man auch ein verschiedenes Verhältniß erhalten, welches ein unähnliches ist rc. —

Wie gleiche, ähnliche und unähnliche geometrische Verhältnisse mit einander verbunden wurden; so können sie auch wieder getrennt, oder hinweggethan werden. — Z. E. Von einem geometrischen Verhältniß kann man ein gleiches ähnliches, oder unähnliches wegthun; durch welches man wieder obige Wahrheiten findet. —

Bey

Bey diesen Aufgaben hat man ein gleiches, ähnliches und unähnliches geometrisches Verhältniß zu beliebigen Größen hinzugesetzt, und hinweggethan. Desgleichen könnte noch mit bestimmtern Linien, oder Größen vorgenommen werden. Z. E.

Von 4 gleich langen Linien, die folglich in einem geometrischen Verhältniß stehen, wird ein unähnliches geometrisches Verhälzniß weggethan; es fragt sich, ob die Reste auch wieder in einem geometrischen Verhältnisse stehen? —

Für meinen vorgesetzten Zweck bedürfen wir aber solche Aufgaben nicht mehr, desgleichen diejenigen, welche aus dem Unterschied, oder durch das Theilen entstehen, wie auch die, welche durch die Verbindung des Hinzusetzens und Hinwegthuns, oder des Hinzusetzens und Unterschieds ꝛc. gebildet werden.

Ueber das Multipliziren, Dividiren und Versetzen der Glieder findet man die nöthigen Aufgaben in §. 23 der Algebra; deswegen wird hier nichts weiter mehr darüber gesagt; die Verbindung dieser 3 Gesichtspunkte mit dem Hinzusetzen ꝛc. — ist ganz unnöthig für dieses Heft. —

Desgleichen die stetigen geometrischen Verhältnisse, oder geometrischen Verhältnisse mit mehr als 4 Gliedern ꝛc.; alles dieses gehört auf ein höheres Gebiet, oder in die Algebra angewandt auf Raum ꝛc. —

§. 2.
Von dem geometrischen Verhältnisse der Seiten, in Dreyecken, Vierecken ꝛc.

Daß das geometrische Verhältniß auch auf Schenkel und Winkel angewandt werden kann, wird durch die Ausführung der Seiten klar werden; es ist zugleich unwichtig, und wird deswegen hier übergangen. —

Lhr. Untersucht, ob 3 Seiten eines △'s in einem geometrischen Verhältnisse stehen, und in welchen △? Sie werden finden, daß dieses beym gleich- und ungleichseitigen △ möglich, beym gleichschenklichen aber immer unmöglich sey; denn wenn man im 1ten Glied eine dergleichen Seiten zur andern setzt, so muß das 2te Glied, oder einer dergleichen Schenkeln noch einmal genommen werden, wodurch man für das letzte Glied wieder eine solche Seite erhalten würde, wenn sie in einem geometrischen Verhältnisse stünden; und folglich wäre das △ gleichseitig. —

Auf die nämliche Weise kann der Lehrer die Schüler das geometrische Verhältniß der Seiten eines 4Ecks, 5Ecks, 6Ecks ꝛc. untersuchen lassen, welches aber unwichtig ist.

Es soll das geometrische Verhältniß der Seiten zweyer △, oder zweyer 4Ecke, oder 1 △ und 1 □ ꝛc. aufgesucht werden.

(Um dieses zu finden, verbinde ich die Figuren so viel als immer möglich ist mit einander, und mache den Anfang bey 2 Δ.)

Ich ziehe in einem Δ eine Linie gleichlaufend mit einer Seite desselben, wodurch die Figur auch als 2 Δ ins Auge gefaßt werden kann. Seht Zeichnung, oder Figur 1 in welcher Seite d g gleichlaufend b c ist, das Δ a b c soll als das 1te, und a d g als das 2te betrachtet werden. Es wird untersucht, welche Seiten des 1ten Δ, mit denen des 2ten ein geometrisches Verhältniß bilden?

Zum voraus weiß man aus der Gleichheitslehre der Figuren, daß das 1te Δ ähnlich dem 2ten ist, ferner daß wenn d g zur Mitte, zum 3tel, 4tel, 5tel, zu $\frac{2}{3}$tel, $\frac{3}{4}$tel ꝛc. der Linie a b gezogen ist, so schneidet sie a b auch zu diesen Theilen, wird der Ort, von dem sie ausgezogen ist, nicht mehr durch die Zahl ausgedrückt, so bleibt ihre Eigenschaft dieses Theilens doch, kann aber ebenfalls nicht mehr durch die Zahl, sondern nur durch das Verhältniß des gleichen Theils ausgedrückt werden, und es ergiebt sich folgender Ausdruck: d g geht durch den gleichen Theil von a b, wie durch a c. Wenn eine Größe der gleiche Theil einer 2ten ist, wie eine 3te einer 4ten, so stehen sie in einem geometrischen Verhältniß; nun ist a d der gleiche Theil von a b, wie a g von a c, folglich verhält sich a d : a b ∷ a g : a c.

Desgleichen findet bey d g und b c statt; denn wenn d g zur Hälfte von a b gezogen ist, so wird d g auch die Hälfte von b c; wird sie durch ⅓tel gezogen, (von der Spitze a an gerechnet) so wird d g auch ⅓tel von b c, welches der gleiche Theil ist, wie a d von a b; das nämliche Resonnement weiter geführt, giebt endlich folgendes Verhältniß: d g : b c ∷ a d : a b.

Eben so läßt sich beweisen, daß sich d g auch zu b c verhalte, wie a g zu a c; folglich ergiebt sich folgendes zusammenhängend = geometrische Verhältniß d g : b c ∷ a g : a c ∷ a d : a b.

Betrachtet man diese Seiten genauer, so findet man, daß es die gleichliegenden Seiten in ähnlichen △ sind; und es kann der allgemeine Grundsatz darüber ausgesprochen werden: daß die gleichliegenden Seiten in ähnlichen △ in einem geometrischen Verhältniß stehen. I. Satz; welches bei Benennung der Seiten heißt: die kleinste Seite des einen △, verhält sich zur kleinsten Seite des andern, wie die mittlere Seite des erst genannten, zur mittlern Seite des andern, wie die größte Seite des 1ten, zur größten Seite des 2ten. —

Durch die Verwechslung der Glieder wissen wir ferner: daß sich a d : a g ∷ a b : a c, denn wir hatten a d : a b ∷ a g : a c; und das 1te Glied eines geometrischen Verhältnisses verhält sich zum 3ten, wie das 2te zum 4ten; faßt für diese Verwechslung 25 der Algebra ins Auge. Desgleichen verhält sich d g : a g ∷

bc : ca 2c., und also läßt sich aus diesem folgender Schluß ziehen: Zwey Seiten eines Δ verhalten sich eben so zu einander, wie 2 ihnen gleichliegende Seiten eines andern ihm ähnlichen Δ 2. Satz; das heißt: die größte Seite des einen Δ, verhält sich zu seiner mittelsten oder kleinsten Seite, wie die größte eines andern ihm ähnlichen Δ, zu seiner mittelsten, oder kleinsten.

Ist den Kindern das aufgestellte deutlich, so kann man sie untersuchen lassen, ob sich eine Seite eines Δ zu einer gleichliegenden Seite eines andern ähnlichen Δ verhalte, wie eine Seite des 1ten Δ zu einer ihr nicht gleich liegenden Seite des andern? Z. E. Ob sich ac : ag :: ac : ab.

Daß dieses seyn, und nicht seyn kann, ist leicht zu zeigen; denn ac kann beynahe so groß als ag, und im nämlichen Fall kann auch ac beynahe ab gleich seyn 2c. —

Dadurch, daß die Linie dg gleichlaufend bc gezogen wurde, sind 2 Abschnitte db und gc entstanden, die als einzeln mit ihren 2 anliegenden Seiten betrachtet, ein Paralleltrapez bilden; man kann daher die Schüler untersuchen lassen, mit welchen Seiten der 2 Δ diese Abschnitte in einem geometrischen Verhältniß stehen; wobey sie finden werden, daß sich gc : db :: ag : ad; denn ac : ab :: ag : ad; thut man von einem geometrischen Verhältniß ein ähnliches geometrisches Verhältniß weg, so ist der bleibende Rest ebenfalls wieder in einem solchen geometrischen Verhältniß; um gc und db zu erhalten, muß man vom geometrischen Verhältniß a c zu a b, das geometrische Verhältniß ag : ad wegthun ꝛc. — Folglich kann man allgemein aussprechen: Die Abschnitte, welche zwischen der einen Seite des Δ, und der gleichlaufenden Linie sind, stehen mit den gleichliegenden Seiten, oder mit den Seiten, die in einer Richtung mit denen der 2 Δ liegen, in einem geometrischen Verhältniß, 3. Satz; so, daß sich folgendes Verhältniß ergiebt: gc : db ⁚⁚ ac : ab ⁚⁚ ag : ad.

Auch kann man sie untersuchen lassen, ob sich diese 2 Abschnitte eben so zu einander verhalten, wie 2 andere Seiten, des 1ten, oder 2ten Δ. Z. E. Verhält sich g c zu d b, wie a g zu g d ꝛc.? Als Antwort wird man erhalten: daß es seyn, und auch nicht seyn könne.

Werden ähnliche Untersuchungen bey Δ gemacht, so folgt die nähere Bestimmung der Δ aus der zu lösenden Aufgabe —; daß man aber auch von dieser nähern Bestimmung wieder selber ausgehen kann, und zuerst eine gleichlaufende Linie im gleichseitigen, hernach im gleichschenklichen, und zwar recht⸗ spitz⸗ und stumpfwinklichen Δ ziehen kann, versteht sich, desgleichen mit dem ungleichseitigen.

Statt einer gleichlaufenden Linie soll jetzt in einem Δ eine ungleichlaufende gezogen werden.

Daß aber gerade dadurch die geometrischen Verhältnisse, die wir in vorliegender Figur fanden, aufgehoben worden, ist so leicht zu zeigen, und zu beweisen, daß es ein jeder, welcher das vorhergehende verstanden hat, auch ohne weiters ausführen wird; denn durch das ungleichlaufend seyn der Linien wird von der einen Seite des 2ten Δ weggeschnitten, und die andere bleibt; seht die punktierte Linie ds an Figur 1. Folglich kann man allgemein schließen; *Daß in einem Δ, in dem eine Linie ungleichlaufend mit einer Seite gezogen ist; das umgekehrte der gefundenen Sätze statt finde.*

4. *Satz.* .

Daß dieser Satz weiter entwickelt und bewiesen werden kann, zeigt das ausgeführte schon hinlänglich; die gleichlaufende Linie kann als Tipus dienen; und die noch zu beweisenden Sätze können nur auf die bewiesenen zurückgeführt werden. Auch könnten die Sätze der ungleichlaufenden Linien, ganz unabhängig von den gleichlaufenden gelöst werden, wobei ein ähnliches Räsonnement des 1ten Satzes statt findet. Die Ausführung dieser Sätze überlasse ich dem Bedürfniß eines jeden, und gebe dafür ein paar andere Aufgaben, die auch diese Sätze zum Theil lösen.

Man giebt 2 Δ, und folgert aus dem geometrischen Verhältnisse der Seiten die Aehnlichkeit derselben. Z. E.

Zwei Seiten eines △ stehen mit 2 Seiten eines andern △ in einem geometrischen Verhältnisse; es fragt sich, ob die 2 △ ähnlich oder unähnlich seyen? Werden in der Angabe weder Winkel, noch andere Eigenschaften der △ angegeben, so sieht jedermann ohne weitern Beweis ein, daß sie ähnlich oder unähnlich seyn können. Es werden den 2 △ aber noch andere Eigenschaften beygelegt, und etwa folgende Frage gemacht: Wenn 2 △ 2 gleiche Winkel haben, und die sie einschließenden Seiten in einem geometrischen Verhältniß zu einander stehen, so fragt es sich, ob sie dann ähnlich, oder unähnlich?

Auflösung.

Wenn ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern, so können beyde △ so aufeinander gelegt werden, wie das △ a d g und a b c an Figur 1 vorstellt; (a b soll kürzer als a c seyn, und ähnlich auf einander gelegt) wodurch man folgendes Verhältniß bekommt a d : a b ∷ a g : a c, wäre die Linie d g nicht gleichlaufend b c, so würde dieses nach dem vorhergehenden Satz nicht statt finden, welches doch als Angabe gegeben ist, folglich ist d f gleichlaufend b c, und das △ a d g ist ähnlich a b c, welches schon im 1ten Theil der Größenlehre entwickelt und bewiesen ist; also läßt sich folgende Wahrheit auch allgemein aussprechen: Wenn 2 △ 2 gleiche Winkel haben, und die 4 einschließenden Seiten beyder

Δ in einem geometrischen Verhältniß stehen, so sind die Δ selber ähnlich. 5. Satz. Auch könnte dieser Satz ganz unabhängig von den vorhergehenden bewiesen werden; welches jedoch nicht mehr nöthig ist, und deswegen auch weiter geschritten wird.

Zwey Δ haben 2 gleiche Winkel, und die diesen 2 gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, mit 2 Seiten, die diesen Winkeln anliegen, bilden ein geometrisches Verhältniß; doch aber so, daß die erst benannten 2 Linien als das 1te und 2te, oder 3te und 4te Glied des geometrischen Verhältnisses zu betrachten sind; es fragt sich, ob die Δ ähnlich, oder unähnlich seyen.

Ferner, ob das gleiche statt finde, wenn die erst benannten Linien ꝛc. das 1te und 3te Glied bilden?

Auch kann noch gefragt werden, ob das nämliche statt finde, wenn gar keine Seite bestimmt wird.

Alle 3 Aufgaben sind leicht zu lösen, wenn die allseitige Anschauung der Δ, und der Figuren im allgemeinen entwickelt ist, welches hier, wie überall vorausgesetzt werden darf.

Um aber auch dem schwächern genugthuende Handbiethung zu geben, folgt die Auflösung der 1ten Frage.

a d g und a b c an Figur 1 sind die 2 Δ; der Winkel g a d ist für beyde Δ gemein, folglich ist dieses der in beiden Δ gleiche Winkel; ferner ist durch die Aufeinanderlegung angegeben, daß sich $dg : bc :: ag : ac$; die weitere Auflösung und Auseinandersetzung ist leicht. — Ich höre mit dem weitern Beweise auf, und zeige, daß sie auch unähnlich seyn können; und ebenfalls so in einem geometrischen Verhältniß stehen.

Figur 1. Das Δ abc sey gleichschenklich spitzwinklich $ab = ac$, wodurch $ds = dg$ gemacht werden kann; in voriger Auflösung haben wir gesehen, daß sich $dg : cb :: ag : ac$, also verhält sich ds auch zu bc, wie $ad : ac$, denn ad ist gleich ag, wen $ab = ac$ ꝛc. gemacht wird.

Folglich können sie im 1ten Fall in einem geometrischen Verhältniß seyn, oder nicht seyn.

Um diesen, wie auch ähnliche Fälle und Aufgaben zu lösen, ist der Schüler gezwungen, alle noch nöthigen Bedingungen und Bestimmungen selber noch aufzufinden und hinzuzusetzen, welches das eigentliche wahre Leben der Auflösung ist.

Der Lehrer fährt in dem gefundenen Resultate dieser Figur weiter, und läßt die Schüler eine unveränderliche Eigenschaft angeben, in denen die Δ immer ähnlich, oder unähnlich seyn müssen.

Mehr als ein bekannter Winkel kann bey der Angabe in solchen Fragen nicht vorkommen; denn, wenn 2 gegeben würden, so wäre die Aehnlich- oder Unähnlichkeit der Δ selber schon damit gegeben, und die Frage wäre folglich schon durch die Angabe gelöst.

Wird gar kein Winkel gegeben, so kann auch allein aus dem geometrischen Verhältniß aller Seiten die Aehnlichkeit der Δ erwiesen werden. Z. E.

Drey Seiten eines Δ stehen mit 3 Seiten eines andern Δ in einem geometrischen Verhältniß; das heißt, die kürzste Seite des 1ten, verhält sich zur kürzsten Seite des 2ten, wie die mittelste des 1ten, zur mittelsten des 2ten ꝛc.; es fragt sich, ob beyde Δ ähnlich, oder unähnlich seyen?

Auflösung.

Die Seiten eines Δ sind abhängig von den Winkeln, je größer der Winkel, desto größer die gegenüberstehende Seite ꝛc., ist also ein Δ unähnlich einem andern, so stehen die Seiten in diesem Δ in einem geänderten Verhältniß der ähnlichen Δ; wenn sie ähnlich sind, so stehen sie in einem geometrischen Verhältniß; seht die 1ten Sätze dieses §. an. Nun wollen wir annehmen, die Δ seyen unähnlich, wodurch dann die Seiten in keinem geometrischen Verhältnisse stehen würden; welches mit der 1ten Annahme oder Angabe im Widerspruch ist: folglich muß die 2te Annahme, daß die Δ unähnlich sind, falsch seyn; woraus sich also schließen läßt, daß die Δ ähnlich seyn müssen.

Bey dieser Auflösung wurde angenommen; daß die Δ ganz unähnlich seyen; und darf deswegen auch als eine der schwersten Aufgagen dieser Reihenfolge betrachtet werden. Auch über solche Aufgaben haben meine Schüler die mannigfaltigsten Auflösungen gemacht.

Weil die Bestimmung der Aehnlichkeit der Figuren, aus dem geometrischen Verhältniß ihrer Seiten, für sich eine interessante Uebung ist, aber nicht so nothwendig, und wichtig, als die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses der Seiten bey ähnlichen und unähnlichen Figuren ist, so höre ich mit diesem auf, und schreite zum lezten, und gerade dieses mag mich auch entschuldigen, daß ich hier die Sätze nicht allgemein abstrahierte, und sie durch Zahlen bezeichnete. —

Statt eine Linie im △ allgemein nur ungleichlaufend zu ziehen, ziehe ich sie jetzt so, daß das 2te, oder entstehende △ wieder ähnlich dem 1ten wird. Seht Figur 2. in dem der Winkel $aef = abd$ ist, folglich das △ aef ähnlich abd, aus welchem sich also folgendes geometrische Verhältniß ergiebt: $af : ae$ ⁝⁝ $ad : ab$; ferner $af : ad$ ⁝⁝ $ae : ab$ ⁝⁝ $ef : bd$.

Können die Schüler solche Verhältnisse geläufig finden, und die Gründe auf die bewiesene Sätze zurückführen, so dürfen sie wieder zum Untersuchen der Abschnitte fb und ed übergeführt werden, wobey sie ohne Mühe finden sollen, daß sie nicht immer mit den Seiten der 2 △ in einem geometrischen Verhältnisse stehen. Ich will hier nur eine einzelne Aufgabe herausheben, und zeigen, daß sie nicht in folgendem geometrischen Verhältniß stehen: af : ae :: ed : fb.

Auflösung.

ab soll in diesem Fall beynahe gleich ad seyn; folglich müßte ed auch in allen Fällen immer beynahe gleich fb werden; denn das △ afe ist ähnlich abd 2c., in einem solchen △ muß aber ed nicht immer beynahe fb seyn; um es deutlicher zu machen, zieht man sm gleichlaufend fe, fb kann in ähnlichen Fällen als Seite so gar aufhören; während ed beynahe noch der ganzen Seite ab gleich ist, um dieses zu erhalten, muß das △ abd nur gleichschenklich rechtwinklich und der Winkel abd recht gemacht werden. Daß die 4 angegebenen Seiten zu Zeiten in einem geometrischen Verhältnisse stehen können, ist nach dem aufgestellten nicht mehr schwer zu beweisen. —

Auf die nämliche Art können alle Fragen, die in diesem Geiste gegeben sind, auch gelöst werden.

Um nicht weitläufig in der Ausübung zu seyn, kann der Lehrer, oder auch ein Schüler, der mehr Takt und Erfahrung hierin hat, diejenigen Seiten herausheben, bey denen einige Wahrscheinlichkeit eines geometrischen Verhältnisses vorhanden ist.

Es wird in einem △, von einem Winkel aus auf die gegenüberstehende Seite eine ungleichlaufende Linie gezogen. Die Aufgaben werden hierbey insbesondere wichtig, wenn man das Δ in ihm ähnliche Δ zerlegt, oder in Δ eintheilt, die dem Ganzen ähnlich sind. Seht Figur 3, welches ein rechtwinkliches seyn soll, das durch die Linie b e in 2 ebenfalls rechtwinkliche Δ zerschnitten wird, die ähnlich dem Ganzen sind, welches auf dieser Stufe nicht mehr zu beweisen nöthig ist; folglich kann Figur 3 als 3 ähnliche, rechtwinkliche Δ in's Auge gefaßt werden, wovon das Δ a b d das 1te, a b e das 2te, und b e d das 3te ist; die Seite a d ist also die Hypotheunse des Δ a b d, eben so ist a b Hypotheuns das Δ a b e, und b d Hypotheuns des Δ b e d; als geometrisches Verhältniß kann folgende Reihe aufgestellt werden: a d des 1ten Δ : a b des 1ten, oder 2ten Δ :: a b des ersten, oder 2ten Δ : a e des 2ten :: b d des 3ten oder 1ten Δ : b e des 3ten oder 2ten Δ.

So wie das geometrische Verhältniß der größten Seite zur mittelsten, durch alle 3 Δ durchgeführt wurde, so kann auch die größte Seite zur kleinsten, oder die mittelste zur kleinsten behandelt werden; welches nach dem aufgestellten keine Schwierigkeit mehr haben kann. Der Schüler wird, nachdem er 3 ähnliche Δ an einer Figur sieht, von selbst zuerst das geometrische Verhältniß 2 gleichliegender Seiten durch alle Δ durchführen. Sollte er nicht einmal zu so viel Ueberlegung und Ordnung gekommen seyn, so wird er auch wahrscheinlich ganz unfähig das aufgestellte in ihrem wahren Geiste einzusehen, und zu lösen.

Um die schwächern aber auch sicher zu führen, können noch etwa folgende Fragen gegeben werden:

Wie wollt ihr es angehen, um alle Verhältnisse erschöpfend zu erhalten? Stellt die einfachste Form auf, und führt sie so weit aus, bis ihr das Erschöpfen dieser jetzt zu führenden Aufgaben überblicken könnet? rc. rc. —

Ist die Figur in diesem Geiste behandelt, so können dann nur noch einzelne Fragen aus dem Ganzen herausgehoben werden. Z. E. Seht, ob sich ed nicht zu ab verhalte, wie bd : ad.

Auflösung.

bd zu ad ist die kürzeste Seite des 1ten Δ zu seiner längsten; ed ist hingegen die kürzeste Seite des 3ten Δ, zur längsten des 2ten; um ein geometrisches Verhältniß zu erhalten, sollte ebenfalls die kürzeste des 2ten zur längsten desselben stehen, oder eb zu ab; folglich verhält sich bd nicht zu ad :: ed : ab, sondern bd : ad :: eb : ab; daß ed ungleich eb ist, folgt aus der Ungleichheit der Winkel, welche das ungleichschenklich rechtwinkliche Δ hat.

Die in letzter Aufgabe aufgestellten Seiten stehen also nur dann in einem geometrischen Verhältnisse, wenn das Δ gleichschenklich rechtwinklich ist. —

Eine 2te Frage über diese Figur: Verhält sich db : ba :: ed : ea?

Auflösung.

db : ba ist die kleinste Seite des 1ten Δ zu seiner mittlern; eb : ea ist hingegen die kleinste des 3ten Δ zur mittlern des 2ten; um in einem geometrischen Verhältnisse zu stehen, müßte es folglich die kleinste des 2ten Δ zu seiner mittlern seyn, welches eb : ae wäre; folglich verhält sich db nicht zu ba, wie ed : ea, sondern db : ab ∷ be : ae.

Eine 3te Frage der nämlichen Figur: Seht, ob sich ed : eb ∷ eb : ea?

Auflösung.

ed : eb ist die kleinste Seite des 3ten Δ zu seiner mittlern, und eb : ea ist ebenfalls die kleinste des 2ten Δ zu seiner mittlern, und müssen deswegen also in einem geometrischen Verhältnisse stehen. —

Was sich hier für eine Mannigfaltigkeit von Fragen machen läßt, ergiebt sich schon aus diesen 3 aufgestellten; desgleichen, wie nöthig das Erschöpfen der Wahrheiten und Sätze in solchen Figuren ist. Denn, wie wäre es ohne dieses möglich, alle Fragen, die hier gegeben werden können, und auch oft vorkommen, auf der Stelle zu lösen. Der Schüler, welcher wahr und lebendig in die Mathematik eingeführt wird, bedarf freylich auf dieser Stufe nicht mehr alles mechanisch so zu erschöpfen und auszuführen; — mit einer entwickelten Kraft ist er jetzt auch fähig, Sprünge zu machen, ohne den Zusammenhang und den innern

innern Organismus des Ganzen zu verliehren, welches besonders in der Mathematik Hauptsache ist, und ewig bleibt. —

Hier folgen noch ein paar Fragen über obige Figur, welche zur Abstraktion der Sätze führt. Sucht die wichtigsten und interessantesten Verhältnisse dieser Figur, und gebt ihnen einige Formenbestimmungen, damit ihr sie in Zukunft leicht von den andern unterscheiden könnet.

Die Schüler werden als Antwort etwa folgendes Verhältniß aufstellen: de : eb ∷ eb : ea und sagen: Die Linie, welche von dem rechten Winkel eines Δ rechtwinklich auf die gegenüberstehende gezogen ist, wird mittlere Verhältnißlinie zwischen den Theilen der Hypotenuse.

Daß diese Verbindung der Seiten auf mancherley Arten karakterisirt ausgedrückt werden kann, soll jeder Lehrer auf der Stelle erfahren, der mehr als einen Schüler hat; auch wenn er nur einen lebendigen hat, so wird er auf mannigfaltige Formen stoßen.

Ferner werden sie aufstellen: daß sich db : ba ∷ be : ea, und darüber sagen: Die 2 Seiten (Katheten), welche im Δ einen rechten Winkel einschließen, seyen im nämlichen geometrischen Verhältniß zu einander, wie die Theilungslinie zum größten Abschnitt, den sie von der Hypothenuse schneidet; wenn bey den

Katheten im 1ten Glied des geometrischen Verhältnisses die kleinste Seite zur andern gesetzt wird ꝛc. —

Ferner verhalten sich die 2 Seiten da und ba, die den kleinsten Winkel einschließen, wie die 3te Seite des Δ zur Theilungslinie; und endlich verhalten sich die 2 Seiten ad und db, welche die 2 kleinsten Winkel einschließen, wie die 3te Seite zur Theilungslinie.

Wie hier nur die Seiten des großen oder 1ten Δ ins Auge gefaßt worden sind, so können auch die der 2 andern betrachtet und behandelt werden; wodurch sich die allseitige Anschauung und Auffassung der Figuren im Kinde nothwendig entwickeln muß. —

Ist die letzte Figur so durchgeführt, so kann man die Schüler eine schiefwinkliche Linie im rechtwinklichen Δ ziehen lassen, und wieder wie vorhin die geometrischen Verhältnisse der Seiten untersuchen lassen; wobey sie finden werden: daß alle geometrischen Verhältnisse, welche man zuerst aufstellt, jetzt aufgehoben seyen. In denjenigen Fällen, in denen zuerst kein geometrisches Verhältniß statt fand, können jetzt solche eintreten. — Ist aber unwichtig.

Weil eins von den oben gefundenen geometrischen Verhältnissen besonders wichtig für die Anwendung ist, und deswegen oft andere Sätze auf diesen zurükgeführt werden; so folgt er auch hier als Satz herausgehoben, und durch die Zahl bezeichnet:

Die senkrechte Linie, welche vom rechten Winkel eines Δ rechtwinklich auf die gegenüberstehende Seite gezogen wird, ist mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Theilen der Hypothenuse. 6. Satz.

Aber hierbey möchte ich den Beurtheiler bitten, daß er dieses Heft nicht mehr nur nach den unterstrichenen Sätzen schätze; dieses ist das unrichtige Maaß, der Anhang dieses Buches wird das richtigere bestimmen. —

Es folgen die schiefwinklichen Δ.

Man soll im gleichschenklich spitz- oder stumpfwinklichen Δ, vom ungleichen Winkel aus auf die gegegenüberstehende Seite eine rechtwinkliche Linie ziehen, und das geometrische Verhältniß der Seiten untersuchen.

In jedem Δ giebt es 2 ähnlich rechtwinkliche Δ, die wir bey Figur 1 schon hatten, sie biethen folglich nichts neues mehr dar. Dem ganzen Δ sind beyde unähnlich, folglich ist das nothwendige unveränderliche geometrische Verhältniß aufgehoben; daß zu Zeiten unter solchen Seiten auch ein geometrisches Verhältniß statt finde, ist beynahe unnöthig zu bemerken, aber doch nicht so ganz unnöthig in der Ausführung, besonders bey schwachen Schülern; denn gerade dieses entwickelt die allseitige Erfindungskraft ausserordentlich, welche besonders bey den Schwachen fehlt.

Das weitere wird dem Bedürfniß eines jeden Lehrers überlassen. Es folgt in solchen Δ eine schiefwinkliche Linie.

Figur 4 soll ein gleichschenklich stumpfwinkliches Δ seyn, wovon die Linie a e dasselbe in ein ihm ähnliches Δ a e b, und in ein gleichschenklich spitzwinkliches a e d zerlegt, aus welchem sich also folgendes geometrische Verhältniß ergiebt: d b : a b oder a d oder d e :: a b, oder a d, oder d e : a e oder e b.

Folglich kann in dieser Figur ein geometrisches Verhältniß auf eine einzige Linie gebracht werden, durch welches man folgenden Ausdruck erhält: d b : d e :: d e : e b.

Der Lehrer läßt die Kinder das Δ näher untersuchen, in welchem ein solches Verhältniß statt findet, und sie werden zu den angenommenen Eigenschaften noch bekommen: daß es ein Δ sey, wovon der stumpfe Winkel $\frac{6}{5}$ und ein spitzer $\frac{2}{5}$ rechte betrage. — Die Beweise hierüber sollen dem Kinde keine Schwierigkeit mehr darbiethen, wenn es das Vorhergegangene in seiner Gewalt hat, welches absolut nothwendig ist, und gefordert werden kann und darf; ich weise daher auch nicht mehr auf die Sätze des 1ten und 2ten Theils dieser Werke zurück.

Will der Lehrer die Schüler in der Reflexion dieser Figuren noch weiter führen, so kann er sie etwa fragen:

Von welcher regelmäßigen Figur sind die Winkel dieses Δ ihre Winkel? Was muß also gemacht werden, um die Winkel einer solchen Figur mathematisch zu bestimmen?

Antw. Eine Linie muß nur so in 2 Theile getheilt werden, daß sich die Linie selber zu einem Theil verhält, wie dieser Theil zum andern Theil der Linie. —

Daß man die Schüler die Linie ae in Figur 4, auch noch auf andere Weise schiefwinklich ziehen lassen könne, ergiebt sich aus den vielen angenommenen Bestimmungen, die eben in dieser Figur vorkommen. So kann man z. E. nur weglassen, daß de = da sey; oder man kann angeben, daß de länger oder kürzer als da sey ꝛc. — Wird in solchen Fällen das Δ aeb ähnlich abd gemacht, so sind die Wahrheiten, die sich daraus ergeben, nicht ganz unwichtig. —

Im gleichschenklich spitzwinklichen Δ kann eine ganz ähnliche Theilungslinie gezogen werden. Seht Figur 5, in der die Seite ad = ab, db = de = ea ist, ferner das Δ adb ähnlich deb Aus welchem sich ebenfalls das geometrische Verhältniß ab : ae :: ae : eb ergiebt; der Beweis, und die fernere Untersuchung des Δ ist ganz gleich dem stumpfwinklichen. —

Auch hier kann de wieder so gezogen werden, daß die dadurch entstehenden Δ unähnlich werden.

Das ungleichseitig spitz- und stumpfwinkliche Δ wird auf gleiche Weise behandelt, und ist nicht ganz unwichtig, wenn man es wieder in ähnliche △ zerlegt; in allen andern Fällen darf es aber übergangen werden, weil es keine unveränderlich nothwendigen geometrische Verhältnisse hat.

Bisher ist das geometrische Verhältniß der Seiten zweyer △ durchgeführt worden, oder der Seiten, die dadurch entstehen, daß man eine Linie in allen Richtungen in denselben zieht.

Eben so können die Seiten, welche durch das Ziehen zweyer Linien in einem △ entstehen, behandelt werden, die ich aber nur gedrängt durchführen will; ich beobachte den gleichen Gang, den ich bey einer Linie hätte.

Seht Figur 6, und vergleicht sie mit Figur 1. Es lassen sich in dieser Verbindung der Linien 3 ähnliche △ aufzählen, das 1te ist a h g, das 2te a e f, und das 3te a b d; ferner 3 Abschnitte, der erste besteht aus den Seiten h e und g f, der 2te aus e b und f d, und der 3te aus h b und g d. Das weitere Untersuchen der geometrischen Verhältnisse der 3 ähnlichen △ übergehe ich, weil es gleich ist denen an Figur 1, und nach der gleichen Norm behandelt werden kann. Ich hebe dafür ein paar einzelne verwickelte Aufgaben aus dem Ganzen heraus.

Verhält sich a g : a e :: a f : a b?

Antw. Es kann seyn, oder kann auch nicht seyn.

Auflösung.

Angenommen wird, die Seite ag soll länger seyn als ah; fe kann so nahe als man will bey gh gleichlaufend stehen, folglich kann ag größer seyn als ae, und fa kann zu gleicher Zeit viel kleiner seyn als ab ꝛc. —

Verhält sich ag : af ⁚⁚ af : ad?

Die Auflösung dieser Aufgabe ist so leicht, daß sie ein jeder ohne die geringste Mühe machen wird. —

Mit dem Abschnitte der Seiten geht es eben so; es folgen noch ein paar Aufgaben darüber.

Verhält sich gf : he ⁚⁚ fd : eb?

Antw. Ja. —

Auflösung.

ag : ah ⁚⁚ af : ae ⁚⁚ ad : ab weil es die gleichliegenden Seiten in ähnlichen Δ sind; thut man von af : ae das Verhältniß ag : ah, und von ad : ab das Verhältniß af : ae weg, so hat man ein ihnen ähnliches geometrisches Verhältniß von allen 4 Gliedern weggethan; folglich müssen die Reste auch wieder ein solches geometrisches Verhältniß bilden; worüber §. 1 in welchem die Entwicklung des geometrischen Verhältnisses auseinander gesetzt ist, Auskunft giebt.

Der 1te Theil dieses gebildeten geometrischen Verhältnisses ist gf : he, und der 2te fd : eb, also verhält sich g f : h e ⁚ f d : e b; oder die Abschnitte ste-hen in einem gleichen geometrischen Verhältnisse wie die Seiten der △, mit denen sie in einer Richtung liegen. —

Auf gleiche Art kann gezeigt werden, daß sich g f : h e ⁚ g d : h b.

Folglich kann man allgemein schließen: daß die Abschnitte, welche die gleichlaufende Li-nie mit einer Seite eines △ bilden, in ei-nem gleichen geometrischen Verhältniß stehen, wie die Seiten, von denen sie ge-schnitten sind. 7. Satz.

Wollte man hier die geometrischen Verhältnisse unter allen Formen mechanisch erschöpfend darstellen, so käme man beinahe ins unendliche; durch das auf-gestellte sind aber alle wesentliche Richtungen erschöpft, und was im Anfang für Kinder nothwendig war, wird auf dieser Stufe tödtender Mechanismus; man muß sich hier nothwendig zur allgemeinen Regel erheben, wenn man nicht in den einzelnen Aufgaben erliegen will. —

Wird in einem △ eine Linie mit einer Seite gleich-laufend, und die andere mit der nämlichen Seite so ungleichlaufend gezogen, daß sie von keinem Winkel des △ ausgeht, so werden die Verhältnisse unwichtig; besonders wenn die ungleich laufende Linie kein dem ganzen △ ähnliches △ schneidet.

Desgleichen findet statt, wenn 2 Linien auf diese Weise in einem Δ ungleichlaufend gezogen sind. Für schwächere Schüler sind einzelne Aufgaben hierüber doch noch nicht ganz entbehrlich; auch diese müssen wenigstens so weit darin geführt werden, daß sie die Aufgaben im Stande sind selber zu lösen, und die wichtigern von den unwichtigern zu unterscheiden.

In Figur 7 ist eine Linie von einem Winkel aus, und die andere gleichlaufend mit einer Seite des Δ gezogen; es fragt sich, ob ab sich : ag :: ag : ad? Ferner, ob sich be : gs :: gs : df?

Daß die Seiten des Δ agd in einem geometrischen Verhältnisse stehen, mit den Seiten des Δ asf, sieht jedermann schon aus der 1ten Figur. Ferner daß die Seiten beyder Δ mit den Abschnitten gs und df ꝛc. in einem geometrischen Verhältnisse sind ꝛc. —

Wird bd aber ungleichlaufend gezogen, so ist die Figur im Ganzen genommen wieder unwichtiger, besonders wenn gar keine ähnliche Δ gemacht werden.

In einem rechtwinklich ungleichseitigen Δ, wird vom rechten Winkel aus, eine senkrechte Linie auf die gegenüberstehende Seite gezogen, und mit dieser genannten Seite noch eine gleichlaufende Linie gemacht, und wieder das geometrische Verhältniß der Seiten untersucht, welches jedoch so leicht ist, daß die Ausführung übergangen werden darf, wenn man Figur 1 und 6 ganz in seiner Gewalt hat. —

Etwas wichtiger, und nothwendiger als dieses, ist das rechtwinkliche Δ, wenn man die 1te Linie wie oben zieht, und hernach von einem rechten Winkel, der durch diese Linie und die Hypotenuse gebildet ist, eine 2te rechtwinkliche Linie auf die gegenüberstehende Seite fällt. Schwer und verwickelt sind aber die Aufgaben in keinem Fall. —

Auf gleiche Weise kann man sie die geometrischen Verhältnisse der Seiten in einem Δ aufsuchen lassen, wenn man diese 2 Linien von einem oder 2 Winkeln aus zieht, welches bey dem gleichschenklichen, und ungleichseitig rechtwinklichen einige nicht ganz unwichtige Sätze und Wahrheiten hat; die besonders tauglich zur Entwicklung der allseitigen Erfindungskraft sind, und bey schwächern Schülern folglich nicht vernachlässiget werden dürfen.

Eben so können 3, und noch mehrere Linien in einem Δ gezogen werden, wobey sich jedoch wenig neues und wichtiges ergiebt; aber auch dieses soll vom Lehrer nicht gesagt werden, der Schüler soll es selber erfahren, und erst dann aussprechen; steht er kräftig da, so kann er es auch ohne eigentlich Hand an das Werk zu legen, sein Geist reicht über seine Hand hinaus.

Ich schreite zu 4Eck, und ziehe zuerst auch wieder nur eine, hernach 2 xc. Linien.

Wird in einem Parallelogramm eine Ecklinie gezogen, so entstehen 2 ähnliche △, und das geometrische Verhältniß der Seiten ähnlicher Figuren ist bey Figur 1 schon hinlänglich ausgeführt.

Wird eine Linie gleichlaufend mit einer Seite des Parallelogramms gezogen, so sind die geometrischen Verhältnisse ganz leicht und unwichtig.

Im Paralleltrapez und Trapez eine Linie gezogen, giebt unwichtige, und zugleich schwierige Verhältnisse bey ihrer Lösung.

Nicht ganz unwichtig ist das Aufsuchen der geometrischen Verhältnisse in einem Parallelogramme, in dem 2, 3 und mehrere Linien nach allen Richtungen hin in demselben gezogen sind, welches aber nach der Form des △ geht, und deswegen unnöthig wird, hier weiter auszudehnen.

Die Trapez und Paralleltrapez sind unwichtiger; ich überlasse dieses dem Lokalbedürfniß eines jeden, und setze noch ein paar Worte über das 5Eck und 6Eck her.

In den unregelmäßigen 5 und 6Ecken müssen wenig oder gar keine Linien mehr gezogen werden, weil die Verhältnisse theils unwichtig, und theils verwickelt, und schwer zu lösen sind, und durch das, was über das △ ausgeführt wurde, alle geometrischen Verhältnisse so weit entwickelt sind, daß im Fall solche Aufgaben doch vorkämen, die Schüler dieselben durch das aufgestellte mit mehr oder weniger Mühe und Kraft doch lösen könnten.

Es werden daher nur noch in den regelmäßigen Figuren Linien gezogen.

In einem regelmäßigen 5Eck werden 2 Ecklinien gezogen, und die geometrischen Verhältnisse der Seiten untersucht. — Die entstehenden △ haben $\frac{6}{5}$ und $\frac{2}{5}$ rechte Winkel, die wir folglich bey der Untersuchung der geometrischen Verhältnisse der △ weitläufig auseinander setzten. —

Es soll in 5Eck eine Ecklinie, und mit derselben eine gleichlaufende Linie gezogen werden.

Etwas wichtiger werden die geometrischen Verhältnisse des 5Ecks, wenn man die Seiten desselben so weit verlängert, bis sie zusammentreffen, und dann von diesen Punkten aus nach den aufgestellten Gesetzen wieder 1, 2 und mehrere Linien nach Winkeln und Seiten des 5Ecks zieht.

Unübersteigliche Schwierigkeiten können aber auch hiebey nicht eintreffen, wenn das △ in dem ausgeführten Umfang mit Schülern behandelt worden ist; desgleichen kann auch beym 6Eck gemacht, und behauptet werden.

Um das Heft nicht unnöthig groß zu machen, führe ich nichts mehr über diese, wie auch über die folgenden regelmäßigen Figuren aus.

Die Untersuchung des geometrischen Verhältnisses der Winkel allein, unabhängend von den Seiten, ist unfruchtbar, desgleichen auch bey der Verbindung der Seiten und Winkel, weil die Seiten eines Δ, 4Ecks ꝛc. in keinem geometrischen Verhältnisse ihrer Winkel stehen; welches die Schüler freylich auch selber untersuchen müssen, wenn es gegründete Wahrheit für dieselben haben soll; worüber etwa folgende Fragen dienen können:

Untersucht, ob die Winkel eines gleichseitigen, oder gleichschenklichen, oder ungleichseitigen Δ in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse zu einander stehen, wie ihre Seiten? Antw. das geometrische Verhältniß zwischen Winkel und Seiten findet in keinem andern als gleichseitigen Δ statt; nur zum Theil auch im ungleichseitig rechtwinklichen mit dem 3tels rechten; denn in diesem Δ ist einer der beyden spitzen Winkel, die Hälfte des andern spitzen, und diejenige Seite, welche dem 1ten spitzen Winkel gegenüber steht, ist auch die Hälfte der Seite, welche dem rechten gegenüber liegt.

Etwas wichtiger aber, als dieses, ist das geometrische Verhältniß der Seiten in Δ, wovon die Winkel durch die Gleichheit des Theilens ausgedrückt und bestimmt sind. Z. E.

Untersucht, welche Seiten eines Δ in einem geometrischen Verhältnisse stehen, wenn ein Winkel desselben in 2 gleiche Theile getheilt wird? Sie werden etwa folgendes Verhältniß aufstellen: ad : ab ⁚⁚ de : eb; seht Figur 8.

Hier folgt nur eine Auflösung; wie wohl meine Schüler immer 2 bis 3 verschiedene machten.

Der Winkel dae = eab, ferner wird der Winkel aef = ade gemacht, durch welches folglich das Δ aef ähnlich und gleich ade wird, ef = de, und endlich ist das Δ feb noch ähnlich adb; denn der Winkel feb = dae rc. also verhält sich ef : eb ⁚⁚ ad : ab; ef = de; folglich verhält sich auch de : eb ⁚⁚ da : ab.

Wenn also ein Winkel eines Δ in 2 gleiche Theile getheilt wird, so wird die gegenüber stehende Seite in ein gleiches geometrisches Verhältniß mit den Schenkeln dieser getheilten Winkel eingetheilt. 8. Satz.

Haben die Schüler diese Wahrheit so gefunden, und auf eine ihnen eigenthümliche Art gelöst, so kann ihnen der Lehrer auch andere einzelne Fragen aus der Figur herausheben. Z. E. Ob sich ad : ae ⁚⁚ ae : ab? Ferner, ob sich fb : eb ⁚⁚ eb : ab rc.?

Daß beym Theilen des Winkels eines Δ in 2 ungleiche Theile, das aufgestellte geometrische Verhältniß aufgehoben werde, versteht sich durch den letzt ausgesprochenen Satz, und darf folglich nicht mehr erst bewiesen werden; der letzte Satz ist also auch umumgekehrt wahr. —

Nach den nämlichen Gesetzen kann man die Schüler einen Winkel in 3, 4 ꝛc. gleiche Theile theilen lassen.

Desgleichen kann mit 2, oder allen 3 Winkeln eines Δ vorgenommen werden.

Das Theilen zweyer Winkel, jeden in 2 gleiche Theile, ist das wichtigste davon; in 3, 4 und noch mehrere gleiche Theile, kann bey 2 und allen 3 Winkeln des Δ übergangen werden.

Fälle, in denen das Lösen des geometrischen Verhältnisses unmöglich wird, können aber auch bey den verwickeltesten Aufgaben nicht vorkommen. Beym Theilen der Winkel des 4 und 5Ecks ꝛc. in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile, werden die Seiten derselben nicht immer in geometrische Verhältnisse eingetheilt, deswegen bedarf man dieses Theilen auch nicht weiter auszudehnen, besonders da diese Figuren alle leicht in Δ zerlegt werden können; und also das Vervielfachte von dem giebt, was wir einfach schon hätten. —

Wie bis jetzt die Winkel in Δ ꝛc. immer in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt worden sind, so können auch die Seiten in denselben in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden, und Linien an die gegenüber stehenden Winkel gezogen, und wieder wie oben das geometrische Verhältniß der Seiten untersucht. — Die

Winkel, wie früher bemerkt, stehen in keinem geometrischen Verhältnisse der Seiten etc. — Folglich darf dieses auch hier nicht untersucht werden. —

Statt das geometrische Verhältniß der Seiten in Figuren zu bestimmen, können auch Linien oder Seiten geometrisch konstruirt werden; der 1te und 2te Theil der Größenlehre macht diesen Unterschied hinlänglich deutlich. —

Daß ich das wirklich mathematische Darstellen der geometrischen Verhältnisse erst da folgen lassen könnte, wo das geometrische Verhältniß der Flächen schon entwickelt wäre, ist leicht einzusehen.

Es folgt aber hier aus mehreren Gründen; einer davon ist, die Unabhängigkeit der geometrischen Verhältnisse der Seiten von den Flächen, so daß die Fortsetzung dieses §. in den Aufgaben der geometrischen Verhältnisse der Flächen die geometrische Konstruktion der Seiten eher erschweren, als erleichtern würde. — Groß ist aber der Unterschied doch in keinem Fall; ich schreite deswegen zum folgenden §, ohne die Nothwendigkeit weiter auseinander zu setzen.

---

§. 3.

Von der mathematischen Konstruktion der Seiten und Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen.

Lhr. Macht 4 Linien oder Seiten, die ein geometrisches Verhältniß bilden. —

Um dieses zu erhalten, werden sie ein △ machen, wovon eine Linie in demselben gleichlaufend mit einer Seite gezogen ist. —

In einer ähnlichen Figur können sie auf mehrere Arten 4 Seiten aufweisen, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen.

Es ist die Bedingung dieses §, daß der Schüler die Linien so mathematisch konstruire, wie er sie in der Idee angiebt; wozu er nur den Zirkel und Lineal als Instrument bedarf; um dieses zu thun, müssen die Schüler in letzter Aufgabe eine Linie in dem △ wirklich mathematisch gleichlaufend ziehen, worüber der 2te Theil der Größenlehre hinlängliche Auskunft giebt.

Lhr. Macht mit dem Zirkel ꝛc. 3 Linien, oder 3 Seiten, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, worüber sie etwa Figur 3 machen werden, in der sich ed : eb ⁚⁚ eb : ea ꝛc. —

Auch können sie dieses an Figur 1 darstellen, wenn die Seite db = ag ist. —

Aus diesen 2 Aufgaben wird man sehen, daß es nichts als ein Hervorrufen dessen ist, was das Kind schon weiß, und in sich trägt.

Es bedarf aber dieses Hervorrufen, um kommende Aufgaben allgemein und ohne Schwierigkeit auf der Stelle zu lösen. —

Lhr. Macht 2 beliebige Linien, sucht hernach zu diesen 2 Linien 2 andere, die in einem gleichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 1ten zwey. —

Um dieses hervorzubringen, kann der Schüler die 1ten 2 Linien unter einem Winkel mit einander verbinden: von den Enden der Schenkel dieses Winkels eine Linie ziehen, diese Schenkel endlich verlängern, und mit der gezogenen Linie eine gleichlaufende machen, (wie gleichlaufende Linien, gleiche Winkel rc. mathematisch gemacht werden, weiß man,) wodurch die verlängerten Schenkel bis zur gleichlaufenden Linie im geometrischen Verhältnisse mit dem Schenkel des Winkels stehen.

Folglich können zu 2 gegebenen Linien 2 andere gesucht werden, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 1ten zwey. 9. Satz.

Theilt eine gerade Linie so in 2 Theile, daß diese Theile in einem gleichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie 2 gegebene Linien.

Auflösung.

Die 2 gegebenen geraden Linien werden so aneinander gelegt, daß sie eine Linie bilden. Um dieses mathematisch zu thun, kann nur eine beliebige gerade Linie gemacht, und dieselbe so in 2 Theile geschnitten werden, daß die Theile den gegebenen 2 Linien gleich sind; was eine solche Linie zu lang, oder kurz ist, muß nur angesetzt oder abgeschnitten werden; an einem Ende dieser Linie, welche die 2 Theile enthält, wird die zu theilende Linie unter einen Winkel angesetzt, und die Schenkel dieses Winkels mit einer geraden Linie verbunden, durch den Theilungspunkt der ersten Linie, oder von dem Ort, wo die 2 gegebenen Linien aneinander gelegt worden sind, wird eine neue Linie gezogen, die gleichlaufend ist mit derjenigen, welche die Ende des Schenkels des zuerst gemachten Winkels mit einander verbindet; durch welches die zu theilende Linie bey ihrer Durchschneidung in das begehrte Verhältniß getheilt wird. Figur 1 kann noch nähere Auskunft darüber geben.

Also kann eine Linie so in 2 Theile getheilt werden, daß diese Theile in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie 2 gegebene Linien. 10. Satz.

Eine von den gegebenen Linien soll zuerst als das 1te, und die andere als das 2te Glied des zu suchenden geometrischen Verhältnisses gegeben seyn, und zu diesen 2 Linien soll eine 3te gesucht werden, die mit einander ein geometrisches Verhältniß bilden.

Auflösung.

Die 2 gegebenen Linien werden wieder unter einem Winkel aneinander gelegt, und durch eine 3te verbunden. Seht an Figur 1 die Linie ad und ag, welche durch das Aneinanderlegen den Winkel dag bilden; es wird gc = ag gemacht, und die Linie cb gleichlaufend dg gezogen; aus dem sich folgendes Verhältniß ergiebt: ad : ag ⁚⁚ gc oder ag : db rc.

Auch kann diese Aufgabe durch Figur 3 gelöst werden; denn in dieser verhält sich ed : eb ⁚⁚ eb : ea.

ed und eb werden dann als die gegebenen 2 Linien ins Auge gefaßt, und müssen folglich unter einem rechten Winkel bed verbunden seyn, die Ende der Schenkel des Winkels bed können durch bd verbunden, und auf bd in b ein rechter Winkel errichtet werden, de so weit verlängert, bis sie mit ba zusammentrift, aus dem sich ea oder die gesuchte Linie ergiebt; denn beyde △ sind einander und dem Ganzen ähnlich. —

Also kann zu 2 gegebenen Linien eine 3te gesucht werden, die mit einander ein geometrisches Verhältniß bilden. 11. Satz.

Lhr. Theilt eine gegebene Linie so in 3 Theile, daß diese 3 Theile ein geometrisches Verhältniß bilden.

Auflösung.

Es werden 3 Linien genommen, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen; diese können entweder bey Figur 1, oder bey Figur 3 gesucht werden. Es muß folglich zum voraus eine ähnliche Figur mathematisch konstruirt werden, wenn sie nicht schon existirt.

Diese 3 Linien werden wieder als eine Linie mit 3 Theilen aneinander gesetzt, und an einem Ende dieser Linie unter einem Winkel wird die zu theilende angelegt; die Schenkel dieses Winkels mit einer 3ten Linie verbunden, und mit derselben durch die 2 Theilungspunkte der 3 aneinander gelegten Linien 2 andere gleichlaufende an die zu theilende gezogen; wodurch die Linie auf die begehrte Art eingetheilt ist. Seht Figur 6. Dieses hier weiter zu beweisen ist unnöthig. —

Folglich kann eine gerade Linie so in 3 Theile getheilt werden, daß sie miteinander ein geometrisches Verhältniß bilden. 12. Satz.

(Daß dieses in vorliegendem § immer mathematisch mit dem Zirkel so gemacht werden muß, weiß man.)

Von jetzt an werde ich auch in diesem Heft nicht mehr darauf Rücksicht nehmen, wie sich der Lehrer bey Schülern zu benehmen habe; ich bemerke darüber nur noch, daß alle Aufgaben von den Schülern ohne weitere Hülfe des Lehrers gelöst werden müssen; er muß sie also so geben, daß die Schüler in den Fall gesetzt werden, dieselbe auch wirklich selber zu suchen und zu lösen; ich werde mich meinerseits bemühen, die Aufgaben so zu ordnen, und mit einander zu verbinden, daß sie die Schüler auch bey jedem Lehrer finden werden. —

Alle hier aufgestellten, und in diesem Buch noch aufzustellenden Aufgaben, haben meine Schüler so gelöst, wie ich sie da gebe. —

Es sind 2 gerade Linien gegeben, und zwischen ihnen soll eine 3te Proportionallinie gesucht werden; oder eine 3te Linie, wovon sich die 1te zur suchenden verhält, wie diese suchende zur andern gegebenen.

Auflösung.

In Figur 3 verhält sich e d : e b :: e b : a e; e d und e a können als die 2 gegebenen Linien in's Auge gefaßt werden, und e b als die zu suchende. — Folglich muß e d und e a nur wieder in eine gerade Linie gebracht werden, und auf e eine rechtwinkliche Linie errichtet, die in b mit b a und b d ebenfalls einen rechten Winkel bildet. Um dieses hervorzubringen, wird mit der Hälfte der Linie a d, von ihrer Mitte aus, ein Kreis beschrieben, und wo der Kreis die gerade Linie e b schneidet, ist der geometrische Ort ihrer Länge; daß es 2 Linien giebt, die diesem Verhältnisse entsprechen, beruht auf der Eigenthümlichkeit des Kreises zur geraden Linie; denn der Kreis durchschneidet die gerade Linie bey seiner Vollendung immer an 2 Stellen, oder Punkten.

Der Winkel abd ist recht, weil er Winkel des Umkreises ist; und folglich verhält sich ed : eb :: eb : ea.

Also kann bey 2 gegebenen geraden Linien, immer eine mittlere Proportionallinie gesucht werden. 13. Satz.

Man hat 4 Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen; es sollen 4 andere gesucht werden, die in einem gleichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie diese ersten 4. —

Auflösung.

Man setzt die 4 geraden Linien wieder in eine Linie aneinander, macht zwischen jede Unterscheidungs- oder Theilungspunkte, legt unter einem Winkel eine beliebige Linie an dieselbe, und verfährt gleich wie bey allen vorhergehenden Aufgaben, in denen Linien aneinander gelegt wurden.

In der Lösung dieser Aufgabe, ist auch die Lösung einer andern vorgekommen; nämlich: Eine gerade Linie so in 4 Theile zu theilen, daß diese Theile ein ähnliches geometrisches Verhältniß mit einander bilden, wie 4 gegebene Linien rc. —

Es sind 2 Linien gegeben; eine von diesen gegebenen verhält sich zu einer, die noch gesucht werden muß, wie diese suchende zur 2ten gegebenen; und wie diese 2te gegebene zu einer 2ten unbekannten Linie, oder zum 4ten Glied des geometrischen Verhältnisses ꝛc.

Auflösung.

Zuerst sucht man zwischen den 2 gegebenen Linien eine mittlere Proportionallinie, welches wir bey Figur 3 schon einmal hätten. Seht den 13ten Satz. Hat man einmal 3 Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, so kann die 4te ohne die geringste Schwierigkeit bestimmt werden.

Auf eben diese Weise können zu 4 Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, eine 5te, und zu 5 eine 6te ꝛc. gesucht werden; welches aber jetzt immer unwichtiger wird; — ich höre deswegen damit auf.

Eine nicht uninteressante und unnöthige Uebung ist für Schüler dieser Stufe, daß Aufstellen der Gesetze und Reihenfolgen nach den ähnlichen Aufgaben erschöpft werden können, wozu etwa folgende Fragen dienen: Auf wie vielerley Art können zu gegebenen Linien andere gesucht werden, die ein geometrisches Verhältniß mit einander bilden?

Auf wie viele Arten kann es geschehen, wenn man das Theilen der Linien in geometrisches Verhältniß damit vereiniget?

Wie viel geometrische Verhältnisse können nur über das Theilen allein gemacht werden? —

Bey kräftigen Schülern kann man sogar solche Fragen im Anfang des § geben, und sie nur etwa die schwersten und wichtigsten auch wirklich ausführen lassen; welches aber ebenfalls wieder Sache des Lehrers ist.

Noch folgt eine Aufgabe, die weder meine Schüler, noch ich bis auf diesen Augenblick selbstständig gelöst habe; welche im Theilen einer Linie, so in 2 Theile besteht, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie dieser 2te Theil zur ganzen Linie.

Wie die Konstruktion einer solchen Figur beschaffen seyn muß, ist in Figur 4 und 5 enthalten.

Dieses aber mathematisch so darzustellen, ist schwieriger, und nur dieses allein haben meine Schüler nicht selbstständig gelöst. —

Ich mußte ihnen die mathematische Konstruktion jedesmal zuerst vormachen; dann waren sie aber auch immer im Stande, die weitere Auflösung und Beweise selbstständig zu finden. —

Ihr steht da! ich stand auch, als ich auf diesen Fall kam, und fragte mich: Wie ist dieses möglich, da du doch alles so weit erschöpft hast, als es nöthig ist, um alle Aufgaben zu lösen, die auf dieser Stufe vorkommen, doch noch auf einen solchen Fall zu stoßen? — Diejenigen, die jetzt anfangen, meine Grundsätze deswegen zu verwerfen, haben wenigstens in der äußern Form ihres Räsonnements nicht ganz unrecht. Sie erlauben mir aber gewiß auch ein paar Worte darüber. —

Die mathematischen Formen haben ihre Beschränkung, welches ich in meinem 2ten Theil der Größenlehre schon bemerkte; desgleichen hat auch der Mensch; und spricht sich an keinem Orte mit mehr Gewißheit und Nothwendigkeit so deutlich aus, als in der Mathematik; ich beweise dieses hier nicht weiter, und behaupte, gerade weil dieses statt findet, so muß unsere Erfindungskraft desto mehr begründet, und tiefer entwickelt werden, besonders, da beym sorgfältigsten Organisiren der mathematischen Verhältnisse doch noch Fälle eintreten, die einen Sprung machen, doch aber nicht in vorliegender Aufgabe; denn wenn wir diese genauer in's Auge fassen, so finden wir: daß sie eigentlich nicht auf diese Stufe gehört, in dem sie ein geometrisches = und potenz = Verhältniß in ein und derselben Linie vereiniget enthält; die 2 Theile der Linie, und die Linie selber bilden das geometrische Verhältniß; das Quadrat auf dem einen Theil, ist gleich dem Rechteck auf dem andern Theile und der ganzen Linie, und bildet folglich das potenz Verhältniß. —

Wohin solche Aufgaben gehören, will ich jetzt nicht weiter auseinander setzen; ich lasse die Aufgabe so folgen, wie ich sie gewöhnlich auf dieser Stufe meinen Schülern gab. Es soll eine gerade Linie so in 2 Theile getheilt werden, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie der 2te Theil zur ganzen Linie.

Ich sagte den Schülern jedesmal zum voraus, daß sie diese Aufgabe wahrscheinlich nicht allein lösen könnten: worüber sie mir meistens zuriefen: „Laßt es uns wenigstens probieren." Nachdem sie die Unmöglichkeit fühlten, ließ ich sie eine gerade Linie d b machen, (seht Figur 9,) auf b sollen sie eine rechtwinkliche Linie b f errichten, die halb so lang ist als d b von d durch f die Linie d a ziehen, und von d f, f g = f b schneiden, und endlich d e = d g machen; wodurch sich dann e b : e d :: e d : d b.

Dieses Verhältniß fanden sie selbstständig, nachdem die Konstruktion einmal so angegeben war. Hier folgt einer von den Beweisen, den sie machten.

Auflösung.

Das △ d a b ist ähnlich d g b, weil der Winkel g b a = f b d ist, der Winkel f b g von beyden weggethan, bleibt Winkel g b d = f b a = f a b, folglich ist der Winkel b a d des △ b a d = ∟ d b g des △ d b g, der Winkel g d b ist für beyde △ gemein, also der Winkel d g b = d b a, und das △ d g b ähnlich d b a, folglich verhält sich d a : d b :: d b : d g; g a = d b, thut man von einem geometrischen Verhältnisse ein ähnliches geometrisches Verhältniß weg, so bleibt wiederum ein solches Verhältniß, von da wird nun db, und von db, dg weggethan, folglich das 2te und 3te Glied des ersten geometrischen Verhältnisses; also verhalten sich die Reste dg und eb auch wieder wie die ganzen Linien da und db ꝛc.; dg ist nun gleich de also de; eb ∷ da : db oder de : eb ∷ db : dg oder de: die Glieder versetzt, giebt de : db ∷ eb : de, und wenn man endlich dieses Verhältniß noch umkehrt, so erhält man das Suchende, oder eb : de ∷ de : db.

Folglich kann eine Linie so getheilt werden, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie dieser 2te Theil zur ganzen Linie. 14. Satz.

Haben die Schüler diesen Satz so gelöst, so kann man sie leicht zum 5Eck führen; denn in dieser Figur schneiden sich die Ecklinien in eben diesem Verhältnisse; desgleichen kann der Lehrer auch durch Figur 4 und 5 erreichen; denn db ist bey Figur 4 in e, und ab bey Figur 5 ebenfalls in e so getheilt worden; also können wir durch den letzt gefundenen Satz eine Linie in dieses geometrische Verhältniß theilen. —

Auf dieses hin, kann der Lehrer den Schülern die Aufgabe geben, ein regelmäßiges 5Eck zu beschreiben, und sie sollen die Aufgabe auch ohne Hülfe des Lehrers lösen.

Auflösung.

Seht Figur 5, in der a b in e nach dem letzten Satz getheilt ist; um den Punkt d zu finden, beschreibt man mit a b von a aus einen Kreis, nimmt a e als Halbmesser, und beschreibt von b aus einen 2ten Kreis, zieht von d, an e, a und b die 3 Linien d e, d a und d b, so hat man ein Δ geometrisch konstruirt, welches 5tels rechten Winkel hat, denn a d : d b :: d b : b e, weil d a = a b, und d b = a e ist; ferner ist der Winkel a d b des Δ a d b = ∟ d b e des Δ d b e, also haben die 2 Δ 2 gleiche Winkel, welche von proportionirten Seiten eingeschlossen sind; folglich nach dem 5. Satz ähnlich; wenn diese 2 Δ ähnlich sind, so ist d e = d b, und der Winkel d e b = d b e; die weitere Auflösung hat keine Schwierigkeit mehr. —

Also kann ein regelmäßiges 5 und 10 Eck ꝛc. mathematisch konstruirt werden. 15. Satz.

§. 4.

Von dem geometrischen Verhältnisse der Seiten und Flächen.

Zwey Δ gleicher Höhe verhalten sich so zu einander, wie ihre Grundlinien· 16. Satz.

Auflösung.

Wir wissen, wenn 2 Δ gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, so sind sie einander gleich; ist die Grundlinie des einen bey gleicher Höhe doppelt oder 3fach des andern, so ist die Größe des einen Δ auch doppelt oder 3fach ꝛc. der des andern; ist sie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ mal so groß, als die eines andern Δ, so ist der Gehalt des 1ten Δ auch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ mal so groß als der des andern. Bey jedem in der Zahl ausgedrückten Verhältnisse findet diese Eigenschaft statt, folglich auch da, wo die Zahl nicht mehr angegeben ist, also ist eine Seite der gleiche Theil der andern, wie der Flächeninhalt des einen von dem andern; oder Δ, die gleiche Höhe haben, stehen in einem gleichen geometrischen Verhältnisse, wie ihre Grundlinien.

(Es wird bey der Untersuchung der geometrischen Verhältnisse der Seiten und Flächen der gleiche Gang beobachtet, der bey den Seiten aufgestellt ist.)

Wird in einem Δ, von einem Winkel aus, auf auf die gegenüberstehende Seite eine Linie gezogen, so entstehen 2 Δ, die gleiche Höhe haben, und bey der Untersuchung der geometrischen Verhältnisse nichts neues mehr darbieten; desgleichen findet statt, wenn 2 und mehrere solche Linien gezogen werden.

In 4Eck und Δ darf ein Δ nicht zerlegt werden, bevor das geometrische Verhältniß der Vierecken, zu Vierecken ꝛc. durchgeführt ist; sie folgen deswegen hier.

Parallelogramme mit gleicher Höhe, und verschiedener Grundlinie, stehen im nämlichen geometrischen Verhältnisse wie die Δ, die diese Eigenschaft haben. 17. Satz.

Auflösung.

Wir haben gesehen, daß die Δ, welche gleiche Höhe haben, in einem geometrischen Verhältnisse ihrer Grundlinien zu einander stehen; die Parallelogramme sind das doppelte der Δ; stehen sie einfach in einem geometrischen Verhältnisse, so die gleichnamigen Glieder verdoppelt auch in denselben; folglich verhalten sich die Parallelogramme mit gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien.

Daß dieses auch unabhängig von den Δ hätte gelöst werden können, sieht jedermann ein; denn das Verhältniß eines Parallelogramms, zu einem andern Parallelogramm, ist anschaulicher, als Δ zu Δ.

Auf 4Ecke, 5Ecke ꝛc. kann das geometrische Verhältniß bey den angegebenen Eigenschaften nicht mehr ausgedehnt werden; weil solche Figuren bei gleicher Grundlinie und Höhe einander nicht immer gleich sind. —

Ich will daher das geometrische Verhältniß nur noch auf ähnliche Figuren ausdehnen, zum voraus das Δ und Parallelogramm verbunden noch folgen lassen.

Ein Δ, das mit einem Parallelogramm gleiche Höhe hat, verhält sich zu Parallelogramme, wie die Grundlinie des Δ zur doppelten Grundlinie des Parallelogramms. 18. Satz.

Die Auflösung dieser Aufgabe fließt aus den vorhergehenden.

Sind 2 Δ ähnlich, so verhalten sie sich so zu einander, wie die gleichliegenden Seiten jede mit sich selbst multiplizirt. 19. Satz.

Auflösung.

In Figur 1 wird durch die Hälfte ab eine Linie gleichlaufend be gezogen, wodurch das Δ adg ähnlich abc wird, und $\frac{1}{4}$ des Δ abc, würde sie durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ꝛc. von der Spitze a an gerechnet, wieder gleichlaufend bc gezogen, so würde das erst entstehende

hende Δ $\frac{1}{9}$ des Ganzen, das 2te $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{25}$ rc., welches in Zahlenverhältnisse ausgedrückt: 1 und 3, 1 und 4, 1 und 5 jede Zahl mit sich multiplizirt ist; denn 1 mit sich selbst multiplizirt, giebt immer 1, 2 giebt 4, 3 giebt 9, 4 giebt 16, und 5 giebt 25; das Verhältniß des $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ rc. kann als 1 und 2, 1 und 3 betrachtet werden; folglich verhalten sie sich in diesen angegebenen Zahlenverhältnissen immer wie ihre gleichliegenden Seiten mit sich selbst multiplizirt.

Wird dg so durch $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ von ab der Spitze a an gerechnet gezogen, so wird das 1te Δ $\frac{4}{9}$, das 2te $\frac{9}{16}$. das 3te $\frac{16}{25}$ des 2ten, welches schon durch den 94. Satz der Größenlehre 1ter Theil hinlänglich bewiesen ist.

Folglich verhalten sie sich in allen diesen Fällen auch wieder wie ihre gleichliegenden Seiten jede mit sich selbst multiplizirt, oder wie der Bruch des Verhältnisses dieser 2 Seiten mit sich selbst multiplizirt; weil dieses bey allen Fällen durch die Zahl ausgedrückt statt findet, so läßt sich auch allgemein der Grundsatz aussprechen: Daß ähnliche Figuren sich so zu einander verhalten, wie ihre gleichliegenden Seiten in's Quadrat, oder in die 2te Potenz erheben.

Quadrate verhalten sich eben so zu einander. 20. Satz.

Die Auflösung hierüber ist so leicht, daß jede weitere Auseinandersetzung überflüßig ist, besonders da das Quadrat seine eigentlich sinnliche Anschauungsform ist.

Hier folgt noch eine andere allgemeine Auflösung, die auf den oben bewiesenen Satz zurückgeführt wird.

Zwey Quadrate können jedes durch 2 Ecklinien, oder mit Linien, die von ihren Mittelpunkten aus in die Winkel der Quadrate gezogen sind, in gleich viel ähnliche Δ zerlegt werden.

Nach der vorhergehenden Auflösung wissen wir schon, daß sich ähnliche Δ so zu einander verhalten, wie die gleichliegenden Seiten in's Quadrat erhoben. Werden zu einem geometrischen Verhältnisse mehrere gleiche geometrische Verhältnisse hinzugesetzt, so bleibt das Verhältniß unverändert; um ein Quadrat zu erhalten, müssen 4 ähnliche rechtwinkliche Δ zusammengesetzt werden; folglich verhalten sich 2 Quadrate, ihrem Flächeninhalt nach, wie ihre gleichliegenden Seiten in's Quadrat, oder in die 2te Potenz erhoben.

Der gleiche Beweis ist auf andere ähnliche 4Ecke, oder 5Ecke ꝛc. anwendbar; denn ähnliche Figuren lassen sich von ihren Mittelpunkten aus, oder von gleichliegenden Punkten in beyden Figuren immer in gleich viel ähnliche Δ zerlegen. —

Folglich kann allgemein ausgesprochen werden: Aehnliche Figuren verhalten sich so zu einander wie ihre gleichliegenden Seiten ins Quadrat erhoben. 21. Satz.

Weil sich der Flächeninhalt aller ähnlichen Figuren so zu einander verhält, so ist es in Rücksicht ihres geometrischen Verhältnisses gleich, welche ähnliche Figuren auf 2 und mehrere Linien beschrieben werden, welches in der Größenlehre des 1ten Theils schon ausgeführt ist. —

Wie jetzt das geometrische Verhältniß des Flächeninhalts ähnlicher, und solcher, die nicht ähnlich sind, die aber gleiche Höhe und verschiedene Grundlinien haben, unteesucht wurden, so können auch die entgegengesetzten Sätze von beyden aufgestelit werden, welches aber in allen Fällen leicht ist, und deswegen übergangen werden darf.

Es folgen dafür Aufgaben über Figuren, die ungleich viel Seiten und Winkel haben, und zwar regelmäßige und unregelmäßige, zuerst solche, deren Anzahl Seiten doppelt ist. —

Man hat ein gleichseitiges Δ und ein regelmäßiges 6Eck, wovon die Linie, welche im Δ vom Mittelpunkt in einen Winkel gezogen wird, gleich ist einer Seite oder Linie, welche eben so in 6Eck gezogen ist; es fragt sich, in welchem Verhältnisse das Δ zum 6Ecke stehe?

Auflösung.

Figur 10, abd soll das gleichseitige Δ seyn, agf $\frac{1}{6}$ des regelmäßigen 6Ecks und age $\frac{1}{6}$ des gleichseitigen Δ; folglich kann nur das geometrische Verhältniß dieser 2 Δ untersucht werden.

Das Δ age hat gleiche Höhe mit dem Δ agf, folglich verhalten sie sich so zu einander, wie ge : gf; die 6 Δ, aus denen das gleichseitige Δ besteht, verhalten sich zu den 6 Δ die das 6Eck bilden, wie ge : gf, oder wie die vom Mittelpunkt des Δ auf die gegenüberstehende Seite senkrecht gezogene Linie sich zu einer Linie verhält, welche vom Mittelpunkt des 6Ecks in einen seiner Winkel gezogen wird, oder das Δ verhält sich zum 6Eck, wie 1 zu 2; denn die Seite ge ist gleich ef, oder die Hälfte von gf, folglich das Δ age $= \frac{agf}{2}$, dieses findet bey allen Δ, aus denen das gleichseitige Δ und das regelmäßige 6Eck besteht; also verhält sich das gleichseitige Δ zum regelmäßigen 6Eck wie 1 zu 2.

Ist eine Seite des gleichseitigen Δ gleich einer Seite des 6Ecks, so verhalten sie sich wie 1 zu 6; die Auflösung hierüber liegt so klar vor Augen, daß ich nichts mehr hinzusetzen will.

Eine Seite des gleichseitigen Δ soll gleich seyn der längsten Ecklinie des 6Ecks; es fragt sich, in welchem Verhältnisse sie dann stehen?

Auflösung.

Figur 11, abcdfg soll das regelmäßige 6Eck seyn, bfh das gleichseitige Δ, folglich ist die längste Ecklinie des 6Ecks, gleich einer Seite des gleichseitigen Δ; das Δ chd ist $\frac{1}{4}$ des Δ bhf, und $\frac{1}{6}$ des 6Ecks abedfg, folglich hat das Δ bhf 4 Theile, wie das 6Eck deren 6 hat, also verhält sich das Δ, zum 6Eck, wie 4 zu 6, oder wie 2 zu 3.

In diesem Fall geht das geometrische Verhältniß mit den Zahlen rein auf, es kann aber eben so wohl durch Seiten ohne die Zahl ausgedrückt werden, worüber folgende Auflösung Aufschluß giebt. —

Seht die nämliche Figur. Es wird die punktirte Linie bd gezogen, das Δ bcd $= \frac{\text{bdf}}{2}$, das 6Eck enthält 2 Δ bdf und 2 Δ bcd, folglich 3 Δ bdf, das Δ bdf verhält sich zum Δ bfh wie die Seite fd zu fh; das ganze 6Eck hat 3 Δ bdf, folglich verhält sich das 6 Eck zum 3Eck, wie 3mal fd zu fh.

Aehnliche Auflösungen werden besonders bey Figuren, und in Fällen, wo ein irrazionales Verhältniß eintritt, wichtig. (Irrazional nennt man das Verhältniß, wenn es durch die Zahl nicht mehr ausgedrückt werden kann.)

Das irrazionale Verhältniß drückt sich besonders deutlich beym geometrischen Verhältnisse des gleichseitigen Δ zum Quadrate aus.

Warum ich nicht zuerst das geometrische Verhältniß des Δ zum Quadrate ꝛc. durchführte, beruht auf der größern Analogie des gleichseitigen Δ zum 6Eck, des Quadrats zum 8Eck ꝛc.

Daß es bey der Bestimmung des Δ zum 6Eck noch unendlich mannigfaltige Eigenschaften giebt, die angegeben werden können, mag schon klar aus den aufgestellten Aufgaben seyn; um aber den Lehrer noch mehr einzuführen, folgen einige Aufgaben ohne Auflösung.

Es soll das geometrische Verhältniß des gleichseitigen Δ zu einem regelmäßigen 6Eck gesucht werden, wenn die größte Ecklinie des 6Ecks, gleich der senkrechten Seite, welche von einem Winkel desselben auf die gegenüberstehende Seite gezogen ist, oder wenn diese Seite des 6Ecks gleich ist der rechtwinklichen Linie, die vom Mittelpunkt des 3Ecks auf eine gegenüberstehende Seite desselben gezogen, oder wenn die längste Ecklinie des regelmäßigen 6Ecks gleich ist der Linie, die vom Mittelpunkt des gleichseitigen Δ an einen seiner Winkel gezogen wird.

Die gleichen Aufgaben können gemacht werden, wenn man beym regelmäßigen 6Ecke die 2 Ecklinien nimmt.

Auch können im 6Ecke Linien gezogen werden; die aber doch nur etwa von dem Mittelpunkte ausgehen dürfen, wenn man sich nicht im unendlichen verlieren will.

Zu allen diesen Aufgaben giebt es noch solche, die aus der Bestimmung anderer Linien hervorgehen, besonders aber aus den Verlängerungsseiten ꝛc. — die aber unwichtiger sind.

Wenn die eben aufgestellten Aufgaben mit Leichtigkeit gelöst werden können, so ist dieses nicht mehr nöthig, weit auszuführen.

Vom Quadrat und 8Eck.

Figur 12, f soll der Mittelpunkt des Quadrats und des regelmäßigen 8Ecks seyn, die Linie fb des Quadrats soll gleich seyn einer Linie des 8Ecks, welche vom Mittelpunkt desselben in einen seiner Winkel gezogen wird; es fragt sich, in welchem Verhältnisse das Quadrat zum regelmäßigen 8Ack stehe?

Auflösung.

fc wird rechtwinklich durch die Mitte bg gezogen, durch welches fbd $\frac{1}{8}$ des Quadrats und fbc $\frac{1}{8}$ des 8Eckes wird; um unsere Aufgaben weiter zu lösen, müssen also nur noch die 2 Δ untersucht werden, das Δ fbd und fbc haben gleiche Höhe db, folglich verhalten sie sich wie fd zu fc. und also das ganze Quadrat, zum ganzen 8Eck, wie fd : fc.

Will man die Seiten ihrer Form nach bestimmen, so erhält man eine Seite des Quadrats zur längsten

Ecklinie des 8Ecks; wenn nämlich das Quadrat und das regelmäßige 8Eck die angegebene Eigenschaft zu einander haben. —

Alle Aufgaben, die bey gleichseitigen Δ und regelmäßigen 6Ecken gegeben und gelöst worden sind, können auch hier wieder gegeben und gelöst werden. —

Hier folgen noch ein paar der schwersten und verwickeltesten Aufgaben über das Quadrat, und regelmäßige 8Eck.

Eine Seite des Quadrats, ist einer Seite des regelmäßigen 8Eckes gleich; es fragt sich, in welchem Verhältnisse das Quadrat zu diesem 8Eck stehe?

Um diese Aufgabe zu lösen, zerlegt man das regelmäßige 8Eck in Quadrate und gleichschenklich rechtwinkliche Δ; wie dieses hervorgebracht werde, ist in der Größenlehre des 1ten Theils hinlänglich ausgeführt. Nach diesem werden die Quadrate und Δ an einander gesetzt, und wie beym regelmäßigen 6Eck letzterer Auflösung verfahren. —

Die Ecklinie des Quadrats soll gleich seyn einer Seite des regelmäßigen 8Ecks; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 2 Figuren stehen?

Um auch diese Aufgabe wieder zu lösen, verwandelt man das regelmäßige 8Eck in Quadrate und gleichschenkliche Δ wie oben, und setzt es am Ende ebenfalls so zusammen ꝛc. —

Das regelmäßige 5 und 10Eck, das regelmäßige 6 und 12Eck ꝛc. kann auf gleiche Art behandelt werden.

Wie regelmäßige Figuren, wovon die eine doppelt so viel Seiten hat als die andere, in ein geometrisches Verhältniß gesezt wurden, so können es auch solche, deren eine nicht doppelt so viel Seiten hat, als die andere. Z. E.

Man hat ein Quadrat, und ein gleichseitiges Δ, deren Seite des einen gleich ist einer Seite des andern; es fragt sich, in welchem geometrischen Verhältnisse diese 2 Figuren stehen? Antw. Das gleichseitige Δ verhält sich zum Quadrat, wie 2mal die senkrechte Linie, welche von einem Winkel auf die gegenüberstehende Seite des Δ gezogen ist, zu 4mal einer Seite des Quadrats, oder wie 1mal eine solche Seite des Δ, zu 2 Seiten des Quadrats. —

Auflösung.

Figur 13, gfc soll das gleichseitige Δ seyn, bg das Quadrat.

Das Δ fdc ist die Hälfte des Δ fgc, das Δ dac ist die Hälfte des Parallelogramms abcd, oder $\frac{1}{4}$ des Quadrats; das Δ fdc und dac haben gleiche Höhe, also verhalten sie sich wie df zu da, folglich das Δ gfc zum Δ dac, wie 2mal fd zu da, um das Verhältniß des gleichseitigen Δ zum Quadrate auszudrücken, hat man 2 fd zu 4 ad, oder fd zu 2 ad; folglich verhält sich df : 2 ad, oder zu 2 Seiten des Quadrats, wie das gleichseitige Δ zum Quadrat.

Eine 2te Frage über diese Figuren.

Die senkrechte Linie, welche von einem Winkel eines gleichseitigen Δ auf die gegenüberstehende Seite gezogen wird, soll gleich seyn einer Seite des Quadrats; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 2 Figuren dann stehen?

Die Auflösung hierüber ist gleich der obigen.

Eine 3te Frage.

Eine Seite des gleichseitigen Δ soll gleich seyn der Ecklinie des Quadrats; es fragt sich, in welchem Verhältniß dann diese 2 Figuren stehen.

Auflösung.

Figur 14, abd soll das gleichseitige Δ, und ad das Quadrat seyn; es wird von b durch f die Linie be gezogen, welche, weil ab = bd, und af = fd auf die Mitte von ad fällt; folglich ist das Δ fed $\frac{1}{4}$ des Quadrats, und ebd die Hälfte des Δ abd, das Δ efd und ebd haben gleiche Höhe ed, also verhalten sie sich wie ef : eb, oder das ganze Quadrat verhält sich zum gleichseitigen Δ, wie 4mal die Seite ef, zu 2mal der Seite eb, welches bey dem Quadrat die 2 Ecklinien desselben geben; folglich verhält sich das Quadrat zum Δ, wie 2 ad : 2 eb, oder wie ad : eb. Durch eine reinere Form ausgedrückt: Die senkrechte Linie, welche von einem Winkel des gleichseitigen Δ auf die gegenüberstehende Seite gezogen ist, verhält sich zu einer Ecklinie des Quadrats, wie das das Δ zum Quadrat.

Statt immer Seiten der Figuren anzugeben, können auch hier wieder Linien in denselben gezogen werden, besonders von dem Mittelpunkte aus rechtwinklichen 2c. oder solche, die in die Winkel der Figur fallen, welche nach dem Tipus des gleichseitigen Δ und regelmäßigen 6Eck geht; um auch den schwächern sicher zu leiten, folgen ein paar Aufgaben hierüber.

Die rechtwinkliche Linie, welche von dem Mittelpunkte des gleichseitigen Δ, auf eine gegenüberstehende Seite gezogen ist, soll gleich seyn einer Seite des Quadrats; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 2 Figuren dann zu einander stehen.

Ferner soll eine solche Linie des Δ, gleich einer Linie seyn, die vom Mittelpunkte des Quadrats in einer seiner Winkel gezogen ist. —

Noch soll diejenige Linie, die vom Mittelpunkte des Δ in einen seiner Winkel gezogen ist, gleich seyn einer Seite, oder einer Ecklinie des Quadrats 2c. —

Und endlich soll noch eine Seite des gleichseitigen Δ, gleich einer Seite des regelmäßigen 5Ecks seyn:

es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 2 Figuren dann stehen?

Um diese Aufgabe zu lösen, kann nur das gleichseitige Δ mit einem gleichschenklichen, welches fünftels rechte Winkel hat, in ein geometrisches Verhältniß gesetzt werden; wozu es die Untersuchung des geometrischen Verhältnisses der verschiedenen Δ erfordert, welches aber auf dieser Stufe nicht mehr nöthig ist; bey wichtigen Aufgaben werde ich aber dessenungeachtet ein paar Rückblicke thun.

Auflösung obiger Aufgabe.

In Figur 15 ist adb ein gleichseitiges Δ, deb ein gleichschenkliches, wovon $ed = eb$ und der Winkel $deb = \frac{4}{5}$ rechte ist, folglich der Winkel $dbe = \frac{3}{5}$ rechte.

Will man diese Figur mit dem 5Eck vergleichen, so hat man ein Δ deb, welches $\frac{1}{5}$ des regelmäßigen 5Ecks ist, dessen Seiten gleich sind den Seiten des gleichseitigen Δ; folglich hat man bey der Untersuchung dieser Figur zuerst nur 2 verschiedene Δ. Es wird das geometrische Verhältniß derselben bestimmt; um dieses zu thun, wird ae gezogen, und bis g verlängert, das Δ abg : Δ beg :: ag : ag, folglich verhält sich das Ganze Δ abd : deb :: ag : eg; das regelmäßige 5Eck hat 5 solcher Δ, also verhält sich das gleichseitige Δ, zum regelmäßigen 5Eck, wie ag : 5 eg; oder wie die senkrechte Seite, die von einem

Winkel des gleichseitigen Δ auf eine gegenüberstehende Seite gezogenen, sich zu 5 mal einer Seite, die vom Mittelpunkte des 5Ecks ꝛc. gezogen ist, verhält.

Eine 2te Frage über das gleichseitige Δ und 5Eck.

Die senkrechte Theilungslinie des gleichseitigen Δ, ist gleich einer Seite des regelmäßigen 5Ecks, oder einer Seite eines Δ, welches diese und jene Eigenschaft hat; es fragt sich, in welchem geometrischen Verhältnisse das gleichseitige Δ zum regelmäßigen 5Eck stehe?

Dieses ist ist eine von den schwersten und zugleich unwichtigsten Aufgaben, in die das gleichseitige Δ zum regelmäßigen 5Eck gesetzt werden kann; für den, welcher seine Kombinationskraft üben will, ist sie aber doch nicht ganz entbehrlich.

Auf die nämliche Weise kann man wieder angeben, eine Seite des gleichseitigen Δ seye gleich einer Ecklinie des regelmäßigen 5Ecks; oder seye gleich einer Linie des 5Ecks, die vom Mittelpunkte auf eine Seite rechtwinklich gezogen wird ꝛc. —

Eine Seite des Quadrats ist gleich einer Seite des regelmäßigen 5Ecks; es fragt sich, in welchem Verhältniß das Quadrat zum 5Eck stehe?

Um dieses zu lösen, kann man das Quadrat in 2, oder 4 gleichschenklich rechtwinkliche Δ zerlegen, und eins dieser Δ mit dem 5ten Theil des regelmäßigen 5Ecks, oder mit einem Δ, welches einen $\frac{4}{5}$ und 2 $\frac{3}{5}$ rechte Winkel hat, in ein geometrisches Verhältniß setzen.

Auf gleiche Weise kann das geometrische Verhältniß eines regelmäßigen 5Ecks zu einem regelmäßigen 6Eck, 7Eck, 8Eck rc. aufgestellt werden; desgleichen findet mit den Quadraten zu diesen genannten Figuren statt; das Ausgeführte ist in dieser Hinsicht gewiß hinlänglich.

Was mit regelmäßigen Figuren vorgenommen wurde, findet auch mit den unregelmäßigen statt, welches jedoch unwichtiger ist, als das 1te, besonders wenn die Figuren ganz unregelmäßig seyn sollten, welches daher ganz übergangen werden darf.

Werden bey den unregelmäßigen Figuren noch einige Eigenschaften in Seiten oder Winkeln angegeben, so können sogar Aufgaben gemacht werden, die leichter sind als die der regelmäßigen, und zu Zeiten eben so wichtig; wer sich daher noch mehr in solchen Aufgaben üben will, kann besonders das Δ und 4Eck in dieser Rücksicht durchführen.

Bisher ist das geometrische Verhältniß der Figuren durch die Angabe der Seiten und Winkel gesucht worden; hier folgen noch ein paar Aufgaben, in denen der Inhalt und Winkel statt der Seiten angegeben ist, und aus dem das geometrische Verhältniß der Seiten gesucht werden soll.

Zwey Δ sind gleich groß, und haben 2 gleiche Winkel; das heißt, in jedem Δ befindet sich einer dieser gleichen Winkel; es fragt sich, in welchem Verhältniß die 2 Seiten dieser Δ zu einander stehen.

Ferner haben 2 Parallelogramme dieses; es fragt sich, in welchem Verhältnisse ihre Seiten stehen?

Ich fange bey der Auflösung der Parallelogramme an. Figur 16, igfh soll gleich abhl seyn, der Winkel ihf = lhb, folglich können sie als Scheitelwinkel verbunden werden: wie an vorliegender Figur auch zu sehen ist; die Seiten dieser 2 Parallelogramme werden so weit verlängert, bis Parallelogramm kd entsteht, welches ähnlich ist Parallelogramm dh, und hk. Es wird eine Ecklinie dh gezogen, welche bey ihrer Verlängerung in k fällt; folglich entstehen 4 ähnliche Δ ꝛc. — Die Seite fh des Δ fhd, verhält sich zu fd oder hb, wie lh des Δ hlk, zu lk oder hi; also fh : hb :: hl : hi, oder die längste Seite des einen Parallelogramms verhält sich zur längsten des andern oder 2ten Parallelogramms, wie die kürzeste dieses 2ten, zur kürzesten des 1, — welches also ein umgekehrtes Verhältniß ist, aus welchem allgemein fließt: daß die Seiten 2 gleicher Parallelogramme, die gleiche Winkel haben, in einem umgekehrten geometrischen Verhältnisse zu einander stehen. 22. Satz.

Für die 1te Frage wird man die nämlichen Verhältnisse finden; denn das Δ lhb und fhi können als die 2 Δ, welche einander gleich sind, und 2 gleiche Winkel haben, ins Auge gefaßt werden; jedes dieser Δ ist die Hälfte von einander vorhergehenden Parallelogrammen; — folglich kann der lezt ausgesprochene Satz auch auf das Δ ausgedehnt werden.

Daß auch das Umgekehrte dieses Satzes wieder wahr sey: Nämlich, daß die Figuren gleich seyen, wenn die Seiten davon bey gleichen Winkeln im umgekehrten Verhältnisse stehen. —

Auflösung.

Figur 16, der Winkel lhb des Parallelogramms lhba, ist gleich dem Winkel ihf des Parallelogramms ihfg; und die Seite fh : hb ⁚⁚ lh : hi. Die Seiten dieser Parallelogramme werden wieder bis k und d verlängert. Wenn angenommen wird, die Parallelogramme seyen ungleich, so theilen die Ecklinien dh und hk das Parallelogramm dk nicht in 2 gleiche Theile, weil dh und hk nicht in gerade Linie fallen können; denn das Δ fhd × kli = dhb + lhk, und das Parallelogramm gh ist ungleich Parallelogramm ha, folglich sind die geschlossenen Figuren auf der einen Seite dh und hk ungleich denen auf der andern Seite, und also kann dk keine Ecklinie seyn, folglich Δ dhb und ihk unähnlich, wenn die Δ unähnlich sind, so stehen die gleichliegenden Seiten in keinem geometrischen Verhältnisse, der Winkel hfd des Δ hfd ist gleich dem Winkel klh des unähnlichen Δ klh,

folg-

folglich verhält sich fd nicht zu fh, wie Ik zu Ih; diese Seiten sind theils die Seiten selber, und die fehlenden sind den Seiten der 2 Parallelogramme gleich, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen; welches also mit der Annahme, daß die 2 Parallelogramme ungleich seyen, im Widerspruch steht; und folglich müssen die Parallelogramme gleich seyn, wodurch also auch das Umgekehrte des lezten Satzes bewiesen ist.

Auf gleiche Weise können Aufgaben über 4Ecke, im allgemeinen 5 und 6Ecke rc. gegeben werden, wozu aber noch mehrere Bestimmungen gesetzt werden müssen.

Die unregelmäßigen 4, 5, 6, 7 Ecke rc. sind in dieser Hinsicht unwichtig; und einige regelmäßige können nicht wohl eher gelöst werden, bevor man die geometrischen Verhältnisse der Figuren mit der Zahl verbindet; als Beleg folgt hierüber eine Aufgabe, ohne Auflösung.

Ein Quadrat und gleichseitiges Δ sind einander gleich; es fragt sich, in welchem geometrischen Verhältnisse ihre Seiten zu einander stehen?

Bey der Lösung dieser Aufgabe wird jeder Schüler beynahe unübersteigliche Schwierigkeiten treffen, die aber in der Natur der Aufgabe gegründet sind; die Gleichheit ihres Flächeninhalts ist als 2te Potenz zu betrachten, und das geometrische Verhältniß ihrer Seiten als ihre Wurzeln, so wie das Fortschreiten von der Wurzel zu der Potenz leichter ist, als das der Potenz zur Wurzel; so findet diese Wahrheit besonders bey den geometrischen Verhältnissen statt; ich höre deswegen mit diesen Aufgaben auf, und komme dann bey Verbindung des geometrischen Verhältnisses mit der Zahl wieder auf dieselben zurück. —

Nach dem das geometrische Verhältniß der Seiten in den Figuren bestimmt war, wurden sie auch wirklich geometrisch konstruirt, welches auch jetzt mit den Flächen vorgenommen wird. —

§. 5.

Von der mathematischen Konstruktion der Flächen.

Das 1te ist die geometrische Konstruktion einer Fläche in eine ihr an Flächeninhalt gleiche; oder die Verwandlung der Figuren.

Jedes Parallelogramm soll in ein Δ verwandelt werden, welches ihm gleich ist; und umgekehrt, jedes Dreyeck soll in ein ihm gleiches Parallelogramm umgewandelt werden. 23. Satz.

Auflösung.

Um das 1te zu erhalten, wird eine Seite (Grundlinie) des Parallelogramms verdoppelt, auf diese verdoppelte Seite ein Δ beschrieben, welches gleiche Höhe mit dem Parallelogramm hat ꝛc.

Um die 2te Frage zu lösen, muß das Umgekehrte der 1ten gemacht werden.

Daß die Linien, Winkel rc. jetzt nicht mehr von freyer Hand gemacht werden dürfen, weiß man durch das, was bey der mathematischen Konstruktion der Seiten und Linien gesagt wurde. —

In letzter Auflösung muß also mathematisch eine Linie gemacht werden, die das Doppelte der Grundlinie des Parallelogramms ist rc.

Die Behandlung der mathematischen Instrumente, des Zirkels rc. ist im 2ten Theil der Größenlehre hinlänglich aus einander gesetzt; es können folglich hierin keine Fälle eintreten, denen die Schüler nicht gewachsen sind.

Es soll ein Pralleltrapez, oder ein Trapez in ein Rechteck oder in ein Δ verwandelt werden, welches dem Paralleltrapez gleich ist. 24. Satz.

Auflösung.

Es wird die schwierigste Fläche herausgehoben. Seht Figur 17, abmd soll das zu verwandelnde Trapez seyn. Alle Figuren dieser Art werden zuerst in ein Δ verwandelt. Es wird db, und durch m die Linie qs gleichlaufend db gezogen, ferner noch die Linie qb gemacht, wodurch ein Δ qsb entsteht, welches den 2 Δ mbs und mqd gleich ist; denn es hat mit ihnen gleiche Grundlinie, und gleiche Höhe, folglich ist das Δ gba = dem Trapez mit den innern Ecken.

Wie ein Parallelogramm in ein Δ verwandelt wird, hätten wir schon. Das Viereck mit lauter innern Winkeln enthält zum Parallelogramm nur noch einen kleinen Zusatz. —

Ein 5Eck mit einem oder 2 innern Ecken soll in ein Δ verwandelt werden, welches ihm gleich ist.

Erster Fall.

Figur 18, soll ein 5Eck mit einem innern Ecken seyn. Es wird db gezogen, hernach cs gleichlaufend db, und ab so weit verlängert, bis sie mit cs zusammentrifft, alsdann wird endlich ds gemacht, durch welches das 5Eck abcdf in ein ihm gleiches Viereck asdf verwandelt wird; denn das Δ dbc ist gleich dsb, weil sie gleiche Grundlinie db haben, und zwischen gleichlaufenden Linien db und cs stehen.

Wie ein 4Eck mit einem innern Ecken in ein Δ verwandelt wird, ist durch die vorhergehenden Aufgaben dieses §. deutlich.

Sollte das 5Eck so beschaffen seyn, daß td bei der Verlängerung in s fallen würde, oder daß ds und df eine gerade Linie bilden würden, so bekäme man statt ein 4Eck, gleich im 1ten mal ein 3Eck. —

Zweyter Fall.

Figur 19, soll ein 5Eck mit 2 innern Ecken seyn. Es wird b f, von a, a g gleichlaufend b f gezogen, und c b bis g verlängert, und endlich f b gezogen, wodurch das 5Eck a b c d f in ein ihm gleiches 4Eck g c d f umgewandelt wird; denn das Δ f b g ist gleich dem Δ b f a.

Auf gleiche Weise können 6, 7, 8Ecke ꝛc. in 3, 4, 5Ecke ꝛc. umgewandelt werden, ohne an Flächeninhalt etwas zu ändern; und zwar solche mit innern und äußern Ecken, und auch solche mit nur äußern Ecken; welche sogar leichter ist, als die 1ten.

Bey allen Aufgaben dieses §. würde immer nur eine Art von Auflösung gemacht, wiewohl meine Schüler auch hierüber sehr mannigfaltige machten. Nicht unwichtig ist etwa noch folgende Frage:

Welches ist die allgemeine Regel bey der Verwandlung einer Figur in eine andere, die weniger Ecken hat? Antw. Man schneidet von der zu verwandelnden Figur, die bisher immer mehr Ecken hat, als man begehrt, immer einen Ecken nach dem andern weg, bis man die begehrte Anzahl erhält.

Wie verfährt man, um einen innern Ecken einer Figur wegzuschneiden?

Statt Figuren die eine gewisse Anzahl Seiten, oder Ecken haben, in eine andere mit weniger Ecken zu verwandeln, ohne den Inhalt derselben zu stöhren, kann man dieses auch umkehren, welches aber doch nicht so wichtig ist als das 1te; und zugleich eben so leicht, weswegen auch nur ein paar Fragen ohne Auflösung folgen.

Es soll ein 3Eck in ein ihm gleiches 4, 5, 6Eck rc. umgewandelt werden.

Es soll ein Quadrat in ein ihm gleiches 10Eck verwandelt werden.

Wie verfährt man, um ein 3Eck in ein 4Eck zu verwandeln?

Welches ist die allgemeine Regel des Verfahrens in der Verwandlung einer Figur in eine andere, die mehr Ecken hat?

Als Uebung dürfen diese Reihen folgen, und Fragen auch bey gewandtern Schülern nicht ganz vernachlässiget werden. —

Den geometrisch zu verwandelnden Figuren können noch andere Eigenschaften beygelegt werden, als daß sie nur einander gleich seyen, und diese und jene Anzahl Ecken habe, welches Eigenschaften der Seiten, oder Winkel, oder auch ein geometrisches Verhältniß seyn kann, auch können mehrere dieser Eigenschaften mit den obigen vereiniget werden, welches ich in geordneten Reihenfolgen durchführen werde.

E s s o l l e i n R e c h t e c k i n e i n a n d e r e s R e c h t e c k v e r w a n d e l t w e r d e n , w e l c h e s d e m

1ten gleich, und eine gegebene Länge, oder Linie enthält. 25. Satz.

Auflösung.

dgbc an Figur 20, soll das gegebene Rechteck seyn, ab die Länge, welche das 2te Rechteck erhalten muß; von a wird eine Linie am gleichlaufend cb, cd bis m verlängert, und die Linie mb gezogen, durch den Punkt s endlich eine Linie tl gleichlaufend ab gemacht; wodurch das Parallelogramm tabl = dgbc wird, denn das Parallelogramm tags ist gleich dem Parallelogramm dslc, weil die 2 Δ mts und sgb + □ tacs der Hälfte des Parallelogramms mabc gleich ist, oder dem Δ mab ꝛc. — Die fernere Auflösung ist leicht.

Daß auch bey ähnlichen Aufgaben die Regel des Verfahrens abstrahirt werden kann, und abstrahirt werden soll, liegt ganz in dem Geiste der oben gemachten Fragen; es folgen in dieser Beziehung ein paar Fragen über die letzte Aufgabe.

Wie muß man verfahren, wenn man ein Rechteck in ein ihm gleiches Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandeln soll?

Wie muß die ungleichlaufende Linie in einer solchen Verbindung jedesmal gezogen werden? ꝛc. —

Ein Rechteck soll in ein schiefwinkliches Parallelogramm umgewandelt werden, welches einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite enthält.

Auflösung.

Figur 20, y soll die gegebene Seite, x der Winkel und d g h e das gegebene Parallelogramm seyn.

Das Parallelogramm d g b e wird in ein ihm gleiches Parallelogramm umgewandelt, welches den gegebenen Winkel enthält; um dieses zu erhalten, können nur 2 Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe gemacht werden, und folglich kann der gegebene Winkel nur auf die gemeinschaftliche Grundlinie getragen werden, hernach die obige Konstruktion weiter fortgesetzt,

Ein 3, 5 oder 6Eck ꝛc. soll in ein Rechteck, oder in ein schiefwinkliches Parallelogramm mit obigen Eigenschaften verwandelt werden.

Zuerst wird die Verwandlung der Ecken einer Figur ohne die Aenderung des Inhalts vorgenommen ꝛc.

Ein gegebenes Δ soll in ein anderes Δ verwandelt werden, welches eine gegebene Seite enthält. 26. Satz.

Auflösung.

Zu dem gegebenen Δ wird noch ein ähnliches hinzugesetzt, daß sie mit einander ein Parallelogramm bilden, dieses Parallelogramm verwandelt man in ein ihm gleiches Parallelogramm, welches die gegebene Länge enthält, hernach wird durch eine Ecklinie die Hälfte dieses Δ genommen, wodurch man das begehrte Δ erhält.

Eben so verfährt man, wenn ein Winkel angegeben wird, desgleichen wenn ein Winkel, und eine Seite rc. gegeben ist.

So kann ein △, 4Eck rc. in ein 5Eck, oder 6Eck rc. umgewandelt werden.

Zu Zeiten ist es sehr zuträglich, alle diese berührten Reihenfolgen mit den Schülern durchzuführen; besonders wenn sich schwache, oder junge dabey befinden, oder sonst hinreichende Zeit da ist; welches aber ebenfalls wieder Sache des Lehrers ist.

Statt daß der Lehrer kräftige Schüler diese Aufgaben lösen läßt, kann er sie auch nur die Reihenfolgen und Gesetze derselben aufsuchen lassen, welches besonders für den Jüngling wichtig ist, der sich zum Lehrstand bilden will. —

Werden in einem 3Eck, 4Eck, 5Eck rc. mehrere Seiten und Winkel gegeben, so sind die Aufgaben noch wichtiger; besonders wenn sie dieselbe auf alle Seiten und Winkel einer Figur erstreckt, wobey dieselbe regelmäßig, oder unregelmäßig seyn kann. Ich fange bey regelmäßigen an, und lasse ein Rechteck in ein Quadrat verwandeln.

Auflösung.

Es werden 2 an einander liegende Seiten des zu verwandelnden Rechtecks als 2 äußere Glieder eines geometrischen Verhältnisses ins Auge gefaßt, denen das mittlere fehlt, wodurch man die Figur 3 erhält, bei der a e und e d die 2 anliegenden Seiten des gegebenen Rechtecks sind, und b e eine Seite des Quadrats; dieses Quadrat ist gleich dem erst genannten Rechteck; welches schon durch die Entwicklung des geometrischen Verhältnisses bey §. 23 der Algebra aus einander gesetzt wurde; denn die 2 äußern Glieder mit einander multiplizirt, sind gleich den 2 mittlern mit einander multiplizirt, oder wenn sich nur eins in der Mitte befindet, diesem mit sich selbst multiplizirt. —

Das Produkt dieser Zahloperation läßt sich auf das Quadrat und Rechteck anwenden; denn das Produckt von 2 verschiedenen Zahlen kann als der Inhalt eines Rechtecks, und dasjenige einer Zahl mit sich selbst muttiplizirt als das des Quadrats, in's Auge gefaßt werden.

Weil sich hierüber verschiedene Einwendungen machen lassen, oder doch wenigstens Fragen aufgeworfen werden könnten, die noch einer Beantwortung bedürften, so folgt hier eine andere Auflösung.

Das Quadrat wird so beschrieben, wie es bey Figur 3 angegeben ist; und die ähnliche Figur wird beybehalten.

Das Quadrat auf a d $= \square$ d b $+$ b a, $\square$ a d $=$ $\square$ a e $+$ e d mehr dem doppelten Rechteck a e mal e d; das $\square$ de $+$ eb $= \square$ b d, $\square$ eb $+$ ea $=$ $\square$ b a; folglich ist das Quadrat a d $= \square$ e d $+$ e b

$+ eb + ae = \square de + ea + 2ae \times ed$; wird von Quadrat $ed + eb$ 2c., $\square ed + ae$ und von $\square de + ea$ 2c., $\square ed + ea$ weggethan, so muß noch gleiches bleiben, weil man gleiches von gleichem weggethan hat; also $2 \square eb = 2ae \times ed$, oder ein Quadrat gleich dem Rechteck $ae \times ed$.

Folglich kann jedes Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat umgewandelt werden. 27. Satz.

Früher haben wir schon gesehen, daß jedes 4, 5, 6Eck 2c. in ein Δ, Rechteck 2c. verwandelt werden kann, ohne den Inhalt zu ändern.

Also kann jede geschlossene geradlinige Figur in ein ihr gleiches Quadrat umgewandelt werden. 28. Satz.

Als Beleg kann der Lehrer die Schüler hierüber ein paar der schwersten Aufgaben machen lassen. —

Ein Quadrat, oder Rechteck, 3Eck, 4Eck, 5Eck 2c. soll in ein ihm gleiches aber gleichschenklich rechtwinkliches Δ umgewandelt werden.

Auflösung der 1ten Figur.

Um ein Quadrat in dieses zu verwandeln, zieht man nur eine Ecklinie desselben, nimmt diese Ecklinie als eine der gleichen Seiten des suchenden rechtwinklich gleichschenklichen Δ, wodurch das entstehende Δ gleich wird dem Quadrat; denn 2 ähnlich und ähnlich beschriebene Δ auf den Katheten eines rechtwinklichen Δ, sind gleich dem auf der Hypothenuse.

Auf gleiche Weise kann jede andere Figur, nachdem sie in ein Quadrat verwandelt ist, in ein gleichschenklich rechtwinkliches Δ umgewandelt werden.

Auch hierüber sind ein paar Aufgaben für schwächere Schüler nicht ganz überflüßig.

Eine andere Auflösung.

Die in ein rechtwinklich gleichschenkliches Δ zu verwandelnde Figur wird verdoppelt, hernach in ein Quadrat verwandelt, und die Hälfte desselben durch eine Ecklinie genommen. —

Daß auch über diese Aufgabe, wie über alle andere dieser Art noch sehr mannigfaltige Auflösungen gemacht werden können, sieht man schon aus dieser ausgeführten.

Ein Quadrat soll in ein gleichschenklich stumpfwinkliches Δ umgewandelt werden, deren stumpfer Winkel $1\frac{1}{2}$ rechten beträgt.

Diese Aufgabe ist eine schwerere Ableitung des Quadrats, als die des gleichschenklich rechtwinklichen Δ, und fällt mit dem gleichseitigen Δ beynahe in eins, deswegen folgt auch eine Auflösung, die auf dasselbe anwendbar ist.

Es wird ein gleichschenklich stumpfwinkliches Δ mit einem $1\frac{1}{2}$ rechten Winkel gemacht, dasselbe nach dem 23. Satz in ein Quadrat verwandelt. — -

Figur 21 soll dieses darstellen; das Δ a b c soll das gegebene seyn, fc das ihm gleiche Quadrat; es wird fc und fa gezogen, wodurch die 2 Figuren durch ein Δ mit einander verbunden sind, das auch bey den zu verwandelnden Figuren gemacht wird.

Das Quadrat y soll die zu verwandelnde Figur seyn, es wird eine Ecklinie in demselben gezogen, und auf dieselbe ein Δ beschrieben, das ähnlich wird dem Δ fca; sm und fc sind die Ecklinien der beyden Quadrate ꝛc. folglich ist mn die längste, oder ungleiche Seite des zu beschreibenden gleichschenklich stumpfwinklichen Δ; denn das Quadrat sm, verhält sich zum Quadrat fc, wie das Δ msn zu seinem ähnlichen Δ cfa, oder wie das gleichschenklich stumpfwinkliche Δ auf der Seite mn, zu seinem ihm ähnlichen Δ acb, also verhält sich das Quadrat fc, zum Δ acb, wie das □ sm zum ähnlichen Δ auf mn; das Quadrat fc = Δ acb, also das Quadrat ms auch gleich dem gleichschenklichen Δ auf nm; worüber nur die Sätze der Größenlehre 1ter Theil betrachtet werden dürfen.

Auch über solche Aufgaben haben meine Schüler die mannigfaltigsten Auflösungen gemacht. —

Es soll ein Quadrat in ein ihm gleiches und gleichseitiges Δ umgewandelt werden. —

Auflösung.

Es wird zuerst ein gleichseitiges Δ gemacht, dasselbe in ein Quadrat verwandelt, und hernach umgekehrt das Quadrat auf eine analoge Art in ein gleichseitiges Δ umgewandelt.

Figur 22 soll das beliebige gleichseitige Δ seyn, ab das ihm gleiche Quadrat; dq ist das zu verwandelnde Quadrat. Es wird bs gezogen, und auf lp ein Δ lpo beschrieben, welches ähnlich bms wird; ferner wird auf lo ein gleichseitiges Δ errichtet, welches gleich wird dem Quadrat pq; denn das Quadrat ba verhält sich zum gleichseitigen Δ mts, wie das Quadrat pq, zu dem gleichseitigen Δ auf lo; das Quadrat ba = Δ mst, folglich ist das Quadrat pq, gleich dem gleichseitigen Δ auf lo ꝛc. =

Will man diese Auflösung noch weiter auseinander gesetzt haben, so kann man das Quadrat ba in ein geometrisches Verhältniß zu dem Δ msb setzen, oder man kann die Ecklinien ba und pq ziehen, und zuerst das Δ bma in ein geometrisches Verhältniß zu dem Δ bms ꝛc. setzen.

Folglich kann jede Figur in ein regelmäßiges Δ umgewandelt werden, ohne etwas in ihrem Flächeninhalt zu ändern. 29. Satz.

Ein paar Aufgaben sind hierüber für den Schüler nicht unzweckmäßig. Z. E. ein 5Eck in ein gleichseitiges Δ zu verwandeln ꝛc.

Es soll ein Quadrat in ein regelmäßiges 5Eck umgewandelt werden.

Auflösung.

Es wird vor allem aus ein regelmäßiges 5Eck gemacht, dasselbe in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt, und diese 2 Figuren so aneinander gesetzt, wie das △ tms, und das Quadrat ab Figur 22 anzeigt, und endlich werden diese 2 Figuren mit einer, oder 2 geraden Linien verbunden, seht ebenfalls Figur 22; die weitere Auflösung ist in den vorhergehenden Aufgaben genugthuend auseinander gesetzt. —

Auf die nämliche Weise kann ein gleichseitiges △, ein Quadrat, ein regelmäßiges 5 und 6Eck ꝛc. in ein 8Eck umgewandelt werden; deren weitere Ausführung bey Schülern nicht entbehrlich ist.

Desgleichen dürfte mit dem 7Eck vorgenommen werden, wenn man dasselbe geometrisch konstruiren könnte; dieses ist es aber nun nicht, folglich wird es auch übergangen. —

Das 9, 10, 12Eck ꝛc. kann geometrisch konstruirt werden, folglich kann auch jede Verwandlung bey ihnen statt finden.

Einzelne der schwersten Aufgaben müssen hier von den Schülern noch wirklich ausgeführt werden. Z. E. etwa ein regelmäßiges 10Eck in ein regelmäßiges 12Eck zu verwandeln. —

Noch folgen einige allgemeine Fragen.

Gebt nur mit Worten an, wie ihr verfahren wollt, um ein regelmäßiges 10Eck in ein regelmäßiges 24Eck zu verwandeln.

Wie muß man verfahren, um eine unregelmäßige Figur in eine regelmäßige zu verwandeln?

Was findet bey jeder Verwandlung einer regelmäßigen Figur, in eine andere regelmäßige statt?

Welches sind die allgemeinsten Gesetze der Verwandlung?

Was muß bey allen Figuren in ihrer Verwandlung vorgenommen werden?

(Versteht sich, um sie an Inhalt immer gleich zu machen.)

Wie viel verschiedene Formen könnet ihr im Kopf aufzählen, in denen die Verwandlung vor sich gehen kann?

Die aufgestellten Fragen mögen hinlänglich seyn, um den Schüler in das Wesen und Geist dieser Aufgaben einzuführen, besonders, wenn die Antworten aus der wirklichen Durchführung hervorgehen. —

Wie bisher unregelmäßige und regelmäßige Figuren in andere regelmäßige verwandelt worden sind, so können sie auch in unregelmäßige umgewandelt werden; welches aber doch nicht mehr so wichtig ist als das 1te; um aber auch für den schwächern nicht zu sehr gedrängt zu seyn, folgen noch einige Aufgaben über das Δ ohne Auflösung.

Ein

Ein Quadrat, oder gleichseitiges Δ, oder ein 3, 4, 5, 6Eck ꝛc., soll in ein rechtwinkliches Δ verwandelt werden, deren ein spitzer Winkel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ rechte beträgt. $\frac{1}{7}$ rechter Winkel kann nicht mathematisch gemacht werden; folglich fallen auch die Δ weg, welche diese Winkel haben. —

Nachdem man bey den aufgestellten Aufgaben einmal die begehrten Winkel hat, kann die weitere Auflösung nach Figur 22 gemacht werden. —

Wie man Winkel der angegebenen Größe macht, giebt Größenlehre 2ter Theil Auskunft. —

Ein Quadrat soll in ein Δ umgewandelt werden, welches einem gegebenen Δ ähnlich, und dem Quadrat gleich ist.

Auflösung.

Figur 23, y soll das Quadrat, und c a b das Δ seyn.

Um diese Verwandlung zu erhalten, wird das Δ c a b in ein ihm gleiches □ umgewandelt, d g soll dasselbe seyn, es wird g b gezogen, und auf C G ein dem Δ c b g ähnliches und ähnlich beschriebenes Δ C G B gemacht, und endlich noch das Δ C A B ähnlich c a b beschrieben, wodurch das Quadrat y in ein dem Δ a c b ähnliches und gleiches Δ umgewandelt wird. —

Es soll ein gleichseitiges Δ, oder Quadrat ꝛc., oder ein Δ, 4Eck im allgemeinen, in ein ihm gleiches

4Eck umgewandelt werden, welches diesen und diesen Winkel ꝛc. hat. Z. E. Das 4Eck soll 4 innere Winkel haben, wovon 3 einander gleich, und der ungleiche $\frac{1}{4}$ rechte beträgt, oder welches einen innern Ecken mit 3 gleichen Winkeln ꝛc. hat; jeder der gleichen Winkel soll $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ rechte seyn, auch $\frac{2}{3}$ ꝛc. —

Figur 24. Das △ a b c soll in ein dem 4Eck m s t ähnliches, und dem △ b a c gleiche Figur umgewandelt werden. —

Das Viereck m s t v wird in eine dem △ a b c ähnliche Figur verwandelt. In vorliegender Figur weiß man aber nicht, ob das △ a b c gleichseitig, oder gleichschenklich ist; folglich wird das △ b a c zuerst in ein Quadrat umgewandelt, desgleichen wird mit dem 4Eck gemacht; m w soll das Quadrat des verwandelten 4Ecks seyn, und y b soll eine Seite des □ des verwandelten △ seyn; — man beschreibt auf y b ein △ b y o welches ähnlich, und ähnlich beschrieben m x v wird, wobey also b y, die gleichliegende Seite von x m werden muß, folglich wird b o die suchende Seite des 4Ecks; auf o b muß also noch ein 4Eck beschrieben werden, welches m s t v ähnlich ist.

Wie dieses ins Werk zu setzen sey, soll hier nicht mehr gezeigt werden. Eben so ist es mit einem weitern Beweis hierüber. —

Auf gleiche Art kann man auch alle andere Figuren in gegebene 5, 6, 7Ecke ꝛc. umwandeln. —

Folglich können alle mögliche Verwandlungen der Figuren gemacht werden, ohne die Gleichheit des Inhalts zu stöhren. 30. Satz.

Vor der Lehrer die Schüler aber zum Aussprechen dieses Satzes führt, muß er sie auch in alle diese Verwandlungen hineingeführt haben; ohne dieses sind es nur zu oft Worte des Lehrers, oder des Buches. —

Bis jetzt wurden nur Verwandlungen der Figuren gemacht, die sich an Flächeninhalt immer gleich blieben; daß sie auch ungleich gemacht werden können und gemacht; werden müssen, liegt schon als Gegensatz des 1ten vor uns; sie sind aber unwichtiger, wenn dieser Ungleichheit keine andern Bestimmungen mehr beygelegt werden.

Die Ungleichheit der Figuren kann besonders durch das geometrische Verhältniß ausgedrückt und bestimmt werden, welches dann wichtige Reihenfolgen giebt; kommende Beyspiele machen es deutlich.

Man soll 2 beliebige geschlossene Figuren machen, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie zwey gegebene Linien.

Auflösung.

Es werden zu den 2 gegebenen Linien 2 andere gesucht, die mit einander ein geometrisches Verhältniß bilden; die gegebenen 2 Linien bilden das 1te und 2te Glied dieses geometrischen Verhältnisses; auf die

2 gefundenen Linien werden 2 Δ beschrieben, die gleiche Höhe haben, welche folglich dann auch in einem ähnlichen geometrischen Verhähtnisse stehen, wie ihre Grundlinien, oder wie die 2 gefundenen Linien, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse sind, wie die 2 gegebenen Linien. — Statt Δ hätte man auch Parallelogramme rc. machen können.

Man giebt 2 beliebige Linien, zu welchen 2 Quadrate gesucht werden sollen, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 2 gegebenen Linien.

Auflösung.

Es werden zu den 2 gegebenen Linien 2 andere gesucht, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die ersten 2 Linien; auf diese gefundene 2 Linien werden 2 Δ, oder 2 Rechtecke rc. beschrieben, die gleiche Höhe haben; und endlich werden diese Δ in Rechtecke, und diese Rechtecke in Quadrate verwandelt; welche sich dann eben so zu einander verhalten, wie die 2 gefundenen, oder wie die 2 gegebenen Linien; denn die 2 Δ rc. verhalten sich wie die Quadrate, und eben so wie die 2 gefundenen Linien. —

Auf gleiche Weise kann man zu 2 gegebenen Linien andere geschlossene Figuren suchen, die diese, oder jene bestimmte Form rc. haben; besonders wichtig sind aber immer die regelmäßigen. —

Folglich kann man zu 2 gegebenen Linien, 2 geschlossene Figuren von jeder beliebigen Form machen, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 2 gegebenen Linien. 31. Satz.

Die obigen Fragen werden umgekehrt.

Man giebt 2 Δ, die gleiche Höhe, aber verschiedene Grundlinien haben, zu diesen 2 Figuren sollen 2 Linien gesucht werden, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die Δ.

Auflösung.

Die Grundlinien der 2 gegebenen Δ, werden als die angegebenen Linien in's Auge gefaßt, zu denen 2 andere gesucht werden müssen; und folglich wird bey der weitern Ausführung eben so verfahren, wie bey 2 Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, zu denen 2 andere gesucht werden müssen; seht hierüber §. 3. —

Es sind 2 beliebige Quadrate, oder gleichseitige Δ ꝛc. gegeben; man soll zu diesen 2 Figuren 2 Linien suchen, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die Figuren selber. —

Auflösung.

Die 2 Quadrate, oder die 2 gleichseitigen Δ, werden in ihnen gleiche Rechtecke mit gleicher Höhe, oder in ihnen gleiche Δ mit gleicher Höhe verwandelt, welches besonders schnell durch die Figur 20 hervor gebracht werden kann. —

Hat man 2 Figuren, als Δ oder Parallelogramme, die gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien; folglich können statt der Figuren, die Grundlinien als 2 gegebene Linien betrachtet werden, zu denen 2 andere gesucht werden müssen, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie diese Grundlinien. —

Wird ein Quadrat, und ein regelmäßiges 5Eck, oder 6Eck, oder eine andere regelmäßige Figur ꝛc. gegeben, so kann man ganz gleich verfahren.

Folglich können zu 2 gegebenen Figuren, immer 2 Linien gesucht werden, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie diese 2 Figuren.

32. Satz.

Es sind 2 Quadrate gegeben, wozu ein 3tes gesucht werden muß, das das mittlere geometrische Verhältniß zwischen den beiden angegeben bildet.

Auflösung.

Die 2 Quadrate werden in ihnen gleiche Rechtecke mit gleicher Höhe verwandelt. Die Höhe des kleinern Quadrats, wie auch folglich das Quadrat selber kann unverändert bleiben; das 2te oder größere Quadrat, wird in ein Rechteck umgewandelt, das gleiche Höhe hat mit dem 1ten Quadrat; eine Seite des unveränderten Quadrats, und die Grundlinie des Rechtecks, werden als die 2 äußern Glieder eines geometrischen Verhältnisses genommen, und zwischen denselben die mittlere Proportionallinie gesucht, (welches bey Figur 3 ausgeführt ist,) auf die gefundene mittlere Proportionallinie, wird dann ebenfalls wieder ein Rechteck beschrieben, welches gleiche Höhe mit den andern 2 Parallelogrammen hat; Parallelogramme, mit gleichen Höhen, verhalten sich wie ihre Grundlinien, die Grundlinie des kleinen Quadrats, verhält sich zu der gefundenen Linie, wie die gefundene Linie zur Grundlinie des verwandelten Quadrats; folglich findet dieses auch mit den Rechtecken, die gleiche Höhe haben, statt; es wird deswegen auf die mittlere Proportionallinie ein Rechteck beschrieben, das gleiche Höhe hat mit dem kleinern Quadrat ꝛc.; — dieses Rechteck wird in ein ihm gleiches Quadrat umgewandelt, wodurch sich dann das kleinste Quadrat, zum letzt gefundenen Rechteck, oder Quadrate verhält, wie dieses Quadrat zum größern gegebenen Quadrate; daß sie sich auch umgekehrt so zu einander verhalten, weiß man. — Auf gleiche Weise kann man zwischen 2 Δ, 2 Vier- oder 5Ecken ꝛc. ein drittes 3Eck, oder 4Eck ꝛc. suchen, die das mittlere geometrische Verhältniß zwischen ihnen bildet.

Daß dem Δ, 4Eck ꝛc. auch noch jede beliebige Formenbestimmung beygelegt werden kann, ergiebt sich aus der Verwandlung der Figuren, die durch alle Formen durchgeführt wurden, hinlänglich; folglich kann man den Schüler zur allgemeinen Regel führen. Zwischen 2 gegebenen Flächen jeder Form, kann immer eine 3te gefunden werden, die das mittlere geometrische Verhältniß zwischen ihnen bildet, und die ebenfalls jede beliebige Form haben kann. 33. Satz.

Man hat 3 Quadrate, es soll ein 4tes gesucht werden, welches das 4te geometrische Glied zu diesen 3 bildet.

Auflösung.

Obiger Weg ist auch zur Lösung dieser Aufgabe wieder der einfachste. Es werden daher alle 3 Quadrate in Δ, oder Rechtecke mit gleicher Höhe verwandelt, (das Rechteck ist einfacher;) die Grundlinien dieser Rechtecke werden als 3 Linien betrachtet, zu denen eine 4te gesucht werden muß, die in einem geometrischen Verhältnisse mit den 3en steht, auf diese 4te Linie wird dann ebenfalls ein Rechteck beschrieben, welches gleiche Höhe mit den 3 andern hat, und endlich wird dieses Rechteck ꝛc. noch in ein Quadrat verwandelt, wodurch sich das 1te Quadrat zum 2ten verhält, wie das 3te zum 4ten; denn diese 4 Quadrate stehen im nämlichen Verhältnisse, wie die 4 Rechtecke, und die 4 Rechtecke wie die 4 Linien, welche wir früher schon hätten.

Auf eben diese Art können zu 3 beliebigen Δ, oder 3, 4Ecken ꝛc. ein 4tes beliebiges Δ oder 4Eck ꝛc. gesucht werden, welches das 4te Glied des geometrischen Verhältnisses bildet.

Also können zu 3 Flächen von jeder beliebigen Form (versteht sich immer nur geradlinig begrenzte und ebne) eine 4te gesucht werden, die ein geometrisches Verhältniß mit einander bilden. 34. Satz.

Bey der mathematischen Konstruktion der Seiten hatten wir nicht nur zu gegebenen Seiten, oder Linien andere gesucht, die mit ihnen ein geometrisches Verhältniß bilden; sondern gegebene Linien auch in solche Verhältnisse eingetheilt. Das Theilen in gleiche Theile, ist das 1te, und folgt deswegen auch. —

Es soll ein gleichseitiges oder beliebiges Δ, mit einer Linie, welche mit einer Seite des Δ gleichlaufend ist, in 2 gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Es wird die Hälfte des Δ genommen. (Um diese zu erhalten, wird eine Seite des Δ in 2 gleiche Theile getheilt, und von dem Theilungspunkte an den gegenüber stehenden Winkel eine Linie gezogen.)

Die Hälfte dieses Δ, wird in ein dem ganzen ähnliches Δ verwandelt; eine Seite des verwandelten Δ wird auf die ihm gleichliegende Seite des ganzen Δ übergetragen; seht Figur 25, bey der das Δ abc =

$\frac{ABC}{2}$ ist, und dabey noch demselben ähnlich; AD = ab, folglich das $\triangle$ ADE = abc, abc = $\frac{ABC}{2}$, folglich $\triangle$ ADE = $\frac{ABC}{2}$; und also das Paralleltapez DECB = $\triangle \frac{ABC}{2}$ = ADE.

Eine andere Auflösung.

Figur 26. Es werden auf ab des gleichschenklich rechtwinklichen $\triangle$ acb, so 2 gleichschenklich rechtwinkliche $\triangle$ beschrieben, daß ab die längste Seite des $\triangle$ acb, und eine von den gleichen Seiten des $\triangle$ abd wird; die Seite ab des $\triangle$ abc wird so auf db des $\triangle$ dba gelegt, daß das $\triangle$ acb auf das $\triangle$ adb fällt, und zwar wie das $\triangle$ dmn, wodurch dieses letzte $\triangle$ die Hälfte von dab wird; — folglich muß nur noch eine Seite des $\triangle$ ABC so eingetheilt werden, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie dm : mb, oder wie dn : na, welches beym 10. Satze schon ausgeführt ist.

Eben so kann ein $\triangle$, unter dieser Form in 3 und 4 rc. gleiche Theile getheilt werden.

Hier folgen noch ein paar Winke, wie das $\triangle$ durch die 2te Auflösung in 3, 4 rc. gleiche Theile getheilt werden kann.

Um ein $\triangle$ in 3 gleiche Theile zu theilen, wird durch Figur 26 ein $\triangle$ gemacht, welches $\frac{1}{3}$ eines andern ist; — dasjenige, welches ein 3tel eines andern ist, wird wieder wie oben auf das 1te, oder Ganze übergetragen, desgleichen wird mit dem vorgenommen, welches $\frac{2}{3}$ des Ganzen ist, welches in vorliegender Figur das Δ abd ist, das $\frac{2}{3}$ von ads beträgt; nachdem ein Δ so in 3 gleiche Theile getheilt ist, wird eine Seite des zu theilenden Δ in die Verhältnisse des getheilten Δ eingetheilt. —

Auf die aufgestellte Weise kann ein Δ in 4, 5, 6 rc. gleiche Theile eingetheilt werden; welches jetzt gewiß ein jeder ohne die geringste Schwierigkeit ausführen wird.

Folglich kann jedes Δ, mit Linien, welche Seiten gleichlaufend sind, in so viel gleiche Theile getheilt werden, als man immer will. 35. Satz.

Daß ein Δ auch mit ungleichlaufenden Linien in 2, 3 rc. gleiche Theile getheilt werden kann, ergiebt sich als Gegensatz des 1ten; werden aber den ungleichlaufenden Linien keine andern Eigenschaften beigelegt, als daß sie nur ungleichlaufend seyn müssen mit einer Seite des Δ, so sind die Aufgaben so leicht, daß sie hier nicht mehr verdienen gelöst zu werden; sollten ihnen aber noch andere Bestimmungen gegeben werden, so sind sie etwas interessanter, oft aber sehr schwer, und verwickelt zu ihrer Wichtigkeit, aber in allen Fällen doch lösbar. Ich gebe als Leitfaden nur ein paar Aufgaben, ohne Auflösung.

Das gleichschenklich rechtwinkliche Δ soll mit einer ungleichlaufenden Linie, die von einem 3tel der längsten Seite aus gezogen wird, in 2 gleiche Theile getheilt werden. —

Ein ähnliches Δ soll so mit einer Linie in 2 gleiche Theile getheilt werden, daß ein Theil ein gleichschenklich spitzwinkliches Δ bildet ꝛc.

Das Parallelogramm kann, ohne neue Schwierigkeiten, mit gleich- und ungleichlaufenden Linien in 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden; welches ein jeder nach Bedürfniß ausführen mag. — Ich nehme dafür das Paralleltrapez und Trapez; seht Figur 27. abcd soll ein Paralleltrapez seyn, in dem eine gleichlaufende Linie gezogen wird, welche dasselbe in 2 gleiche Theile theilt. ad und bc werden bis zu ihrem Zusammentreffen verlängert; welches den Punkt e giebt; nach diesem wird die Hälfte des Paralleltrapez's, und das Δ abe zusammen genommen, und dasselbe in ein Δ verwandelt, welches dem Δ edc ähnlich, und dem $\Delta\ eab + \frac{abcd}{2}$ gleich ist; ferner wird eine von den gleichliegenden Seiten dieses entstehenden Δ, von e an, etwa auf ec gelegt, welches em giebt, von m muß endlich noch die gleichlaufende Linie mn gezogen werden, die das Paralleltrapez abcd in 2 gleiche Theile theilt, denn das Δ emn ist gleich dem verwandelten Δ, das dem Δ aeb und der Hälfte des Paralleltrapez's abcd gleich ist, das Δ e a b gehört aber nicht zum Parallceltrapez, folglich ist der Rest a b m n noch gleich der Hälfte von a b c d, oder gleich n m c d.

Auf eben diese Art, kann das Paralleltrapez in 3, 4, 5 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden. —

Das Paralleltrapez a b d f an Figur 28, soll mit einer Linie, die den ungleichlaufenden Seiten des Paralleltrapez gleichlaufend ist, in 2 gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Es wird die Hälfte von a b d f genommen, und dieselbe in ein Parallelogramm verwandelt, welches gleichwinklich wird dem Parallelogramm a b t f, und eine Seite hat, die gleich ist a f, ferner wird die Seite auf a f getragen, und a s und f m gleich den 2 anliegenden Seiten des verwandelten Parallelogramms gemacht, und endlich noch s m gezogen, wodurch das Parallelogramm $asmf = \frac{abdf}{2}$ wird.

Doch ist diese Auflösung nur dann wahr, wenn a s nicht über a b hinaus fällt.

Es muß folglich bey solchen Aufgaben angegeben werden, ob a s nicht länger als a b seye; oder es müssen ohne diese Angabe 2 Konstruktionen vorgenommen werden.

Bey Figur 29, soll der letzte Fall eintreten, die eine Hälfte bildet also ein Δ, und die andere ein 5Eck. —

Um dieses zu lösen, wird die Hälfte von abdf genommen, und dieselbe in ein dem Δ qdm ähnliches verwandelt, seine gleichliegenden Seiten auf df und db gelegt, und so verfahren, als ob die ganze Figur ein Δ wäre, deren Seite af die Grundlinie ist, mit der die Theilungslinie gleichlaufend gezogen werden muß. —

Mit einer ungleichlaufenden Theilungslinie, sind die Aufgaben auch hier wieder leicht. —

Ein Trapez mit lauter innern Winkeln, kann ganz gleich dem Paralleltrapez behandelt werden, und bietet wenig neues dar. —

Figur 30: ist ein Trapez mit einem innern Ecken, es soll mit einer Linie, die fb gleichlaufend ist, in 2 gleiche Theile getheilt werden. Kommt die Theilungslinie über d hinauf, wie sm, so kann die Aufgabe ganz gleich wie beym Δ gelöst werden. Ich nehme daher an, sie falle unter d wie ql; ich mache Figur 31, es wird cb und as gezogen, und mn gleichlaufend cb gemacht, hernach die Hälfte vom Δ adc oder adb genommen, und aus einer dieser Hälfte ein dem Δ ctm, oder bqn ähnliches Δ gemacht, (es wird das 1te genommen,) dasselbe so auf cmt getragen, daß der gleichliegende Winkel dieses Δ auf den Winkel acd fällt: ich nehme an, dieses Δ soll gerade auf cmt fallen; wenn das Δ cmt die Hälfte des Δ acd ist, so ist Δ nbq auch die Hälfte von bda; — denn das Δ acs verhält sich zum Δ asb, wie das Δ cds zum Δ sbd, werden die letzten Δ von den 1ten 2 weggethan, so bleibt noch ein ähnliches geometrisches Verhältniß, welches das Δ acd zu adb ist, wird von mo und on die Seite to und oq weggethan, so bleibt noch mt und qo, welches die Grundlinien der Δ mtc und qbn sind, folglich stehen diese Δ in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse, wie die Δ acd und adb; denn wie es im Anfange geschah, so können auch jetzt die 4 Δ amo, aon, dto und doq in ein geometrisches Verhältniß gesetzt, und die letzten 2 von den ersten 2 abgezogen werden, wodurch man die 2 Vierecke amtd und adqn erhält, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 2 Δ cmt und bqn ꝛc., das Δ cmt ist die Hälfte von acd, folglich ist qnb auch die Hälfte von adb, und also das Viereck mit einem innern Winkel im 2ten Fall in 2 gleiche Theile getheilt. —

Würde man diese Flächen in ihren Verbindungen noch genauer in's Auge fassen, so ließen sich einige nicht unwichtige Sätze aus ihr ableiten, und abstrahiren. — Ein Wink darüber mag nicht ganz überflüßig seyn. —

Das Δ acd und adb können als 2 Δ in's Auge gefaßt werden, die ein 4Eck bilden, wovon eine Ecklinie außer dasselbe fällt; wird eine Linie durch beyde Δ gleichlaufend mit der Ecklinie gezogen, so stehen die 3Ecke und Trapetze ꝛc. in ein und demselben geometrischen Verhältnisse; ferner verhalten sich die 2 Theile des 1ten Δ eben so zu einander, wie die gleichliegenden Theile des einen, zu den gleichliegenden Theilen des andern. —

Nach den nämlichen Gesetzen, kann ein 4Eck mit einem innern Winkel in 3, 4 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden, kommen die 2, 3 ꝛc. Theilungslinien unter den Punkt d, so verfährt man wie bey Figur 31, im andern Fall wie bey Figur 30, fällt die eine Theilungslinie unter, und die andere über d, so ist es einfacher, wenn man wie bey Figur 31 verfährt; ist es aber unbestimmt, ob sie über, oder unter d fallen, so thut man wohl, die Theilung gleich im Anfang durch Figur 31 vorzunehmen.

Ein regelmäßiges 5Eck, soll mit 1, 2 ꝛc. Linien, welche gleichlaufend mit einer Seite desselben sind, in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden. —

Um dasselbe mit einer gleichlaufenden Linie in 2 gleiche Theile zu theilen, verfährt man wie bey Figur 27, wo das Paralleltrapez in 2 gleiche Theile getheilt wurde. Soll es in 4 gleiche Theile getheilt werden, so wird Figur 32 gemacht, der 4tel desselben genommen, fc gezogen, und den 4tel in ein dem Δ fcd ähnliches Δ verwandelt ꝛc. — eine weitere Ausführung ist hierüber für jeden, der das vorhergehende verstanden hat, unnöthig. Warum das 4tel des 5Ecks ein Δ bildet, ist eine nicht ganz unwichtige Frage, gehört aber

in

in die Gleichheitslehre, und ist zum Theil auch dort gelöst worden.

Unregelmäßige 5Ecke, die lauter innere Winkel haben, können eben so in 2, 3, 4 rc. gleiche Theile getheilt werden. —

Mit 5Ecken, die 1, oder 2 innere Ecken haben, geht es wie beym 4Eck, welches einen innern Ecken hat. — Desgleichen findet mit 6Ecken, 7Ecken rc. regel- und unregelmäßigen, solche die 1, oder 2, oder 3 rc. innere Ecken haben, statt. —

Einige ähnliche Aufgaben können und sollen auch mit kräftigern Schülern gemacht werden. —

Ein 4, 5, 6Eck rc. in 2, 3 rc. gleiche Theile allgemein zu theilen, ist nicht sehr wichtig, wenn diesen Theilen keine andere Eigenschaften mehr beygelegt werden; ich höre deswegen damit auf, und schreite noch zu Aufgaben, deren Theile durch das geometrische Verhältniß, statt durch die Gleichheit bestimmt ist. —

Ein Δ soll mit einer Linie, welche mit einer Seite gleichlaufend ist, so in 2 Theile getheilt werden, daß sich diese Theile so zu einander verhalten, wie 2 gegebene Linien; seht für die Linien A und B an Figur 33.

Auflösung.

Das Δ a b c ist die zu theilende Figur. Der Theil, welcher ein Δ bildet, soll sich zum andern verhalten, welcher das 4Eck bildet, wie die Linie A zu der Linie B; das Δ a b c wird in ein ihm gleiches Δ umgewandelt, welches aber eine Seite hat, die gleich ist A + B; seht A und B an Figur 34. Es wird s n gezogen, und das Δ s n m in ein dem Δ a b c ähnliches umgewandelt, und hernach dieser Theil wieder eben so auf das theilende Δ gelegt, wie es bey der Theilung des Δ in gleiche Theile geschah. —

Eben so wird verfahren, wenn das Δ so in 2 Theile getheilt werden muß, daß sich das Δ zum 4Eck verhält wie B zu A.

Man hat 3 Linien, welche in einem geometrischen Verhältnisse stehen; (folglich verhält sich die 1te zur 2ten, wie die 2te zur 3ten) und nun soll ein Δ auch so in 3 Theile getheilt werden, daß sich der 1te Theil eben so zum 2ten verhält rc., wie bey den Linien rc., der 1te Theil oder das 1te Glied soll ein Δ bilden, das 2te das anliegende Paralleltrapez, und das 3te das 2te Paralleltrapez; daß dieses auch umgekehrt, und unter allen Verwechslungen statt finde, ist klar. —

Es folgt eine Auflösung des 1ten Falls.

Es werden die 3 gegebenen Linien, wie bey letzter Auflösung die 2, an einander gelegt, das gegebene Δ in ein anderes Δ verwandelt, welches eine Seite hat, die den gegebenen 3 Linien gleich ist, von den 2 Theilungspunkten der 3 an einander gelegten

Linien werden wie oben 2 Theilungslinien gezogen, und endlich wird das 1te Δ in ein dem gegebenen Δ ähnliches verwandelt; die weitere Ausführung ist in letzter Aufgabe deutlich gezeigt; — der 1te und 2te Theil werden hernach noch zusammengenommen, und wieder gleich verfahren, wodurch man den 2ten und 3ten Theil, oder das 2te und 3te Glied des geometrischen Verhältnisses erhält. —

Auf gleiche Weise wird verfahren, wenn 4 Linien, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, gegeben sind, und ein 3Eck nach diesen 4 Linien eingetheilt werden soll.

Bringt man bey diesen Theilen noch einige Verwechslungen der Glieder an, so können einige nicht ganz unwichtige Aufgaben gemacht werden.

Eben so kann jedes 4, 5, 6, 7Eck ꝛc. eingetheilt werden. —

Solche Aufgaben müssen mit den Schülern so lange vorgenommen werden, bis sie keine Schwierigkeiten mehr antreffen. — Ist wieder Sache des Lehrers. —

Folglich können alle Figuren so in geometrische Verhältnisse eingetheilt werden, wie die Linien. 36. Satz.

Wir theilten eine Linie so in 2 Theile, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie der 2te Theil zur Linie selber; diese Aufgabe kam hier nicht vor, und doch war sie in dem letzt ausgesprochenen Satze enthalten. —

Statt Figuren so zu theilen, können nach diesen Gesetzen getrennte Figuren gesucht werden; der obige Tipus ist ganz anwendbar. Einige Aufgaben sind hierüber für den Schüler noch nöthig, welche aber auch jeder Lehrer im Stande seyn soll zu geben.

Es soll ein 3Eck, 4Eck ꝛc. so in 2 Theile getheilt werden, daß sich dieselben eben so zu einander verhalten, wie 2 gegebene Quadrate.

Auflösung.

Es werden beyde Quadrate in ein oder 2 Rechtecke, oder in ein oder 2 Δ, die gleiche Höhen haben, verwandelt; — und dann verhält sich das eine Rechteck, oder Δ zum andern, wie die Grundlinie des einen zur Grundlinie des andern; folglich verhalten sich die Grundlinien dieser Figuren, wie die Quadrate selber; also kann die fernere Auflösung dieser Aufgabe eben so gemacht werden, wie die der letzten Aufgabe.

Die wirkliche Ausführung ein paar ähnlicher Aufgaben ist für Schüler nothwendig, besonders in unregelmäßigen Figuren. —

Es sind 3 geschlossene Figuren gegeben, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, nun soll ein Δ, 4Eck ꝛc. so in 3 Theile getheilt werden, daß diese 3 Theile in einem gleichen geometrischen Verhältnisse der 3 Figuren stehen. —

Man verwandelt wieder alle 3 Figuren in Δ, oder Parallelogramme, die gleiche Höhe haben, und verfährt hernach wie bey 3 Linien, nach denen ein Δ in ein geometrisches Verhältniß eingetheilt wurde.

Desgleichen findet statt, wenn ein 3Eck, 4Eck rc. nach 4 Figuren eingetheilt werden soll.

Jede weitere Ausführung soll hierüber unnöthig seyn, wenn das aufgestellte gehörig geübt ist.

Also kann jede Figur nach 2, 3 und 4 Flächen, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen, eingetheilt werden. 37. Satz.

So wie eine geschlossene Figur, nach gegebenen Flächen, oder Linien eingetheilt wurde, so können auch hier wieder Flächen rc. gesucht werden, die getrennt von einander sind; als Beleg folgen ein paar Aufgaben auf die man weniger fällt.

Es sind 2 Quadrate gegeben, es sollen 2 gleichseitige Δ gesucht werden, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die Quadrate.

Es sollen zu den 2 gegebenen Quadraten, zwey regelmäßige 5Ecke, oder ein regelmäßiges 5Eck und ein gleichschenklich rechwinkliches Δ gesucht werden, die in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die 2 Quadrate rc. —

Bisher sind gegebene Figuren getheilt worden, und zu gegebenen Linien oder Figuren andere gesucht worden, die in einem gleichen geometrischen Verhältnisse stehen, wie die gegebenen Linien ꝛc. — desgleichen kann auch vorgenommen werden, wenn das geometrische Verhältniß durch die Zahl ausgedrückt ist; worüber ein paar Aufgaben folgen. —

Ein 3Eck, 4Eck ꝛc. soll so in 2 Theile getheilt werden, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie 1 zu 2, oder wie 2 zu 3 ꝛc. —

Die Auflösung ähnlicher Aufgaben, fällt mit denen, wovon das △ ꝛc. in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt wurde, in eins zusammen; die Auflösung ist deswegen auch unnöthig; für den schwächern Lehrer folgt dessenungeachtet noch eine.

Auflösung der ersten Frage.

Das △ muß so getheilt werden, daß der eine Theil desselben einen Theil bekommt, wie der andere deren 2, folglich wird das 1te Glied $\frac{1}{3}$ und das 2te $\frac{2}{3}$ des ganzen, oder zu theilenden △, denn 1 und 2 gleiche Theile machen 3 solcher Theile; — wie ein 3Eck in 3 gleiche Theile getheilt wird, hätten wir schon. —

Ist das Verhältniß wie 2 zu 3, so muß die zu theilende Figur in 5 gleiche Theile getheilt werden, denn 2 und 3 gleiche Theile machen 5; die fernere Auflösung hätten wir schon. —

In zu hohen Zahlen muß aber nicht gestiegen werden, weil es einerseits unnöthig, und andererseits so aufgelöst, zu viel Zeit erfordert; es folgen ein paar Winke wie dieses abgekürzt werden kann. — Es ist angegeben, man soll eine Fläche so in 2 Theile theilen daß sich der eine Theil zum andern verhält wie 7 zu 8.

Es werden zuerst 2 Linien gemacht, wovon die eine 7 Theile hat wie die andere deren 8 hat; — folglich muß die Fläche jetzt nur noch so in 2 Theile getheilt werden, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie die 1te Linie zur 2ten. —

Aus diesem folgt also wieder allgemein; daß jede Figur in 2, 3 rc. Theile getheilt werden kann, die in jedem angegebenen Zahlenverhältnisse stehen; folglich geometrische und nicht geometrische. 38 Satz.

§. 6.

Von der Anwendung der Zahl, auf die geometrischen Verhältnisse der Seiten, Winkel und Flächen im Allgemeinen.

Um alle geometrischen Verhältnisse, die in den meisten Figuren vorkommen, zu lösen, erfordert es die Erhebung des Quadrats, und die Ausziehung seiner Wurzel, welches ich in diesem Heft voraussetze. Turks Briefe aus Münchenbuchsee, können für einmal bey denjenigen, die es nach der Methode behandeln wollen, als Leitfaden gebraucht werden; mit der

Zeit wird auch dieser Theil mehr ausgearbeitet vollendet folgen.

Es wird also hier die Erhebung und Ausziehung der Quadratwurzel vorausgesetzt, und zwar nicht nur in ganzen 10tel, 100tel ꝛc. — sondern in jedem beliebigen Decimal- und nicht Decimal-Bruche.

Die geometrischen Verhältnisse der Winkel allein ohne Seiten, war unwichtig, und wird es folglich auch in der Anwendung der Zahl bleiben.

Wenn man die Zahl auf das geometrische Verhältniß der Seiten und Winkel vereiniget anwendet, so kommt man meistens in irrazionale Zahlenverhältnisse, während man bey der Anwendung derselben auf die geometrischen Verhältnisse der Seiten und Flächen auch razionale bekommt; besonders im 3Eck, 4Eck und 6Eck; ich fange deswegen auch bey diesen Figuren an.

§. 6.

Von der Anwendung der Zahl, auf die geometrischen Verhältnisse der Seiten und Flächen, im 3Eck, 4Eck und 6Eck.

Das Quadrat ist eine der einfachsten und leichtesten Formen; — weil aber alles bis auf diese Stufe hinlänglich entwickelt ist, so wird es unnöthig, bey der ersten und leichtesten Form anzufangen. Ich nehme daher die mathematisch einfachste Form: das Δ.

Die Gründe, warum das Quadrat leichter ist als das Δ, sind folgende:

Das Quadrat ist eine eigentliche Anschauungsform, in der bey sehr vielen Fällen beynahe gar keine Schlüsse erfordert werden, während das Δ, 5Eck ꝛc. nur durch Schlüsse, auf Schlüsse gelöst werden kann ꝛc.

Eine Seite des gleichseitigen Δ hat 10 Zoll, oder 10 gleiche Theile; es fragt sich, wie viel gleichseitige Δ das Ganze habe, deren eins auf 1 Zoll, oder einem solchen Theil liegt?

Antwort: 100.

Auflösung.

An der Grundlinie eines solchen Δ liegen 10 gleichseitige Δ, zwischen diesen 10 Δ liegen so 9 andere, daß sie mit den 1ten ein Paralleltrapez bilden; seht an Figur 35 d c b f, die Seite f d hat 9 solcher Theile, oder Zoll; folglich können auf f d, 9 und 8 solcher Δ gemacht werden, und so weiters. Auf n m liegt ein solches Δ, auf b c 19, zusammen 20 Δ, deren jede Seite 1 Zoll hat; auf f d sind 17, und auf s t 3; folglich ebenfalls 20 ꝛc.; — a e hat 10 Zoll, auf 2 Zoll bey der Grundlinie b c, und der Spitze a angefangen, giebt a d immer 20 Δ, wovon eine jede Seite einen Zoll hat, 10 sind 5mal 2; folglich ist der Flächeninhalt 5 mal 20 oder 100 Δ, deren jede Seite desselben 1 Zoll hat; also bedarf man nur eine Seite des Δ mit sich selbst zu multiplizieren, um den Flächeninhalt in Δ zu erhalten, oder eine Zahl verdoppeln, und sie mit der Hälfte der andern multipli- zieren; —

Die gleiche Auflösung kann auch über andere Δ gemacht werden; es folgt noch eine:

Eine Seite eines ungleichseitigen Δ beträgt 10 Zoll; es fragt sich, wie viel diesem Δ ähnliche das Ganze enthält, deren gleichliegende Seiten auch immer 1 Zoll betragen?

(Weil dieses Δ ungleichseitig ist, so beträgt jede der 2 andern unbenannten Seiten der ähnlichen Δ, auf 1 Zoll der benannten Seite immer mehr, oder weniger als 1 Zoll; also darf in einem solchen Fall auch nicht gefragt werden: wie viel gleichseitige Δ das Ganze habe, oder wie viele Δ es enthalte, wovon jede Seite einen Zoll hat?)

Um den Inhalt im ungleichseitigen Δ in ihm ähnlichen zu erhalten, muß 11 mit sich multiplizirt, oder 11 verdoppelt und mit der Hälfte von 11 multiplizirt werden. Der Inhalt von mehrern Δ kann nach der nämlichen Norm gefunden werden.

Von dem Flächeninhalt eines Δ eine seiner Seiten zu finden, führt in die irrazionalen Verhältnisse ein, und wird deswegen für jetzt übergangen. —

Ich schreite zum Δ über, in dem eine, 2 und mehrere Theilungslinien gezogen werden, und berechne aus dem bekannten Verhältnisse der Seiten einen Flächeninhalt. —

Ein Δ, in welchem eine gleichlaufende Linie mit einer Seite desselben durch beliebige Theile gezogen ist, wird in zwey Theile getheilt, welche ihrem Flächeninhalt nach bestimmt werden müssen. Z. E. die Linie soll vom $\frac{1}{4}$ der Spitze des Δ an gerechnet gezogen seyn ꝛc. Es soll ferner noch bestimmt werden, in welchem Verhältnisse die Seiten des kleinen Δ zu denen des größern stehen; und endlich in welchem Verhältnisse die Abschnitte der Seiten stehen?

Schwierigkeiten sollen sich hiebey keine erheben; besonders wenn man den Satz kennt: Daß die gleichliegenden Seiten in 2 ähnlichen Δ in einem geometrischen Verhältnisse stehen; — ferner: Daß sich ähnliche Δ eben so zu einander verhalten, wie die gleichliegenden Seiten derselben ins Quadrat erhoben. Seht hiefür den 2ten und 19ten Satz dieses Buchs an.

Will man den Abschnitt, oder das Paralleltrapez berechnen, so kann man nur das kleinere Δ von dem größern, oder Ganzen abziehen. —

Werden in einem Δ 2, 3 ꝛc. Linien mit einer Seite gleichlaufend gezogen, so giebt es ganz die nämlichen Auflösungen und Fragen; deren weitere Ausführung ein jeder nach dem Bedürfniß seiner Schüler einrichten mag. —

Statt Linien durch Theile der Seiten eines Δ im allgemeinen zu ziehen, kann man die Theile durch

Zoll, oder Schuh ꝛc. benennen, und ausdrücken; durch welches sich etwa ähnliche Aufgaben ergeben:

Die Seite eines △ soll 20 Zoll haben. Es wird in 7 Zoll von der Spitze an gerechnet, eine Linie gleichlaufend mit einer Seite des △ gezogen; es fragt sich, durch wie viel Zoll der andern Seite sie gehe? Wie viel Zoll diese Theilungslinie bekomme? Wie viel Zoll Flächeninhalt in der △-Form jeder Theil erhalte? (Die Flächeninhalte sollen dem ganzen △ ähnliche △ seyn.)

Ist das △ gleichseitig, so geht die Auflösung ganz wie in vorhergehender Aufgabe. — In jedem andern Fall hat nur eine, oder 2 Seiten der geschlossenen Figuren eine reine Anzahl Zoll, alle andere Seiten gehen nicht rein auf; durch welches obige Aufgabe in diesem §. etwa in folgende umgewandelt werden muß. Wie viel Zoll Flächeninhalt in der △-Form, wird jeder Theil bekommen, wenn nur diejenige Seite der Figur Zoll, Schuh ꝛc. haben muß, bey der sie rein in Zollen ꝛc. angegeben ist; findet dieses in der Figur nur bey einer Seite statt, so muß dasselbe auch in den Theilen bey einer statt finden.

Eine weite Ausführung dieses Gesichtspunkts ist unnöthig und unwichtig: desgleichen die Theile, die bey 2 und mehrern Linien die mit einer Seite des △ gleichlaufend sind. —

Von dem Winkel eines △ wird an die Mitte der gegenüberstehenden Seite eine Linie gezogen; durch ⅔ dieser Theilungslinie, vom Scheitelpunkt an gerechnet, wird noch eine 2te Linie gezogen, die gleichlaulaufend mit einer Seite des Δ ist; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 4 entstehenden Theile zu einander, und zum Ganzen stehen?

Auflösung.

Figur 36, fh geht durch $\frac{1}{5}$ vom ac, ac durch die Mitte von db; also das Δ abc = adc; folglich Δ acb $= \frac{adbj}{2}$ ag $= \frac{ac}{5}$; also das Δ agh $= \frac{1}{25}$ des ihm ähnlichen Δ adc, oder $\frac{1}{50}$ vom Δ adb; das 4Eck hgcd $\frac{24}{25}$ vom Δ adc, oder $\frac{24}{50}$ von adb, desgleichen das Δ agf, und das 4Eck gfbc.

Figur 36, dc $= \frac{db}{3}$, und fh wie oben; es fragt sich, in welchem Verhältnisse dann diese 4 Theile zu einander stehen?

Auflösung.

Das Δ ahg ist $\frac{1}{25}$ von adc; adc ist $\frac{1}{3}$ von adb; also das Δ ahg $\frac{1}{75}$ vom ganzen Δ rc. — Die fernern Berechnungen gehen ganz wie bey der letzten Auflösung.

Ist dc gleich $\frac{2}{3}$ von db, so wird das Δ ahg, $\frac{1}{25}$ von $\frac{2}{3}$ des Ganzen; wenn $\frac{2}{3}$ 25 gleiche Theile haben, so hat $\frac{1}{3}$ $\frac{25}{2}$, oder $12\frac{1}{2}$, und das Ganze $37\frac{1}{2} = 75$; das Δ ahg hat $\frac{2}{2}$; folglich ist das Δ ahf $= \frac{2}{75}$ des

Ganzen. Das zur Lösung ähnlicher Aufgaben nöthige Zahlräsonnement wird vorausgesetzt, und darf es auch, wenn man sich in der Zahl eigen gemacht hat, was ich über dieselbe wirklich ausgeführt habe.

Von einem Winkel eines Δ, werden auf die gegenüberstehende Seite desselben, 2 Linien auf jede Anzahl Theile gezogen, und der Inhalt der dadurch entstehenden Δ berechnet, welches lauter leichte Aufgaben giebt; denn die Δ, welche dadurch entstehen, verhalten sich so, wie ihre Grundlinien; deswegen wird die weitere Ausführung davon auch übergangen. —

Es wird in einem Δ eine Linie gleichlaufend, und eine andere ungleichlaufend gezogen. Seht Figur 37, cb soll gleichlaufend df, und durch $\frac{1}{3}$ von ad der Spitze a an gerechnet gezogen seyn, und endlich wird noch bd gemacht; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese Theile zum Ganzen, und zu einander stehen?

Durch eine frühere Auflösung ist schon bestimmt worden: daß das Δ acb $\frac{1}{9}$ des ganzen ist, ab $= \frac{af}{3}$; folglich hat das Δ abd und afd, einerley Grundlinie ad, und die Höhe des 1ten, ist $\frac{1}{3}$ des 2ten; also das Δ adb $= \frac{adf}{3}$, $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, thut man vom Δ adb, das Δ acb weg, so hat man $\frac{1}{9}$ von $\frac{3}{9}$ weggethan, und folglich bleiben noch $\frac{2}{9}$ für das Δ cbd; das 4Eck cbfd enthält $\frac{8}{9}$; — nun hat aber das Δ cbd $\frac{2}{9}$ des Ganzen; folglich bleibt für das Δ bdf noch $\frac{6}{9}$ oder $\frac{2}{3}$ des nämlichen Ganzen.

Daß auch ähnliche Aufgaben auf die mannigfaltigste Art gelöst werden können, ist nicht mehr schwer einzusehen. Für den schwächern folgen noch ein paar Winke, um seinen Blick noch allseitiger zu entwickeln; welches man besonders bey allen Anwendungen des praktischen Lebens, und bey der Zahl, die auf die geometrischen Verhältnisse angewandt wird, bedarf.

Das Δ acb ist $\frac{1}{9}$ von adf, bf ist $\frac{2}{3}$ von af; folglich ist die Höhe des Δ bdf $\frac{2}{3}$ von der Höhe des Δ dfa, die Grundlinie df haben beyde Δ gemein; also ist das Δ dfb auch $\frac{2}{3}$ des Ganzen, das Δ acb ist $\frac{1}{9}$ rc.; zusammen machen beyde Δ $\frac{7}{9}$; folglich bleibt für das Δ cdb noch $\frac{2}{9}$. —

Würde statt db, cf gezogen, so gäbe es ganz die gleichen Verhältnisse; denn das Δ cbf und cbd bekämen einerley Grundlinie cb, und stünden zwischen 2 gleichlaufenden Linien cb und df rc. —

Statt vom $\frac{1}{3}$, kann man eb auch vom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ rc. ziehen; welches aber nur Zahlenveränderungen sind, die im Wesen nichts neues mehr darbieten. —

Die ungleichlaufende Linie wird an Figur 37 so gezogen, daß db nicht mehr in den Winkel cbf, sondern auf die Seite bf fällt, und zwar wieder auf jeden beliebigen Theil. Zum Beyspiel ds soll so gezogen werden, daß sf $= \frac{2\,af}{7}$ wird; es fragt sich, wie viel ein jeder der 3 Theile des Ganzen sey? (db soll weggedacht werden.)

Um dieses zu lösen, untersucht man, was das Δ dsf für ein Theil des Ganzen sey. Ferner wie viel acb betrage, zählt diese 2 Theile zusammen, und zieht sie von dem Inhalt des Ganzen ab, durch welches man das 4Eck bsd erhält.

Figur 38. fg soll durch $\frac{1}{4}$ von ac gleichlaufend cb, und sd durch die Mitte fg, gleichlaufend ab gezogen seyn, es fragt sich, was jeder von den 3 Theilen für ein Verhältniß zum Ganzen habe?

Auflösung.

Das Δ afg ist $\frac{2}{16}$ des Ganzen. Es wird die punktirte Linie fm gezogen, durch welche das Parallelogramm dg $=$ ms, das Δ fcm ähnlich dem Δacb wird, ferner die Seite fc $= \frac{3}{4}$ von ac: folglich das Δ fcm, $\frac{9}{16}$ von acb, $\frac{9}{16}$ und $\frac{1}{16} = \frac{10}{16}$ des Ganzen; folglich bleibt für das Parallelogramm fb noch $\frac{6}{16}$, und für das Parallelogramm sb $\frac{3}{16}$; also für fsdc $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ des Ganzen.

Auf gleiche Weise kann eine Linie ungleichlaufend gezogen werden, und zwar von fg auf cb, oder von fc auf gb. —

Figur

Figur 39. Weil die Auflösung ähnlicher Aufgaben eben so ist, wie die vorhergehenden, so folgt noch eine, in der nur eine ungleichlaufende gezogen wird. Z. E. $ad = \frac{3}{4}ab$, $af = \frac{ac}{2}$, durch welches df, folglich auch ungleichlaufend bc wird. Es wird ds gleichlaufend bc gezogen; folglich ist as auch $\frac{3}{4}$ von ac, das Δ ads also $\frac{9}{16}$ vom Δ abc, $as = \frac{3}{4}ac$, $af = \frac{ac}{2}$; folglich $fs = \frac{ac}{4}$. Die 2 Δ adf und fds haben gleiche Höhe, indem sie sich im Punkt d vereinigen; folglich verhalten sie sich so, wie ihre Grundlinien, die wie 1 zu 2 sind; also ist das Δ dfs die Hälfte von adf, zusammen 3 gleiche Theile, welche $\frac{9}{16}$ machen; also macht ein solcher Theil $\frac{3}{16}$, und 2 Theile oder das Δ $adf = \frac{6}{16}$, das 4Eck den Rest, oder $\frac{10}{16}$.

Wie die Linie ds gleichlaufend von d aus gezogen wurde, so hätte sie auch von f aus gezogen werden können, welches die Auflösung aber um nichts ändert.

Auch eine ungleichlaufende Linie, kann wieder auf jeden beliebigen Theil gezogen werden, worüber das ausgeführte Beyspiel spricht; das weitere darf daher dem Bedürfniß eines jeden Lehrers überlassen werden.

Sollte aber angegeben seyn, die Seite ad wäre gleich af, oder wäre doppelt so lang als af rc., —

so könnte man sie nicht mehr rein lösen, wenn die die Seite ab nicht gleich ac gegeben würde; folglich muß man das Verhältniß einer Seite des Δ, durch die andere zu bestimmen noch übergehen.

Werden von der Seite ab, auf ac 2 ungleichlaufende Linien gezogen, so verfährt man bey der Auflösung wie bey einer.

Es werden von 2 Winkeln eines Δ, an die gegenüberstehenden Seiten 2 Linien ꝛc. gezogen; seht Figur 40 in der: $fb = \frac{ab}{3}$, $cg = \frac{cb}{2}$ ist.

Auflösung.

Zuerst wird die Entfernung des Punkts d, von g, oder f aus bestimmt; — wozu fm gleichlaufend cb gemacht wird. Das Δ mdf ähnlich cdg, fa = $\frac{2}{3}$ von ab; folglich ist mf auch $\frac{2}{3}$ von gb, gb = gc; also verhält sich mf : cg ∷ 2 : 3, desgleichen findet bey den 2 gleichliegenden Seiten md und dg der ähnlichen Δ mfd und dgc statt; also md, 2 Theile, wie dg deren 3 hat, zusammen 5 gleiche Theile, $mg = \frac{ga}{3}$; folglich hat ga deren 15 Theile wie dg 3 ꝛc.; 3 von 15 weggethan bleiben noch 12; dg : da ∷ 3 : 12, desgleichen findet mit den 2 Δ dcg und adc statt, und man erhält für das Δ dgc $\frac{3}{15}$ von agc, agc ist die Hälfte von acb; das Δ cdg ist $\frac{3}{30}$, oder $\frac{1}{10}$ von acb; acd = $\frac{12}{30}$ von acb; das

Δ acf $= \frac{2}{3}$ von acb, $\frac{12}{30}$ von $\frac{2}{3}$, oder $\frac{20}{30}$ abgezogen bleiben noch $\frac{8}{30}$; also das Δ adf $= \frac{8}{30}$ von acb; werden diese 3 Theile zusammengezählt und alle 3 von dem Ganzen abgezogen, so bleibt noch der Rest, oder dfbg. —

Alle Aufgaben, bey denen von 2 Winkeln aus auf gewisse Theile der gegenüberstehenden Seiten Linien gezogen sind, können auf diese Art gelöst werden. Um aber die Schüler in ähnlichen Aufgaben hinlänglich zu üben, erfordert es zu Zeiten mehr als ein Beyspiel, welches aber ebenfalls wieder Sache des Lehrers ist.

In vorliegender Figur ist von f aus die gleichlaufende Linie gezogen worden, desgleichen hätte auch von g aus geschehen können. —

In Figur 41 sollen auf folgende Art ungleichlaufende Linien gezogen werden: $fc = \frac{ac}{4}$, $ah = \frac{ab}{2}$, $ed = \frac{cb}{3}$.

Um ähnliche Aufgaben zu lösen, untersucht man, in welcher Entfernung der Durchschnittspunkt g von h und von f ꝛc. seye; wozu man fn und hm gleichlaufend cb macht; die 2 Δ mhg und gnf sind ähnlich; folglich stehen ihre gleichliegenden Seiten in einem geometrischen Verhältnisse, $mh = \frac{db}{2}$; weil das Δ ahm ähnlich ꝛc. adb ist; also mh $\frac{1}{2}$ von db die $\frac{2}{3}$

von cb ist, folglich $hm = \frac{1}{3}$ von cb; fn ist aus gleichen Gründen $\frac{3}{4}$ von cd, oder $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{3}$ cb, das $\frac{3}{12}$ ist; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; folglich verhält sich fn zu mh wie 3 zu 4; desgleichen findet bey ng und gm statt; wodurch ng 3 Theile bekommt, wie gm deren 4 hat, zusammen 7 gleiche Theile, am und nd kennt man schon durch die 2 ähnlichen Δ ahm und afn, aus dem sich folgendes ergiebt:

$am = \frac{ad}{2}$, $nd = \frac{ad}{4}$, die Halben und 4tel vereinigen sich in dem 4tel; $\frac{1}{2} = 2$, $\frac{1}{4} = 1$, zusammen $\frac{3}{4}$; folglich bleibt für mn noch $\frac{1}{4}$, hat $\frac{1}{4}$ 7 gleiche Theile, so bekommt das Ganze deren 28, also $gn = \frac{3}{28}$ von ad, $mg = \frac{4}{28}$ von ad, $gm + ma = \frac{18}{28}$ von ad, $gn + nd, = \frac{10}{28}$ der nämlichen Linie ad. $fg : gh \therefore fn : mh$, oder wie 3 zu 4, folglich fg 3 Theile wie gh deren 4 hat, zusammen ebenfalls 7 gleiche Theile. —

Um den Inhalt dieser Theile zu finden, hätte man nicht alle Bestimmungen dieser Seiten nöthig gehabt; ich that es nur, um die Auflösung lebendiger und allgemeiner zu geben, welches für die Zukunft sehr oft nöthig wird.

Hier folgt noch eine Auflösung des Inhalts, in der nur fg und gh bestimmt wird; dabey aber das oben gefundene Verhältniß 3 : 4 als bekannt gegeben ist: Zuerst wird es, dann gleichlaufend fh gemacht, wodurch das Δ afh $= \frac{9}{16}$ vom Δ acs wird; af : as

$::$ ah : as, oder wie 3 : 4, ah ist die Hälfte von ab, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; also bekommt as $\frac{4}{6}$, und für sb bleiben noch $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; folglich ist das Δ csb $\frac{1}{3}$ des Ganzen acb, und das Δ csa $= \frac{2}{3}$ von acb; denn diese beyden Δ haben gleiche Höhe ꝛc.; — folglich ist das Δ afh $\frac{9}{16}$ von $\frac{2}{3}$, und afg $\frac{3}{7}$ von $\frac{9}{16}$ der $\frac{2}{3}$, in dem die 2 Δ afg und agh gleiche Höhe ag haben, und sich die Seite fg : gh $::$ 3 : 4 ꝛc. Die nöthige Berechnung soll ein jeder, der in der Zahl für diese Stufe vorgerückt ist, machen können. Aus dieser einzigen ausgeführten Auflösung mag ein jeder schon einsehen, wie alle ähnliche Aufgaben gelöst werden. Noch folgt eine der schwersten Aufgaben, die man mit 3 Linien geben kann; seht Figur 42, in der: $fd = \frac{fc}{3}$, $ab = \frac{ac}{2}$ und $ag = \frac{af}{4}$ ist.

Auflösung.

Zuerst werden die Verhältnisse gesucht, in denen gh, hi und ic ꝛc. stehen; auch kann nur einer von den 7 Theilen, in die das Δ getheilt ist, zuerst berechnet werden; eins folgender 3 Δ ist am leichtesten: agh, oder hic, oder hfd. Ich wähle das 1te, und ziehe gs gleichlaufend fc; das Δ gsh ist ähnlich hdc; folglich verhält sich gs : dc $::$ sh : hd; $gs = \frac{fd}{4}$ oder $\frac{fc}{12}$, oder $\frac{dc}{8}$; also $sh = \frac{hd}{8}$, hd + hs macht mit einander 9 gleiche Theile, ds : db ∴ 3 : 4; ds hat 9 gleiche Theile; folglich hat die ganze Linie da deren 12; ah = $\frac{4}{12}$ von ad, hd = $\frac{8}{12}$ ad ꝛc.

Es wird die Hülfslinie hf gezogen, das Δ agh und ghf haben gleiche Höhe, indem sich beyde im Punkt h vereinigen; folglich verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien, die wie 1 : 3 sind, zusammen haben beyde Δ 4 gleiche Theile, das Δ fha und afc haben gleiche Grundlinie af, und die Höhen derselben verhalten sich wie 1 : 8 + 1, oder 9; denn hc hat 8 Theile, wie hg 1, also ist das Δ ahf $\frac{1}{9}$ von afc; gha ist $\frac{1}{4}$ vom 9tel oder $\frac{1}{36}$ des Ganzen; das Δ afd ist $\frac{1}{4}$ des Δ afc; folglich bleibt für das 4Eck ghdf noch $\frac{8}{36}$ des Δ afc; das Δ gcf ist $\frac{3}{4}$ des Ganzen, oder $\frac{27}{36}$; $\frac{8}{36}$ oder das 4Eck ghdf vom Δ gcf abgezogen bleibt noch $\frac{19}{36}$, oder das Δ dch. Auf gleiche Weise kann nur noch etwa der Inhalt des Δ fhd gesucht werden, durch welches sich dann der Inhalt jedes andern Theils ohne die geringste Schwierigkeit finden läßt; denn man bedarf nur das Δ fkd vom 4Eck ghdf abzuziehen, aus dem sich auf der Stelle der Inhalt ghkf ergiebt; die Bestimmung des Δ gif ist leicht, indem man die Grundlinie gf, und das Verhältniß der Höhe gi zu ic ganz auf die aufgestellte Weise finden kann; wird endlich das 4Eck ghkf vom Δ gif abgezogen, so bleibt das Δ hik, das Δ hcd ist bekannt, oder kann wenigstens ohne Mühe gefunden werden; thut man das Δ hik davon weg, so bleibt noch icdk ꝛc.

Eine noch eben so schwere Aufgabe ist beym Δ folgende: cg soll so gezogen seyn, daß $gf = \frac{fa}{4}$ wird; es fragt sich, ob cg nicht durch den Durchschnittspunkt k gehe? —

Diese Aufgabe kann am leichtesten gelöst werden, wenn man annimmt, sie würde durch den Punkt k gehen. —

Nicht unwichtiger, doch aber nur das umgekehrte, ist kommende Frage: Auf welchen Theil von af muß cg gezogen werden, wenn sie durch den Punkt k gehen soll?

Werden in einem 3Eck 4 und mehrere Linien gleich- und ungleichlaufend gezogen, so können alle Auflösungen dieser Aufgabe auf die gemachten zurückgeführt werden.

So wie von den Seiten aus der Inhalt bestimmt wurde, so können auch von dem Inhalt aus die Seiten bestimmt und berechnet werden; welches aber leicht in irrazionale Zahlenverhältnisse führt, die ich jetzt noch vermeide. — Ich schreite deswegen zum Quadrat, und bestimme auch nur wieder den Inhalt durch das angegebene Verhältniß der Seiten. —

Quadrate verhalten sich eben so zu einander, wie ähnliche Δ, deswegen findet bey ihnen auch alles statt, was bey den Δ gesagt wurde. —

Eine Seite eines Quadrats, einer Raute rc. soll 10 Zoll haben; es fragt sich, wie viel Quadratzoll die 1te Figur habe; und wie viel ihr ähnliche Rauten in Zollen die 2te Figur habe? — Mit diesen Bedingungen kann der Inhalt der Rechtecke, der schiefwinklichen Parallelogramme, Trapeze rc. gesucht werden.

Von einem gegebenen Inhalt, dürfen bey ähnlichen Figuren die Seiten noch nicht berechnet werden.

Ich ziehe daher im Quadrate rc. wieder wie im Δ Linien. —

Werden in einem Quadrat nur gleichlaufende Linien mit 2 Seiten desselben gezogen; so giebt es keine schwierigen Fragen mehr, desgleichen wenn eine gleichlaufende und eine ungleichlaufende gemacht wird; werden aber 2 ungleichlaufende gezogen, so können schon etwas schwerere Fragen vorkommen. Z. E.

Figur 43. ca soll ein Quadrat seyn, $fa = \frac{da}{2}$, $sb = \frac{ab}{4}$; es fragt sich, wie viel ein jeder der 4 Theile des Ganzen betrage?

Auflösung.

Es wird sm gleichlaufend da gezogen, durch welches das Δ gsm ähnlich agf wird, ferner ist das

Δ asm ähnlich acb; also die Seite sm $\frac{3}{4}$ von cb oder da, fa $= \frac{da}{2}$; folglich verhält sich sm : fa :: 3 : 2, desgleichen findet zwischen sg und gf statt, zusammen haben diese beyden Seiten also 5 gleiche Theile; folglich das Δ fag; $\frac{2}{5}$ vom Δ fas; denn sie haben gleiche Höhe ag ꝛc.: — das Δ fas hat zur Grundlinie die Hälfte einer Seite des Quadrats, oder fa, und zur Höhe $\frac{3}{4}$ desselben, oder as; folglich die Hälfte von $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{8}$; nun ist aber die ganze Figur kein Δ, sondern ein Quadrat; also hat es 2 mal so viel Theile oder 16; folglich ist das Δ fas $\frac{3}{16}$ des Quadrats. — Der letzte Schluß wird noch auf eine andere Art gemacht:

Das Δ fas ist $\frac{3}{4}$ des Δ fba.. und fba ist die Hälfte von $\frac{3}{4}$ des Quadrats ꝛc.; — Δ fga $= \frac{2}{5}$ von $\frac{3}{16}$, oder vom Δ fas, ags $= \frac{3}{5}$ von $\frac{3}{16}$; das Δ acb die Hälfte des Quadrats, um gsbc zu erhalten, muß nur ags von der Hälfte abgezogen werden; desgleichen muß mit dem Δ acd und afg vorgenommen werden. —

Sollten bey einer ähnlichen Figur, die 2 ungleichlaufenden Linien nur in die Winkel oder auf die Seiten derselben gezogen werden, so können die gleichen Auflösungen gemacht werden.

Ich will dieses nicht weit ausführen; es folgt nur eine der schwersten Aufgaben im Allgemeinen:

Figur 44, $ah = \frac{gf}{3}$, $fg = \frac{fd}{2}$, und $gd = \frac{db}{4}$; es fragt sich, was oben?

Auflösung.

Vor allem aus werden ein paar Δ berechnet. Z. E. ahi und flg, hierzu wird hm gleichlaufend ab gemacht; das Δ him ist ähnlich aib, hm $\frac{1}{3}$ von fg, und fg die Hälfte von fd, also hm $\frac{1}{6}$ von fd, oder ab; hm : ab ∷ hi : ib, oder wie 1 zu 6; folglich die Seite hb, 7 gleiche Theile, wie hi deren einen hat; das Δ ahi $\frac{1}{7}$ von ahb, und aib $\frac{6}{7}$ des nämlichen Δ, welches zugleich auch $\frac{1}{6}$ des Quadrats ist; denn beyde Δ haben mit dem Ganzen ahb, gleiche Höhe ai, in dem sich alle 3 Δ in a vereinigen; eben so wird mit dem 3Eck flg verfahren; sind einmal diese Theile zum Ganzen bestimmt, so lassen sich die andern ohne Mühe durch das Abziehen und Hinzusetzen finden. —

Werden die 3 Linien so gezogen, daß sie in der Mitte ein Δ bilden, so können die Theile wieder auf eine analoge Art berechnet werden; deren weitere Ausführung auch bey gewandtern Schülern nicht ganz entbehrlich ist; in dem es eine so allseitige Kombinationskraft erfordert, die auch bey kräftigern nicht immer gefunden wird. —

Die Ausführung von 4 und mehreren Linien darf dem Bedürfnisse eines jeden überlassen werden;

es folgen noch ein paar Bemerkungen über das Quadrat rc.

So wie im Quadrat Linien gezogen worden sind, so können auch die Seiten desselben verlängert, die Verlängerung durch die Zahl angegeben, und wieder wie vorhin Theilungslinien gezogen werden. Z. E. Figur 45 ist ein Quadrat, deren Seite bc = ba ist; ferner sd = sf; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese Theile zum Quadrat stehen?

Wird df bey f, wieder wie ab bey b verlängert, und der Verlängerung ein bestimmtes Maaß durch fd rc. beygelegt, so können ganz die gleichen Fragen gemacht werden.

Fälle können keine eintreten, die auf diesem Wege unmöglich zu lösen sind, wenn man keine andern Bestimmungen hineinbringt, als die Seiten durch Zahlenverhältnisse ausgedrückt; worüber das Δ Aufklärung giebt. —

In den schiefwinklichen Parallelogrammen, können nach den nämlichen Gesetzen Linien gezogen, und der Inhalt der dadurch entstehenden Theile zu einander, und zum Ganzen bestimmt werden; die weitere Ausführung ist dem Bedürfniß eines jeden überlassen. —

Das unregelmäßige 4Eck rc. wird für einmal übergangen, wiewohl es einige Fälle gäbe, die leicht zu lösen sind, und noch nicht in die irrazionalen Zahlenreihen einführen, worüber als Beleg nur eine Aufgabe folgt:

Figur 46 soll ein Paralleltrapez seyn, wovon ab ⅔ von dc ist; es werden die 2 Ecklinien ac und bd gezogen, und das Verhältniß der 4 entstandenen Theile zu einander, und zum Ganzen berechnet.

Auflösung.

Es werden die 2 Seiten da und cb bis zu ihrer Vereinigung verlängert, wodurch ein Δ entsteht, in dem 3 Linien ab, ac und bd gezogen sind, ab : dc ∷ sb : sc 2c. die weitern Bestimmungen gehen wieder eben so wie beym Δ.

Noch folgen ein paar Verbindungen des Δ und 4Ecks, die aber sehr sorgfältig gewählt werden müssen, wenn man keine irrazionalen Verhältnisse erhalten soll. Als Beleg des letztern folgt eine Aufgabe:

Eine Seite des gleichseitigen Δ hat 10 Zoll, oder 10 gleiche Theile, und eine solche Seite ist gleich einer Seite des Quadrats; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Δ, und wie viel das Quadrat habe? Oder wie viel Zoll wird das Δ in gleichseitigen Δ Formen, und das Quadrat in Quadratzollen haben?

Daß die 1te Aufgabe nicht razional gelöst werden kann, ergiebt sich aus der irrazionalen Höhe des gleichseitigen Δ zur Grundlinie, oder zu einer Seite desselben. —

Der Inhalt des gleichseitigen Δ enthält 100 Zoll in der gleichseitigen Δ-Form, welches beym Δ schon aus einander gesetzt wurde. —

Man giebt ein Δ, und ein Parallelogramm, die eine gleiche Grundlinie von 20 Zoll haben, die Höhe des Δ ist 5, und die des Parallelogramms $6\frac{1}{2}$ Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Δ, und wie viel das Parallelogramm habe? (Unter Höhe werden die rechtwinklichen Linien verstanden, welche man von von der Grundlinie an den gegenüberstehenden Winkel des Δ rc., und an die gegenüberstehende Seite des Parallelogramms zieht.)

Auflösung.

Um den Inhalt eines Parallelogramms in Quadratzollen zu erhalten, muß man die Grundlinie mit der Höhe multipliziren; desgleichen mit dem 3Eck, nur muß vom letzt erhaltenen Produkt noch die Hälfte genommen werden. Die Gründe davon sind theils in diesem §. aus einander gesetzt, und theils beruhen sie auf dem Grundsatz: daß Δ und Parallelogramme, die gleiche Höhe und Grundlinie haben, einander gleich sind rc. —

Figur 47, abdc ist ein Paralleltrapez, das gleiche Höhe mit dem Δ heg hat, die Höhe von jedem ist 12 Zoll; cd = 24, ab = 7, und eg = $5\frac{1}{3}$ Zoll; es fragt sich, in welchem Verhältnisse das Paralleltrapez abdc zum Δ heg stehe?

Auflösung.

Es wird der Inhalt beyder Figuren in Quadratzollen gesucht; um den von a b d c zu erhalten, wird c b gezogen, durch welches 2 Δ entstehen, die eben so wie eins behandelt werden können. —

Das regelmäßige 5Eck rc. wird, wie im Anfang des §. bemerkt wurde, übergangen, doch giebt es auch in solchen Figuren Aufgaben, die rein aufgehen. Z. E. Eine Seite des regelmäßigen 5Ecks hat 10 Zoll, und eine Seite eines 2ten regelmäßigen 5Ecks rc. hat $21\frac{1}{2}$ Zoll; es fragt sich, wie viel Zoll Flächeninhalt in der Fünfecksform ein jedes dieser 5 Ecken betrage? Ferner wie sich das 1te zum 2ten verhalte?

Auflösung der 1ten Frage.

Wir wissen, daß es in Rücksicht des Flächeninhalts gleich ist, welche ähnliche Figuren man auf 2 gegebene Linien macht; würden auf die in letzter Aufgabe gegebenen Linien Δ oder Quadrate gemacht, so verhielten sie sich wie 10 und $21\frac{1}{2}$ jede Zahl insbesondere ins Quadrat erhoben; folglich findet dieses auch beym regelmäßigen 5Eck statt. Hat man den Inhalt beyder Figuren in 5Ecksformen, so können diese nur in ein organisches Verhältniß gesetzt werden. —

Wird in einem regelmäßigen 5Eck rc., eine Ecklinie, oder auch eine andere gerade Linie gezogen, die dasselbe nicht in 2 gleiche Theile theilt, so erhält man, wie früher schon bemerkt, irrazionale Verhältnisse, die auch von den Schülern untersucht werden können.

Ich schreite zum regelmäßigen 6Eck, und bemerke zum voraus, wenn eine oder 2 rc. Ecklinien gezogen werden, so entstehen in ähnlichen Figuren keine neuen Aufgaben mehr.

Figur 48 soll ein regelmäßiges 6Eck seyn, wovon $da = \frac{af}{2}$, $bc = \frac{bg}{4}$ ist; es fragt sich, in welchem die Theile zum Ganzen stehen?

Auflösung.

Es wird ds gleichlaufend ab gezogen, und fa und gb bis zu ihrem Zusammentreffen verlängert, wodurch man ein gleichseitiges Δ mds erhält, in dem eben so viel Eigenschaften bekannt sind, als bey den ausgeführten Δ. — ab ist $\frac{2}{3}$ von ds, weil das Δ amb ähnlich mds, und $ma = af$ rc. ist; ferner ist noch $bc = cs$; folglich können durch diese gefundenen Eigenschaften alle Theile des Δ mds berechnet werden; um das Δ mit dem 6Eck zu vergleichen, kann nur noch fg gezogen werden, wodurch ein 4Eck entsteht, welches die Hälfte des 6Ecks ist.

Wird die Theilungslinie auf einen andern Theil von d aus, auf bg gezogen, so verfährt man wieder gleich; desgleichen wenn diese Linie auf gn fällt; daß auch andere Hülfslinien gemacht werden können, weiß man.

Eine andere Aufgabe über die nämliche Figur:

Es wird d t gezogen, und $gt = \frac{gn}{2}$ gemacht, es fragt sich, was jedes der 2 5Ecken a b g t d ꝛc. für ein Theil des 6Ecks seye?

Ein paar leitende Gedanken zur Auflösung;

Es werden 2 Hülfslinien d g und d n gemacht, und das △ d g n mit dem 6Eck verglichen ꝛc. —

Daß auch wieder 2, 3 und mehrere Theilungslinien gezogen werden können, soll man aus dem gemachten jetzt einsehen; deßgleichen daß alle Aufgaben, die auf ähnliche Art bestimmt werden, auch rein gelöst werden können. Zur weitern Uebung und Entwicklung des Schülers, dürften noch einige Aufgaben mit 2 und mehreren Theilungslinien nicht ganz entbehrlich seyn. —

Auch nicht ganz unwichtig wäre es, wenn man einige Seiten wie beym Quadrat verlängerte, und erst dann die Theilungslinien ziehen würde; welches aber jedoch nicht ins Verwickelte geführt werden darf, wenn man keine Fälle treffen will, die nicht rein aufgehen.

Als das 4Eck durchgeführt war, wurde dasselbe noch in Verbindung mit dem △ gesetzt, welches folglich auch jetzt mit dem 6Eck und 3Eck, oder mit dem 6Eck und 4Eck ꝛc. geschehen kann. Die gegebenen Aufgaben über die ersten Figuren, können auch auf die

letzten

letzten angewandt werden; welches ein jeder nach Bedürfniß treiben mag. — Ich fange wieder von vornen an, und nehme die irrazionalen Verhältnisse der Seiten und geschlossenen Figuren. —

§. 8.

Von der Anwendung der Zahl, auf die geometrischen Verhältnisse der irrazionalen Seiten und Flächen ꝛc.

Hat ein Δ 3 gleiche Winkel, so hat es auch 3 gleiche Seiten; wird einer Seite so und so viel Schuhe, oder Zoll, oder gleiche Theile beygelegt, so hat jede der andern Seiten auch so viel Schuhe, oder Zoll ꝛc.; worüber eine weitere Ausführung unnöthig ist.

Wird in einem gleichschenklich rechtwinklichen Δ, einer von den 2 gleichen Seiten, so und so viel Zolle, Schuhe, oder gleiche Theile beygelegt, so läßt sich die 3te Seite auch in Schuhen, Zollen ꝛc. irrazional finden.

Angenommen sey, eine von den gleichen Seiten des gleichschenklich rechtwinklichen Δ habe 10 gleiche Theile; es fragt sich, wie viel solcher Theile die ungleiche Seite habe?

Auflösung.

Wir wissen, daß das Quadrat auf der längsten Seite eines rechtwinklichen Δ gleich ist den Quadraten auf den beyden andern Seiten; die Quadrate der 2 gleichen Seiten betragen in dieser Aufgabe 200; folglich das der Hypotenuse ebenfalls; will man aber die Hypotenuse, oder eine Seite des Quadrats der 200 wissen, so muß die Quadratwurzel von 200 gesucht werden, welche 14, und 4 Rest giebt; soll man die Wurzel noch annähernd durch einen Decimal-Bruch bestimmen, so verfährt man wie bey Ganzen, nachdem man für jede Stelle in der Wurzel 2 Nullen an die Quadratzahl gesetzt hat. In die Auszichung der Quadratwurzel will und darf ich mich in diesem Buche nicht einlassen. —

Die ungleiche Seite des gleichschenklich rechtwinklichen Δ ist 10 Zoll, oder hat 10 gleiche Theile; es fragt sich, wie viel eine von den gleichen Seiten Zolle habe? Antw. 7, und 1 Rest.

Auflösung.

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich den Quadraten der Katheten, in vorliegender Aufgabe ist das der Hypotenuse 100; folglich eins auf den 2 gleichen Katheten die Hälfte von 100 = 50; wenn das Quadrat 50 ist, so wird eine Seite desselben die Quadratwurzel von 50 = 7, und noch 1 Rest.

Der Decimal-Bruch kann auch hier wieder gesucht werden, wobey man wie oben verfährt. —

In einem ungleichseitigen rechtwinklichen Δ sind die 2 Seiten, die den rechten Winkel einschließen, bekannt, und aus diesem soll die Hypotenuse ebenfalls wieder gesucht werden. —

Ist im ungleichseitig rechtwinklichen Δ die Hypotenuse bekannt, so können die 2 andern Seiten nicht mehr durch dasselbe bestimmt werden; denn die eine von diesen 2 Seiten kann so lang und so kurz seyn als man immer will, ohne daß sich dabey das Verhältniß der Hypotenuse ändert.

Wird also in einem ungleichseitig rechtwinklichen Δ die Hypotenuse gegeben, so muß noch eine von den 2 andern Seiten bekannt seyn, um die 3te Seite zu finden. Z. E. Die längste Seite ist 10, und eine von den 2 andern 8; es fragt sich, wie viel die 3te Seite seye?

Auflösung.

Es werden beyde gegebene Linien ins Quadrat erhoben, das kleinere Quadrat von dem größern abgezogen, und endlich von dem Rest die Quadratwurzel gesucht. — Die Gründe darüber sind genugthuend in den vorhergehenden Aufgaben aus einander gesetzt. —

Bey dem ungleichseitig rechtwinklichen Δ giebt es Fälle, wovon alle 3 Seiten rein aufgehen. Z. E.:

Wenn eine von den Katheten 3, und die 2te 4 Zoll hat, so erhält die Hypotenuse 5; denn 3 in's Quadrat erhoben, giebt 9, 4 in dasselbe erhoben 16, zusammen machen sie 25, und die Quadratwurzel von 25 ist 5.

Steigen die Katheten in diesem Verhältnisse in andere Zahlen, entweder hinauf, oder hinunter, so erhält die Hypotenuse ebenfalls ein reines Verhältniß. Z. E.:

Die eine Kathete soll 6, und die andere 8 Zoll haben; es fragt sich, wie viel die Hypotenuse erhalte? Antw. 10.

Warum dieses bey gewissen Zahlen statt findet, erkennt man bisher aus keinen tiefern Gründen, als die aufgestellten sind, welches allerdings unzulänglich ist. —

Auf diese Aufgabe wird also der Schüler nicht anders als durch Zufall kommen; der Lehrer ist also meistens in die Nothwendigkeit gesetzt, dem Schüler dieselbe sagen zu müssen. —

Statt daß der Lehrer die Aufgaben in diesem §. so stellt, daß der Schüler immer nur eine zu lösen hat, so kann er sie dieselben so an einander ketten lassen, daß gleichsam alle auf einmal, oder in einer Bedingung gegeben werden. —

Es folgen noch ein paar neue Fragen über die aufgestellten Figuren dieses §:

Was muß man beym gleichschenklich rechtwinklichen △ angeben, um aus demselben Seiten zu finden, die unbekannt sind? Wie viel verschiedene Fragen kann man beym gleichschenklich und ungleichseitig rechtwinklichen △ machen?

Auf gleiche Weise kann man beym gleich- und ungleichschenklich stumpfwinklichen Δ verfahren; worüber ein paar Aufgaben folgen:

Fg. Was muß man beym gleichschenklich stumpf- und spitzwinklichen Δ angeben, um aus dem angegebenen die unbekannten Seiten zu finden? ꝛc. —

Die längste Seite des gleichschenklich stumpfwinklichen Δ hat 10 Zoll, und jede der 2 andern 6; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diejenigen Linien stehen, die durch die Verlängerung bis zu dem rechten Winkel csa ꝛc. an Figur 49 entstehen?

Auflösung.

Die Seite ab enthält 10 Zoll; folglich das auf ihr beschriebene Quadrat 100 Quadratzoll, das Quadrat cb, wie auch das Quadrat ca enthält jedes 36 Quadratzoll, zusammen 72; das Quadrat ab = □ ac + □ cb, mehr dem doppelten Rechteck sc mal cb, für welche noch der Rest von 100 auf 72 bleibt, der 28 ist; folglich das Rechteck sc × cb 14, die Seite cb = 6: so oft das Rechteck 6 Quadratzoll haben soll, so oft muß auf cb ein Rechteck gemacht werden, das die Länge cb und 1 Zoll Breite hat; 14 sind 2½ mal 6; folglich hat cs oder die Breite des Rechtecks 2½ Zoll. Wie die Seite as gefunden werden kann, ist beym ungleichseitig rechtwinklichen Δ schon gezeigt worden.

Die nämliche Auflösung findet statt, wenn ac so verlängert worden ist.

Ist das △ ungleichseitig stumpfwinklich, so können die gleichen Fragen und Auflösungen gemacht werden. Bey der Verlängerung der Seiten ac und cb zum rechten Winkel, entstehen im ungleichseitigen △ verschiedene Linien, und folglich sind die Rechtecke, welche auf die vorhergehende Art beschrieben werden, auch verschieden.

Die Ausführung hierüber bedarf nicht mehr weiter aus einander gesetzt zu werden; es folgen dafür ein paar neue Fragen:

Fg. Wenn die längste Seite des stumpfwinklichen △ 10 Zoll hat, wie viel müssen den 2 andern Seiten beygelegt werden, wenn das △ stumpfwinklich bleiben muß?

Antw. Nur etwas mehr als 10 Zoll; denn 2 Seiten eines △ sind immer länger als die 3te, und je näher diese 2 Seiten desselben gleich sind der 3ten, desto stumpfwinklicher ist es auch.

Fg. Welches ist die höchste Länge, die eine von den 2 gleichen Seiten des gleichschenklich stumpfwinklichen △ haben kann, wenn die längste 10 Zoll hat?

Antw. Im ganzen ausgedrückt nicht mehr als 7; denn wenn das △ stumpfwinklich seyn soll, so müssen die Quadrate auf den kürzern Seiten immer kleiner seyn, als das auf der größten, welches 100 ist, folglich eins auf den Katheten weniger als 50; das 1te Quadrat unter 50, in ganzen Zahlen ausgedrückt, ist 49, und die Quadratwurzel davon ist 7. —

Die nämlichen Fragen können auch über das ungleichseitige Δ gemacht werden. Diejenigen Schüler, welche fähig sind, die aufgestellten Fragen zu beantworten, sollen auch die fehlenden ohne Hülfe des Lehrers machen, und beantworten können.

Desgleichen findet auch mit dem spitzwinklichen Δ statt; um aber auch den schwächern Lehrer gehörig zu leiten, und ihm die nöthige Handbietung zu geben, folgen noch ein paar der wesentlichsten Aufgaben:

Man hat ein gleichschenklich spitzwinkliches Δ, wovon jede der 2 gleichen Seiten 10 Zoll beträgt, die ungleiche hat 4; es fragt sich, in welchem Verhältnisse die rechtwinkliche Linie, die vom ungleichen Winkel dieses Δ an seine gegenüberstehende Seite gezogen wird, zu den andern Seiten des Δ stehe?

Auflösung.

Wird sie vom ungleichen Winkel aus gezogen, so giebt es 2 rechtwinkliche Δ, in denen die Hypotenuse und eine der Katheten bekannt ist; und also biethet die Bestimmung der 2ten Kathete in jedem Δ keine Schwierigkeiten mehr dar.

Besonders wichtig ist noch etwa folgende Frage, die aber doch schon zum Theil im stumpfwinklichen Δ als Tipus aufgestellt ist:

Fg. Welches ist die höchste und geringste Länge zweyer Seiten eines spitzwinklichen Δ zur 3ten, wenn diese 3te Seite 10 Zoll hat?

Auch dieses kann wieder auf das gleich- und ungleichschenkliche Δ ausgedehnt werden. —

Wie bisher die Seiten des rechtwinklichen Δ, und die rechtwinklichen Linien des spitz- und stumpfwinklichen Δ zu einander bestimmt werden, so kann aus den Seiten auch der Inhalt, und zwar in rechtwinklichen Formen, und besonders in Quadraten gesucht werden. Die Bestimmung in Quadraten ist in allen bürglichen Verhältnissen angenommen, und deswegen wird es auch nothwendig, daß ich mich an diese anschließe.

Ich mache den Anfang beym gleichseitigen Δ:

Eine Seite des gleichseitigen Δ ist 10 Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das ganze Δ habe?

Auflösung.

Es wird von einem Winkel aus, eine rechtwinkliche Linie auf die gegenüberstehende Seite desselben gezogen, und untersucht, wie viel Zoll diese Linie habe; und hernach die gefundene Linie mit der Grundlinie des Δ multiplizirt, und die Hälfte des Produkts genommen; denn durch die Multiplikation der Grundlinie mit der Höhe, erhält man den Flächeninhalt eines Parallelogramms; das Δ ist nun aber die Hälfte eines Parallelogramms, mit dem es gleiche Grundlinie und Höhe hat 2c. —

Wird bey einem gleichschenklich rechtwinklichen Δ eine von den 2 gleichen Seiten gegeben, so ist die Aufgabe noch leichter. Z. E.

Eine Seite eines solchen Δ soll 10 Zoll haben; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Δ enthalte?

Auflösung.

Um den Flächeninhalt eines solchen Δ zu erhalten, muß nur die Grundlinie mit seiner Höhe multiplizirt, und aus obigen Gründen die Hälfte genommen werden. Weil nun die Grundlinie gleich der Höhe ist, so kann auch nur eine Seite mit sich selbst multiplizirt werden. —

Bey einem ähnlichen Δ soll die längste Seite gegeben seyn, und aus demselben wieder das obige gesucht werden.

Um dieses zu finden, müssen die rechtwinklichen Linien berechnet, und dabey wieder die Verfahrungsart letzter Aufgabe angewandt werden.

Ist ein stumpfwinkliches, gleich-, oder ungleichschenkliches Δ so gegeben wie bey Figur 49, in der alle 3 Seiten bekannt sind, so kann das gleiche gesucht und berechnet werden, wozu nur die Höhe des Δ in Zoll bestimmt werden muß; hat man die Grundlinie und Höhe eines Δ, so erhält man den Flächeninhalt, wenn man dieselben mit einander multiplizirt. —

Mit dem gleich- und ungleichschenklich spitzwinklichen Δ, kann und soll das gleiche vorgenommen werden.

Die Zusammenfassung der gefundenen Wahrheiten, an der Bestimmung der Seiten und des Flächeninhalts der Δ, ist nicht ganz unwichtig; besonders wenn die Schüler im Abstrahiren schwach seyn sollten. Jedem Lehrer, der in dem Ausgeführten bewandert ist, wird es auch Mühe machen können.

Es werden Δ mit diesen Bestimmungen unter einander durch Zahlen in Verhältnisse gesetzt und berechnet. — Z. E.

Eine Seite des gleichseitigen Δ hat 10 Zoll, desgleichen soll auch eine von den gleichen Seiten des gleichschenklich rechtwinklichen haben; es fragt sich, in welchem Verhältnisse die 2 Δ zu einander stehen?

Der Flächeninhalt wird bey beyden Δ auf die angegebene Art berechnet, hernach die Produkte mit einander verglichen.

Eben so hätte man angeben können, die ungleiche Seite des gleichschenklich rechtwinklichen Δ würde 10 Zoll haben.

Eine Seite des gleichseitigen Δ hat 10 Zoll, und ist der längsten Seite des ungleichseitig rechtwinklichen Δ gleich, wovon eine Kathete 2 Zoll hat; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese Δ zu einander stehen?

Zuerst wird der Inhalt wieder wie oben bestimmt, und hernach derselbe in ein organisches Verhältniß gesetzt.

Desgleichen kann mit allen andern Δ ꝛc. vorgenommen werden; die jetzt aufgestellten einzelnen verbundenen Δ können als Leitfaden dienen. —

Wie viel Quadratzoll enthält der Flächeninhalt des gleichschenklich spitzwinklichen Δ, wovon der ungleiche Winkel $\frac{1}{3}$ des rechte, und die diesem Winkel gegenüberstehende Seite 10 Zoll hat?

Sollen ähnliche Aufgaben von den Schülern wirklich selbstständig gelöst werden, so müssen sie in den Organismus derselben eingeführt werden, und es bedarf nicht nur eine einzelne Aufgabe, die losgerissen von allen andern dasteht, auch ist die Lösung solcher Aufgaben in diesem Zustande noch beynahe unmöglich für die Schüler im Allgemeinen. Die letzte Aufgabe mag als Beleg dienen, indem die Schüler sie gewiß nicht lösen werden. —

Daß es auch im 4, 5Eck ꝛc. noch Aufgaben giebt, deren Seiten und Flächeninhalt ohne Winkel berechnet werden kann, ist klar, aber nicht mehr nöthig; ich höre beswegen damit ganz auf, und komme später, wo die Seiten, Winkel und Flächen vereiniget sind, wieder auf dieselbe zurück; zugleich werden mehrere Aufgaben durch diese Vereinigung dieser Eigenschaften leichter. —

§. 9.

Anwendung der Zahl auf die geometrischen Verhältnisse der Seiten und Winkel; und hernach der Seiten, Winkel und Flächen. —

Wird in einem gleichseitigen Δ ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, so erhält man 2 ungleichseitig rechtrechtwinkliche Δ, wovon einer der letzten Winkel eines jeden $\frac{2}{3}$, und der andere $\frac{1}{3}$ rechte beträgt; es fragt sich, in welchem Verhältnisse die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten zu einander stehen?

Auflösung.

Es wird angenommen, die längste Seite habe 10 Zoll; folglich bekommt man für die kürzeste 5; denn sie ist die Hälfte der längsten; die mittelste ist die Quadratwurzel von 75; denn das Quadrat der Hypotenuse ist 100, und das der einen Katheten 25 ꝛc.; — die .uadratwurzel von $75 = 8$ und 11 Rest, dieser Rest kann noch durch 10tel und 100tel ꝛc. annähernd berechnet werden, durch welches man $\frac{6}{10}$ und $\frac{6}{100}$ noch dazu erhält, und $\frac{44}{10000}$ eines Quadrats Rest; folglich hat die mittelste Seite $8\frac{66}{100}$ Zoll, oder als Decimal-Bruch geschrieben 8,66.

Folglich verhält sich diejenige Seite, die in einem rechtwinklichen Δ dem 3tels rechten Winkel gegenüber steht, zu der, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, wie 5 zu 10, oder wie 1 zu 2; und zur Seite, die einem $\frac{2}{3}$ rechten gegenüber steht, wie 5 zu 8,66 und $\frac{44}{10000}$ Quadratzoll Rest; welches also ein irrazionaler Bruch ist.

Was im aufgestellten Δ gefunden wurde, befindet sich in allen ähnlichen Δ; also könnten diese Verhältnisse auf alle ihm ähnliche Δ angewandt werden; worüber die fernern Aufgaben noch mehr sprechen werden.

Wird im gleichschenklich rechtwinklichen Δ der rechte Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, so giebt es nur gleichschenklich rechtwinkliche Δ; und folglich nichts neues.

Soll aber einer der gleichen Winkel in 2 gleiche Theile getheilt werden, so giebt es ein rechtwinklich ungleichseitiges, und ein stumpfwinklich ungleichseitiges Δ, wovon die einzelnen Winkel eines jeden bekannt sind; es fragt sich wieder, was oben?

Auflösung.

Nach dem 8ten Satz wissen wir, daß wenn man einen Winkel eines Δ mit einer Linie in 2 gleiche Theile theilt, so verhalten sich die Theile der gegenüberstehenden Seite so zu einander, wie die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen; aus dem sich also folgendes Verhältniß ergiebt: Figur 50 $ab : ad :: bf : fd$.

Es wird angenommen, ab habe 10 Zoll, oder 10 gleiche Theile (daß man auch mehr oder weniger annehmen kann, versteht sich.) ad findet man durch die Ausziehung der Quadratwurzel, von der Hälfte des Quadrats ab, welches 7, und noch 1 Quadratzoll Rest ist, diesen Rest annähernd in 10tel und 100tel gesucht, giebt keinen 10tel, aber $\frac{7}{100}$, und noch $\frac{151}{1000}$ von einem Quadratzoll Rest, oder 7,07; Rest $\frac{151}{10000}$.

Mehr als zu 2 Decimal-Stellen wird nicht geschritten, und der noch etwa übrig gebliebene Rest bleibt dann ganz weg; daß man eben so leicht zu 3, 4 und noch mehr Decimal-Stellen schreiten könnte, bedarf beynahe nicht mehr erwähnt zu werden; desgleichen, daß dieses in Fällen, in denen eine ganz genaue Berechnung nothwendig ist, auch so weit ausgeführt werden muß. — Die Regel des Verfahrens ist überall die nämliche, wenn man also eine oder 2 Decimal-Stellen richtig behandeln kann, so kann man es auch mit 3, 4 rc.

Das gefundene geometrische Verhältniß der Seiten, läßt sich durch die Zahl in folgendes umwandeln 10 : 7,07 :: bf : fd, db ist nun auch gleich 7,07; folglich muß 7,07 in 10 und 7,07 gleiche Theile getheilt werden, oder 7,07 durch 10 + 7,07 dividirt, für bf den Quotienten mit 10 multiplizirt, und für fd mit 7,07; wie dieses ausgeführt werden muß, gehört in die Rechenkunst, mit der ich mich in diesem Buche nicht abgebe; — ich begnüge mich also nur mit der Bemerkung: daß bey ähnlichen Aufgaben gleich alles, Ganze und Brüche, in Decimal-Brüche umgewandelt werden könne, welches die Rechnungsoperation außerordentlich erleichtert; und hier gilt von dem Mathematiker, was ich in meiner angewandten Zahl bey diesen Brüchen über den Kaufmann sagte. —

Ist die Berechnung ausgeführt, so wird das Verhältniß der Seiten zu ihren Winkeln ꝛc. wie oben abstrahirt. — Z. E. adf ist ein ungleichseitig rechtwinkliches Δ, wovon ein Winkel $\frac{1}{4}$, und der andere $\frac{3}{4}$s=rechte ist; die Seite, welche dem $\frac{3}{4}$s=rechten Winkel gegenüber steht, hat 7, $\frac{7}{100}$, während ab 10 hat ꝛc.; af kann durch das rechtwinkliche Δ fad gefunden werden. —

afb ist ein ungleichseitig stumpfwinkliches Δ, wovon ein Winkel $\frac{1}{4}$, ein anderer $\frac{1}{2}$ rechter ꝛc. ist; die Seiten, die diesen oder jenen Winkeln gegenüber stehen, verhalten sich so, und so, zu diesen und diesen Seiten des rechtwinklich, oder stumpfwinklichen Δ. —

Vor ich Winkel anderer Δ in 2 gleiche Theile theile, will ich die Theile des getheilten Winkels noch einmal theilen.

Wird der Winkel daf wieder in 2 gleiche Theile getheilt, so können die Seiten mf. md und ma auf gleiche Weise gefunden werden; desgleichen findet statt, wenn man den Winkel fab, durch an in 2 gleiche Theile theilt.

Weil die ausgeführte Berechnung dieser Seiten nicht ganz unwichzig ist, so folgen die gefundenen Resultate in ihrer natürlichern Reihenfolge; doch sollen sie den Schülern nicht berechnet gegeben werden; sie sollen sie selber suchen, und berechnen:

Es wird angenommen, ab seye gleich 10 Zoll.
ad = 7,07 Zoll
bf = 4,14 —
df = 2,93 —
af = 7,65 —
Alle diese Verhältnisse sind durch die Theilungslinie af entstanden.

mf = 1,71 Zoll
md = 1,22 —
ma = 7,17 — Entstanden durch die Theilungslinie am.

nb = 2,34 Zoll
nf = 1,80 —
na = 8,50 — Entstanden durch die Theilungslinie an.

Werden die rechtwinklichen Δ in einer ähnlichen Figur aufgesucht, so erhält man von $\frac{1}{8}$ rechten Winkel, bis auf $\frac{3}{8}$ rechte, alle. Z. E.:

Der

Der Winkel d a m $= \frac{1}{8}$ rechte des Δ d a m.
∟ d a f $= \frac{2}{8}$ — — Δ d a f.
∟ d a n $= \frac{3}{8}$ — — Δ d a n.
∟ d a b $= \frac{4}{8}$ — — Δ d a b.
∟ d n a $= \frac{5}{8}$ — — Δ d n a.
∟ d f a $= \frac{6}{8}$ — — Δ d f a.
∟ d m a $= \frac{7}{8}$ — — Δ d m a, u.
endlich wird der Winkel d $= \frac{8}{8}$, und alle Seiten fallen dann auf einander.

Folglich hat man in einer solchen Figur alle Δ von $\frac{1}{8}$ bis $\frac{8}{8}$ rechter.

Würde man noch einen jeden der 4 Winkel dam, maf, fan und nab in 2 gleiche Theile theilen, so bekäme man alle rechtwinkliche Δ, die 1 bis $\frac{16}{16}$ rechte Winkel hätten. Daß nicht einmal alle Theilungen nöthig wären, wird schon aus vorliegender Figur deutlich; denn es befinden sich 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. 8tels rechte, welches schon 16tel rechte sind, und zwar 2, 4, 6, 8 und $\frac{10}{16}$.

Nachdem die Schüler die Seiten bestimmt, und alle rechtwinkliche Δ der Figur aufgezählt haben, mag das Nebeneinanderstellen der Seiten und Winkel eines jeden dieser 3 Δ eine nicht ganz unnöthige Arbeit seyn.

Δ d a m:

∟ dam $= \frac{1}{8}$, die gegenüberstehende Seite dm $=$ 1,22.
∟ dma $= \frac{7}{8}$, — — — da $=$ 7,07.
∟ adm $= \frac{8}{8}$, — — — am $=$ 7,17.

△ d a f:

∟ daf = $\frac{2}{8}$, die gegenüberstehende Seite df = 2,93.
∟ dfa = $\frac{6}{8}$, — — — da = 7,07.
∟ adf = $\frac{8}{8}$, — — — af = 7,65,

△ d a n:

∟ dan = $\frac{3}{8}$, die gegenüberstehende Seite dn = 4,73.
∟ dna = $\frac{5}{8}$, — — — da = 7,07.
∟ adn = $\frac{8}{8}$, — — — an = 8,50.

Weil nun die Seiten in solchen △ immer in einem ähnlichen geometrischen Verhältnisse zu einander stehen, so kann das gefundene Verhältniß der Seiten auf die ihnen ähnlichen △ übergetragen werden; welches in der Folge noch mehr aus einander gesetzt wird. —

Um durch alle diese △ ein unveränderliches Maß der Seiten zu haben, kann man die Berechnung auf ein rein angenommenes Verhältniß der Hypotenuse zurückführen. Z. E.: ab, an, af und am sollen immer 10 Zoll haben; es fragt sich, wie viel Zoll die Seiten des △ abd, and, afd und amd in allen diesen Fällen betragen?

Auflösung.

an hat 10 Zoll; es soll ad und dn gesucht werden, an : ad ∷ an mit der Annahme 10, zu was? In Zahlen ausgedrückt erhält man: 8,50 : 7,07 ∷ 10 zu was? Die weitere Auflösung des geometrischen Verhältnisses mit Zahlen wird vorausgesetzt.

Bey der Operation mit Zahlen erhält man einen Bruch, der nicht immer rein als Decimal-Bruch aufgeht; es wird aber dessenungeachtet auch hier nur bis zu 2 Decimal-Stellen geschritten, und der noch übrige Rest bleibt weg. Daß in vorliegender Aufgabe sehr große Abkürzungen statt finden, wenn man sich die Behandlung der Decimal-Brüche eigen gemacht hat, weiß gewiß ein jeder, der Erfahrung darin hat. —

Hier folgen noch ein paar Ansätze, wie auch andere Seiten nach diesem angenommenen Verhältnisse gefunden werden können.

Um dn zu erhalten, wird kommendes Verhältniß angesetzt: 8,50 : 4,73 :: 10 zu was? Antw. 5,56. Die Gründe und Berechnung sind wie oben; folglich nd = 5,56.

Wird für af, 10 angenommen, so erhält man bey der Umwandlung der Seiten fd und da folgende Verhältnisse:

af oder 7,65 : df oder 2,93 :: af oder die angenommenen 10, zu was?

af oder 7,65 : ad oder 7,07 :: af oder die angenommene Seite 10, zu was?

Desgleichen wird mit dem Δ adm vorgenommen, deren weitere Ausführung einem jedem überlassen bleibt. Bey diesen Uebungen müssen sich die Schüler so lange verweilen, bis sie dieselben ganz in ihrer Gewalt haben. —

Die gefundenen Resultate obiger Berechnung können unter eine Form gebracht werden. Wenn die Hypotenuse der rechtwinklichen Δ immer 10 Zoll hat, so stehen dem 8tels rechten Winkel folgende Seiten gegenüber.

$\frac{1}{8}$	rechten	Wkl	steht	eine Seite	gegenüber	die 1,70	Zoll hat.
$\frac{2}{8}$	—	—	—	—	—	3,90	—
$\frac{3}{8}$	—	—	—	—	—	5,56	—
$\frac{4}{8}$	—	—	—	—	—	7,07	—
$\frac{5}{8}$	—	—	—	—	—	8,31	—
$\frac{6}{8}$	—	—	—	—	—	9,24	—
$\frac{7}{8}$	—	—	—	—	—	9,86	—

Bey $\frac{8}{8}$ fallen die Seiten überall auf einander, und giebt folglich keinen Unterschied der Seiten mehr.

Die angenommenen Kunstausdrücke sind auf dieser Stufe noch nicht nöthig; ich bleibe daher bey den karakterisirenden Formausdrücken. —

Bisher haben wir in vorliegender Figur nur die rechtwinklichen Linien (Seiten) in Δ betrachtet; daß es auch stumpfwinkliche, oder schiefwinkliche giebt, und eben so behandelt werden können, ist fast unnöthig zu bemerken, und eben so wenig dasselbe auszuführen; für den schwächern Lehrer folgen dessenungeachtet noch ein paar Betrachtungen stumpfwinklicher Δ:

Ein stumpfwinkl. Δ bildet ban, deren Wkl ban = $\frac{1}{8}$ rechte 2c. ist.
— — Δ — baf — — baf = $\frac{2}{8}$ — —

Ein stumpfwinkl. Δ bildet bam, deren Wkl bam = $\frac{7}{8}$ rechte ꝛc. ist.
— — Δ — abn, — — abn = $\frac{4}{8}$ — —
dieser $\frac{4}{8}$ rechte kann auch zum Δ abf, oder abm gehörend gerechnet werden.

Ein stumpfwinkl. Δ bildet anf, deren Wkl anf = $\frac{5}{8}$ rechte ist, kann auch als zum Δ anm gehörig betrachtet werden.

Ein stumpfwinkl. Δ bildet afm, deren Wkl afm = $\frac{6}{8}$ recht ist.
— — Δ — amf, — — amf = $\frac{9}{8}$ — —
und kann auch zum Δ amn, oder amb gerechnet werden.

Ein stumpfwinkl. Δ bildet afn, deren Wkl afn = $\frac{10}{8}$ recht ist, und dieser Winkel kann auch zum Δ afb gehören.

Ein stumpfwinkl. Δ bildet endlich noch anb, deren Wkl anb = $\frac{11}{8}$ recht ist.

Folglich hat es in vorliegender Figur, alle stumpfwinkliche Δ, von 1 bis $\frac{11}{8}$ rechte Winkel; ausgenommen ist von diesen jedoch das mit $\frac{7}{8}$ rechten.

Durch die ausgeführte Berechnung der Seiten in rechtwinklichen Δ, sind auch die Seiten dieser stumpfwinklichen Δ berechnet worden; denn die rechtwinklichen Δ sind so mit einander verbunden, daß sie auch stumpfwinkliche bilden; es folgen ein paar Berechnungen der stumpfwinklichen Δ:

Wir haben gesehen, daß wenn ab 10 Zoll hat, so erhält an 8,50; bn, 2,34; also kann man sagen: die $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{8}$ und $\frac{11}{8}$ rechten Winkel gegenüberstehende

Seiten in einem Δ, haben in Zahlen ausgedrückt fol-folgendes Verhältniß: die 1te oder kürzeste 2,34; die 2te oder die zweyt-längste 8,50, und die 3te 10.

Das Δ abf hat die Winkel, die in folgendem Verhältniß stehen: $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$ und $\frac{10}{8}$ rechte; ihre gegen-überstehenden Seiten sind 4,14; 7,65 und 10.

Eben so kann das Verhältniß der Seiten anderer stumpfwinklicher Δ gesucht werden; welches nicht ganz unwichtig ist.

Antw. Daß sich aus vorliegender Figur durch die Theilung in 2 gleiche keine andere als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ und 16tels rechte Winkel ableiten lassen, ist klar. — Es wird die gleiche Untersuchung der Seiten und Winkel in an-dern regelmäßigen Figuren vorgenommen.

Theilt man im gleichseitigen Δ einen Winkel in 2 gleiche Theile, so erhält man 2 rechtwinkliche Δ, wo-von ein jedes einen Winkel mit $\frac{1}{3}$ rechten hat; die Sei-ten, die diesen Winkeln gegenüberstehen können, wie-der wie beym gleichschenklich rechtwinklichen berechnet werden. —

Wird der 3tels rechte Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, so erhält man wieder ein rechtwinkliches Δ, deren ein Winkel $\frac{1}{6}$, und der andere $\frac{5}{6}$ rechte beträgt, die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüber stehen, können gleich wie oben beym gleichschenklich rechtwink-lichen gesucht werden; denn wenn ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt wird, so verhalten sich die

Schenkel, welche diesen Winkel einschließen, wie die Theile der gegenüberstehenden getheilten Seite.

Schreitet man in der Untersuchung der entstandenen Δ so weiter wie beym gleichschenklich rechtwinklichen, so findet man rechtwinkliche Δ mit 1, 2, 3, und $\frac{5}{8}$ rechten Winkeln.

Mit $\frac{3}{6}$ rechten erhält man keins, welches aber im Ganzen nichts ändert; denn wir hätten diesen schon beym gleichschenklich rechtwinklichen Δ, unter der Form eines $\frac{1}{2}$ rechten. Mit dem 12tel und 24tels rechten geht es nach der nämlichen Norm weiter. —

Bey stärkern und schwächern Schülern wird eine ähnliche Ausführung, wie wir beym rechtwinklichen Δ hätten, nicht unnöthig seyn, besonders wenn sie die Schüler ohne alles weitere Zuthun des Lehrers machen; welches sie auch fähig seyn sollen, wenn sie das rechtwinkliche Δ verstanden haben.

Neben den rechtwinklichen Δ findet man bey diesen Theilen auch spitzwinkliche, welche gleich den stumpfwinklichen im gleichschenklich rechtwinklichen aufgezählt und behandelt werden können; zu deren Ausführung der Lehrer die Schüler auch auffordern darf; doch soll er sie nicht weiter, als bis etwa zu 12tels rechten Winkeln gehen lassen.

Bey dem gleichschenklich rechtwinklichen Δ, hat man diejenigen Seiten, die den spitzen Winkeln gegenüber stehen, mit der, die dem rechten Winkel gegenüber steht, verglichen, wenn die letzte benannte Seite 10 Zoll hat; — welches folglich auch in dem gleichseitigen geschehen kann. —

Durch die Theilung der Winkel, — ergiebt sich im gleichschenklich rechtwinklichen Dreyeck Dreyecke, welche halbe, 4tel und 16tels rechte haben; beym gleichseitigen; 3tel, 6tel, 12tel und 24tels rechte, und zwar bey beyden, so viel dieser Theile als man immer will. —

Um die Berechnung der gegenüberstehenden Seiten gewisser Winkel noch schneller zu erhalten, könnte man, statt immer nur einen Winkel in diesen benannten Δ zu theilen, auch 2 theilen. Z. E.:

Wenn man im gleichschenklich rechtwinklichen Δ einen der 2 gleichen Winkel in 2 gleiche Theile theit, so erhält man ein rechtwinkliches Δ mit einem $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ rechten Winkel, wird der $\frac{3}{4}$ rechte Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, so erhält man $\frac{3}{8}$ rechte; bey fernerer Fortsetzung $\frac{3}{16}$ rechte ꝛc. — Desgleichen findet im gleichseitigen statt. —

Die Theilung des Winkels in 3 gleiche Theile ist mathematisch unmöglich auszuführen; zugleich hat auch die Berechnung der Seiten der in 3 gleiche Theile getheilten Winkel Schwierigkeiten, die ich aber jetzt nicht weiter auseinander setzen will.

Alle Winkel, die von dem halben, oder von der Zahl 2, ferner die von der Zahl 3, durch Verdopplung der Theile zum rechten abgeleitet werden, sind aufgestellt. Die folgend unbekannten Verhältnisse der Seiten der Δ, welche von dem Winkel abhängen, sind die 5tels rechten; oder die von der Zahl 5 abgeleiteten. —

Diese Ableitung läßt sich besonders gut durch Figur 4 und 5 darstellen; denn beyde Δ enthalten 5tels rechte Winkel. In Figur 5, ist der Winkel dab = $\frac{2}{5}$, abd und adb jeder $\frac{4}{5}$ rechte; es muß also nur noch das Verhältniß der Seiten dieser Figuren zu einander bestimmt und berechnet werden.

Auflösung.

Wenn man im Δ adb den Winkel adb in 2 gleiche Theile theilt, so verhält sich eb : ea ⁚⁚ ea : ab. — Kann also das Verhältniß eb : ea gefunden werden, so wissen wir auch das von db : ba ꝛc. — Ist der Schüler so weit vorgerückt, daß er alle Gleichungen des 2ten Grads löst, sey es algebraisch, oder mit Zahlen durch das Quadrat veranschaulicht, so ergeben sich hier keine Schwierigkeiten, denn es darf nur folgende Formel angesetzt und gelöst werden: Angenommen ab = 10.

be : ea ⁚⁚ ea : 10, für be wird y, und für ea x gesetzt, welches folgenden Ausdruck giebt:

1) $y : x :: x : 10$.

2) $y + x = 10$.

Weil aber diese Stufe der Algebra nicht bey allen, die dieses Buch brauchen, so weit vorausgesetzt werden darf, so muß im eintretenden Fall diese Aufgabe nur von dem Lehrer gelößt werden, die gefundenen Resultate den Schülern vorgelegt, und hinzugesetzt, sie seyen durch eine Berechnung gefunden worden, die sie nicht einsehen können, sie dürfen aber auf die Richtigkeit zählen, und es so annehmen rc. —

Es wird angenommen, a b betrage 10 Zoll, für y oder e b erhalte man obigem Ansatze gemäß 3,82, und für x 6,18 Zoll.

Mancher Leser wird diesen machenden Sprung nicht begreifen, es folgen deswegen ein paar Bemerkungen darüber:

Die Behandlungsart der Zahl in den Potenzen gehört nach meiner Erkenntniß auf eine höhere Stufe, als die ohne Potenzen. Nur etwa Erhebung in die Potenzen, und Auszichung der 1ten Wurzeln, oder Quadratwurzel, darf zur letzten gerechnet werden, und kann daher gleichsam als der Uebergang von dieser in jene betrachtet werden, und darf deswegen noch mit der größern Anzahl kräftiger Schüler in den niedern Volksklassen gemacht werden, für welche das vorliegende Buch auch bestimmt ist. Ferner steigt das Zahlensystem von 10 zu 10; deswegen sind die Verhältnisse der 5tel 10tel rechten Winkel rc. auch wichtiger als die der halben rc. oder 3tel rc.

Bey diesen weitläufigen Uebungen mag mancher bey sich selber denken: laßt uns bey der alten trigonometrischen Berechnung bleiben, sie ist einfacher, und eben so leicht zu begreifen rc.! — Aber hiebey vergißt man den Zweck des Buches. —

Diejenige Volksmasse, von denen ich diese Berechnungen fodere, kann nicht so weit geführt werden, als es die gewöhnliche Behandlungsart erfordert. Ferner ist ziemlich wahrscheinlich, daß die Berechnung der Seiten gegebener Winkel durch das Δ hervorgebracht wurde, und erst durch mehrere abgezogene Schlüsse zum Kreis, und der gewöhnlichen Behandlungsart gesteigert worden ist; welches ich jetzt nicht beweisen will, ich sage nur: Das Δ ist vor dem Kreis allgemein untersucht worden, seine gefundenen Wahrheiten systematisch zusammengetragen, und zur Untersuchung des Kreises benutzt worden, denn ohne die Kenntnisse der Verhältnisse, welche im Δ sind, ist keine Untersuchung des Kreises möglich. Im Kreise können alle geradlinige Figuren gemacht werden, er kann daher als Totalbegrenzung aller geradlinigen Figuren betrachtet, und nur von demjenigen auf die gewöhnliche Art behandelt werden, der das Ganze in sich trägt, und den Gipfel erstiegen hat, für den dieses Heft aber nicht ist, denn es ist nur ein der 1ten Theile des Ganzen.

Aber, wird mancher fragen: Warum soll man alle Erfindungen und Erfahrungen, die schon gemacht sind, noch einmal machen? Warum sie nicht nehmen, und auf ihnen fortbauen? ꝛc. Und ich antworte: es es giebt für unsere Bildung zweyerley Erfahrungen ꝛc. 1tens solche, die wir nehmen dürfen, und nehmen können; und zweytens solche, die wir uns eigen machen müssen. Denn betrachten wir nur das Kind, es geht ja nakt und blos in die Welt ein, und wenn dieselbe noch einmal so weit in Erfahrungen, Erfindungen, Fertigkeiten und Kenntnissen fortgeschritten wäre, so würde dieses dasselbe wenig nützen. Sehen wir nicht, daß es selber in seiner unschuldigen Unmündigkeit dieses weiß, denn es untersucht, und erfährt selber, daß das Feuer brenne, daß das Wasser kalt, warm ꝛc. seyn kann. Warum hören wir in dem Unterricht, den wir besser geben wollen, als die Natur ohne Zuthun des Menschen ihn giebt, auf? Würde ich aber in den Fragen und Untersuchungen noch weiter schreiten, so blieb meine eigentliche Aufgabe stehen, die jetzt wichtiger ist als alles andere. —

Figur 51 soll ein gleichschenkliches Δ seyn, wovon der Winkel eab $= \frac{2}{5}$ rechte, und ac $=$ ab ist. Es wird ad rechtwinklich auf cb gezogen, das Δ dab ꝛc. ist rechtwinklich; folglich der Winkel dab $= \frac{1}{5}$, dba $= \frac{4}{5}$ rechte; es wird ferner noch cm rechtwinklich auf ab gezogen, wodurch der Winkel mca $= \frac{3}{5}$, und cam $= \frac{2}{5}$ rechte wird; — folglich erhält man durch diese 2 Hülfslinien 2 rechtwinkliche Δ, die 1, 2, 3 und $\frac{4}{5}$ rechte Winkel haben; auf gleiche Weise können die 10tel und 20tel rechte Winkel hervorgebracht werden. —

Schon als durch den Lehrer, oder durch das Buch berechnet, wird angenommen: daß wenn db an Figur 4, 10 Zoll beträgt, so wird de = + 618 und cb = 382 Zoll; desgleichen findet auch mit ab, as und sb an Figur 51 statt, wenn ab so eingetheilt ist, daß sich ab : as :: as : sb, welches angenommen wird; wozu as nur gleich sc gemacht werden muß; folglich cb = 6,18, db = 3,09 ꝛc.; ad gleich der Quadratwurzel von 100, weniger 3,09 in's Quadrat erhoben, welches 9,51 ist.

Um am und cb zu erhalten, kann von der Seite ab nur die Seite mb, welche die Hälfte von bs ist, abgezogen werden; bs ist 3,82; am endlich in's Quadrat erheben, dasselbe vom Quadrat ac abziehen, und dann von dem Rest die Quadratwurzel suchen; welches folgende Verhältnisse giebt:

$$am = 8{,}09$$
$$cm = 5{,}96.$$

Folglich sind auch wieder alle Seiten, die 1, 2, 3, 4 und $\frac{1}{5}$ rechten Winkel in einem Δ gegenüber stehen berechnet, und es dürfen also alle Reihenfolgen, die beym rechtwinklich gleichschenklich und beym gleichseitigen Δ aufgestellt worden sind, auch hier gemacht werden; das für den tüchtigern Schüler eine nicht ganz unzweckmäßige Arbeit ist.

Die mechanische Berechnung und Ausführung darf gewiß einem jeden überlassen werden; es folgen noch ein paar Bemerkungen für den schwächern Lehrer und Schüler —:

Zuerst werden die Δ mit den 5tels rechten Winkel aufgezählt:

Der Winkel	d a b	des Δ	d a b	ist	$\frac{1}{5}$	rechte
—	c a m	— Δ	c a m	—	$\frac{2}{5}$	—
—	m e a	— Δ	m c a	—	$\frac{3}{5}$	—
—	c b m	— Δ	c b m	—	$\frac{4}{5}$	—

Auf gleiche Weise können die der 10tels rechten Winkel durchgeführt und aufgezählt werden. —

Eine der wichtigsten Reihenfolgen wird diejenige seyn, in der die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite eines Δ immer zu 10 Zoll angenommen ist, und die andern nach demselben berechnet werden.

Kommt man im Theilen der Winkel letzter Figur zu 10tels rechten, so erhält man zu rechtwinklichen Δ auch spitzwinkliche, die durch die 1ten bestimmt sind; folglich kann auch hier das nämliche vorgenommen werden, was beym stumpfwinklichen im rechtwinklich gleichschenklichen geschehen ist.

Die vor uns liegende Figur, ist ein gleichschenklich spitzwinkliches Δ, deren ungleiche Winkel $\frac{2}{5}$ rechte betragen, bey den nämlichen geometrischen Verhältnissen könnte das Δ auch gleichschenklich stumpfwinklich seyn, und deren ungleiche Winkel $\frac{6}{5}$ rechte betragen; seht Figur 4.

Nachdem das gleichseitige, das gleichschenklich rechtwinkliche, und das gleichschenklich spitz- und stumpfwinkliche Δ mit 5tels rechten Winkel durchgeführt ist, können alle gefundenen Verhältnisse der Seiten in der Zahl neben einander gesetzt werden, um sie beym Gebrauch schnell zu finden, welches aber im Buche selber nicht geschieht, um ja keinen der für ihn so nöthigen Arbeit zu entheben. Ich weiß, wie leicht Dinge dieser Art nur gelesen werden, wie wenig dabey heraus kommt, und wie nöthig ähnliche Uebungen für Schüler sind, denn gerade dieses Ordnen, Sammeln und Zusammenstellen der gefundenen Verhältnisse und Wahrheiten bietet auf dieser Stufe ein neues und wichtiges Feld der Entwicklung für den Jüngling dar, und darf nicht vernachlässiget werden; indem es gewiß wichtiger ist, als das Lösen einzelner mathematischen Aufgaben.

Es folgt eine Anleitung, wie diese Generaltabelle gemacht werden kann:

Es werden alle rechtwinkliche Δ mit $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ ($\frac{4}{8}$), $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$ ($\frac{3}{6}$), $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ rechte Winkel in einer ähnlichen Reihenfolge unter einander gesetzt, die Hypotenuse zu 10 angenommen, und die Seiten, die dem oben benannten Winkel gegenüber stehen, berechnet. Ferner können auch noch alle spitz- und stumpfwinklichen Δ die Winkel von diesem Maß haben, oder die sich von diesen ableiten lassen, so neben einander gestellt, und die Seiten, die diesen

Winkeln gegenüber stehen, nach der Annahme der Hypotenuse zu 10 berechnet werden. (Daß 7tel und 11tels rechte Winkel nicht so behandelt werden können, ist klar.)

Weil alle diese Berechnungen und Bestimmungen der Seiten und Winkel aus dem Δ selber hervorgehen, und nicht willkührlich sind, wie die Grade, so ist diese Berechnung auch wichtiger, als die der Grade. — Auch wenn der rechte Winkel zu 100 Grad eingetheilt würde.

Ich verweise in Zukunft oft auf die jetzt geforderte Generaltabelle der Verhältnisse der Winkel und Seiten, und muß deswegen von den Schülern auch gemacht werden, bevor man weiter schreitet.

Gleich wie in dem Δ, von den Winkeln aus, die Seiten berechnet wurden, so können von den Seiten aus auch die Winkel bestimmt werden; welches jedoch schwerer ist, als das 1te, und nachdem jenes durchgeführt ist, wird dieses entbehrlich; denn das Verhältniß der Seiten zu den Winkeln kann nur umgekehrt angebracht werden.

Doch ist diese Bestimmung und Berechnung nicht wichtig, und führt auch im Leben zu wenig; dafür ist aber die Berechnung des Flächeninhalts durch die Angabe der Seiten und Winkel desto wichtiger, welches wir zum Theil schon durch dasjenige sahen, was über die Berechnung der Flächen beym Δ, 4Eck und 6Eck ohne irrazionale Verhältnisse vorkam, was also dort razional durchgeführt wurde, soll jetzt irrazional geschehen; der Anfang würde beym Δ gemacht.

Man soll den Inhalt eines gleichschenklich spitz- oder stumpfwinklichen Δ durch die Angabe einer Seite desselben bestimmen; als die längste, kürzeste, oder eine von den gleichen Seiten dieser Δ beträgt 10 Zoll; es fragt sich, wie viel der Inhalt derselben jedesmal betrage? Als Antwort wird man erhalten: daß diese Eigenschaft unzulänglich seye. Wird die Grundlinie und Höhe der Δ gegeben, so gehören sie in die razionalen Verhältnisse, welche wir schon hätten; aus diesem wird klar, daß Seiten und Winkel vereiniget gegeben werden müssen ꝛc. —

Man hat ein gleichschenkliches Δ, wovon der ungleiche Winkel $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$ rechte beträgt; ferner soll die ungleiche Seite jedesmal 10 Zoll haben; es fragt sich, wie viel Quadratzoll Flächeninhalt jedes dieser Δ habe?

Um solche Aufgaben zu lösen, berechnet man die Höhe des Δ. Von der gegebenen, oder bekannten Seite, welche in vorliegender Aufgabe die ungleiche ist, wird von ihrer Mitte aus eine Linie an den gegenüberstehenden Winkel gezogen, welche folglich rechtwinklich auf der bekannten Seite steht, und das Δ in 2 rechtwinklich gleiche Δ theilt, wovon ein Winkel desselben immer die Hälfte des gegebenen oder ungleichen Winkels enthält, also giebt es für den 1ten Fall

M

2 gleiche rechtwinkliche Δ, wovon jedes $\frac{1}{5}$ rechten hat; für den 2ten giebt es rechtwinkliche Δ mit $\frac{3}{8}$ rechten ꝛc.; — für den 3ten mit $\frac{5}{12}$ rechten.

Die dem $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{12}$ rechten Winkel gegenüberstehende Seite beträgt überall 10 Zoll; um die Höhe dieser Δ zu finden, bedarf man für den 1ten Fall nur die gefundenen Verhältnisse der Seiten des Δ mit $\frac{1}{5}$ rechten Winkel zu nehmen, und zu sagen: diejenige Seite, welche in diesem Δ $\frac{1}{5}$ rechten Winkel gegenüber steht, verhält sich zu der die einem $\frac{4}{5}$ rechten gegenüber steht; wie 5 zu was? Zur Antwort erhält man dann die Höhe des suchenden Δ in Zollen. Die fernere Auflösung bietet keine Schwierigkeiten mehr dar, wenn man die Generaltabelle gemacht hat, und sie anwendet, und zugleich in den Zahlenverhältnissen hinlänglich bewandert ist. —

Um die Höhe des 2ten Δ, oder des 2ten Falls zu finden, wird die Seite, welche dem $\frac{3}{8}$ rechten Winkel gegenüber steht, zu der, welche $\frac{5}{8}$ gegenüber liegt, wie oben in ein geometrisches Verhältniß gesetzt; aus dem sich ebenfalls die Höhe desselben ergiebt.

Um den 3ten Fall zu lösen, sollte das gleiche mit dem rechtwinklichen Δ, welches einen $\frac{5}{12}$ rechten hat, vorgenommen werden; weil aber diese Berechnung bey dem gleichseitigen Δ nicht so weit ausgedehnt wurde, so muß sie beym eintretenden Fall noch nachgeholt werden, welches aber auch schnell geschehen kann, wenn man das rechtwinkliche Δ mit $\frac{1}{6}$ rechten, deren Seiten berechnet sind, als Grundlage nimmt, und den $\frac{5}{6}$ rechten mit einer Linie in 2 gleiche Theile theilt; — die Höhe dieses Δ wird nach diesem wie oben bestimmt.

Im 4ten Fall wird das gleichschenkliche Δ in 2 rechtwinkliche getheilt, deren ein Winkel $\frac{7}{8}$ rechte enthält; und folglich kann die Aufgabe mit der Generaltabelle ohne Mühe gelöst werden. —

Würden auf diese Art Δ gegeben, die 7te, 11tel und 13tels rechte Winkel haben, so können sie nicht mehr so gelöst werden; weil das Verhältniß der Seiten bey Winkeln dieser Größe nicht entwickelt wurde; und zwar, weil Aufgaben dieser Art auf der einen Seite schwierig, und auf der andern unwichtig sind.

Mit ungleichseitig spitz- und stumpfwinklichen Δ, welche ein Maß der Winkel haben, das sich aus dem halben, oder 3tel, oder 5tels rechten ableiten läßt, kann das gleiche vorgenommen werden; als Beleg folgen auch hierüber ein paar Aufgaben:

Man hat ein Δ, wovon ein Winkel $\frac{2}{3}$, einer $\frac{1}{6}$ rechter beträgt, und deren längste Seite 10 Zoll hat; es fragt sich, in welchem Veahältnisse jede der 2 andern Seiten zu dieser stehe; und wie viel Quadratzoll Flächeninhalt das ganze Δ habe?

Figur 52 soll dieses vorstellen, a b c soll das Δ seyn, a b c $=\frac{2}{3}$ und b a c $=\frac{1}{6}$ rechte Winkel; folglich $\angle$ a c b $=\frac{7}{6}$; b c soll so weit verlängert werden, bis der entstehende Winkel b d a recht, und der dadurch noch entstehende Winkel b a c auch gleich c a d werde; folglich hat man ein rechtwinkliches Δ b a d, deren 3tels rechter Winkel b a d, durch a c in 2 gleiche Theile getheilt ist; die Verhältnisse der Seiten ähnlicher Δ sind beym gleichseitigen berechnet worden, folglich können die gefundenen Verhältnisse nur auf die angegebenen Seiten a b ꝛc. übergetragen werden, welches wieder nur eine arithmetische Operation ist, die voraus gesetzt wird. Die fernere Berechnung des Inhalts geht nach der aufgestellten Norm weiter. —

Es ist ein stumpfwinkliches Δ gegeben, wovon ein Winkel $\frac{3}{8}$, einer $1\frac{1}{2}$ rechten beträgt; es fragt sich, in welchem Verhältnisse die 2 andern Seiten zur längsten stehen, wenn diese längste Seite 10 Zoll hat. (Daß man eben so wohl eine der 2 andern Seiten angeben könnte, versteht sich.) —

Auflösung des Flächeninhalts dieser Δ.

Es wird vom größten Winkel auf die gegenüberstehende Seite eine rechtwinkliche Linie gezogen, durch welche 2 rechtwinkliche Δ entstehen, die Winkel haben, deren Verhältniß der Seiten zu einander bekannt ist, in dem nur die Verhältnisse der Generaltabelle auf dieselbe übergetragen werden können. Hat man die Grundlinie und Höhe eines Δ, so wird der Flächeninhalt ohne Schwierigkeit gefunden. Aus dem Durchgeführten ergiebt sich, daß aus 2 und 3 gegebenen Eigenschaften eines Δ immer der Inhalt bestimmt werden kann.

Die Eigenschaften sind:

1) Daß das Δ regelmäßig sey, und dabey muß noch eine Seite gegeben seyn.

2) Daß das Δ gleichschenklich rechtwinklich sey, und ebenfalls noch eine Seite dazu; oder daß es nur rechtwinklich sey, dann muß aber eine Seite und ein Winkel dazu gegeben werden, oder 2 Seiten. —

Betrachten wir aber die zur Lösung einer ähnlichen Aufgabe nöthigen Eigenschaften genauer, so werden wir überall 3 Eigenschaften finden, und zwar 2 Seiten und 1 Winkel, oder 1 Seite und 2 Winkel; soll das gleichseitige Δ auf diese Art berechnet werden, so sind eigentlich noch mehr als 3 Eigenschaften gegeben; denn wenn man angiebt, daß das Δ gleichseitig sey, und habe eine Seite mit so und so viel Zoll, so sind alle 3 Seiten und auch alle 3 Winkel gegeben. Noch folgen ein paar Aufgaben, in denen der Inhalt durch die Angabe 2 Winkel und 1 Seite bestimmt wird. Sollte nur ein Winkel und eine Seite gegeben seyn, und dabey noch eine Eigenschaft der Lage derselben zu einander, so kann die Aufgabe wieder nicht gelößt werden. Z. E.

Die Seite eines Δ beträgt 10 Zoll, und der ihr gegenüberstehende Winkel $\frac{1}{2}$ rechten; es fragt sich, wie viel der Inhalt und die andern Seiten desselben betragen? Daß diese Aufgabe mit den angegebenen Eigenschaften unbestimmt ist, beruht auf kommenden Gründen: Die 2 andern Winkel dieses Δ können jede beliebige Größe haben, und je näher 2 Winkel mit einer gewissen Summe einander gleich sind, desto größer wird das Δ auch mit der nämlichen Seite, die in vorliegender Aufgabe 10 Zoll hat; und so umgekehrt; folglich ist der Inhalt, wie auch die 2 andern Seiten unbestimmt.

Man hat ein Δ, dessen eine Seite 10 Zoll, und die an ihm anliegenden Winkel $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$ recht betragen; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Δ habe; ferner wie viel Zoll die 2 andern Seiten betragen? und endlich könnte noch gefragt werden, wie viel der 3te Winkel sey; welches aber durch die Angabe schon bestimmt ist.

Auflösung.

In Figur 53 soll $ac = 10$ Zoll seyn ꝛc.; folglich der Winkel $abc = \frac{5}{4}$ rechte; es wird die Linie bd rechtwinklich auf ac gezogen, durch welches der Winkel $cbd = \frac{2}{4}$ und $dba = \frac{3}{4}$ rechte bekommt; die Generaltabelle der berechneten Seiten wird vorgenommen, und für cd ein beliebiger Theil gesetzt, wodurch db mehr oder weniger solcher Theile bekommt, nachdem der Winkel cbd größer oder kleiner als dcb ist: $dcb = cbd$, also $cd = db$; folglich kann für db auch 1 gesetzt, und da nach demselben Verhältniß berechnet werden, und endlich wird ca in das Verhältniß bd, und da, oder cd, und da eingetheilt, durch welches man c d und d a in Zollen erhält. Die Berechnung der Seiten des Δ hat, nachdem dieses aufgestellt ist, keine Schwierigkeit mehr, desgleichen der Inhalt. —

In diesem Δ sind Winkel mit 4tels rechten angegeben worden, desgleichen kann aber auch gemacht werden, wenn 6tel oder 5tel gegeben sind; oder Winkel, die sich aus den halben, 3tel und 5tels rechten ableiten lassen. Aus dem Gesagten folgt: daß es eine unendliche Mannigfaltigkeit der Δ giebt, die auf diese Weise leicht gelöst werden können; doch nicht alle; — will man sie aber nur annähernd haben, so ließen sie sich doch leicht auf diesem Wege finden. Z. E. Man hätte ein Δ, wovon eine Seite 10 betrüge, die an ihr liegenden Winkel $\frac{3}{7}$ und $\frac{1}{7}$ rechte; es fragt sich, was in letzter Aufgabe?

Auflösung.

$\frac{3}{7}$ sind etwas mehr als $\frac{3}{8}$ rechte Winkel; folglich kann man sie auch als $\frac{3}{8}$ behandeln, will man es genauer haben, so kann man sagen: die 8tel und 7tel vereinigen sich in den 56, $\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$ und $\frac{3}{8} = 21$, oder $\frac{1}{8} = 7$ ꝛc.; folglich machen $\frac{3}{7}$ beynahe $\frac{3}{8} + 1$ halben 8tel, oder $\frac{7}{16}$. Bey der Berechnung zu $\frac{7}{16}$, bleibt noch ein kleiner irrazionaler Bruch Rest; und die gefundenen Seiten sind folglich zu klein; und in diesem Fall zu groß, welches einander so ziemlich aufhebt.

Daß ich aber diese Berechnungen unzulänglich für den halte, der sich die Trigonometrie zum Berufe macht, beweist der Zweck des Buches. — Ich schreite vom 3Eck zum 4Eck. —

Die Berechnung der Quadrate und Rechtecken ist razional, und gehört nicht hieher; — es folgen nur irrazionale Aufgaben:

Man hat ein Rechteck, dessen eine der 2 längsten Seiten 10 Zoll hat; wird in diesem Rechteck eine Ecklinie gezogen, so theilt dieselbe jeden der 2 Winkel, durch den sie geht, so in 2 Theile, daß der eine $\frac{2}{3}$ und der andere $\frac{1}{3}$ rechte wird; es fragt sich, wie viel Quadratzöll das Rechteck habe?

Auflösung.

Durch diese Ecklinie wird das Rechteck in 2 rechtwinkliche △ getheilt, die Bestimmung eines dieser rechtwinklichen △ hätten wir schon; folglich auch das andere, und also auch den Inhalt des Rechtecks; ferner kann noch die Ecklinie berechnet werden. — Es fragt sich, wie viel Quadratzoll rc. eine Raute habe, deren eine Seite 10 Zoll beträgt, und 2 Winkel jeder $\frac{7}{8}$ rechte macht?

Um dieses zu lösen, wird eine Ecklinie in derselben gezogen, durch welches die Raute in 2 gleichschenkliche △ mit 8tel oder 16tels rechte Winkel zerlegt wird, deren Verhältniß der Seiten zu einander in der Generaltabelle berechnet sind; folglich kann auf diese gefundenen Verhältnisse der Seiten der Inhalt rc. berechnet werden. Ob die Theilungslinie der Raute von einem spitzen Winkel in den andern, oder von dem spitzen ꝛc. gezogen werde, ist ganz gleich.

Bey allen schiefwinklichen Parallelogrammen, die Winkel haben, von Halben, Drittel, oder 5tels rechten, oder Winkel, die sich durch diese ableiten lassen, können auf dem angegebenen Wege gelöst werden. Als Uebung mögen einige Aufgaben hierüber nicht überflüßig seyn. —

Statt Rauten können auch Parallelogramme angegeben werden, dann muß aber bestimmt werden, welchem Winkel die angegebene Seite gegenüber liegt.

Wichtig ist, wenn der Lehrer die Schüler wieder auf die Eigenschaften aufmerksam macht, die gegeben werden müssen, um ein schiefwinkliches Parallelogramm zu lösen; ferner kann er sie die Eigenschaften so angeben lassen, daß sie die Aufgaben selber machen; nicht uninteressant sind folgende Aufgaben:

Es sind 2 Ecklinien eines schiefwinklichen Parallelogramms gegeben; es fragt sich, ob durch dieses der Inhalt und die Seiten desselben berechnet werden können? Ferner sind die Ecklinien und eine Seite des schiefwinklichen Parallelogramms in Zollen gegeben; es fragt sich, ob der Inhalt und die fehlende Seite desselben durch die angegebene berechnet werden könne?

Hat es nicht immer eine hinlängliche Anzahl Eigenschaften gegeben, die das Lösen der Aufgabe möglich macht, so ist schon die Aufdeckung der Unmöglichkeit eine nicht vergebene Arbeit.

Auflösung der 1ten Frage.

Figur 54 soll das Parallelogramm seyn, dessen eine Ecklinie 10, und die andere 5 Zoll hat; nun wissen wir daß es Rauten giebt, deren Ecklinien so nahe als man will gleich, und eben so verschieden seyn können; desgleichen findet auch in schiefwinklichen Parallelogrammen statt; folglich kann durch die angegebenen Eigenschaften nicht einmal bestimmt werden, ob das 4Eck eine Raute, oder nur ein schiefwinkliches Parallelogramm sey?

Auflösung der 2ten Frage.

Figur 54 soll ein Parallelogramm seyn, deren eine Seite 6, eine Ecklinie 5, und die andere 10 Zoll hat.

Auf das Verhältniß dieser Seiten wird nur das obige Räsonnement angewandt, aus dem die Unmöglichkeit ohne Mühe gefolgert werden kann; folglich können die schiefwinklichen Parallelogramme durch die Angabe der Ecklinien, und noch einer Seite des Parallelogramms dazu, nicht gelöst werden. —

So wie bisher gewöhnlich die Möglichkeit eines Verhältnisses als Satz ausgesprochen wurde, so kann auch die Unmöglichkeit ausgesprochen werden; welches zu Zeiten so wichtig ist als der 1te. —

Ganz auf gleiche Weise kann das Paralleltrapez und Trapez behandelt werden, doch ist die weitläufige Ausführung der unregelmäßigen Figuren unwichtiger als die der regelmäßigen, und Parallelogramme; auch sind die Parallelogramme schon unwichtiger als die Δ; deswegen mag das Ausgeführte über die erst benannten auch hinlänglich seyn. —

Figur 55 ist ein rechtwinkliches Paralleltrapez, dessen Seite ab = 4, und dc = 10 Zoll ist; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Paralleltrapez habe, und wie viel Zoll jede der 2 andern Seite betrage?

Auflösung.

ad, und bc werden bis zu ihrer Vereinigung verlängert, wodurch das Δ sdc ähnlich sab wird, folglich verhält sich ab : dc ∷ sa : sd ꝛc.; — der Inhalt des Δ sab, verhält sich zum Inhalt des Δ sdc, wie sa ins Quadrat erhoben, zu sd ins Quadrat erhoben, oder wie 16 zu 100, um den Inhalt von abcd zu erhalten muß man 16 von 100 abziehen, welches 84 giebt; weil das Ganze ein Δ ist, so muß auch noch die Hälfte von den 84 genommen werden, welches 42 ist; folglich ist der Inhalt von abcd, 42 Quadratzoll; doch ist dieses nur im Fall, sd = dc, und der Winkel sdc recht ist, in jedem andern Fall ist es aber nicht wahr; das 4Eck abcd erhält nur 42 Zoll, wovon jeder ein Rechteck bildet, deren 2 Seiten jede einen Zoll hat; die andern 2 Seiten haben aber jede mehr oder weniger als 1 Zoll; je nachdem die Seite sd länger oder kürzer als dc ist. —

Aus dieser Auflösung ergiebt sich also, daß die angegebenen Eigenschaften nicht hinlänglich sind um den

Inhalt, und die fehlenden Seiten das 1te in Quadratzollen, und das 2te in Zollen zu bestimmen.

Figur 56 soll ein Trapez seyn, wovon ab = bc, die 3 Winkel dab, abc und bcd einander gleich, und jeder $\frac{3}{4}$ rechte beträgt, ferner hat ad 10 Zoll, es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Trapez, und wie viel Zoll jede der 2 andern Seiten betrage?

Auflösung.

Es wird zuerst die Gleichheit der Seiten untersucht, und deswegen ac gezogen, aus dem sich leicht erweisen läßt, daß ad = cd und cd, deswegen auch gleich 10 Zoll ist; der Winkel adc = $\frac{1}{4}$ rechter; also das △ adc gleichschenklich spitzwinklich, wovon der ungleiche Winkel $\frac{1}{4}$ rechter ist, und eine Seite die dem $\frac{7}{8}$ rechten gegenübersteht 10 Zoll macht; um die unbekannten Seiten, und den unbekannten Flächeninhalt zu erhalten, kann man das △ adc von d aus, in 2 rechtwinkliche zerlegen, und die gefundenen Verhältnisse in der Generaltabelle auf dieselbe übertragen ꝛc. — Desgleichen wird, nachdem man ac hat, mit dem △ abc vorgenommen, aus den Seiten wird der Inhalt bestimmt, folglich kann aus diesen angegebenen Eigenschaften der Inhalt, und die fehlenden Seiten des Trapetzes berechnet werden. —

Mit einem Trapez, das einen innern Ecken hat, wird das gleiche vorgenommen; in zu verwickelte Aufgaben muß man hier aber nicht gehen.

Es soll der Inhalt eines regelmäßigen 5Ecks gesucht werden, wenn eine Seite desselben 10 Zoll beträgt?

Auflösung.

Das regelmäßige 5Eck, wird vom Mittelpunkt aus, in 5 gleiche und gleichschenkliche Δ zerlegt, wodurch der ungleiche Winkel $\frac{4}{5}$ rechte erhält, diesem ungleichen Winkel steht nun eine Seite gegenüber die 10 Zoll hat; es wird also zuerst der Inhalt eines dieser 5 Δ auf die gewöhnliche Art berechnet, und endlich dieses Δ 5mal wiederhohlt. Weil die Winkel dieser Δ 5tels rechte enthalten; so kann man zur gehörigen Abkürzung die Generaltabelle zu Hülfe nehmen. —

Das regelmäßige 6Eck, 8Eck, 10Eck, 12Eck ꝛc. wird in 6, 8, 10 und 12 gleiche und gleichschenkliche Δ vom Mittelpunkt aus zerlegt, und wieder so wie das 5Eck berechnet. Im regelmäßigen 6Eck erhält man statt gleichschenkliche Δ gleichseitige.

Die wirkliche Ausführung einiger dieser Aufgaben ist für den stärkern und schwächern Schüler noch nöthig, doch weiter als bis zum 12Eck muß es nicht getrieben werden.

Noch folgen einige allgemeine Fragen, über das Δ, 4Eck ꝛc.:

Die Linie, welche vom Mittelpunkt des regelmäßigen 3, 4, 5, 6Ecks ꝛc. in einen seiner Winkel gezogen wird, beträgt 10 Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll jede dieser Figuren habe? —

Besonders interessant werden die Berechnungen, wenn man von einer regelmäßigen Figur zu einer andern die doppelt so viel Seiten hat, als die 1te schreitet. Z. E. Von dem gleichseitigen Δ, zum gleichseitigen 6Eck, oder vom Quadrat zum regelmäßigen 8Eck. —

Ich nehme zuerst das gleichseitige Δ, und das regelmäßige 6Eck.

Es werden in dem gleichseitigen Δ, vom Mittelpunkt desselben an seine 3 Winkel 3 Linien gezogen, wodurch 3 gleichschenklich stumpfwinkliche Δ entstehen, deren jeder stumpfer Winkal $\frac{4}{3}$ rechte beträgt, und jede von den gleichen Seiten dieser gleichschenklichen Δ hat 10 Zoll; nun wird von dem ungleichen Winkel eines jeden dieser Δ auf die gegenüberstehende Seite, eine rechtwinkliche Linie gezogen, wodurch man für $\frac{1}{3}$ des gleichseitigen Δ $\frac{2}{6}$ ꝛc. erhält; — werden diese Linien so weit verlängert bis sie gleich sind den Linien welche vom Mittelpunkt des gleichseitigen Δ in seine Winkel gezogen sind, so wird jedes dieser Δ in 2 Theile, eingetheilt, wovon jeder $\frac{1}{6}$ des regelmäßigen Δ und 6Ecks ist. $\frac{1}{6}$ des regelmäßigen 3Ecks, verhält sich zu $\frac{1}{6}$ des regelmäßigen 6Ecks, wie die senkrecht gezogene Theilungslinie, zu einer Seite des regelmäßigen 6Ecks ꝛc. —

Auf gleiche Weise, kann das Quadrat, zum regelwäßigen 8Eck, und das regelmäßige 8Eck zum regelmäßigen 16Eck ꝛc., das regelmäßige 5Eck zum regelmäßigen 10Eck ꝛc. berechnet werden. —

Ein paar Aufgaben hierüber sind für den Schüler nothwendig.

So wichtig die Berechnung des Inhalts ist, so ist die Berechnung der Seiten, und zwar derjenigen, welche den Umfang bilden, wenn man die Winkellinien in regelmäßigen Figuren, oder diejenigen Linien welche vom Mittelpunkt aus in denselben gezogen werden, als bekannt angiebt. —

Am wichtigsten ist aber diejenige Berechnung des Umfangs einer regelmäßigen Figur, die immer von einer Figur zur andern steigt, die doppelt so viel Seiten hat. Z. E. Vom gleichseitigen Δ zum regelmäßigen 6Eck, vom 6Eck zum regelmäßigen 12, vom 12Eck zum 24Eck ꝛc. —

Bis zum 24Eck sollte es von jedem Schüler auch wirklich gemacht werden, und zwar etwa mit 2 Decimal-Stellen.

Hier folgt der Anfang einer ähnlichen Berechnung:

Figur 57 soll das regelmäßige Δ seyn, $ba = 10$; a der Mittelpunkt; es wird $ag = ab$ gemacht, und rechtwinklich auf bc gezogen, das Δ bad ist rechtwinklich; folglich das Quadrat $ba = \square bd + da$; das Quadrat $ab = 100$; $\square ad = 25$, weil die Seite ad die Hälfte von ab ist; folglich das Quadrat auf b d oder d c = 75, und die Quadratwurzel 8,66; das gegebene Δ hat 6 solcher Seiten; c g ist eine Seite des regelmäßigen 6Ecks, und also gleich a c rc; folglich 10 Zoll; das regelmäßige 6Eck hat 6 solcher Seiten, oder 60 Zoll Umfang. Um den Umfang vom 12Eck zu erhalten, wird der Winkel g a c in 2 gleiche Theile getheilt, und a s = a c gemacht; das Δ s m c ist rechtwinklich; folglich das Quadrat c s = $\square$ s m + m c; das Quadrat c m = 25, Seite a m = Seite c d, oder gleich 8,66 Zoll, a s = 10; folglich Seite m s = 1,34; dieses ins Quadrat erhoben giebt: 1,7956, alles zusammen 26,7956; folglich das Quadrat s c = $\square$ 26,7956, die Seite s c = Quadratwurzel von 26,7956, oder 5,17; das 12Eck hat 12 solcher Seiten, oder 62,04 Zoll. — Soll das 24Eck gesucht werden, so verfährt man wie beym 6Eck zum 12Eck rc.

Haben sie den Umfang des 24Ecks rc. so berechnet, so darf ihnen der Lehrer das gefundene Verhältniß des Umfangs zum Halbmesser des 96 Ecks angeben; welches in einem niedern Zahlenverhältnisse ausgedrückt; 22 zu $3\frac{1}{2}$ ist; das heißt, der Umfang hat 22 gleiche Theile, wie die Ecklinie deren $3\frac{1}{2}$ hat, zugleich kann er ihnen sagen, daß man es auch noch genauer berechnet habe, welches aber für uns genau genug seye?

Nach diesem vorausgegangenen, kann der Lehrer den Schülern etwa folgende Aufgaben vorlegen:

Welche

Welche geradlinige Figuren können in einem Kreise beschrieben werden?

Welche von den geradlinigen Figuren nähern sich dem Kreise am meisten, und welche am wenigsten? Antw. diejenige regelmäßige, welche die größte Anzahl Winkel oder Seiten ꝛc. hat. — Wie diese und ähnliche Aufgaben gelöst werden können, und gelöst werden müssen, liegt außer diesem Buche; die vorhergehenden Bemerkungen geben hierüber Auskunft. Wie wollt ihr das Rund, oder den Kreis durch geradlinige Figuren berechnen?

Hier folgen ein paar Antworten, wiewohl die Schüler mehrere gegeben haben:

Die Zirkellinie des Kreises wird als eine regelmäßige geradlinige Figur, mit der größten Anzahl Seiten, oder Ecken betrachtet, bey der diese Seiten als die Grundlinie, und die senkrechte Linie, welche man von dem Mittelpunkt derselben auf die gegenüberstehende Seite zieht, die Höhe ist. Oder man kann bey derjenigen Figur anfangen, welche die kleinste, oder geringste Anzahl Seiten hat, den Inhalt derselben berechnen, und von diesem Inhalt, zum Inhalt der Figur mit doppelter Anzahl Seiten, oder Winkeln ꝛc. schließen.

Ich werde die zu lösende Aufgabe hier auf dem 1ten Wege weiter auseinander setzen. —

Durch die Berechnung des 96Ecks hat man gefunden, daß sich der Halbmesser desselben zum Umfang verhält, wie $3\frac{1}{2}$ zu 22, oder der Durchmesser zu seinem Umkreis wie 7 zu 22; — der Inhalt einer geradlinigen regelmäßigen Figur kann gefunden werden, wenn man den Umkreis mit derjenigen Höhe, die entsteht, wenn man vom Mittelpunkt derselben eine rechtwinkliche Linie auf die gegenüberstehende Seite zieht, multiplizirt. Je mehr Ecken eine geradlinige Figur hat, desto mehr nähert sie sich auch dem Kreise, das 96Eck soll sich für unsern Zweck hinlänglich dem Kreise genähert haben, also wird der Umfang desselben als Kreis, und die Ecklinie als Durchmesser erscheinen; und wir erhalten für die Kreislinie des Kreises 22 gleiche Theile in gerader Linie aufgefaßt, wie der Durchmesser desselben deren 7, oder der Halbmesser $3\frac{1}{2}$ hat. Um den Flächeninhalt des Kreises zu bekommen, muß also, wie bey den geradlinigen Figuren, nur der Umfang mit dem Halbmesser multiplizirt werden; und weil man diesen Inhalt in Quadratformen, oder in Quadratzollen begehrt, so muß endlich noch die Hälfte vom Produkt genommen werden. Hier folgen die Gründe, warum der Umkreis mit dem Halbmesser multiplizirt werden muß: —

Die Ecklinien der regelmäßigen Figur, als Kreis betrachtet, fallen mit den senkrechten Linien, welche man vom Mittelpunkt aus auf die gegenüberstehenden Seiten zieht, in eins zusammen; folglich darf für unsern Zweck das Rund mit Recht als eine geradlinige regelmäßige Figur betrachtet werden, deren rechtwinkliche Linien ꝛc., mit dem Halbmesser des Kreises eins sind; also besteht der Kreis aus geradlinigen Figuren, die aus lauter gleichschenklichen Δ bestehen, deren gleiche Schenkel mit der senkrechten Linie, welche zwischen diesen 2 Schenkeln auf die gegenüberstehende Seite gezogen wird, in eine Linie zusammenfallen, oder der Kreis kann als aus lauter gleichschenklichen Δ, deren gleiche Schenkel auf einander fallen, betrachtet werden, und deswegen kann der Umkreis des Kreises als die Grundlinie, und der Halbmesser als die Höhe desselben ins Auge gefaßt werden, und zwar in der Δs-Form, weil die Grundlinie den Umkreis, und die Höhe den Halbmesser des Kreises bezeichnen kann; die weitere Auflösung ist unnöthig.

Es folgen ein paar Aufgaben über den Kreis:

Wenn der Halbmesser eines Kreises 10 Zoll hat, so fragt es sich, wie viel Zoll der Umfang, und wie viel Zoll Flächeninhalt derselbe habe?

Auflösung der 1ten Frage.

Wir haben gesehen, daß sich der Halbmesser eines Kreises so zu seinem Durchmesser verhalte, wie 7 zu 44, oder der Durchmesser wie 7 zu 22; folglich verhält sich der Halbmesser des gegebenen Kreises, auch so zu seinem Umkreise; oder 7 : 44 ∷ 10 zu was? Antw. 62, $\frac{6}{7}$. Also ist der Umfang des zu suchenden Kreises 62, $\frac{6}{7}$ Zoll. Daß sich ein Halbmesser des Kreises eben so zu seinem Umfange verhalte, wie ein Halbmesser eines 2ten Kreises zu seinem Umfang, beruht auf der Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren, wozu auch der Kreis gezählt wird, um den Flächeninhalt zu berechnen; doch aber wohl gemerkt, daß er nur um dieses Zweckes willen dazu gezählt wird, nicht aber selber eine geradlinige Figur ist.

Auflösung der 2ten Frage.

Um den Inhalt zu bekommen, muß man den Umfang, oder 62,$\frac{6}{7}$ mit 10 multiplziren, und von dem Produkt die Hälfte nehmen; denn der Umfang kann als die Grundlinie eines Δ betrachtet werden; dessen Höhe der Halbmesser ist; wird die Grundlinie und Höhe eines Δ mit einander multiplizirt, so erhält man den Inhalt in Δs-Formen; das Δ ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit dem es gleiche Höhe und gleiche Grundlinie hat; folglich muß am Ende noch die Hälfte des gefundenen Produkts genommen werden. —

Um die Ausführung dieser Rechnungsoperation noch schneller zu bewerkstelligen, könnte man auch nur 62,$\frac{6}{7}$ mit 5 multiplziren; ferner könnte man auch noch folgenden Ansatz machen: 7 : 22 :: 10 zu was? und das gefundene Resultat mit 10 multiplziren.

Die Auflösung beyder Regeln ist leicht, und gehört eigentlich in die Zahlenverhältnisse und in die

Eigenthümlichkeit des geometrischen Verhältnisses des Kreises, wo sie weitläufig genug auseinander gesetzt ist.

Der Umfang eines Kreises in geraden Linien betrachtet, ist 100 Zoll; es fragt sich, wie viel Zoll der Halbmesser und wie viel Quadratzoll der Flächeninhalt desselben sey?

Auflösung der 1ten Frage.

Der Umfang eines Kreises verhält sich zum Halbmesser, wie 44 zu 7, und weil dieses in allen Kreisen statt findet, so verhält sich der Umfang 100 zu seinem Halbmesser wie 44 : 7. —

Hat man den Halbmesser und Umkreis eines Kreises, so erhält man den Inhalt durch die Multiplikation des Halbmessers mit dem Umkreise. —

Ein Kreis hat 100 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel Zoll der Halbmesser, und wie viel Zoll der Umkreis desselben betrage?

Auflösung der 1ten Frage.

Der Umkreis des Kreises wird als die Grundlinie eines Δ betrachtet; folglich giebt es ein Δ, dessen Grundlinie 44 Theile hat, wie dessen Höhe 7 bekommt, und dieses Δ hat nach der Angabe 100 Quadratzoll; es wird die Grundlinie und Höhe des Δ beybehalten, und noch ein ähnliches Δ so hinzugesetzt, daß sie mit einander ein Rechteck mit 200 Zollen bilden, deren Höhe 7 Theile hat, wie die

Grundlinie 44; dieses Rechteck in Quadrate verwandelt, giebt 6 und $\frac{2}{7}$ Quadrate, deren Seiten gleich sind der Höhe des Rechtecks mit den 200 Zollen; folglich kommt auf ein solches Quadrat 31, $\frac{9}{11}$ Quadratzoll; eine Seite desselben wird gleich der Quadratwurzel von 31, $\frac{9}{11}$, — und diese Wurzel ist gleich der Höhe des Rechtecks, oder Δ, oder Halbmesser des Kreises; freylich geht dieses auch hier, wie in den meisten ähnlichen Aufgaben, nicht rein auf; welches aber dessenungeachtet die Auflösung um nichts verändert.

Aus dem Halbmesser wird der Durchmesser ohne Schwierigkeit gefunden.

Bey der aufgelösten Frage wurde von dem bekannten Inhalt der Figuren die Seite derselben berechnet, welches erst später noch folgen sollte, und in dieser Rücksicht nicht hieher gehört, doch ist die scharfe Trennung auf dieser Stufe nicht mehr so nothwendig; weswegen auch der Kreis hier stehen darf. —

So wie der Kreis berechnet wurde, so könnten es auch Oval-, Schneckenlinien und andere krumme, und krumm- und geradlinig begrenzte Figuren werden, welches uns aber zu schnell auf ein höheres Gebiet führt, und deswegen in diesem Buche auch übergangen wird. Vielleicht bald etwas mehreres hierüber. Ich bleibe für jetzt nur bey einigen Ableitungen des Kreises stehen. —

Man giebt 2 Kreise, wovon der eine parallel mit dem andern ist, der Durchmesser des 1ten beträgt 5, und der des 2ten 15 Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das Parallelrund betrage, welches durch die 2 Kreise gebildet wird?

Auflösung.

Auf die gewöhnliche Art wird der Inhalt jeder dieser 2 Kreise berechnet, hernach der Inhalt des kleinern Kreises von dem des größern abgezogen, und der Unterschied giebt den Inhalt des Parallelrunds.

Auf eine 2te Art gelöst.

Wir wissen, daß sich die Rund eben so zu einander verhalten, wie ähnlich geradlinige Figuren; und diese verhalten sich wie ihre gleichliegenden Seiten ins Quadrat erhoben; folglich stehen die Kreise im nämlichen geometrischen Verhältnisse zu einander wie ihre Halb- oder Durchmesser ins Quadrat erhoben; es wird daher nur der Inhalt des einen Kreises gesucht, beyde Halb- oder Durchmesser ins Quadrat erhoben, und aus diesen 3 Theilen ein geometrisches Verhältniß gebildet, und durch dasselbe der Inhalt des 2ten gesucht. —

Mit ungleichlaufenden Kreisen, welche einander nicht durchschneiden, kann das gleiche vorgenommen werden; durchschneiden sie aber einander, so giebt es meistens Aufgaben, welche auf ein höheres Gebiet gehören; ich kehre daher wieder zu den geradlinigen Figuren zurück, und stelle noch einige Berechnungen regel- und unregelmäßiger Figuren auf, in denen nicht nur die Halbmesser derselben, sondern auch andere Seiten gegeben sind. In den 3Ecken und 4Ecken ist dieses hinlänglich ausgeführt; bey allen andern Figuren mangeln noch einige Aufgaben. —

Die Ecklinie eines regelmäßigen 5Ecks ist 10 Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll der Inhalt sey, und wie viel Zoll eine Seite desselben betrage?

Auflösung.

Wenn in einem regelmäßigen 5Eck 2 Ecklinien gezogen werden, so durchschneiden sie einander so, daß sich der eine Theil zum andern verhält, wie der 2te Theil zur ganzen Linie, welches bey der Berechnung der 5tels rechten Winkel auch wirklich ausgeführt ist; folglich dürfen nur die dort gefundenen Zahlenverhältnisse auf diese Linie übergetragen werden. —

Diejenige Linie, welche von einem Winkel des regelmäßigen 5Ecks an die Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogen wird, beträgt 10 Zoll; es fragt sich, wie viel Quadratzoll das 5Eck, und wie viel Zoll eine Seite desselben habe?

Auflösung.

Wird in diesem regelmäßigen 5Eck vom nämlichen Winkel noch eine Ecklinie gezogen, so entsteht ein rechtwinkliches Δ, wovon ein Winkel $\frac{2}{5}$ rechten hat, und die diesem Winkel gegenüberstehende Seite beträgt 10 Zoll; folglich können alle andere Seiten leicht durch die Generaltabelle gefunden werden, und aus den Seiten der Inhalt rc.

Auch können die Seiten des regelmäßigen 5Ecks so weit verlängert werden, bis sie zusammentreffen, und dann erst wieder Ecklinien gezogen werden, denen ein bestimmtes Maß beygelegt wird.

Eben so werden auch im unregelmäßen 5Eck Linien gezogen, ihnen ein bestimmtes Maß beygelegt, und aus demselben der Inhalt, und die andern Seiten berechnet. Z. E.

Man hat ein 5Eck mit lauter gleichen Seiten, 3 Seiten desselben bilden 2 rechte Gegenwinkel, und alle Winkel sollen in den Figuren seyn; es fragt sich, wie viel Zoll Flächeninhalt das 5Eck betrage, wenn jede Seite desselben 12 Zoll enthält? Wie viel Zoll eine Ecklinie desselben habe? — Ferner wie viel Zoll wird diejenige Linie erhalten, welche man von den $\frac{2}{3}$ rechten Winkel, senkrecht auf die gegenüberstehende zieht? Und endlich soll die erst, und zweit zu suchende Seite 12 Zoll haben; und dann fragt es sich wieder, wie viel Quadratzoll das 5Eck im 1ten und 2ten Fall betrage?

Auf eben diese Art, können auch noch andere Linien in diesem 5Eck wie auch in andern gezogen werden. —

Die längste Ecklinie des regelmäßigen 6Ecks soll 100 Zoll betragen, es fragt sich, wie viel Zoll eine

Seite des 6Ecks habe; und wie viel Quadratzoll sein Flächeninhalt sey?

Die zweite längste Ecklinie soll so viel Zoll haben, oder diejenige Linie, welche von der Mitte der einen Seite, auf die Mitte der andern rechtwinklich gezogen wird, habe so und so viel Zolle, es fragt sich, wieder was oben?

Wie viel beträgt der Inhalt des regelmäßigen 6Ecks, wenn eine Seite desselben 10 Zoll hat, 3 Seiten 2 rechte Gegenwinkel bilden, und die 2 andern Seiten, welche an den Enden dieser Schenkel liegen, ein jeder 1 ½ rechten beträgt? — Wie viel Zoll Flächeninhalt hat das 6Eck, wenn die längste Ecklinie darin 10 Zoll ꝛc. hat?

Eine weitläufige Ausführung ist hierüber unnöthig. —

Ganz unwichtig ist das 7Eck. — Das 8Eck muß nur abgekürzt untersucht werden; besonders das unregelmäßige; das 9Eck darf ganz wegbleiben, das 10Eck ꝛc. wird wie das 8Eck behandelt. —

§. 10.

Von der Berechnung der Seiten und des Flächeninhalts, welcher durch das Theilen entsteht.

Wird in einem Δ ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, so verhalten sich die 2 Δ welche durch dasselbe entstehen, wie die Theile der gegenüberstehend getheilten Seite; welches also bey der Berechnung der Seiten schon ausgeführt ist —, desgleichen findet statt, wenn der Winkel in 4, 8, 16 rc. gleiche Theile getheilt wird.

Zwey Winkel des gleichseitigen Δ werden jeder in 2 gleiche Theile getheilt; es fragt sich, wie viel ein jeder der 4 entstehenden Theile betrage? Antwort 2 sind jeder $\frac{1}{6}$, und jeder der 2 andern $\frac{1}{3}$ des Ganzen.

Diese Aufgabe ist leicht, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil kein irrazionales Verhältniß darin vorkommt, und in dieser Hinsicht gehört sie in den ausgeführten §. 7.

Im gleichschenklich rechtwinklichen Δ werden die 2 gleichen Winkel jeder in 2 gleiche Theile getheilt; es fragt sich, wie viel ein jeder der 4 entstehenden Theile des Δ vom Ganzen sey? (Angenommen die längste Seite habe 10 Zoll.)

Auflösung.

Figur 58 ist ein gleichschenkliches Δ, und die Winkel sind so wie angegeben ist getheilt; folglich ab:

ac ⁚ bd; dc, ferner ab : bd ⁚ ag : gd ꝛc., wie diese Seiten in Zahlen gesucht werden können, ist bey der Berechnung der Seiten des △ gezeigt worden; folglich kennt man das Verhältniß, welches das △ acd und adb zum Ganzen hat ꝛc. —

Theilt man den rechten Winkel, und einen der 2 gleichen ebenfalls in 2 gleiche Theile, so ist die Auflösung wieder wie oben: desgleichen findet statt, wenn man 2 Winkel in 4, oder 8 ꝛc. gleiche Theile theilt; oder wenn einer in 2, und der andere in 4 oder 8 ꝛc. gleiche Theile getheilt wird; auch können einige Winkel, in 3, 5 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden; dann müssen die Theile welche dadurch entstehen, sich aber aus den halben; oder 3tels, oder 5tels rechten Winkel ableiten lassen, wenn die Aufgaben nicht verwinkelt werden sollen; doch lösbar sind alle Aufgaben, welche auf diesem Wege gegeben werden. —

Auf eben diese Art können alle 3 Winkel eines gleichschenklichen △ getheilt, die dadurch entstehenden Theile des △ gesucht und berechnet werden, desgleichen die Seiten.

Beym gleichschenklich spitz- und stumpftwinklichen △ müssen keine andere genommen werden, als etwa solche, deren Maß der Winkel sich von halben, 3tel, oder 5tels rechten ableiten läßt. —

Werden in diesen △ dann noch gleichlaufende Linien gezogen, so sind die entstehenden Theile noch leichter zu bestimmen; indem es statt irrazionale; razionale, und irrazionale Verhältnisse giebt; worüber jede weitere Ausführung und Erklärung überflüssig wird.

Statt Winkel, in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile zu theilen, können auch Seiten, in allen möglichen Dreyecken, in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt, und an die gegenüberstehenden Winkel Linien gezogen werden, und hernach der Flächeninhalt der Theile, wie auch die Seiten berechnet werden, worüber als Beleg ein paar Aufgaben folgen: —

Es wird eine Seite des gleichseitigen Δ, die 10 Zoll hat in 3 gleiche Theile getheilt, und von den 2 Theilungspunkten an den gegenüberstehenden Winkel 2 Linien gezogen; und hernach der Inhalt dieser Theile, wie auch die Theilungslinien berechnet.

Die 1te Frage enthält nur razionale Verhältnisse, und ist deswegen leicht.

Um die Theilungslinien zu berechnen, kann man nur von dem getheilten Winkel, eine rechtwinkliche Linie auf die gegenüberstehende Seite ziehen, durch welches rechtwinkliche Δ entstehen, deren Seiten durch die Hypotenuse berechnet werden ꝛc. —

Eine von den gleichen Seiten, des gleichschenklich rechtwinklichen Δ wird in 2, 3, oder 4 ꝛc. gleiche Theile getheilt, und von jedem Theilungspunkt an den gegenüberstehenden Winkel, die nöthigen Theilungslinien gezogen; es fragt sich, wie viel der Inhalt dieser Theile, und wie viel Zoll jede Theilungslinie habe; wenn die längste Seite 10 Zoll enthält; desgleichen fragt es sich im nämlichen Δ, wenn man eine ungleiche, und eine gleiche Seite so eintheilt. —

Mit dem gleichschenklich spitz- und stumpfwinklichen Δ, welche gegebene Winkel haben, von halben, 3tel, und 5tels rechten, findet das gleiche statt; wozu besonders die berechneten Seiten in der Generaltabelle benutzt werden können.

Sind alle Seiten eines Δ gegeben, und soll durch diese Angabe der Inhalt, oder die Winkel desselben berechnet werden, so giebt es einige Aufgaben, die leicht sind, und andere, welche etwas verwinkelt und schwer werden. Vor ich zum Theilen dieser Seiten schreite, werde ich noch ein paar Aufgaben, die bey den Seiten nicht gelöst worden sind, hier lösen, worauf das Theilen ꝛc. dann ohne weiters gegründet werden kann.

Eine Seite eines Δ enthält 5 Zoll, eine 2te 4, und eine 3te 3; es fragt sich, was der Flächeninhalt und die Winkel desselben betragen?

Auflösung.

Das Δ mit diesen Eigenschaften ist rechtwinklich, denn eine Seite ins Quadrat erhoben ist gleich den Quadraten der beyden andern Seiten, welches nur bey dem rechtwinklichen Δ der Fall ist; folglich kann man annehmen, die Grundlinie habe 3, und die Höhe 4 Zoll; also der Flächeninhalt 3 X 4 getheilt durch

2 oder 6. Um das Verhältniß der Winkel zu bekommen, nimmt man für die Hypotenuse statt 5, 10, durch welches man folgendes geometrisches Verhältniß erhält: 5 : 4 ⁚⁚ 10 zu was? oder 8; also hat man ein rechtwinkliches Δ, dessen Hypotenuse 10 ist, und eine Seite, welche einem unbekannten Winkel gegenübersteht, enthält 8; folglich kann nur dieses Verhältniß in der Generaltabelle aufgesucht werden, freylich erhält man es niemals rein, welches aber die Aufgabe um nichts ändert. —

Hat man einen der spitzen Winkel dieser Δ, so läßt sich der andere durch das Abziehen des gefundenen vom rechten finden. —

Es ist ein Δ gegeben, wovon 2 Seiten jede 5 Zoll haben, und die 3te 9; es fragt sich, wie viel der Inhalt und jeder einzelne Winkel betrage?

Auflösung.

Das Δ ist gleichschenklich spitzwinklich; denn das Quadrat auf der längsten Seite ist größer, als die der 2 andern ꝛc. — wird von dem ungleichen Winkel eine rechtwinkliche Linie gezogen, so entstehen 2 rechtwinkliche Δ, deren Hypotenuse und eine Kathete in jedem bekannt ist; und aus diesem kann auch die unbekannte gefunden werden; hat man die Grundlinie und Höhe eines Δ, so wird der Inhalt wie in voriger Aufgabe berechnet. — Desgleichen geschieht mit den Winkeln. —

Es ist ein Δ gegeben, dessen eine Seite 10, eine andere 11, und die 3te 12 Zoll hat; es fragt sich, wie viel der Inhalt, und wie viel die Winkel betragen?

Auflösung.

Das Δ ist ungleichseitig spitzwinklich. — Es wird von dem Winkel, welcher der Seite mit 10 Zoll gegenübersteht eine senkrechte Linie 2c. gezogen, durch welches ebenfalls 2 rechtwinkliche Δ entstehen. Das Quadrat auf der Seite, ich nehme 12, ist gleich denen auf den 2 andern Seiten dieses Δ, weniger dem doppelten Rechteck auf 10, und dem kleinern Theil den die senkrechte Linie von dieser Seite scheitet; 12 ins Quadrat erhoben ist 144, 11 ins Quadrat erhoben 121, und 10 in demselben 100, zusammen 221; 144 von 221 abgezogen bleibt 77; also das doppelt Rechteck auf der Seite die 10 Zoll hat 77, und das einfache $38\frac{1}{2}$, eine Seite dieses Rechtecks enthält 10 Zoll der Inhalt $38\frac{1}{2}$; folglich muß die unbekannte Seite $3\frac{17}{20}$ Zoll seyn, ein Theil der Seite mit den 10 Zoll, hat $3\frac{17}{20}$; folglich bleibt für den andern $6\frac{3}{20}$; also hat man 2 rechtwinkliche Δ, wovon die Hypotenuse des einen 12, eine Kathete $6\frac{3}{20}$ Zoll ist, die Hypotenuse des andern ist 11, und eine Kathete $3\frac{17}{20}$ Zoll; die unbekannte Kathete ist für beyde gemein, und kann aus diesen Eigenschaften auch berechnet werden; die weitere Auflösung in der Berechnung des Flächeninhalts, und Winkel geht wie oben.

Mit

Mit dem stumpfwinklich ungleichseitigen Δ kann das nähmliche vorgenommen werden. — Nach diesem können dann die Winkel getheilt werden. Es wird jetzt noch das Umgekehrte gethan.

Eine von den gleichen Seiten des gleichschenklich rechtwinklichen Δ wird in 2 gleiche Theile getheilt, und von dem Theilungspunkt an den gegenüberstehenden Winkel wird eine Linie gezogen; es fragt sich, in welches Verhältniß der Winkel getheilt werde;

Auflösung.

Es wird angenommen, die Hypotenuse habe 10 Zoll, aus dieser Annahme werden zuerst alle Seiten der Figur berechnet, und aus dem gefundenen Verhältnisse der Seiten durch Hülfe der Generaltabelle auf die Winkel geschlossen, wie es in den vorhergehenden Auflösungen geschah. —

Man hat ein Δ, wovon eine Seite 10, eine 2te 11, und eine 3te 12 Zoll hat; die 1te Seite wird in 2, oder 3 rc. gleiche Theile getheilt, desgleichen die 2te und 3te, es fragt sich, in welche Verhältnisse die Winkel rc. dieses Δ getheilt werden, wenn man von dem Theilungspunkte an die gegenüberstehenden Winkel Linien zieht. —

Was bisher im Δ geschehen ist, kann auch im 4Eck, 5Eck rc. vorgenommen werden; doch ist es nicht mehr so wichtig wie das 1te. Ich mache den Anfang beym Quadrat.

Eine Seite eines Quadrats wird in 2, 3 ꝛc. gleiche Theile getheilt, und von den Theilungspunkten, an die Seiten oder Winkel des Quadrats Linien gezogen, und der Inhalt der dadurch entstehenden Theile berechnet; ferner wird das Verhältniß der Winkel, und Seiten bestimmt.

Eine Auflösung in der Berechnung der Seiten.

Figur 59 ist ein Quadrat, dessen jede Seite 10 Zoll hat; $dg = gb$, $ah = \frac{ea}{4}$. Das Quadrat $ed + db = \Box\, eb$; folglich erhält man eb durch die Ausziehung der Quadratwurzel von $ed + db$; das Δ efh ist ähnlich gfb; folglich verhält sich $ef : fb :: eh : gb :: 3 : 2$; also kennt man ef und fb; auch $hf : fg$; um hg zu erhalten, zieht man hs rechtwinklich auf db, $hs = ab$, $sb = ha$ oder $\frac{db}{4}$, desgleichen gs; das Quadrat auf $hg = \Box\, hs + sg$; die weitere Auflösung ist unnöthig.

Diese einzige Aufgabe mag genugthuend seyn, wenn das Δ gehörig geübt ist. Es folgen nur noch ein paar Aufgaben über das 5Eck: —

Es wird im regelmäßigen 5Eck durch die Mitte einer Seite, eine Linie gleichlaufend mit einer Seite desselben gezogen; es fragt sich, in welchem Verhältnisse diese 2 Theile zu einander stehen?

Auflösung.

Es kann für eine Seite des 5Ecks jede beliebige Anzahl Zoll angenommen werden. Ich nehme an, sie habe 10, Figur 60 soll das 5Eck seyn, g h die gleichlaufende Linie; fa und cb werden bis zu ihrer Vereinigung verlängert, welches i ist; der Winkel iab = $\frac{4}{5}$ rechte, also bleibt für aib = $\frac{2}{5}$; durch diese gefundenen Eigenschaften der Δ, kann durch die Generaltabelle jede der fehlenden Seiten ohne Mühe gefunden werden, und aus den Seiten der Inhalt ꝛc. —

Wird gh durch einen andern Theil von af gleichlaufend fc gezogen, so läßt sich eine ähnliche Auflösung darüber machen, auch wenn sie ungleichlaufend ab wäre. Z. E. Von der Mitte af, wird sie auf $\frac{1}{3}$ von bc gezogen; es fragt sich wieder was in letzter Aufgabe? —

Auflösung.

Diese jetzt entstehenden Theile werden auf die vorhergehenden 2 zurückgeführt, und zwar nach dem §. der razionalen Berechnung. —

Weil ähnliche Aufgaben im regelmäßigen 6Eck razional gelöst werden können, so dürfen sie hier ganz übergangen werden. Das regelmäßige 8Eck, 10Eck, 12Eck ꝛc. kann ganz gleich wie das 5Eck behandelt und berechnet werden. Das 7Eck ꝛc. ist unwichtig, und darf daher hier ganz übergangen werden.

Auch im 5Eck; 6Eck ꝛc. können von den Seiten aus Linien an die Winkel gezogen werden, und der Inhalt der dadurch entstehenden Theile und Winkel berechnet werden. Die Berechnung der Winkel ist am schwersten, doch sind sie aber bey solchen Figuren nicht mehr wichtig, — besonders wenn mehrere Winkel getheilt werden; auf die unregelmäßigen Figuren muß es auf keinen Fall ausgedehnt werden. —

§. 11.

Berechnung der Seiten und Winkel der geschlossenen Figuren durch die Angabe ihres Inhalts.

Weil der Inhalt einer Figur, zu einer ihrer Seiten, als 2te Potenz zu ihrer Wurzel ins Auge gefaßt werden kann, so nehme ich auch zuerst diejenigen Flächen, welche am meisten mit diesem Verhältniß harmonieren, wozu besonders das Quadrat dient. —

(Die Ausziehung der Quadratwurzel wird, wie früher schon bemerkt wurde, vorausgesetzt. —)

Man hat ein Rechteck, welches 2mal so lang, als breit ist, der Inhalt beträgt 100 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel die Länge, und wie viel die Breite dieses Rechtecks seye? Ferner wie viel die Ecklinie dieser Figur betrage? Und endlich wie viel die Winkel dieses ▭, jeder einzeln genommen, rechte mache?

Auflösung.

Das Rechteck, welches 2mal so lang als breit ist, bildet 2 Quadrate, deren Seiten eines jeden gleich ist der Breite des Rechtecks; also sind sie auch gleich, — und der Inhalt des einen ist die Hälfte von dem Inhalt des ganzen Rechtecks, oder 100 Quadratzollen, das 50 ist; eine Seite dieses Quadrats ist die Quadratwurzel von 50, — die Länge des Rechtecks hat 2 solcher Seiten, die Breite eine. Die Ecklinie dieser Figur ist die Hypotenuse dieser 2 Seiten. — Wenn man alle 3 Seiten eines Δ berechnet kennte, so kann dieses Verhältniß nur annähernd in der Generaltabelle aufgesucht werden, welches im vorhergehenden §. weitläufig genug auseinander gesetzt wurde. Ist das Rechteck $2\frac{1}{2}$ mal so lang als breit, $2\frac{3}{4}$ ꝛc., — so giebt es im 1ten Fall $2\frac{1}{2}$ und $2\frac{3}{4}$ Quadrate, die weitere Auflösung geht wie bey der vorhergehenden Aufgabe.

Werden in ähnlichen Aufgaben noch reine Zahlenkombinationen hineingebracht, so können einige nicht unwichtige neue Fragen gemacht werden, die aber eigentlich nicht hieher gehören, indem Zahl und Form im Gleichgewicht bleiben muß, und nicht schnell so tief in die zweyte Potenz einführen darf. Um das gesagte anschaulicher zu machen, folgen ein paar Aufgaben. —

Die Breite eines Rechtecks ist $\frac{1}{3}$ seiner Länge, $\frac{4}{5}$ des Inhalts machen 100 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel Zoll die Länge, und wie viel Zoll die Breite betrage?

Etwas wichtiger als diese, sind folgende Aufgaben, und führen zu tief in die 2te Potenz ein.

Man hat 2 Rechtecke, die Breite des 1ten ist $\frac{1}{3}$ seiner Länge; die Länge des 1ten ist ferner $\frac{1}{4}$ der Länge des 2ten Rechtecks; der Inhalt von beyden beträgt 200 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel Zoll die Breite eines jeden betrage? —

Auflösung.

Das 1te Rechteck enthält 3 Quadrate, deren Seiten gleich sind der Breite desselben. Die Länge des 2ten Rechteck ist 4mal so viel als seine Breite, also enthält es 4 Quadrate rc., — nun ist aber die Breite des 2ten Rechtecks gleich der Länge des 1ten, und die Länge des 1ten ist 3mal so lang als seine Breite; folglich ist die Breite des 2ten Rechtecks 3mal so viel als die Breite des 1ten, und also enthält ein Quadrat des 2ten Rechtecks 9 Quadrate, wie das 1te Rechteck deren 3 hat; die 4 Quadrate des 2ten haben also 36 solcher Quadrate; 36 und 3 macht 39 Quadrate; 1 ist der 39ste Theil von den 39, also auch dem 39 von 200 gleich rc. — Um die Breite des 1ten Rechtecks zu erhalten, muß die Quadratwurzel von einem solchen Quadrate ausgezogen werden; die fernern zu suchenden Verhältnisse können ohne Mühe aus diesem gefolgert werden.

Es sind 2 Rechtecke gegeben, wovon die Länge des 1ten um 1 Zoll mehr ist als seine Breite; die Breite des 2ten ist gleich der Länge des 1ten, und seine Länge ist ebenfalls wieder um 1 Zoll mehr als seine Breite; der Inhalt von beyden ist 100 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel der Inhalt eines jeden betrage; wie viel ihre Seiten seyen? ꝛc. —

Um ähnliche Aufgaben zu lösen, erfordert es nicht nur die Ausziehung der Quadratwurzel von einer razionalen, oder irrazionalen Zahl, sondern die Ausziehung der Quadratwurzel von einer Zahl, in der sich ein Quadrat ꝛc. und eine oder mehrere Wurzeln von ihm vereinigen, welches nicht so weit vorausgesetzt werden darf; und deswegen fordere ich auch die Lösung von niemanden auf dieser Stufe. —

Die Behandlungsart der 2ten Potenz bietet in ihrem ganzen Umfange ein wichtiges ausgedehntes und selbstständiges Gebiet dar, die wie ich früher schon zeigte, nicht in dieses Buch gehört, indem dasselbe für die vorgerüktere Schüler in den untern Volksklassen bestimmt ist, und dieselben allgemein nicht in die Potenzen geführt werden können. In dieser Hinsicht fällt auch die Bestimmung der Seiten gegebener Figuren durch die Angabe des Inhalts unter allen Formen weg; es dürfen folglich hier nur solche Reihenfolgen und Aufgaben genommen werden, die nicht tiefer als etwa in die Erhebung und Ausziehung der Quadrat-wurzeln eingreifen, worüber ich bey meinen kommenden Aufgaben sorgfältig wachen werde. = Vor ich weiter geh, will ich mein gesagtes durch die Auflösung letzter Aufgabe verdeutlichen: —

Das 1te Rechteck ist um 1 Zoll länger als breit, wird 1 Zoll Flächeninhalt von der Länge weggeschnitten, so bildet der Rest noch ein Quadrat, dieser Zoll Flächeninhalt wird als Wurzel des 1ten Quadrats betrachtet; durch welches man also für das 1te Rechteck 1 Quadrat und 1mal seine Wurzel erhält; wird vom 2ten Rechteck ebenfalls 1 Zoll ꝛc. von der Länge weggeschnitten, so erhält man wieder 1 Quadrat und 1mal seiner Wurzel; das 2te Quadrat ist aber ungleich dem 1ten; es wird ihm daher gleich gemacht; und zwar, indem man eine Wurzel der einen Seite, und 1 der andern anstoßenden Seiten desselben wegschneidet, welches 2 Wurzeln des 1 Quadrats, und 2 Quadratzoll giebt; eine Wurzel des 2ten ist nun schon weggeschnitten, und ist gleich einer Wurzel des 1ten, mehr 1 Quadratzoll gleich; beyde Rechtecke haben also zusammen 2 Quadrate, 4 Wurzeln und 2 Quadratzoll; um 1 Quadrat, 2 Wurzeln und 1 Quadratzoll zu erhalten, muß man die Hälfte davon nehmen, welches 100 oder 1 Quadrat, 2 Wurzeln und 1 Quadratzoll giebt; — 1 Quadrat und 2 Wurzeln von ihm, die 1 Rechteck bilden, deren 2 Seiten gleich sind den Seiten des Quadrats, mehr ein Quadratzoll machen auch wieder 1 Quadrat, und sind in vorliegender Aufgabe so viel als die Hälfte der 2 Rechtecke oder 100, die Quadratwurzel davon ist 10; das 1te Quadrat hat eins weniger als 10, oder 9, folglich ist das 1te Rechteck 9 breit, und 10 lang, das 2te 10 breit und 11 lang. —

Auch wenn die Wurzel nicht rein aufgegangen wäre, so würde doch diese Auflösung richtig seyn.

Von dem Viereck schreite ich zu dem △.

Der Inhalt des gleichschenklich rechtwinklichen △ ist 100 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel Zoll die Katheten, und wie viel Zoll die Hypotenuse betrage?

Auflösung.

Wenn der Flächeninhalt dieses △ 100 Quadratzoll beträgt, so hat ein Quadrat, dessen Seiten gleich sind den Katheten 200; folglich muß nur die Seite dieses Quadrats durch die Ausziehung der Wurzel gesucht werden; diese gefundene Seite wird auch gleich einer der gleichen Seiten des gleichschenklich rechtwinklichen △. Die fernere Auflösung hat keine Schwierigkeit mehr. —

Es fragt sich, wie viel eine Seite des gleichseitigen △ seye; wenn sein Inhalt 100 Quadratzoll beträgt?

Auflösung.

Es kann der Inhalt eines beliebigen gleichseitigen △ berechnet, und aus dem gefundenen Flächencheninhalt desselben, einer seiner Seiten und dem Inhalt des gleichseitigen Δ, dessen Seite gesucht werden muß, ein geometrisches Verhältniß gebildet werden. Die Gründe darüber, und fernere Auflösung ist im geometrischen Verhältnisse der ähnlichen Figuren hinlänglich auseinander gesetzt.

Daß es auch über ähnliche Aufgaben wieder verschiedene Auflösungen giebt, ist doch wohl nicht mehr nöthig zu beweisen, besonders da die letzte sich sehr von allen andern unterscheidet. —

Wie viel betragen die Seiten eines rechtwinklichen Δ, wenn ein Winkel desselben +, 75, 76tels ꝛc. rechter ist, und der Flächeninhalt 200 Quadratzoll beträgt?

Auch diese Aufgaben, können auf obige Art gelößt werden, schneller können sie aber doch noch durch die Generaltabelle berechnet werden; welches weiter auszuführen hier unnöthig ist.

Alles dieses findet beym gleichschenklich spitz- und stumpfwinklichen Δ, wie auch beym ungleichseitigen deren Verhältniß, oder Maß der Winkel sich aus den Halben, 3tel; und 5tels rechten ableiten läßt. Eine gedrängte Ausführung ist für den kräftigern und schwächern Schüler nicht ganz entbehrlich; welches aber ein jeder nach Bedürfniß im Stande seyn wird zu machen. —

Das Theilen der Figuren, wird nicht mehr von diesem § getrennt.

Ein gleichseliges Δ welches 100 Quadratzoll hat, ist durch eine Linie welche mit einer Seite gleichlaufend ist, in 2 gleiche Theile getheilt; es fragt sich, wie viel Zoll die Seiten des einen, und andern Theile habe?

Auflösung.

Der eine Theil bildet ein gleichseitiges Δ, und ist folglich ähnlich, und die Hälfte des Ganzen, folglich verhält es sich in seinen Seiten zum Ganzen, wie die Seiten eines Quadrats, welches die Hälfte des andern ist, zu diesem 2ten. Wenn ein Quadrat 100 Quadratzoll hat, so ist die Hälfte 50; die Wurzel des 1ten ist 10, und die des 2ten 7,07 und noch ein irrazionaler Bruch Rest; also verhält sich eine Seite des gleichseitigen Δ welches die Hälfte eines andern ist, wie 7,07 zu 10. Wie eine Seite des ganzen gleichseitigen Δ durch den Inhalt berechnet werden kann, hatten wir schon; wird denn das Verhältniß 7,07 : 10 vom Ganzen abgezogen, so erhält man eine Seite des Paralleltrapezs, welches gleich ist der Hälfte des ganzen gleichseitigen Δ. —

Auf eben diese Art kann man ein gleichseitiges Δ mit diesem oder jenem Flächeninhalt in 3, 4 rc: gleiche Theile theilen.

Um Z. E: eins in 3 gleiche Theile zu theilen, sucht man zuerst eine Seite des zu theilenden Δ erhebt dieselbe ins Quadrat, nimmt den 3ten Theil des Quadrats, sucht die Wurzel davon, welches $\frac{1}{3}$ des gleichseitigen Δ giebt; soll das 2te 3te gesucht werden, so nimmt man ⅔ des ganzen Δ, berechnet die Wurzel davon, und zieht von dieser Wurzel das 1te 3tel des ganzen Δ ab, durch welches man das 2te 3tel erhält; um das 3te 3tel zu bekommen, wird die Wurzel von ⅔ von einer Seite des ganzen Δ abgezogen. Die Gründe aller dieser ausgesprochenen Sätze, sind in der vorhergehenden Auflösung ziemlich aus einander gesetzt worden.

Ein Δ in 4, 5, 6, 7 ꝛc. gleiche Theile so einzutheilen, ist nicht mehr nöthig. Das Ausgeführte ist auf alle Δ anwendbar; welches auf dem geometrischen Verhältniß ähnlicher Figuren beruht.

Es werden in einem gleichschenklich rechtwinklichen Δ welches 100 Quadratzoll hat, 2 Linien gezogen, wovon die eine mit einer, und die andere mit einer 2ten Seite desselben gleichlaufend ist, und jede Linie soll dasselbe in 2 gleiche Theilen theilen; es fragt sich, wie viel die Seiten dieser Theile betragen; ferner wie viel Quadratzoll jeder der 4 Theile des Δ habe?

Auflösung.

Figur 61 soll das Δ seyn, das 4Eck $fecb = \frac{acb}{2}$,

$acds = \frac{abc}{2}$; folglich ist das 4Eck $fgdb = sgea$, und $cdg = gfs$. Eine Seite des Δ afe, wird nach dem gleichseitigen Δ welches in 2 gleiche Theile getheit wurde berechnet; kennt man auch nur eine Seite eines Δ, so kennen die andern ohne Mühe berechnet werden. —

Aehnliche Aufgaben mit Zahlen wirklich auszuführen, ist immer eine gute Uebung für Schüler; welches aber der Lehrer nach dem Verhältnisse der Zeit, und andern Umständen einrichten mag.

Mit ungleichlaufenden Linien, ein Δ in 2, und mehrere gleiche Theile zu theilen ist unwichtig ꝛc. —

Man hat ein gleichschenklich rechtwinkliches Δ, welches 100 Quadratzoll hat, und nun soll das Δ so in 2 gleiche Theile getheilt werden, daß der eine Theil ein gleichschenklich Δ bildet, deren ungleiche Winkel $\frac{1}{2}$ rechte beträgt; es fragt sie, wie viel Zoll die Seiten desselben betragen?

Auflösung.

Es wird ein gleichschenklich spitzwinkliches Δ, dessen ungleiche Winkel $\frac{1}{2}$ rechten, und dessen Inhalt 50 Zoll beträgt, gemacht; darauf werden die gleichen Seiten dieses Δ von einer Kathete und Hipotenuse des gleichschenklich rechtwinklichen abgezogen; aus dem sich die Seiten des andern Theils oder 4Ecks ergeben. —

Ein Quadrat mit einer gleichlaufenden Linie in 2, 3 gleiche Theile zu theilen, und aus dem Inhalt der Theile, die Seiten zu berechnen ist unwichtig, desgleichen ein Rechteck, und andere schiefwinkliche Parallelogramme, Paralleltrapeze und Trapeze ꝛc.

Der Inhalt eines regelmäßigen 5Ecks soll 100 Quadratzoll betragen; es fragt sich, wie viel Zoll eine Seite desselben habe?

Auflösung.

Es wird der 5te Theil von dem 5Eck genommen, welcher 20 Quadratzoll ist, dieser wird als ein gleichschenkliches Δ mit einem $\frac{4}{5}$ rechten Winkel betrachtet, deren Seite, welche dem $\frac{4}{5}$ Winkel gegenübersteht berechnet werden muß; um dieses hervorzubringen, wird der Inhalt eines beliebigen aber ihm ähnlichen Δ berechnet, und aus diesem Inhalt der Seite welche dem $\frac{4}{5}$ rechten Winkel gegenübersteht, und den 20 Quadratzollen ein geometrisches Verhältniß gebildet; das 4te Glied des geometrischen Verhältnisses giebt eine Seite des regelmäßigen 5Ecks, die Gründe findet man bey dem geometrischen Verhältnisse ähnlicher Figuren.

Auf eben diese Art kann man durch den Inhalt des regelmäßigen 6 und 8Ecks 2c. die Seiten berechnen, auch mit dem 7Eck wäre es möglich; nur ist es etwas verwickelter und schwerer, als bey denjenigen Figuren, deren Verhältniß der Winkel sich von dem halben, 3tel und 5tels rechten ableiten läßt.

Um diese bemerkte Aufgabe auf dem kürzesten Weg, zu lösen, können die Berechnungen der Generaltabelle gebraucht werden. —

Mit unregelmäßigen 5 und 6 Ecken 2c., dürfen nur ganz sparsam einige Aufgaben dieser Art gegeben werden; denn es führt auf der einen Seite zu wenig wichtigen Aufgaben, und auf der andern noch zu sehr verwickelten und schwierigen. — Die Ausführung dessen bleibt dem Lokalbedürfnisse eines jeden überlassen. —

Auch das 5Eck, 6Eck rc., kann wie das Δ in 2 rc. gleiche Theile getheilt werden. —

Noch folgen einige Aufgaben über das Theilen, die etwas verschieden von den gemachten sind.

Figur 62 soll ein Quadrat seyn, in dem 2 Linien so gezogen sind, daß das Quadrat a $= \frac{\square\, b}{2}$ ist; es fragt sich, in welchem Verhältniß die Seiten des 1ten zu denen des 2ten stehen?

Auflösung.

Für jede Seite kann eine beliebige Anzahl gleicher Theile, ader Zoll genommen werden. Ich nehme an, die Seite des ganzen Quadrats habe 10 Zoll; folglich der Inhalt desselben 100 Quadratzoll; eine Seite des Quadrats a, mehr eine Seite des Quadrats b, sind gleich einer Seite des ganzen Quadrats, oder 10 Zoll; also muß 10 nur so in 2 Theile getheilt werden, daß das Quadrat auf dem einen Theil doppelt so groß ist, als das auf dem andern. Es wird angenommen, das doppelt so große Quadrat habe 100 gleiche Quadrate, wodurch das einfache 50 erhält, die Quadratwurzel von 50 ist $= 7$, und 1 Rest; die von 100 $= 10$;

folglich verhält sich eine Seite von a, zu einer Seite von b, wie 7 zu 10; beyde Seiten zusammen haben 10 gleiche Theile oder 10 Zoll, und in ihrem gefundenen Verhältniß haben sie 17 gleiche Theile; folglich kommt auf einen Theil der 17te Theil von 10 = $\frac{10}{17}$, eine Seite des Quadrats a, hat 7 Theile, oder $\frac{70}{17}$ = $4,\frac{2}{17}$ ꝛc.

Wäre angegeben worden, eine Seite des Quadrats a, oder b, betrüge 10, so wäre die Aufgabe noch leichter. —

Wenn das Quadrat a ein mehrfacher Theil von b ist, so können die Aufgaben ganz gleich gelößt werden.

Wird ein Rechteck zum Quadrat a, oder b in ein organisches Verhältniß gesetzt, so werden die Aufgaben so leicht, daß sie auf dieser Stufe nicht mehr verdienen gelößt zu werden.

Auch bey solchen Figuren kann man sehr leicht in Aufgaben kommen, in der Quadrat und Wurzel vereiniget sind; die, wie schon einmal gesagt, nicht in dieses Buch gehören. Um den Lehrer und Schüler deutlich genug vor ähnlichen Aufgaben zu warnen, folgt noch eine: a, an Figur 62; soll ein Rechteck bilden, welches um 1 Zoll länger als breit ist, und b soll ebenfalls eins bilden, welches um 1 Zoll länger als breit ist; und endlich verhält sich das 1te Rechteck zum 2ten, wie 3 zu 8; es fragt sich, in welchem Verhält-

niß

niß die Seiten zu einander stehen, wenn die Breite der Figur 10 Zoll hat?

Figur 63 ist ein Rechteck, welches 2mal so lang als breit ist, ferner ist das Rechteck a, $\frac{1}{3}$ von b, und beyde sind einander und dem Ganzen ähnlich, und der Inhalt beträgt 200 Quadratzoll; es fragt sich, wie viel Zoll die Seiten dieser 2 Rechtecke haben?

Auflösung.

Wenn das ganze Rechteck 2mal so lang als breit ist, so findet auch das gleiche beym Rechteck a und b statt, folglich kann jedes als 2 Quadrate ins Auge gefaßt werden, a ist $\frac{1}{3}$ von b, also hat b 6 Quadrate, wie a deren 2 hat, folglich kommt auf 1 Quadrat des Rechtecks b 3 Quadrate, wie das Rechteck a 2 hat; also muß die Seite cd in s so in 2 Theile getheilt werden, daß das Quadrat auf dem einen Theil 3mal so groß wird, als das auf dem andern, um dieses zu thun, wird zuerst die Seite cd berechnet, die die Quadratwurzel von 100 oder 10 ist. — Ich nehme an, das Quadrat auf cs betrage 25 gleiche Quadrate, durch welches das Quadrat auf sd deren 75 erhält; die Quadratwurzel des 1ten ist 5, und die des 2ten 8,66, und ein irrazionaler Bruch Rest. Folglich muß cd oder 10 nur so in 2 Theile getheilt werden, daß sich der eine zum andern verhält, wie 5 : 8,66. —

Mit ungleichlaufenden Linien.

Figur 6 ist ein Quadrat, wovon das Δ a $= \frac{\Delta\ b}{4}$ ist; es frägt sich, in welchem Verhältnisse die gleichliegenden Seiten dieser Δ zu einander stehen? Auch kann gefragt werden, in welchem Verhältnisse diese Seiten zu den Seiten des Quadrats ꝛc. stehen?

Auflösung der 1ten Frage.

Die 2 Δ a und b sind ähnlich, um ihre gleichliegenden Seiten zu erhalten, kann man nur die Quadratwurzel des Flächeninhalts suchen, a ist $\frac{1}{4}$ von b, die Quadratwurzel von 1 ist 1, die von 4 ist 2, also ist die Quadratwurzel des Zählers obigen Bruchs $\frac{1}{2}$ von der des Nenners, folglich ns $= \frac{sm}{2}$, desgleichen sind die andern gleichliegenden Seiten. Wird eine Seite des Quadrats, oder eine Seite dieser 2 Δ in Zollen gegeben, so können die andern Seiten auch in Zollen berechnet werden.

Bey solchen Aufgaben können auch irrazionale Verhältnisse eintreten; denn es hätte zum Beyspiel in letzter Aufgabe ein Verhältniß angegeben werden können, deren Ausziehung der Quadratwurzel nicht rein aufgegangen wäre.

Figur 65 soll ein Quadrat seyn, dessen eine Seite 10 Zoll ist, das Δ a ist $\frac{1}{5}$ vom Δ b, und die 2 Seiten m n und s t sind gleich einer Seite des Quadrats; es fragt sich, wie viel Zoll Flächeninhalt jeder der 4 Theile des Quadrats seye? Ferner wie viel Zoll die Seiten haben, welche durch das Theilen der 2 Linien im Quadrat entstehen!

Auflösung.

Die 2 Δ sind ebenfalls wieder wie oben ähnlich, und die gleichliegenden Seiten derselben zu erhalten, muß man die Quadratwurzel von beyden ausziehen, daß vom 1ten Quadrat 1, und vom 2ten 2,23 und noch einen irrazionalen Bruch giebt. Warum man bey ähnlichen Δ auch nur die Quadratwurzel auszuziehen bedarf, um das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten zu finden, beruht auf dem Satz; daß es in Rücksicht ihres Verhältnisses zu einander immer gleich ist, was für ähnliche Figuren auf 2 gegebene Linien beschrieben werden. Folglich hat mn 1 Theil, wie st deren 2,23 hat, diese 2 Seiten mn und st machen mit einander 10 Zoll, folglich müssen 10 Zoll in 1, 2,23 gleiche Theile getheilt werden, — hat man die Grundlinie beyder Δ, so kann der Inhalt ohne Mühe berechnet werden, denn die Höhe von beyden ist gleich der Höhe des Quadrats. — Ist der Inhalt von 2 Theilen berechnet, so kann man den 3ten und 4ten durch das Abziehen ꝛc. erhalten.

Statt daß man das Verhältniß dieser 2 Δ zu einander gegeben hätte. hätte man es auch zum ;um Quadrat geben können, welches aber unwichtiger ist, als das 1te, und zugleich verwickelter und schwerer, aber als Uebung für schwächere und kräftigere Schüler doch niemals zu verwerfen.

Was jetzt mit dem Theilen des Quadrats gemacht wurde, kann auch mit dem Δ, 4Eck im allgemeinen, 5Eck ꝛc. vorgenommen werden, welches aber doch nicht weit ausgedehnt werden darf; auch dieses bleibt dem Bedürfniß eines jeden überlassen.

Aus dem Inhalt einer Figur die Seiten einer ihr ähnlichen berechnet. Z. E.

Es wird ein Δ gegeben, wovon eine Seite 10 Zoll, eine andere 6, und die 3te 7 Zoll hat; es fragt sich, wie viel Zoll die Seiten eines ihm ähnlichen Δ haben, wenn der Inhalt desselben 100 Quadratzoll beträgt.

Auflösung.

Zuerst wird der Flächeninhalt des gegebenen Δ berechnet, und aus dem Inhalt dieses Δ, einer seiner Seiten, und dem gegebenen Inhalt 100 ein geometrisches Verhältniß gebildet, und weiter so gelößt, wie ähnliche Aufgaben wirklich schon gelößt worden sind.

Man giebt ein Δ deren eine Seite 18, eine andere 10 und die 3te 9 Zoll hat; es fragt sich, wie viel Zoll die rechtwinkliche Linie welche von dem größten Winkel eines ähnlichen Δ welches 100 Quadratzoll hat, betrage?

Auflösung.

Es wird zuerst der Inhalt des 2ten Δ gesucht; aus dem Inhalt des 1ten, seiner rechtwinklichen Linie ꝛc., — und aus dem Inhalt des 2ten ein geometrisches Verhältniß gebildet; und wie in vorhergehender Aufgabe verfahren.

So können auch 4Eck, 5Eck ꝛc. gegeben werden, doch ist aber bey diesen Figuren das gegebene Verhältniß der Seiten unzulänglich; und es müssen also noch Winkel dazu gegeben werden; es ist daher unwichtiger als das Δ.

Statt den Inhalt der Figuren durch Zahlenverhältnisse zu bestimmen, kann er durch Formverhältnisse bestimmt werden. Z. E.

Es soll untersucht werden, in welchem Verhältnisse ein Quadrat zu einem gleichschenklich rechtwinklichen Δ stehe, wenn es so beschrieben ist, wie Quadrat a b an Figur 66.

In welchem Verhältnisse steht das Quadrat a, Figur 67 zu seinem gleichseitigen Δ b c d?

So können in andern Δ, Quadrate, 3Ecke, 5Ecke ꝛc. gemacht werden; — besonders in ungleichseitig rechtwinklichen, oder in gleichschenklich spitz- und stumpfwinklichen, wobey die Seiten, oder Winkel, oder Seiten und Winkel vereiniget, als bekannt gegeben sind. —

Auf gleiche Art, kann ein regel- und unregelmäßiges 4Eck, 5Eck ꝛc., ein Δ, oder 4Eck ꝛc. gemacht werden; wobey es auch einige nicht sehr schwere Aufgaben giebt. — Um es anschaulicher zu machen folgt die Auflösung der 1ten und 2ten Frage:

In Figur 66 ist g e ein Quadrat, folglich die Seite e b = b g, ferner sind die 2 Δ b d e und c b g ähnlich und gleich; also die Seite c b $= \frac{cd}{2}$, oder das Δ c b g $= \Delta\ \frac{cda}{4}$; desgleichen das Δ b d e; dieser 2 Δ von dem Ganzen abgezogen, bleibt noch das Quadrat g b e a, oder die Hälfte des Δ c a d.

In Figur 67 ist a ein ein Quadrat; folglich die Seite m d = d g ꝛc., das Δ c d m ähnlich dem gleichseitigen Δ c b o ꝛc.; — weil das Δ c m d gleichseitig ist, so ist c d = d g. Das Δ d g o ist rechtwinklich, dessen Seite d g einem ⅔ rechten Winkel gegenübersteht; folglich kann man die Seite c o, in d, nur so in 2 Theile theilen, daß sich c d : d o verhält ∷ d g : d o; welches wir bey der Berechnung der Seiten der Δ schon hätten. Sind die Seiten bekannt, so kann der Inhalt ohne die geringste Schwierigkeit gefunden werden. —

Ende des dritten Theils.

Bey den Verlegern dieses sind gleichfalls die sämmtlichen Schriften von Hrn. Schmid zu haben, die bereits als der zweckmäßigste Leitfaden zur pestalozzischen Methode allgemein so vortheilhaft bekannt sind, daß es wohl nur der Erinnerung an ihre Titel bedarf, um den Wunsch nach ihrem Besitz bey jedem zu wecken, der sich nach dieser vortrefflichen Methode bilden will.

Die Elemente des Zeichnens, nach Pestalozzischen Grundsätzen mit Holzschnitten, gr. 8. 1 fl. 15 kr.
— Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt) 1r und 2r Thl. Mit Kupf. gr. 8. 2 fl. 24 kr.
— Elemente der Zahl, als Fundament der Algebra. Mit 7 Bogen Tabellen in Holz. gr. 8. 1 fl.
— Elemente der Algebra. gr. 8. 1 fl.
— Anwendung der Zahl auf Raum, Zeit, Werth und Ziffer. gr. 8. 1 fl. 15 kr.
— Erfahrungen und Ansichten über Erziehung, Institute und Schulen. gr. 8. 48 kr.

Wir benutzen diesen Raum noch ferner zur Empfehlung folgender für den Pädagogen interessanten Schriften, die diese gewiß in hohem Grade verdienen.

Creuzer, Fr., das akademische Studium des Alterthums, nebst einem Plane der humanist. Vorlesungen und des philologischen Seminariums auf der Universität zu Heidelb. gr. 8. 807. 45 kr.
Diehl, F. C., Vorschriften im deutsch- und englischen Schönschreiben. 1s — 5s Heft. gr. 4. Jedes Heft 48 kr.
Dümgé, C. G., Geographiae et historiae Ducatus magni Badensis primae lineae. P. I. 8. maj. 810. 45 kr.
Ewald, Dr. J. L., Geist und Würde des christl. Religionslehrers. Eine Rede, als Einleitung zu homiletischen Vorlesungen. 8. 806. 15 kr.
— — Geist und Tendenz der christlichen Sittenlehre. Eine Rede, wie sie an Akademiker gehalten werden könnte. 8. 806. Schrpp. 40 kr. Druckp. 30 kr.
— — über die Deklamation und Kanzelvortrag. Skizzen und Ergüsse; auch zum Leitfaden akademischer Vorlesungen brauchbar. 8. 803. 54 kr.
— — Rede bey Vereinigung des katholischen und reformirten Gymnasiums in Heidelberg. 8. 809. geb. 18 kr.
— — noch ein Wort über Vereinigung protestant. und kathol. Gymnasien, besonders derer in Mannheim und Heidelberg. 8. 810. 12 kr.
— — Sind in kleinen Landstädten Bürgerschulen nöthig? 8. 810. 12 kr.
Fecht, C. L., über Belohnungen und Strafen in pädagogischer Hinsicht überhaupt und über körperliche Züchtigung insbesondere. 8. 809. 40 kr.

Grimm, Au., Kindermährchen. 12. 809. Mit schwarzen Kupfern 1 fl. 48 kr. Mit illum. Kupfern 2 fl. 45 kr.

Gruner, G. A., Grundlegung zu einem auf das Gewissen und die Bibel gegründeten Unterricht in der Tugend- und Glaubenslehre. 2 Theile. 8. 808. 1r Theil 30 kr. 2r Theil 1 fl.

— — Briefe aus Burgdorf, über Pestalozzi, seine Lehrart und Anstalt. 2te unveränderte mit 4 neuen Briefen vermehrte Ausgabe. 8. 806. 2 fl. 45 kr.

— — noch ein Wort zur Empfehlung der kräftigen nameutlich der Pestalozzischen Weise in der Behandlung und im Unterrichte der Jugend ꝛc. Ein Nachtrag für die Besitzer der ersten Ausgabe der Briefe ꝛc. 8. 806. 18 kr.

Hänle, C. H., Lehrbuch der Staatengeschichte für höhere Schulen, 8. 808. Schreibpap. 2 fl. 24 kr. Druckpap. 1 fl. 30 kr.

Kinderfreund, der neue, herausg. in Verbindung mit mehrern praktischen Erziehern von J. B. Engelmann. 1r Thl. mit 1 Kupf. 803. 1 fl. 2r mit 1 Kupf. 804. 1 fl. 30 kr. 3r 805. 1 fl. 15 kr. 4r mit Kupf. und Musik. 805. 1 fl. 30 kr. 5r mit 2 Kupf. 806. 1 fl. 30 kr. 6r und letzter mit Kupf. und Musik. 807. 2 fl., die 6 Theile geb. 10 fl. 45 kr.

— musikalischer, eine Auswahl von Liedern zur veredelnden und fröhlichen Unterhaltung im häuslichen Kreise. Herausgeg. v. J. B. Engelmann. Querfolio. Schreibpap. mit Musik. 3 fl. Druckpap. ohne Musik. 8. 36 kr.

Köhlein, J. F., 128 Rechentafeln für Stadt- und Landschulen, und zum Privatunterricht, gr. 8. 803. In Tafeln aufgezogen und in Futteral. 3 fl. roh 2 fl.

Ladomus, J. F., Pestalozzi's Anfangsgründe der Zahlenverhältnisse in Beziehung auf die Arithmetik als Wissenschaft. gr. 8. 807. 15 kr.

Molitor, F., über bürgerl. Erziehung. Mit Beziehung auf die Organisation des jüdischen Schulwesens in Frankfurt a. M. gr. 8. 808. geb. 30 kr.

Pestalozzi's Elementarbücher, 6 Hefte: Buch für Mütter. Anschauungslehre der Maaßverhältnisse, 2 Hefte. Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse, 3 Hefte gr. 8. 803. geb. 4 fl. 30 kr.

Poppe, J. H. M., Handbuch der Technologie. Zum Gebrauch auf Schulen u. Universitäten. 1te — 3te Abth. 8. 806. 3 fl.
Desselben 4te Abth. 8. 810. 2 fl. 15 kr.
Dasselbe in 4 Abthl. compl. Schreibpap. 7 fl.

Schwarz, F. H. A., Lehrbuch der Pädagogik und Didaktik. gr. 8. 805. Schreibpap. 2 fl. 24 kr. Druckpap. 1 fl. 48 kr.

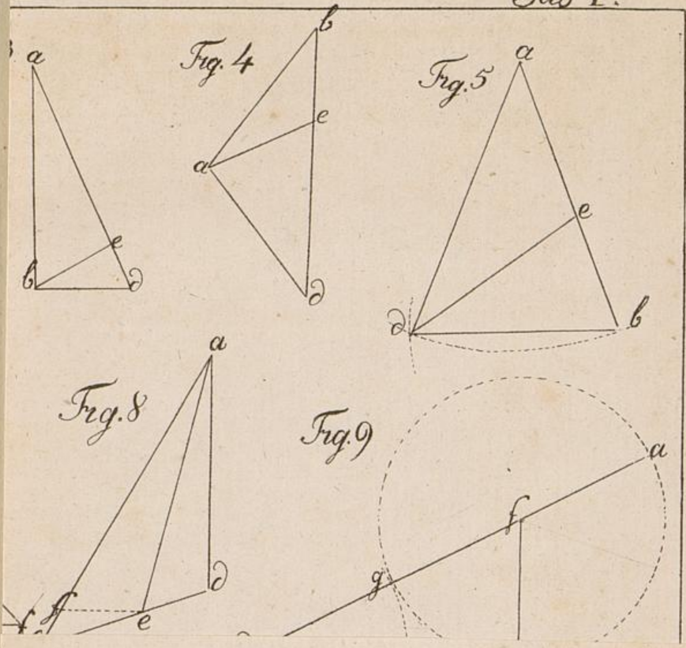
— — Grundriß der Lehre von dem Schulwesen. Als Nachtrag zu seinem Lehrbuche der Pädagogik und Didaktik. gr. 8. 807. 18 kr.

— — Einrichtung des pädagog. Seminars auf der Universität zu Heidelberg. gr. 8. 807. geh. 6 kr.

Weber, B. F., anthropologische Versuche zur Beförderung einer gründlichen und umfassenden Menschenkunde für Wissenschaft und Leben. gr. 8. 810. 2 fl. 24 kr.

Versuch in Fragen bey der Confirmationshandlung. 8. 809. 8 kr.

Tab I.



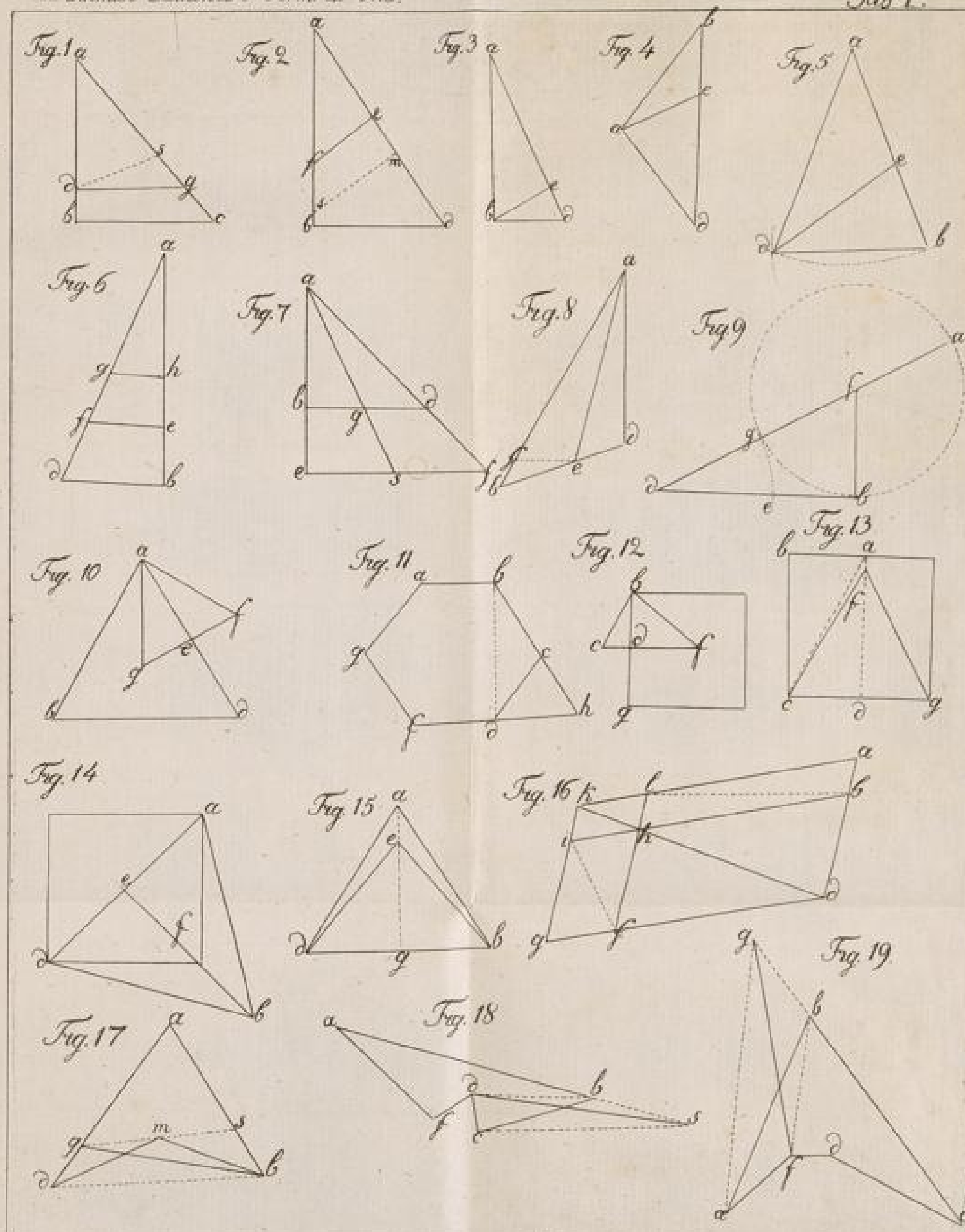
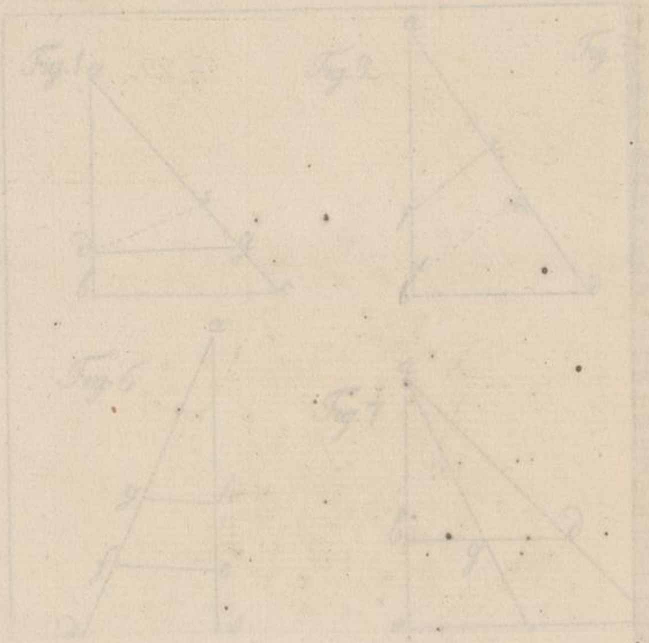
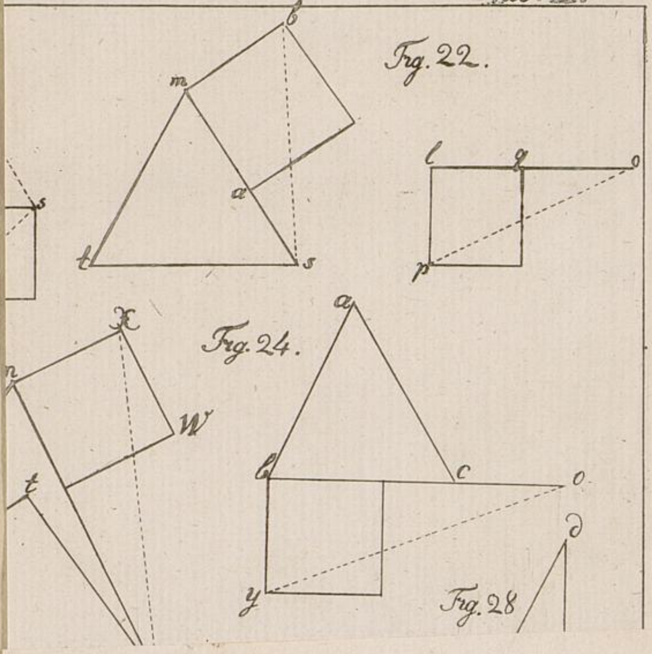


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19

zu Schmid's Elemente d. Form II^r Thl.



Tab. III.



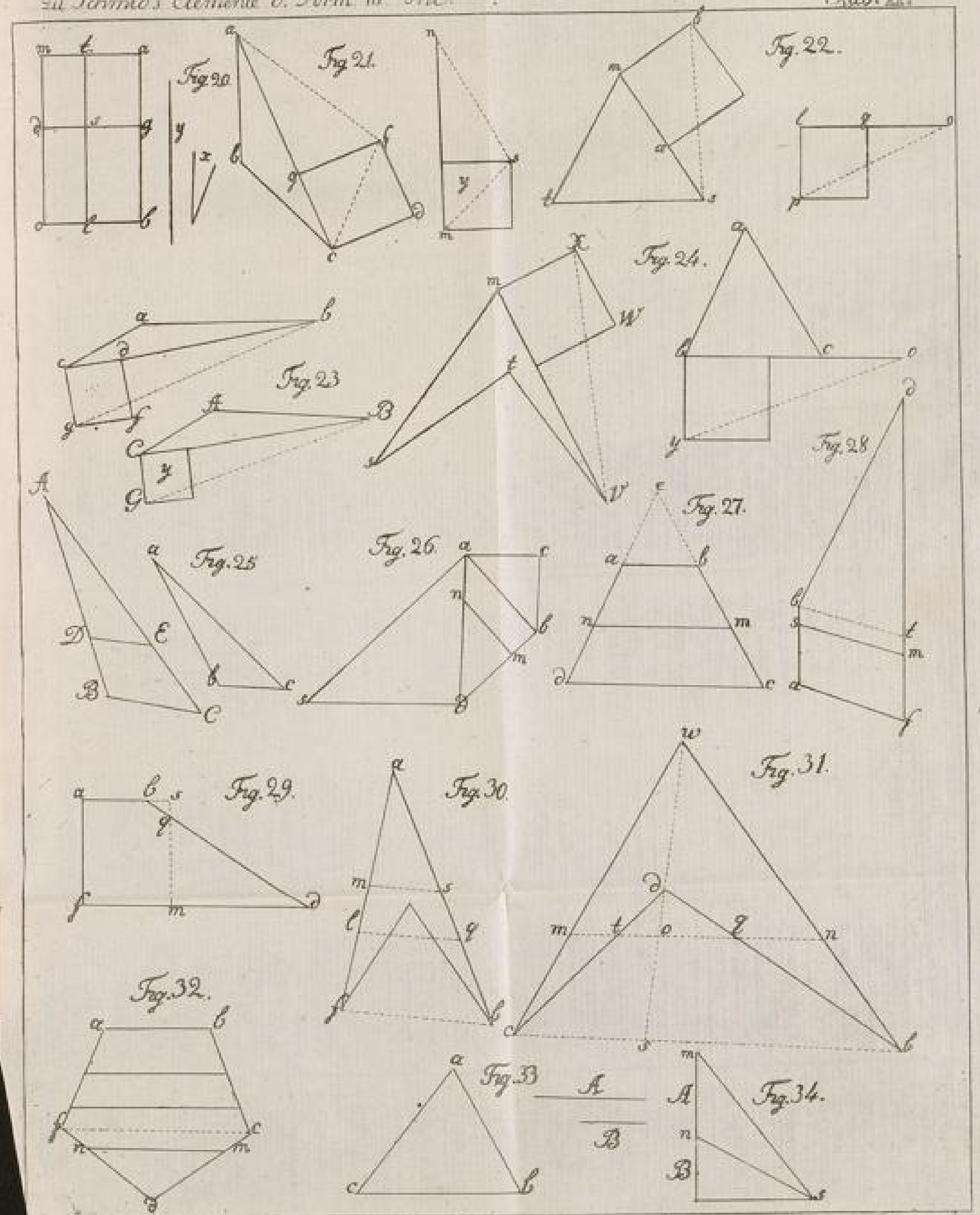
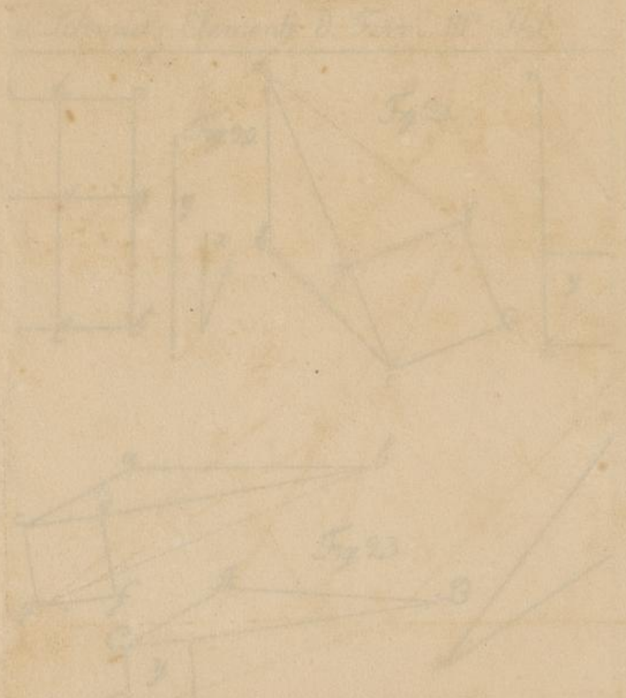


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.



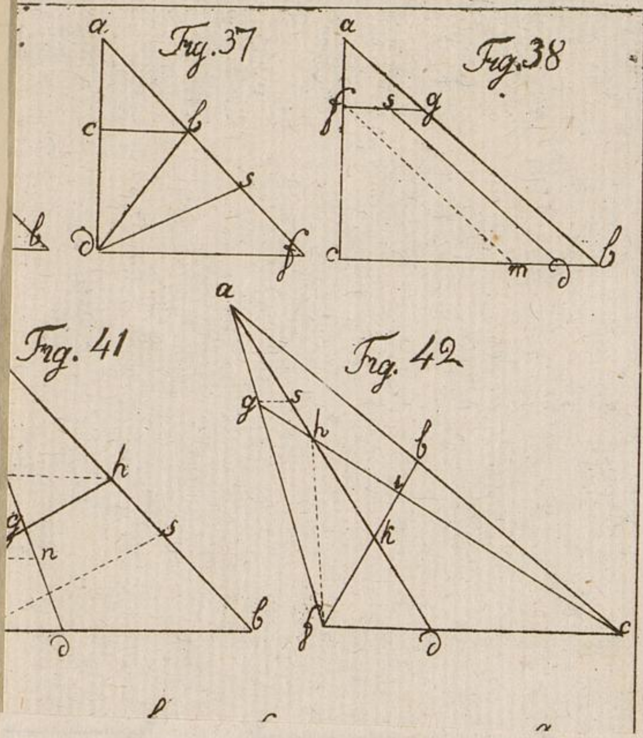
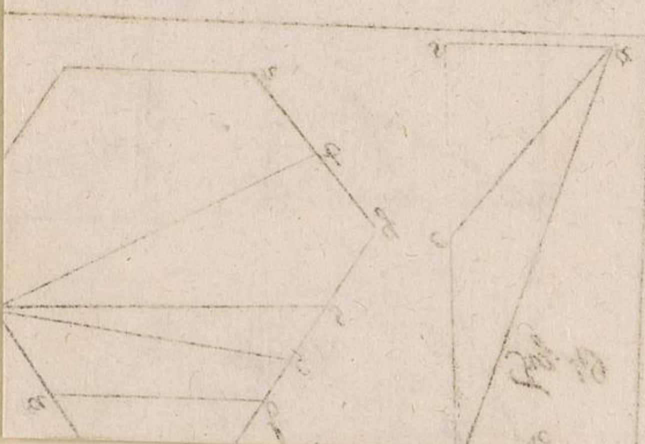


Fig. 37
Fig. 38
Fig. 41
Fig. 42



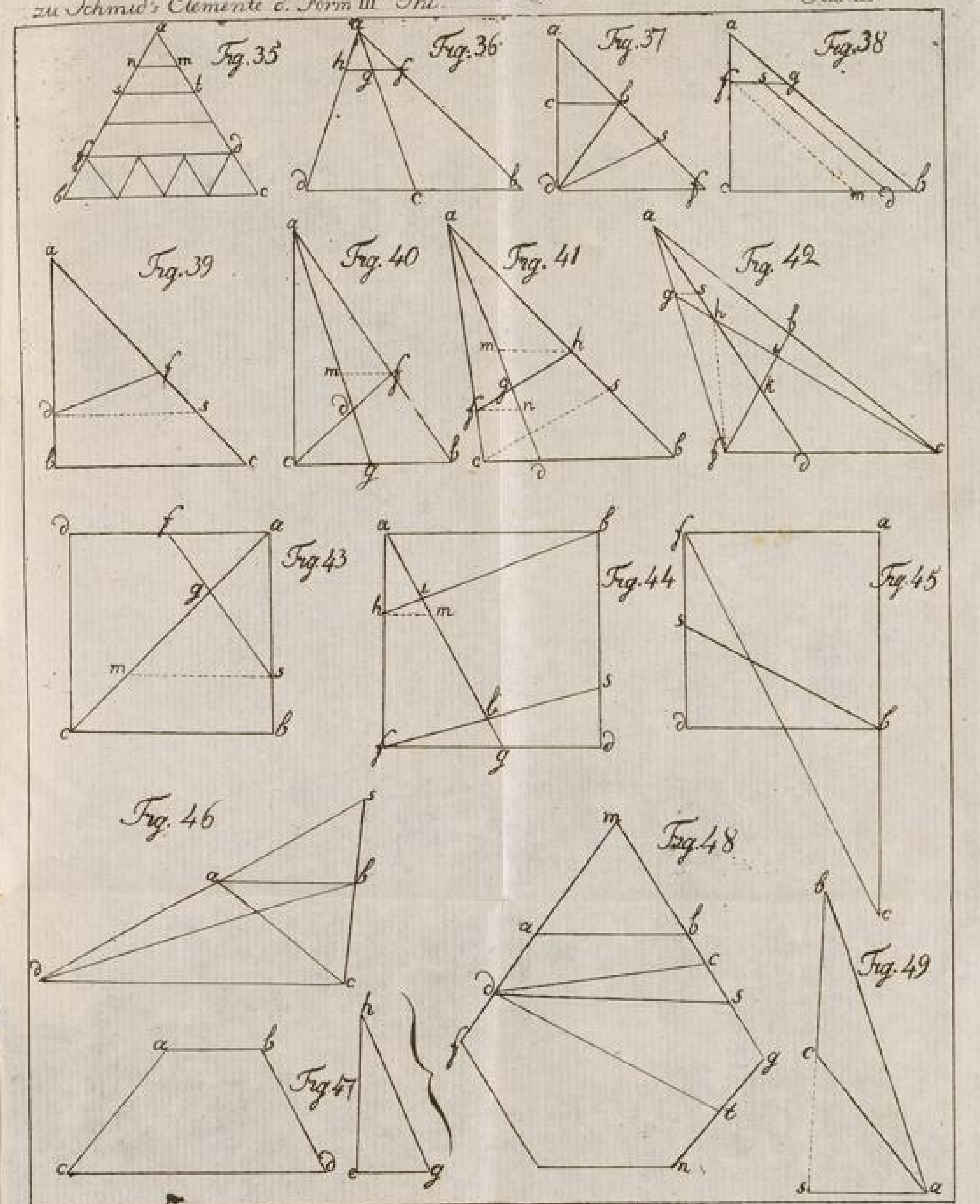
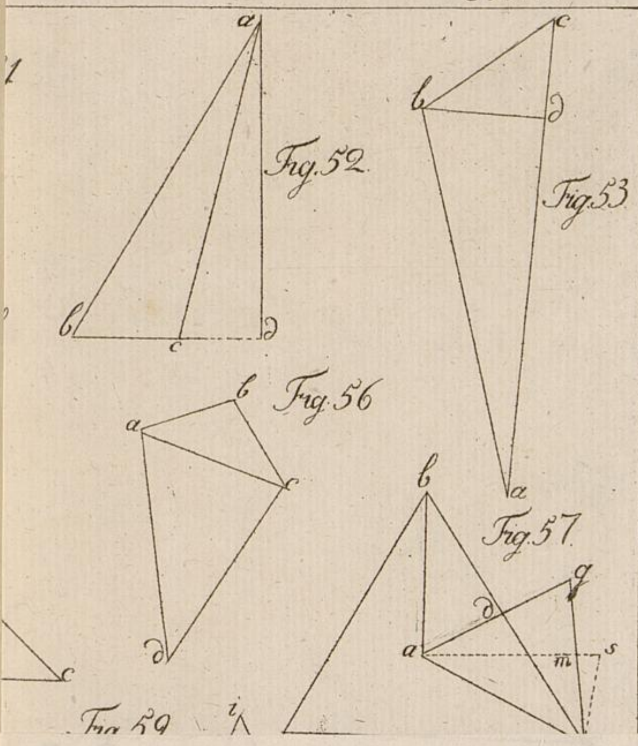


Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49

Tab. IV.



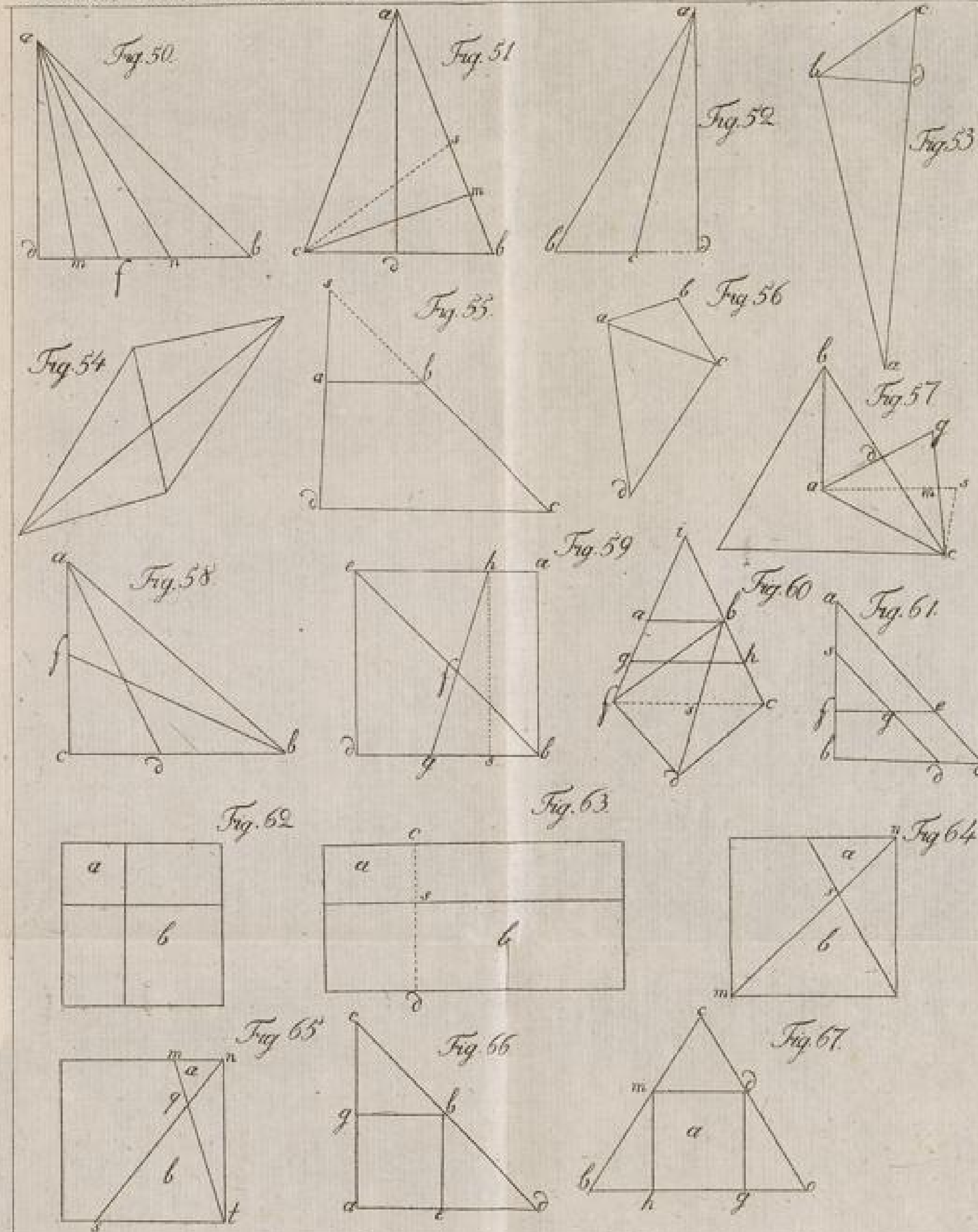


Fig. 50.
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55.
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61.
Fig. 62
Fig. 63.
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67.