Die
Geometrie.

Einleitung.

1. Erklärung. Die Geometrie handelt von der Vergleichung und Ausmessung der Größen im Raume. Sie setzt die Vorstellung vom Raume als bekannt voraus, welche auch dem menschlichen Verstande so eigen und gleichsam angeboren ist, daß sie keiner besondern Erläuterung bedarf.

2. Erklärung. Größen im Raume sind alle diejenigen, bey welchen der Begriff, daß sie oder ihre Theile neben einander sind, Statt findet; das ist, alle diejenigen, bey welchen man auf die Lage der Theile sieht.

3. Erklärung. Die Gränze einer Größe im Raume ist der Ort, wo sie aufhört, oder gleichsam

die Abscheidung, wodurch sie von dem übrigen Raume, den wir uns als unendlich denken, abgesondert wird.

4. Erklärung. Ein geometrischer Körper ist ein von allen Seiten oder ringsum begränzter Raum.

Anmerkung. Man unterscheidet den geometrischen Körper von dem physischen Körper. Dem letztern nämlich kommen mehrere Eigenschaften, Härte, Undurchdringlichkeit u. s. w. zu, worauf aber die Geometrie, welche bloß auf die Größe des Raumes sieht, keine Rücksicht nimmt. Der geometrische Körper ist bloß eine Abtheilung des Raumes, in welcher also andre Abtheilungen, das heißt, andre geometrische Körper gar wohl gedacht werden können, statt daß in dem Raume, wo ein physischer Körper ist, durchaus kein zweyter physischer Körper Platz finden kann.

5. Erklärung. Die Gränze, welche einen Theil des Raumes von dem andern scheidet, heißt eine Fläche. Daher heißt die Gränze eines Körpers seine Oberfläche.

6. Erkärung. Eine Fläche ist eben, wenn sie an der einen Seite genau so ist, wie an der andern; hingegen ist sie krumm, wenn dieses nicht Statt findet.

Stellt man sich nämlich vor, daß eine Fläche eine Abtheilung des Raumes nach einer gewissen Richtung, z. B. von Norden nach Süden aufrecht stehend, bildet: so wird an dieser Fläche, wenn sie eben oder eine Ebene ist, die Ostseite völlig so beschaffen seyn, wie die Westseite. Dieses ist hingegen nicht der Fall bey einer krummen Fläche; denn diese ist nothwendig hohl oder eingebogen an der einen Seite, wenn sie erhaben oder ausgebogen an der andern ist.

7. Erklärung. Einer undum begränzte Fläche heißt eine Figur, und zwar eine ebene Figur, wenn die Fläche eine Ebne ist.

So wie nämlich der Raum im Allgemeinen als unendlich oder unbegränzt gedacht wird: so ist auch die ebne Fläche oder die Ebne als unbegränzt anzunehmen; denn man kann sich jene Scheidewand, die wir vorhin annahmen, als nach Norden und Süden, nach oben und unten so weit erweitert denken, wie man will. Soll also nur ein bestimmtes Stück dieser Ebne betrachtet werden: so muß man dieses Stück durch Gränzen von dem übrigen Theile der Fläche absondern, und das so rundum begränzte Stück der Ebne heißt eine Figur.

8. Erklärung. Die Gränze, durch welche ein Stück einer Fläche von dem übrigen Theile derselben abgesondert wird, ist eine Linie. Jede Figur wird also ringsum von einer Linie begränzt, welche ihr Umfang heißt.

9. Erklärung. Eine Linie ist gerade, wenn alle ihre Theile nach einerley Richtung liegen, oder wenn sie an der einen Seite ganz so ist, wie an der andern. Krumm sind hingegen alle Linien, bey welchen dieses nicht Statt findet.

10. Erklärung. Die Gränze der Linie ist ein Punct.

Will man nämlich von der unbegränzt fortgehenden Linie nur ein bestimmtes Stück betrachten, so ist das Ende dieses Stückes der Punct, der Endpunct.

11. Folgerungen. Dem Puncte kann man also keine Größe zuschreiben, denn er ist bloß die Gränze, wo eine Linie oder ein Stück derselben aufhört, daher läßt sich auch von dem Puncte für sich allein nichts weiter sagen.

Die Linie hat bloß eine Länge, aber keine Breite, denn sie dient nur zur Begrenzung der Fläche: — sie würde schon ein Stück der Fläche selbst seyn, wenn man ihr Breite beylegte. Die Fläche hat zugleich Länge und Breite, aber keine Dicke oder Höhe und Tiefe. Der Körper endlich hat Länge, Breite nnd Dicke oder Höhe.

Man sagt daher, die Linie habe nur eine Abmessung, die Fläche habe zwey Abmessungen und der

Körper habe drey Abmessungen, und diese Ausdrücke bedürfen nun keiner weitern Erklärung.

12. Erklärung. Die Geometrie handelt also zuerst von den Linien und ebnen Figuren, und dieser Theil heißt die ebne Geometrie, dann aber von den Körpern im zweyten Theile, welcher die körperliche Geometrie heißt.

Die ebne Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

13. Grundsatz. Wenn man eine gerade Linie für sich allein, (nicht in Verbindung mit andern Linien,) betrachtet, so kann eine gerade Linie sich von der andern durch gar nichts unterscheiden, als durch ihre Länge. **Gerade Linien also, die gleich lang sind, sind einander völlig gleich.**

Bey krummen Linien ist dieses anders, denn wenn z. B. in Fig. 1. auch die Linie abc eben so lang wäre, als def, so würde doch niemand beyde ganz gleich nennen, da ihre Gestalt verschieden ist.

14. Ob zwey gerade Linien einander gleich sind, würde man erfahren, wenn man sie an einander hielte,

oder auf einander deckte. Legt man nämlich den Endpunct der einen auf den Endpunct der andern, und die ganze Linie auf die andre: so muß auch der zweyte Endpunct jener auf den zweyten Endpunct dieser fallen, wenn beyde gleich sind.

Anmerkung. Bey krummen Linien findet eine ähnliche Bestimmung der Gleichheit nur selten Statt; wir werden aber überhaupt für jetzt allein bey der Betrachtung gerader Linien stehen bleiben.

15. Grundsatz. Wenn zwey Puncte bestimmt sind, durch welche eine gerade Linie gehen soll: so ist dadurch ihre Lage völlig bestimmt.

Es ist nämlich nicht möglich, zwey von einander verschiedne gerade Linien zu ziehen, die gleichwohl beyde durch zwey gegebne Puncte A und B gingen. (Fig. 2.) Durch den einzigen Punct B sind unzählige gerade Linien möglich, wie AB, BC, BD, aber nur eine derselben geht zugleich durch den zweyten Punct A.

16. Dagegen ist es dann aber auch möglich, durch jede zwey Puncte eine gerade Linie zu ziehen. Und selbst da, wo man nicht diese Linie mit der Hand wirklich ziehen kann, findet doch niemand Schwierigkeit, sich dieselbe zu denken, oder hält eine solche Linie, etwa von einem Puncte der Erde nach einem Puncte der Sonne gezogen, für unmöglich.

Auch kann man sich jede gerade Linie über ihre Endpuncte hinaus, so weit man will, verlängert denken.

17. Das gewöhnliche Instrument, dessen man sich unter dem Namen des Lineals bedient, um gerade Linien zu ziehen, ist bekannt genug.

Um zu prüfen, ob die Seite eines Lineals gerade sey, dient folgende Regel: Man ziehe zuerst an der Seite abc des Lineals AB (Fig. 3.) welche gerade seyn soll, die Linie abc, alsdann kehre man das Lineal um und lege es wie CD, daß nämlich der Endpunct a in a und c in c bleibt und ziehe nun an derselben Seite des Lineals hin die Linie ab″c. Wenn nun das Lineal gerade ist, so muß ab″c mit abc einerley seyn, oder das Lineal muß wieder an die zuerst gezogne Linie anpassen; im entgegengesetzten Falle, wenn die beyden Linien abc, ab″c verschieden sind, ist das Lineal nicht gerade.

18. Grundsatz. Zwey gerade Linien können einander nur in einem Puncte schneiden.

Hätte die gerade Linie DE (Fig. 2.) mit der geraden Linie AB noch einen zweyten Punct gemein, so würde sie ganz mit AB zusammenfallen, oder gar nicht von derselben verschieden seyn.

19. Erklärung. Wenn zwey gerade Linien, die in einer Ebne liegen, einander schneiden, wie BE, CE (Fig. 4.), so sind sie gegen einander geneigt; und die Größe der Neigung oder die Lage der Linien gegen einander wird bestimmt durch die Größe des Winkels CEB, den sie mit einander machen.

20. Erklärung. An dem Winkel CEB, welcher von der graden Linie CE, EB gebildet wird, heißt E, nämlich der Punct, wo die Linien einander schneiden, der Scheitelpunct des Winkels, die Linien EC und EB aber heißen seine Schenkel.

21. Da die Größe des Winkels bloß von der Lage der Linien abhängt, und nicht von ihrer Länge: so bleibt die Größe des Winkels ungeändert, wenn man auch gleich die Schenkel länger oder kürzer annimmt.

22. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet gewöhnlich eine gerade Linie dadurch, daß man an ihre beyden Endpuncte Buchstaben setzt, und dann unter der Linie AB (Fig. 2.) diejenige, welche von A bis B reicht, oder deren Endpuncte A und B sind, versteht.

Einen Winkel bezeichnet man durch drey Buchstaben, deren einen man an den Scheitelpunct und einen an jeden Schenkel setzt. Um alsdann die Winkel zu benennen, z. B. den in Fig. 4., schreibt man den am einen Schenkel stehenden Buchstaben voran, den am Scheitel in der Mitte, und den am andern Schenkel stehenden hinten, also CEB. Statt des Worts Winkel setzt man auch wohl dieses Zeichen $\sphericalangle$, also $\sphericalangle$ CEB. Zuweilen schreibt man dafür kürzer der Winkel E.

Hiernach bedeuten in Fig. 5. ABC, CBD, DBE, EBA vier verschiedne Winkel, hingegen ABC und CBA, auch FBG und ABC sind einerley Winkel.

23. **Grundsatz.** Zwey Winkel sind einander gleich, wenn sie auf einander gelegt, einander decken.

Sind nämlich (Fig. 6.) die beyden Winkel ABC und DEF so beschaffen, daß, wenn man B auf E und die Linie BA auf ED legt, auch die Linie BC auf EF fällt: so decken sie einander und sind offenbar einander gleich. Uebrigens kommt es hier auf die Länge der Schenkel nicht an, sondern die Winkel können gleich seyn, wenn auch die Schenkel des einen länger, als die des andern sind.

24. **Erklärung.** Wenn man von irgend einem Puncte C der graden Linie AB (Fig. 7.) eine grade Linie CD zieht, welche gegen die erstere geneigt ist: so entstehen zwey Winke', welche beyde ihren

Scheitel in C und den Schenkel CD gemeinschaftlich haben, und deren beyde andere Schenkel CA, CB zusammen eine einzige grade Linie bilden. Diese beiden Winkel heißen Nebenwinkel.

25. Erklärung. Wenn (Fig. 8.) die gerade Linie GI auf der geraden Linie FH so steht, daß die beyden Nebenwinkel einander gleich sind: so heißen diese Winkel rechte Winkel, und die Linien stehen senkrecht, lothrecht, perpendiculär auf einander, (welche letztere drey Ausdrücke gleichbedeutend sind).

26. Grundsatz. Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Es ist nämlich klar, daß bey einer jeden geraden Linie die gleichen Nebenwinkel bey der einen völlig so ausfallen werden, wie bey der andern.

27. Weil alle rechte Winkel gleich sind, so kann man nach einem, ein für allemal verfertigten Winkel-Lineale alle rechte Winkel zeichnen. Ob ein solches rechtwinklichtes Winkel-Lineal richtig gearbeitet sey, bestimmt man dadurch, daß man (Fig. 8.) eine grade Linie GH zieht, dann an diese den einen Schenkel des Winkel-Lineals legt und am andern Schenkel die Linie GI zieht. Ist nun das Winkel-Lineal richtig: so muß, wenn man jetzt den einen

Schenkel an GI legt, der andere ganz genau an der Verlängerung von GH, nämlich an GF anliegen.

28. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet die Größe des rechten Winkels durch R; also FGI = R heißt: der Winkel FGI ist ein rechter Winkel.

29. Erklärung. Winkel, die kleiner als ein rechter Winkel sind, heißen spitzige Winkel; diejenigen hingegen, welche größer, als ein rechter Winkel sind, nennt man stumpfe Winkel.

So ist in Fig. 7. der Winkel ACD stumpf, aber BCD spitz.

30. 1ster Lehrsatz. Zwey Nebenwinkel ACD, DCB, welche nämlich auf einer geraden Linie AB liegen, betragen zusammen genau so viel, als zwey rechte Winkel. (Fig. 7.)

Beweis. Es muß allemal möglich seyn, durch C eine grade Linie, wie CE, so zu ziehen, daß die Nebenwinkel ACE, ECB einander gleich werden; dann sind beyde rechte Winkel, wenn ACB eine grade Linie ist; und offenbar ist auch ACD + DCB = ACE + ECB = 2R.

31. Eben so einleuchtend ist, wenn von dem Puncte B einer geraden Linie AC mehrere gerade

Linien BD, BE, BF an derselben Seite der Linie AC gezogen werden, daß dann die Summe aller an B gebildeten Winkel ABD + DBE + EBF + FBC zweyen rechten gleich ist. (Fig. 9.)

Auch wenn man mehrere einzeln gegebne Winkel hätte, und fügte diese so an einander, daß alle Scheitel in B fielen und allemal zwey Winkel einen Schenkel gemeinschaftlich hätten: so würde die Summe dieser Winkel zweyen rechten gleich seyn, wenn die äußersten Schenkel, wie BA, BC eine einzige gerade Linie bildeten. (Fig. 9.)

32. 2ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 10.) die Summe der Winkel ACD + DCB so viel beträgt, als zwey rechte Winkel: so bilden die Schenkel CA, CB eine einzige gerade Linie.

Beweis. Wäre ACB nicht gerade, so würde, wenn man CA über C hinaus verlängert, diese Verlängerung nicht mit CB zusammenfallen; wir wollen also annehmen, sie fiele in CF. Wäre dies der Fall, so würde ACD + DCF = 2 R seyn (§. 30.) und wenn zugleich, wie vorausgesetzt ist, ACD + DCB = 2 R seyn soll, so ist dies unmöglich, sobald CF von CB verschieden ist.

33. Auch wenn (Fig. 9.) mehrere Winkel ABD, DBE, EBF, FBC zusammen so viel betragen, als

zwey rechte, und man fügt sie so an einander, wie Fig. 9. zeigt, daß nämlich die Scheitel zusammenfallen und jede zwey Winkel an einander liegend, einen Schenkel gemeinschaftlich haben, so werden die äußersten Schenkel BA, BC eine einzige gerade Linie ausmachen oder BC wird die geradlinigte Verlängerung von AB seyn.

34. 3ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 11.) um einen Punct C rund um, in derselben Ebne, Winkel liegen, die alle C zum Scheitelpunct haben: so ist die Summe aller dieser Winkel vier rechten Winkeln gleich.

Beweis. Zieht man durch C irgend eine grade Linie GH, so sind alle an der einen Seite derselben liegende Winkel zweyen rechten gleich GCB + BCD + DCH = 2 R und alle an der andern Seite liegende gleichfalls zweyen rechtem gleich, GCA + ACF + FCE + ECH = 2 R, also alle zusammen ACB + BCD + DCE + ECF + FCA = 4 R.

35. Auch umgekehrt: wenn man mehrere Winkel hat, die zusammengenommen vier rechte ausmachen, und man fügt diese so aneinander, daß ihre Scheitel in einen Punct fallen und jeder Schenkel zweyen, ganz außerhalb einander liegenden Winkeln gemeinschaftlich gehört: so fällt der äußerste Schen-

kel des letzten Winkels mit dem äußersten Schenkel des ersten Winkels zusammen. Es kann nämlich in Fig. 12., wenn ACB + BCD + DCE + ECF + FCA = 4 R ist und man an ACB den Winkel BCD, daran DCE und ferner ECF und FCA fügt, der äußerste Schenkel des letzten Winkels nicht etwa in Ca oder Cb fallen, sondern er fällt in CA.

36. Erklärung. Wenn zwey gerade Linien (Fig. 13.) AB und CD einander in E durchschneiden: so entstehen um den Punct E vier Winkel. Von diesen nennet man allemal die beyden einander gegen über liegenden, wie DEB, AEC Scheitelwinkel oder Verticalwinkel, daß also AEC der zu DEB gehörige und BEC der zu AED gehörige Scheitelwinkel ist.

37. 4ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 13.) zwey gerade Linien AB, CD einander schneiden: so sind die Scheitelwinkel einander gleich, nämlich AEC = DEB und AED = BEC.

Beweis. Da sowohl AB, als DC eine gerade Linie ist, so macht DEB mit AED und auch AEC mit AED zwey rechte Winkel. Man hat also (§. 30.) DEB + AED = 2 R = AEC + AED, also DEB = AEC. Eben so läßt sich zeigen, daß BEC = AED sey.

38. 5ter Lehrsatz. Wenn an einerley Puncte B, aber an entgegengesetzten Seiten der geraden Linie AC (Fig. 14.) zwey gerade Linien BD, BE so gezogen sind, daß die einander entgegengesetzten Winkel gleich werden, nämlich ABE = DBC, so ist EBD eine einzige gerade Linie.

Beweis. Wäre DBE nicht gerade, so könnte man DB geradlinigt verlängern, und diese Verlängerung BF würde nicht mit BE zusammenfallen; dann aber wären ABF und DBC als Scheitelwinkel einander gleich und es könnte nicht zugleich DBC = ABE seyn. Es ist also unmöglich, daß die Verlängerung der Linie DB von BE verschieden sey.

Zweyter Abschnitt.

Von den geradlinigten Figuren und vom Kreise.

39. Erklärung. Eine Figur heißt geradlinigt, wenn sie von lauter geraden Linien eingeschlossen ist; die geraden Linien, welche sie einschließen, heißen die Seiten der Figuren.

40. Grundsatz. Zwey gerade Linien können allein keine Figur bilden, oder keine Fläche rings um begränzen.

Es giebt also keine geradlinigte Figur, die weniger als drey Seiten hätte.

41. Erklärung. Da jede geradlinigte Figur eben so viele Winkel oder Ecken als Seiten hat: so nennt man eine dreyseitige Figur ein Dreyeck oder Triangel, eine vierseitige Figur ein Viereck, die fünfseitige ein Fünfeck. u. s. w. Auch nennt man allgemein alle Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, Polygone oder Vielecke.

42. Erklärung. Eine geradlinigte Figur heißt gleichseitig, wenn alle ihre Seiten gleich oder von einerley Länge sind, und gleichwinklicht, wenn alle Winkel, welche die Seiten mit einander machen, einander gleich sind.

43. Grundsatz. Wenn man innerhalb einer Figur einen Punct G annimmt, (Fig. 15.) so wird jede gerade Linie, welche man durch diesen Punct ziehen kann, den Umfang der Figur wenigstens zweymal schneiden, wenn man sie hinreichend verlängert.

Denn wenn man von G nach der einen Seite weit genug fortgeht, so wird man endlich die Gränzen der Figur überschreiten und eben das wird erfolgen wenn man nach der gerade entgegengesetzten Richtung weit genug fortgeht. Ob übrigens diese gerade Linie den Umfang der Figur nicht etwa in mehr als zwey Puncten schneiden könne, das muß aus der besondern Beschaffenheit einer jeden einzelnen Figur erst bestimmt werden.

44. **Grundsatz. Die gerade Linie ist die kürzeste, welche sich zwischen zwey gegebenen Puncten ziehen läßt.**

Die gerade Linie AB (Fig. 16.) ist nämlich kürzer als irgend eine krumme AEB oder eine aus mehrern geraden Stücken zusammengesetzte Linie ACDB, die durch die Endpuncte von AB gehen.

45. Erklärung. Unter der Entfernung zweyer Puncte von einander, versteht man die Länge der kürzesten, also der geraden Linie, welche sich zwischen beyden ziehen läßt.

46. **6ter Lehrsatz. In jedem Dreyecke (Fig. 17.) ist allemal die Summe zweyer Seiten größer, als die dritte Seite.**

Dieses ist eine unmittelbare Folgerung aus §. 44., es ist nämlich $AB + AC \rhd BC$ und $BC + AC \rhd AB$.

47. 7ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 18.) von den Endpuncten B und C einer Seite des Dreyeckes ABC gerade Linien BD, CD nach einem innerhalb des Dreyecks liegenden Puncte D gezogen werden: so ist die Summe dieser beyden Linien kleiner, als die Summe der beyden andern Seiten AB, AC des Dreyecks, oder es ist $BD + DC < AB + AC$.

Beweis. Man verlängre BD nach E, so ist (§. 46.) $BE < BA + AE$, oder welches einerley ist

$BD + DE < BA + AE$, zugleich ist
$DC < DE + EC$, also wenn man addirt (Arithm. §. 77.)

$$BD + DE + DC < BA + AE + DE + EC$$

und wenn man gleich viel von beyden abzieht, noch $BD + DC < BA + AE + EC$, das ist, weil $AE + EC = AC$ ist, $BD + DC < BA + AC$.

48. Außer den geradlinigten Figuren lassen sich zwar unzählige krummlinigte denken, welche wie Fig. 19. entweder bloß durch krumme Linien oder theils durch gerade, theils durch krumme begränzt werden; wir betrachten aber unter allen diesen Linien allein die Kreislinie, welche zugleich die einfachste krumme Linie und diejenige ist, von welcher sich die meisten und leichtesten Anwendungen machen lassen.

49. Erklärung. Die Kreislinie ABCD (Fig. 20.) ist eine krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, daß sie ganz in einer Ebne liegt, und zugleich jeder Punct derselben von dem Puncte E, welcher ihr Mittelpunct oder Centrum heißt, gleich entfernt ist. Die Figur, welche von der Kreislinie eingeschlossen wird, heißt ein Kreis oder Cirkel. Die Kreislinie selbst heißt dann der Umfang, der Umkreis, die Peripherie des Kreises.

Anmerkung. Man nennt die Peripherie des Kreises oft auch den Kreis; richtiger aber ist es, sie Kreislinie zu nennen.

50. Die Entstehung des Kreises kann man sich vorstellen, wenn man sich denkt, eine gerade Linie EC werde um ihren einen Endpunct E gedreht; denn dann beschreibt der andre Endpunct C eine Kreislinie, wenn EC immer während der Drehung in einerley Ebne bleibt. Man sieht daher leicht ein, daß es möglich ist, um jeden Mittelpunct einen Kreis von jeder Größe zu beschreiben, da man nur die um E herumgedrehte gerade Linie größer oder kleiner anzunehmen braucht.

51. 8ter Lehrsatz. Wenn man durch den Mittelpunct E eines Kreises eine gerade Linie BD zieht: so kann diese die Kreislinie in nicht mehr als zwey Puncten B und D schneiden. (Fig. 20.)

Beweis. Es ist unmöglich, daß an einerley Seite von E zwey verschiedne Puncte der geraden Linie D und F gleich weit von E entfernt liegen.

Sollte die gerade Linie DB die Kreislinie in mehr als zwey Puncten, z. B. in B, D und F schneiden, so müßten wenigstens zwey derselben an derselben Seite von E liegen, wie D und F; da nun E der Mittelpunct ist, so müßte dann, nach der Natur der Kreislinie (§. 49.), ED = EF seyn, welches unmöglich ist, sobald F und D zwey von einander verschiedene Puncte sind, die an einerley Seite des Mittelpuncts liegen. Die durch den Mittelpunct des Kreises gezogene gerade Linie schneidet also die Kreislinie nicht mehr als einmal an jeder Seite des Mittelpunctes.

52. Erklärung. Wenn man die durch den Mittelpunct E des Kreises gezogne gerade Linie so weit verlängert, bis sie die Kreislinie in B und D schneidet, so heißt das durch die Kreislinie abgeschnittene Stück BD der Durchmesser oder Diameter des Kreises. Hingegen heißt jede vom Mittelpuncte bis an den Umfang gezogene gerade Linie, wie BE, DE, CE ein Halbmesser oder Radius des Kreises.

53. 9ter Lehrsatz. Alle Durchmesser desselben Kreises sind einander gleich. —

Denn der Durchmesser ist doppelt so groß als der Halbmesser, und daß alle Halbmesser einander gleich sind, erhellt aus §. 49.

54. 10ter Lehrsatz. Alle Kreise, die gleiche Halbmesser haben, sind einander völlig gleich.

Beweis. Wenn man die Mittelpuncte dieser Kreise auf einander legt und die Flächen auf einander deckt, so müssen alle Puncte im Umfange des einen Kreises auf den Umfang des andern Kreises fallen, weil, wegen der Gleichheit der Halbmesser beyder Kreise, alle Puncte im Umfange des einen Kreises eben so entfernt vom Mittelpuncte sind, als die Puncte im Umfange des andern Kreises.

55. 11ter Lehrsatz. Jeder Durchmesser theilt die Kreislinie und den ganzen Kreis in zwey völlig gleiche Hälften, die daher Halbkreise heißen.

Beweis. Diese Halbkreise passen genau auf einander. Wenn (Fig. 21.) AB ein Durchmesser ist, und man stellt sich vor, der Halbkreis ADB werde so auf AEB gelegt, daß beyder Mittelpunct in C und für beyde der Halbmesser AB in AB fällt, ADB aber gegen AEB hin zu liegen kommt, so muß auch die Kreislinie ADB genau auf AEB fallen. Denn fiele sie zum Beyspiel in AdB, so müßte doch der auf irgend einen Halbmesser CE fallende Punct d des einen Halbkreises eben so weit als E vom Mittelpuncte abliegen, weil beide zu einerley Kreise gehören. Dieses aber findet nur Statt, wenn d mit E zusammen fällt, und folglich muß AdB ganz mit AEB zusammenfallen, weil eben das für alle Puncte gilt, die man Statt d annehmen kann.

56. Erklärung. Jedes Stück der Kreislinie, wie BC (Fig. 20.) heißt ein Kreisbogen und die gerade Linie BC, welche von einem Ende des Kreisbogens nach dem andern gezogen wird, heißt eine Sehne.

57. 1te Aufgabe. Auf einer geraden Linie CD ein Stück abzuschneiden, welches einer gegebnen Linie AB gleich ist. (Fig. 22.)

Auflösung. Man nehme den einen Endpunct C der Linie CD zum Mittelpuncte und ziehe um denselben einen Kreis oder ein Stück EFG eines Kreises, dessen Halbmesser = AB ist; dann ist das Stück CF, welches der Kreis oder Kreisbogen von der geraden Linie abschneidet, der gegebnen AB gleich.

58. 2te Aufgabe. An einen Punct D (Fig. 22.) eine gerade Linie zu ziehen, die einer gegebnen AB gleich ist.

Auflösung. Man ziehe um D als Mittelpunct einen Kreis, dessen Halbmesser = AB ist, so ist jeder Halbmesser DH eine solche Linie, wie verlangt ward.

59. Erklärung. Zwey Kreise sind concentrisch, wenn sie beyde einerley Mittelpunct haben; hingegen excentrisch, wenn ihre Mittelpuncte nicht zusammen fallen.

Also sind ABD und EFG (Fig. 23.) concentrische Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunct C ist.

60. Erklärung. Zwey Kreislinien schneiden einander, wenn die eine theils innerhalb, theils außerhalb der andern liegt. Zwey Kreise berühren einander, wenn die Kreislinien zwar irgendwo an einander treffen, aber gleichwol entweder der eine Kreis ganz innerhalb des andern, oder jeder ganz außerhalb des andern liegt; im erstern Falle berühren die Kreislinien sich von innen, im letztern Falle berühren sie sich von außen.

In Fig. 26. schneiden sich zwey Kreise und I, K sind die Durchschnittspuncte. In Fig. 29. berührt der Kreis ABD die Kreislinie AEG von innen und A ist der Berührungspunct; in Fig. 30. berühren sich zwey Kreise von außen in dem Puncte B.

61. 12ter Lehrsatz. Zwey concentrische Kreislinien können in keinem Puncte zu-

sammentreffen, einander weder berühren, noch schneiden. (Fig. 23.)

Beweis. Wenn man irgend einen Radius CF des größern Kreises zieht, so schneidet der kleinere Kreis diesen Radius nicht in F, denn sonst wären die Halbmesser beyder Kreise und folglich diese selbst einander völlig gleich. Sollen also concentrische Kreislinien von einander verschieden seyn, so können sie gar keinen Punct gemeinschaftlich haben.

62. Grundsatz. Wenn zwey Kreislinien einander schneiden, so können sie einander nicht in weniger als zwey Puncten schneiden. — Denn wenn man, auf der einen Kreislinie fortgehend, zuerst von außen in den andern Kreis hineinkommt: so muß man bey fernern Fortgang auf derselben Kreislinie doch auch wieder aus dem andern Kreise herauskommen, oder den Umfang desselben nochmals schneiden, weil man sonst nicht an den außerhalb dieses Kreises liegenden Punct gelangen könnte, von welchem man ausgegangen ist.

*63. 13ter Lehrsatz. Zwey Kreise können einander nicht schneiden, wenn die Summe ihrer Halbmesser kleiner ist, als die Entfernung der Mittelpuncte von einander.

Beweis. Die Kreislinien erreichen einander gar nicht, und jede liegt ganz außerhalb der andern.

Wenn (Fig. 24.) CEFK und DGHI diese Kreise sind, deren Mittelpuncte in A und B liegen, so werden beyde Kreise die zwischen den Mittelpuncten gezogene Linie AB irgendwo in C und D schneiden, weil jeder der beyden Halbmesser kleiner als AB ist. Daß nun nicht beyde Kreislinien die gerade Linie AB in einerley Puncte C schneiden können, erhellt daraus, weil sonst die beyden Halbmesser = AC und = BC und ihre Summe = AC + BC = AB wäre, gegen die Voraussetzung; aber es kann auch sonst nirgends einen Durchschnittspunct geben. Denn sollte K ein Punct seyn, der beyden Kreislinien gemeinschaftlich wäre, so ist allemal, wenn man AK und BK zieht, (§. 46.) AK + BK > AB, also da AK = AC, so ist BK > BC, und folglich gewiß größer als BD, weil schon BC diesen Halbmesser übertrifft. Jeder Punct K der einen Kreislinie liegt also weiter vom Mittelpuncte der andern entfernt, als der Halbmesser der letztern beträgt.

*64. **14ter Lehrsatz.** **Zwey Kreislinien können einander nicht schneiden, wenn der Unterschied ihrer Halbmesser größer ist, als die Entfernung der Mittelpuncte von einander.**

Beweis. In diesem Falle sind die Kreise allemal ungleich, und jeder Punct der kleinern Kreislinie liegt dem Mittelpuncte des größern Kreises näher, als irgend ein Punct der größern Kreislinie. (Fig. 25.)

Es sey A des kleinern und B des größern Kreises Mittelpunct und der Unterschied der Halbmesser, nämlich BD — AC größer als AB. Man verlängere die durch beyde Mittelpuncte gehende Linie AB, bis sie den Umfang des größern Kreises zweymal in D und G schneidet (§. 51.); sollten nun beyde Kreislinien einander schneiden, so könnte es in D oder in G oder in einem Puncte geschehen, der nicht in dieser geraden Linie liegt. Es kann aber erstlich D nicht ein Durchschnittspunct seyn; denn wenn auch der kleinere Kreis durch D ginge, so wäre der Unterschied der Halbmesser dem Abstande der Mittelpuncte von einander gleich, nämlich BD — AD = AB, gegen die Voraussetzung; der kleinere Kreis wird also diese Linien in einen Punct C schneiden, der von D verschieden ist, und es wird AD > AC seyn, weil BD — AC > BD — AD seyn soll. Auch G kann kein Durchschnittspunct seyn; denn da DGH der größere Kreis ist, so ist BG > AI und folglich noch weit mehr AB + BG > AI; der Punct G liegt also außerhalb des kleinern Kreises. Endlich kann auch kein außerhalb der geraden Linie DG liegender Punct H im Umfange des größern Kreises zugleich im Umfange des kleinern Kreises liegen. Zieht man nämlich AH, BH, so ist (§. 46.) HA + AB > HB, oder weil BH = BD ist, HA + AB > BD und folglich wenn man von beyden Größen AB subtrahirt HA > AD. Da nun AD > AC, so ist noch mehr HA > AC und H liegt um mehr als den Halbmesser AC vom Mittelpuncte des kleinern Kreises entfernt. Alle Puncte der größern Kreislinie liegen also außerhalb des kleinern Kreises.

*65. **15ter Lehrsatz.** Zwey Kreislinien schneiden einander allemal, wenn die Summe ihrer Halbmesser größer und zugleich die Differenz ihrer Halbmesser kleiner ist als die Entfernung ihrer Mittelpuncte von einander.

Beweis. Wenn man die einzelnen Fälle durchgeht: so findet man, daß allemal, wenn diese Voraussetzungen Statt finden, einige Puncte der einen Kreislinie innerhalb und einige Puncte derselben außerhalb des andern Kreises liegen.

Erster Fall. In Fig. 26. sind GDH und BEF zwey Kreise, deren Mittelpuncte C, A sind. Bey diesen Kreisen sey zwar die Summe der Halbmesser größer als AC, aber jeder Halbmesser einzeln genommen, kleiner als AC. — Man ziehe durch die Mittelpuncte eine gerade Linie und verlängere sie, bis sie beyde Kreislinien zum zweytenmale schneidet. (Fig. 51.) Da nun jeder der beyden Halbmesser kleiner ist, als AC, so schneiden beyde Kreislinien die Linie AC in Puncten B, D, die zwischen A und C liegen; weil aber doch AB + CD ⊳ AC, so liegt B, der Punct in der Kreislinie BEF dem Mittelpuncte C des andern Kreises näher als D, und folglich liegt B innerhalb des andern Kreises DGH. Dagegen liegt F, nämlich der Punct, wo die verlängerte CA die Kreislinie BEF abermals schneidet, außerhalb des Kreises DGH, denn da schon CA ⊳ CD, so ist noch mehr CA + AF ⊳ CD. Die Kreislinie BEF liegt also theils innerhalb, theils außerhalb des andern Kreises und beyde Kreislinien schneiden einander.

Zweyter Fall. In Fig. 27. ist der Halbmesser CA des einen Kreises AFHG, dem Abstande der beyden Mittelpuncte von einander gleich; der Halbmesser des andern Kreises aber entweder ebenfalls dieser Entfernung gleich oder kleiner, als dieselbe.

In diesem Falle geht der Umfang des ersten Kreises durch den Mittelpunct A des zweyten Kreises und liegt also zum Theil innerhalb des letztern. Man verlängere die durch beyde Mittelpuncte gezogene gerade Linie AC bis sie die erstere Kreislinie noch einmal in H schneidet. Weil wir nun in diesem Falle annehmen, daß der Halbmesser AB des zweyten Kreises nicht größer als AC sey, so ist gewiß AC + CH oder AH > AB und H liegt außerhalb des Kreises BED; also sind wieder einige Theile der Kreislinie AFH innerhalb, einige außerhalb des andern Kreises.

Dritter Fall. Es sey endlich (Fig. 28.) der Halbmesser CI des einen Kreises DGI größer als die Entfernung AC der Mittelpuncte von einander, so werden ebenfalls die Kreislinien einander schneiden, der Halbmesser des zweyten Kreises mag größer oder kleiner als diese Entfernung oder ihr gleich seyn, wofern nur der Unterschied der Halbmesser kleiner, als die Entfernung AC der Mittelpuncte von einander ist. Man verlängre die durch beyde Mittelpuncte A und C gezogne gerade Linie bis sie in D, B, I. F jede Kreislinie zweymal geschnitten hat. (§. 51.) Wenn nun CI der Halbmesser des größern Kreises IDG und AF der Halbmesser des kleinern Kreises BEF ist: so soll nach der Voraussetzung CI — AF < AC seyn, also (Arithmetik §. 77.) CI < AC + AF oder CI < CF; es liegt also I innerhalb des Kreises BEF, dessen Mittelpunct A ist. Hingegen liegt der Punct D, wo die gerade Linie DF den größern Kreis IDG zum zweytenmal schneidet, außerhalb des Kreises BEF; denn da wir annehmen AB < CD, so ist gewiß

AB $<$ CD + AC, also ist D um mehr als den Halbmesser vom Mittelpuncte des kleinern Kreises entfernt. Also schneiden sich auch diese Kreise.

* 66. 16ter Lehrsatz. Wenn eine Kreislinie eine andre Kreislinie von innen berührt, so liegt der Berührungspunct in der Verlängerung der durch beyde Mittelpuncte gezognen geraden Linie und die Kreislinien haben außer diesem Puncte sonst keinen gemein.

Beweis. Wenn (Fig. 29.) ABCD und AEFG die Kreise sind, welche einander von innen berühren, so ziehe man zwischen ihren Mittelpuncten die gerade Linie HI, und verlängere diese von dem Mittelpuncte I des größern Kreises durch H bis sie in A den Umfang des größern Kreises trifft. Dieser Punct A wird derjenige seyn, wo beyde Kreislinien einander berühren; denn läge der Berührungspunct anderswo in K auf dem Umfange des größern Kreises: so hätte man (§. 46.) KI $<$ KH + HI, oder weil die Halbmesser KI = AI, auch AI $<$ HK + HI oder AI — HI $<$ HK, das ist AH $<$ HK. Es liegt also der Punct A im Umfange des größern Kreises, dem Mittelpuncte H des kleinern Kreises näher, als irgend ein andrer Punct K im Umfange des größern Kreises demselben liegt; läge also K zugleich im Umfange des kleinern Kreises, so läge A innerhalb dieses Kreises; und da F und andre Puncte der größern Kreislinie außerhalb der kleinern Kreislinie liegen, so würden die Kreislinien einander nicht berühren, sondern schneiden. Sollen also zwey Kreislinien einander von innen berühren, so kann der Berührungspunct nirgends anders als in A liegen.

*67. 3te Aufgabe. Um zwey gegebene Mittelpuncte H und I (Fig. 29.) zwey Kreise zu beschreiben, die einander von innen berühren.

Auflösung. Man nehme den Halbmesser AH des einen Kreises willkührlich an, verlängre IH bis sie diesen Kreis in A schneidet, und nehme IA zum Durchmesser des andern Kreises, so berühren sich die Kreise von innen in A.

Oder, — man nehme die Halbmesser der beyden Kreise so an, daß ihr Unterschied = HI dem Abstande der Mittelpuncte von einander gleich sey.

Beweis. Die letzte Regel kommt mit der ersten überein, denn es ist IA — HA = HI. Daß die nach dieser Regel gezeichneten Kreislinien in A einen Punct gemein haben, erhellt von selbst; sie haben aber auch keinen andern Punct gemeinschaftlich, weil für jeden Punct K auf dem Umfange des größern Kreises HK > AH ist, und also K außerhalb des kleinern Kreises liegt, wenn A auf dem Umfange desselben ist.

*68. 17ter Lehrsatz. Wenn zwey Kreise einander von außen berühren: so liegt der Berührungspunct in der zwischen den beyden Mittelpuncten gezogenen geraden Linie und die Kreislinien haben sonst keinen Punct mit einander gemein.

Beweis. Wenn (Fig. 30.) die beyden Kreise BDEF und BKLM einander von außen berühren: so liegt kein Punct des einen Kreises innerhalb des andern. Wenn also K der Berührungspunct wäre, so müßte kein Punct im Umfange des Kreises BKLM dem Mittelpuncte C des andern Kreises näher liegen, als K demselben liegt. Man ziehe die Linie AC zwischen den beyden Mittelpuncten. Da der Mittelpunct C außerhalb des um A beschriebnen Kreises liegt, so schneidet diese Linie den Umfang des letztern Kreises BKLM irgendwo in B. Sollte nun K der Berührungspunct beyder Kreise seyn, so würde, wenn man CK, AK zieht, CK + AK > AC seyn, und weil AB = AK, (indem B und K im Umfange des um A beschriebnen Kreises liegen) CK + AB > AC oder CK > AC — AB, CK > CB seyn. Der Punct B liegt also dem Centro des zweyten Kreises näher, als K demselben liegt; und wenn K der Berührungspunct wäre, so läge B innerhalb des Kreises BDEF und die Kreise schnitten einander. Da also alle Puncte der Kreislinie BKLM weiter als B von C entfernt sind, so müssen die Kreise sich in dem in der Linie AC liegenden Punct B berühren, wenn sie sich bloß von außen berühren sollen, ohne sich zu schneiden.

*69. 4te Aufgabe. Zwey Kreise um die gegebnen Mittelpuncte A und C so zu ziehen, daß sie einander von außen berühren. (Fig. 30.)

Auflösung. Man ziehe zwischen den beyden gegebenen Mittelpuncten die gerade Linie AC und nehme die Halbmesser der beyden Kreise so an, daß die Summe derselben dieser Entfernung genau gleich werde. Die so beschriebenen Kreise berühren einander von außen.

Beweis. Wenn man die Halbmesser so annimmt, daß AB + BC = AC, so gehen beyde durch den

Punct B, haben aber keinen andern Punct mit einander gemein, weil jeder andre Punct K im Umfange des einen Kreises um mehr als den Halbmesser BC des andern Kreises von dessen Mittelpuncte entfernt liegt.

* 70. Anmerkung. Diese Sätze enthalten alle mögliche verschiedene Fälle, die bey der Lage excentrischer Kreise vorkommen können. Sind nämlich zwey Mittelpuncte gegeben, um welche Kreise von gegebenen Halbmessern gezeichnet werden sollen, so kann die Lage folgendermaßen verschieden seyn: 1. die Summe der beyden Halbmesser ist kleiner, als die Entfernung der Mittelpuncte von einander; dann erreichen die Kreise einander gar nicht und einer liegt ganz außerhalb des andern. 2. Die Summe der Halbmesser ist der Entfernung der Mittelpuncte von einander genau gleich; dann berühren die Kreise einander von außen und die Summe der Halbmesser ist größer als die Entfernung der Mittelpuncte von einander und dabey zugleich a. die Differenz der Halbmesser kleiner, als der Abstand der Mittelpuncte von einander; dann schneiden sie einander; oder b. dabey zugleich die Differenz der Halbmesser gleich dem Abstande der Mittelpuncte von einander; dann berührt die kleinere Kreislinie die größere von innen; oder es ist c. zugleich die Differenz der Halbmesser größer als der Abstand der Mittelpuncte von einander, dann liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern, ohne daß die Kreislinien einander berühren oder schneiden.

Dritter Abschnitt.

Von den Dreyecken.

71. 5te Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreyeck zu zeichnen, dessen Seiten jede der gegebenen geraden Linie AB gleich sind. (Fig. 31.)

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie und schneide darauf CD gleich der gegebenen AB ab, (§. 57.); ziehe nun um den einen Endpunct C als Mittelpunct einen Kreis, dessen Halbmesser = CD ist, und mit demselben Halbmesser um den andern Endpunct D als Mittelpunct einen zweyten Kreis. Nach dem Puncte E, wo die Kreislinien einander schneiden, zieht man von dem Mittelpuncte aus die geraden Linien CE, DE, so ist CDE das verlangte gleichseitige Dreyeck.

Beweis. Die Kreislinien schneiden einander, weil jede durch den Mittelpunct der andern geht, und das Dreyeck ist gleichseitig, weil die drey Seiten Radien gleicher Kreise sind.

Da die Kreislinie DEF durch den Mittelpunct D des andern Kreises geht, so liegt sie theils innerhalb des letztern; aber auch theils außerhalb, weil ihr Mittelpunct C auf dem Umfange des andern Kreises liegt, und also Theile, die wie F sich jenseits des Mittelpuncts befinden, außerhalb des Kreises CEG seyn müssen. Daß aber DE = EC = CD ist, übersieht man leicht; denn DE und DC sind Halbmesser des Kreises CEG und DC, CE sind Halbmesser des Kreises DEF, also DE = DC und DC = CE, folglich auch DE = CE. Jede der Seiten ist also = AB, weil CD = AB genommen ist.

72. 6te Aufgabe. An die gegebene gerade Linie GH (Fig. 32.) ein Dreyeck zu zeichnen, dessen drey Seiten den drey gegebenen Linien AB, CD, EF gleich sind, vorausgesetzt, daß die Summe je zweyer dieser Linien größer ist, als die dritte.

Auflösung. Man nehme auf der geraden Linie GH das Stück IK der einen der gegebenen Linien AB gleich, und zeichne nun den einen Endpunct I als Mittelpunct mit dem Halbmesser IL = CD, und um den andern Endpunct K mit dem Halbmesser KM = EF einen Kreis. Nach dem Puncte N, wo die Kreislinien sich schneiden, ziehe man von den Mittelpuncten I, K aus die geraden Linien IN, KN, so sind die Seiten des Dreyecks IKN den gegebenen Linien gleich.

Beweis. Die Kreise schneiden sich, weil O innerhalb, und L außerhalb des andern Kreises liegt. Wir haben angenommen, daß je zwey der gegebenen Linien zusammengenommen mehr betragen, als die dritte, daher ist $IN + KN > IK$, und weil $IN = IO$ und $KN = KQ$, auch $IO + KQ > IK$, oder $IO + KQ > IO + KO$, folglich (Arithm. §. 78.) $KQ > KO$, und da Q im Umfange des Kreises liegt, dessen Mittelpunct K ist, so liegt O innerhalb dieses Kreises. Ferner ist $IN + IK > KN$, und

IN = IL, also IL + IK > NK, (das ist KL > KN, KL > KQ, L liegt also außerhalb des Kreises QNM; und da O und L beyde im Umfange des andern Kreises liegen, so schneiden sich beyde Kreislinien (§. 60.), weil einige Puncte der einen innerhalb, einige außerhalb der andern liegen. Wenn aber beyde Kreislinien einander schneiden, so ist offenbar, daß die Seiten den gegebenen Linien gleich sind, denn es ist IK = AB, IN = IL = CD, KN = KM = EF.

* Der Beweis, daß die Kreislinien einander schneiden müssen, läßt sich leichter aus §. 65. führen. Es ist nämlich erstlich die Summe ihrer Halbmesser größer als die Entfernung der Mittelpuncte KN + IN > IK, und zugleich zweytens die Differenz der Halbmesser kleiner, als jener Abstand, denn aus IN + IK > KN, folgt IK > KN — IN, oder KN — IN < IK.

73. **18ter Lehrsatz.** Wenn in zwey Dreyecken ABC und DEF (Fig. 33.) der Winkel BAC in dem einen dem Winkel EDF im andern gleich ist, und es ist zugleich jede der Seiten, welche im erstern Dreyecke an diesem Winkel anliegen, einer der Seiten gleich, welche im zweyten Dreyecke dem gleichen Winkel anliegen, nämlich AB = DE, und AC = DF: so sind die Dreyecke einander völlig gleich, nämlich

auch die dem gleichen Winkel entgegenstehende Seite BC = EF und die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel B = E und C = F.

Beweis. Wenn man sie auf einander legt, so decken sie genau einander.

Stellt man sich vor, das Dreyeck DEF werde so auf ABC gelegt, daß der Punct D auf A und DE längs AB falle, so kommt auch E auf B zu liegen, weil AB = DE; zugleich fällt DF auf AC, weil die gleichen Winkel BAC = EDF einander decken; (§. 23.) und endlich fällt F auf C, weil AC = DF. Wenn aber dieses geschieht, so muß auch die Linie EF auf BC fallen, weil ihre Endpuncte zusammenfallen, und zwischen diesen keine zwey verschiedene gerade Linien möglich sind. Die Dreyecke decken also einander genau und es ist BC = EF, der Winkel ABC = DEF und ACB = DEF.

74. 19ter Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF (Fig. 34.) zwar zwey Seiten in dem einen so groß wie im andern sind, AB = DE und AC = DF, aber der Winkel, welchen sie einschließen, ist im einen Dreyecke größer als im andern BAC > EDF: so ist auch die Seite, welche diesem Winkel gegen-

über steht, größer in demjenigen Dreyecke, welches dem größern Winkel hat, nämlich BC $>$ EF.

Beweis. Man lege das Dreyeck DEF so auf ABC, daß D auf A und F auf C fällt, so wird DE zwischen AB und AC fallen, weil der Winkel EDF $<$ BAC. Nach der verschiedenen Gestalt der Dreyecke kann dann der Endpunct E dieser Seite entweder gerade auf die Seite BC fallen, (wie Fig. 36.) oder innerhalb des Dreyecks ABC, (wie Fig. 35.) oder außerhalb desselben, (wie Fig. 37.) und in allen diesen Fällen läßt sich aus §. 46. 47. zeigen, daß EF $<$ BC ist.

Erster Fall. (Fig. 36.) Wenn man D auf A und F auf C legt, und es fällt E gerade in die Linie BC, so ist offenbar EF, welche hier durch EC vorgestellt wird, kleiner als BC, weil nothwendig die Seite DE oder AE zwischen AB und AC fällt.

Zweyter Fall. Fig. 35.) Wenn AEC das auf ABC gelegte Dreyeck ist, und es fällt E innerhalb ABC, so ziehe man BE. Weil nun (§. 47.) AB + BC $>$ AE + EC, und nach der Voraussetzung des Lehrsatzes AB = DE = AE, so ist BC $>$ EC, und EC stellt hier die Seite EF des zweyten Dreyecks vor.

Dritter Fall. (Fig. 37.) Fällt E außerhalb des Dreyecks ABC, so ist $EC < EG + GC$ und $AB < AG + BG$, also (Arithm. §. 77.) wenn man addirt, $EC + AB < EG + AG + BG + GC$, das ist $EC + AB < AE + BC$; und weil nach der Voraussetzung $AB = EA$, so ist $EC < BC$. Also ist allemal (Fig. 34.) die Seite $EF < BC$, wenn $AB = DE$, und $AC = DF$, aber $EDF < BAC$ ist.

75. 20ster Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF (Fig. 33.) alle drey Seiten in dem einen so groß sind, als im andern, nämlich $AB = DE$, $AC = DF$, und $BC = EF$: so sind die Dreyecke einander völlig gleich, und folglich in beyden auch die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, nämlich $BAC = EDF$, $ABC = DEF$, und $ACB = DFE$.

Beweis. Wäre dieses nicht der Fall, sondern es wäre irgend ein Winkel B des einen Dreyecks größer, als der ähnlich liegende Winkel E des andern Dreyecks: so würde, weil $AB = DE$ und $BC = EF$ ist, aber $B > E$ seyn soll, $AC > DF$ seyn (§. 74.); diese Linien sind aber gleich, und folglich kann nicht $B > E$, und eben so wenig $B < E$ seyn, wenn aber B = E, so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes aus §. 73.

76. 21ster Lehrsatz. Wenn zwar in zweyen Dreyecken (Fig. 34.) zwey Seiten in dem einen so groß sind, als im andern, AB = DE und AC = DF, aber die dritte Seite in dem einen größer ist als im andern, BC > EF: so ist auch der Winkel, welcher dieser letztern Seite gegenüber steht, größer in demjenigen Dreyecke, welches die größere Seite hat, BAC > EDF.

Beweis. Wäre nicht BAC > EDF, so müßte entweder BAC = EDF oder BAC < EDF seyn. Im erstern Falle würde, weil AB = DE und AC = DF, auch (§. 73.) BC = EF seyn, und im letztern Falle (§. 74.) BC < EF, welches beydes der Voraussetzung entgegen ist.

77. 7te Aufgabe. An eine gerade Linie AB einen Winkel zu zeichnen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist. (Fig. 38.)

Auflösung. Man nehme auf den Schenkeln des gegebenen Winkels willkührliche Stücke CD, CE und ziehe DE. Dann schneide man auf der Linie AB ein Stück FH = CE ab, und zeichne über FH ein Dreyeck, in welchem FG = CD, und HG = DE ist, so ist der Winkel GFH = DCE. (§. 75.)

Anmerkung. Sollte an dem Puncte H die Spitze des zu zeichnenden Winkels liegen und die Oeffnung des Winkels nach der linken Seite hin seyn, so müßte man die Seite, welche = CD ist, von H aus, und die, welche = DE ist, von F aus ziehen.

78. 8te Aufgabe. An eine gerade Linie AB ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem ein Winkel dem gegebenen Winkel C gleich ist, und in welchem die diesen Winkel einschließenden Seiten, den Linien D, E, gleich sind. (Fig. 39.)

Auflösung. Man zeichne an der geraden Linie AB einen Winkel, welcher dem Winkel C gleich ist. (§. 77.) FGB = C, und nehme auf seinen Schenkeln GI = D, GK = E, und ziehe IK so ist GIK das verlangte Dreyeck.

79. Erklärung. Ein Dreyeck heißt gleichschenklicht, wenn es zwey Seiten hat, welche einander gleich sind, wie Fig. 40., wo AB = AC. Die beyden gleichen Seiten AB, AC heißen die Schenkel des Dreyecks und man sieht gewöhnlich die dritte Seite, welche jenen nicht gleich ist, als die Grundlinie oder Basis des Dreyeckes an, ob-

gleich sie eigentlich nur dann so heißen sollte, wenn sie, wie in Fig. 40. zugleich die untere Seite des Dreyecks ist.

Auch das gleichseitige Dreyeck ist also gleichschenklicht, aber bey diesem ist die Basis zugleich eben so groß als jeder der Schenkel.

80. Um ein gleichschenklichtes Dreyeck zu zeichnen, bedarf es keiner besondern Regeln, da man in §. 72. ein gleichschenklichtes Dreyeck erhalten würde, wenn zwey der gegebenen Seiten einander gleich wären.

81. 9te Aufgabe. Einen gegebenen geradlinigten Winkel zu halbiren. (Fig. 41.)

Auflösung. Es sey ABC der Winkel, welchen man durch eine von dem Scheitelpuncte aus gezogene gerade Linie BG in zwey gleiche Winkel zerlegen soll. Man nehme auf den beyden Schenkeln AB, CB gleiche Stücke BD = BE, deren Länge übrigens willkührlich ist, und ziehe DE. Ueber DE als Grundlinie, errichte man ein gleichseitiges Dreyeck (§. 71.), DEF; und wenn dieses geschehen ist, so ziehe man durch B und F die gerade Linie BG: diese halbirt den gegebenen Winkel.

Beweis. Die Dreyecke BDF, BEF sind völlig gleich nach §. 75. denn nach der Construction ist BD = BE und DF = EF, aber BF ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich, also sind alle Seiten in dem einen Dreyecke so groß, als im andern und daher die ähnlich liegenden Winkel gleich, DBF = EBF.

82. 10te Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwey gleiche Hälften zu theilen.

Auflösung. Um die gerade Linie AB (Fig. 42.) zu halbiren, errichte man über dieser Linie ein gleichseitiges Dreyeck ABC (§. 71.) und eben so zeichne man an der andern Seite dieser Linie das gleichseitige Dreyeck ADB und ziehe dann DC, so theilt diese Linie jene AB in zwey gleiche Theile AE = BE.

Beweis. Die Dreyecke ACD, BCD sind einander gleich (§. 75.) und daher auch die Dreyecke AEC, BEC gleich. (§. 73.) Weil nämlich AC = BC, AD = BD und DC = DC, so sind in den Dreyecken ACD, BCD die ähnlich liegenden Winkel gleich, also der Winkel ACE = BCE. Dann aber sind auch die Dreyecke ACE, BCE völlig gleich, weil ein Winkel mit den einschließenden Seiten in dem einen so ist, wie im andern; es ist also AE = BE, wie verlangt ward.

83. Anmerkung. Statt der gleichseitigen Dreyecke DEF in Fig. 41. und ACB, ADB in Fig. 42. kann man auch gleichschenklichte zeichnen, in denen nur die Seiten DF = EF (Fig. 41.) und CA = CB und DA

= DB (Fig. 42.) sind, denn bloß auf die Gleichheit dieser Seiten kommt es hier an.

84. 11te Aufgabe. Durch den Punct E, welcher in der Linie AB liegt, Fig. 42.) eine gerade Linie zu ziehen, welche auf AB senkrecht steht.

Auflösung. Man nehme von E aus auf AB die gleichen Entfernungen EA = EB und errichte über AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB, dessen Schenkel AC = BC; alsdann ziehe man CE, welches die verlangte senkrechte Linie ist.

Beweis. Nach der Construction ist AE = BE, und AC = BC, und die Seite EC = EC, beyden gemeinschaftlich, daher sind AEC, BEC völlig gleiche Dreyecke, und also die ähnlich liegenden Winkel gleich, daher der Winkel AEC = BEC; weil nun diese beyden Winkel Nebenwinkel sind, indem AEB eine einzige grade Linie ist, so sind beyde rechte Winkel (§. 25.)

85. 22ter Lehrsatz. In jedem gleichschenklichten Dreyecke sind auch die beyden Winkel gleich, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen.

Beweis. In dem Dreyecke ABC (Fig. 43.) sey AB = AC. Man halbire die dritte Seite BC in D, (§. 82.), so sind die Dreyecke ABD, ACD einander ganz gleich, weil AB = AC, BD = CD und AB beyden Dreyecken gemein ist, (§. 75.) also ist der Winkel ABD = ACD.

86. Im gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich groß, weil für jede zwey der Beweis sich so, wie eben geschehen, führen läßt.

87. 23ster Lehrsatz. Wenn im Dreyecke ACB (Fig. 44.) zwey Winkel einander gleich sind, ABC = ACB: so sind auch die beyden Seiten gleich, welche den gleichen Winkeln gegenüber stehen, AC = AB.

Beweis. Wäre nicht AC = AB, sondern eine größer, AB > AC, so könnte man BE = AC nehmen, und dann (§. 78.) beweisen, daß das Dreyeck EBC dem ACB völlig gleich wäre; denn es ist ∢ EBC = ACB und BC = CB, und nach der Voraussetzung EB = AC; und wenn dies wäre, so würden die Dreyecke EBC, ACB einander decken, was sie doch offenbar nicht thun, da das eine nur ein Stück des andern ist; also ist nicht AB > AC.

88. Wenn ein Dreyeck drey gleiche Winkel hat, so hat es auch drey gleiche Seiten, oder ist gleichseitig.

89. 24ster Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 45.) ein Winkel größer ist, als ein anderer, $C > B$: so ist auch die Seite größer, welche dem größern Winkel gegenüber steht, als diejenige, welche dem kleinern gegenübersteht, nämlich $AB > AC$.

Beweis. Man zeichne an CB den Winkel $DCB = B$ (§. 77.) und verlängere den Schenkel CD, bis er AB in D schneidet, dann ist (§. 87.) $CD = DB$; aber offenbar ist (§. 46.) $CD + AD > AC$, also auch $AD + DB > AC$ oder $AB > AC$.

90. 25ster Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke ABC, (Fig. 45.) die eine Seite AB größer ist, als die andere AC, so ist auch der Winkel größer, welcher der größern Seite, als der, welcher der kleinern Seite gegenüber steht, nämlich $C > B$.

Beweis. Wäre nicht $C > B$, so müßte entweder $C = B$ oder $C < B$ seyn, im erstern Falle müßte $AC = AB$ seyn, (§. 87.) und im letztern Falle $AC > AB$, (§. 89.) welches beydes der Voraussetzung entgegen ist. Es ist also $C > B$.

91. In jedem Dreyecke steht also dem größesten Winkel die größeste Seite und

dem kleinsten Winkel die kleinste Seite gegen über.

92. 26ster Lehrsatz. Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke ABC (Fig. 43.), die Grundlinie BC in D halbirt, und aus dem entgegengesetzten Winkel A nach D die Linie AD gezogen wird, so halbirt diese den Winkel A und das ganze Dreyeck, und steht auf der Grundlinie BC senkrecht.

Beweis. Da AB = AC im gleichschenklichten Dreyecke und BD = CD, weil in D die Grundlinie halbirt ist, endlich AD = AD; so ist (§. 75.) der Winkel BAD = CAD, ferner beyde Winkel an D gleich, und also (§. 25.) rechte Winkel, und endlich das Dreyeck selbst halbirt.

93. 27ster Lehrsatz. Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke ABC, (Fig. 43.), die Linie AD den von den gleichen Schenkeln eingeschloßenen Winkeln halbirt: so halbirt sie auch die gegenüberstehende Seite BC, und das ganze Dreyeck, und steht auf der Seite BC senkrecht.

Beweis. Weil AB = AC, AD = AD und der Winkel BAD = CAD, so folgt (§. 73.)

daß BD = CD, BDA = CDA = R seyn. (§. 25. 28.)

94. 28ster Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke ABC, (Fig. 46.), die eine Seite verlängert: so ist der äußere Winkel BCD am Dreyecke, welcher nämlich durch die eine Seite BC, und die geradlinigte Verlängerung der andern gebildet wird, größer als einer von den beyden Winkeln BAC, ABC, die innerhalb des Dreyeckes dem Winkel C, über welchen hinaus die Seite verlängert ist, gegenüber liegen.

Beweis. Mit Hülfe der Linie AEF, welche AC in E halbirt, zeichnet man einen Winkel ECF, der = ABC und offenbar kleiner als BCD ist; eben so einen Winkel ACH = BAC, der kleiner als ACI ist, aber ACI = BCD.

Man halbire BC in E, ziehe AE und verlängere sie nach F bis EF = AE; dann ziehe man CF, so ist das Dreyeck EFC dem EAB gleich, (§. 73.), weil auch der von gleich großen Seiten eingeschloßne Winkel CEF = BEA, indem diese Winkel Scheitelwinkel sind, (§. 37.) In diesen Dreyecken sind also die ähnlich liegenden Winkel gleich, nämlich ECF = EBA. Offenbar aber ist

BCF $<$ BCD, weil F zwischen den Schenkeln des Winkels BCD liegt, und man hat also den äußern Winkel BCD größer, als den einen innern entgegengesetzten Winke ABC.

Daß aber auch BAC $<$ BCD, erhellt aus der Vergleichung von BAC, mit ACI, wenn man BC gradlinicht nach I verlängert. Es ist nämlich ACI $=$ BCD, weil es Scheitelwinkel sind; und wenn man AG $=$ GC, GH $=$ GB nimmt, so ist auch der Winkel ACH $=$ CAB, (§. 73.) weil die Dreyecke AGB, CGH außer den zwey gleichen Seiten auch den Winkel AGB $=$ CGH haben, der von jenen Seiten eingeschlossen wird Weil nun ACH $<$ ACI nnd BAC $=$ ACH, BCD $=$ ACI, so ist auch BAC $<$ BCD.

95. 29ster Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Winkel allemal kleiner als zwey rechte Winkel.

Beweis. Verlängert man (Fig. 47.) irgend eine Seite BC des Dreyecks nach D: so ist (§. 94.) der Winkel ACD $>$ ABC, und auch ACD $>$ BAC es ist aber ACD $+$ ACB $=$ 2 R, also ABC $+$ ACB $<$ 2 R und auch ACB $+$ BAC $<$ 2 R. Hätte man die Verlängerung an einem der andern Winkel angebracht, so hätte man eben so gefunden, daß auch ABC $+$ BAC $<$ 2 R sey.

96. Ein Dreyeck kann daher nie mehr als einen Winkel haben, welcher ein rechter ist, und nie mehr als einen stumpfen Winkel enthalten.

Erklärung. Man nennet daher ein Dreyeck rechtwinklicht, wenn es einen rechten Winkel enthält; stumpfwinklicht, wenn es einen Winkel hat, der größer, als ein rechter ist; und spitzwinklicht, wenn alle drey Winkel spitze Winkel sind.

97. Erklärung. Im rechtwinklichten Dreyecke giebt man die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, den besondern Namen Catheten; die Seite hingegen, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt die Hypotenuse.

98. 30ster Lehrsatz. Eine Kreislinie kann von einer geraden Linie in nicht mehr als zwey Puncten geschnitten werden. (Fig. 48.)

Beweis. Sollte die gerade Linie DE von der Kreislinie in drey Puncten, A, C, G geschnitten werden, so müßten diese drey Puncte alle gleich entfernt von dem Mittelpuncte F des Kreises seyn. Es läßt sich aber zeigen, daß FCG ein stumpfer Winkel und folglich FG > FC ist. Wenn nämlich FA = FC: so ist der Winkel FAC = FCA, also jeder derselben kleiner als ein rechter, weil sonst ihre Summe nicht kleiner als zwey rechte wären. Ist aber FCA $\lessdot$ R, so ist FCG $\gtrdot$ R, (§. 30.) und folglich FCG der größeste Winkel im Dreyecke FCG, daher FG die größeste Seite, (§. 91.) und also GF $\gtrdot$ FC. Hätte man einen Punct H zwischen A und C für den dritten Durchschnittspunct angenommen, so hätte man FHC $\gtrdot$ FAC, also FHC $\gtrdot$ FCA und FH $\lessdot$ FC.

99. **12te Aufgabe. Durch den Punct C, welcher außerhalb der Linie AB liegt, eine gerade Linie zu ziehen, welche auf der gegebenen AB senkrecht steht. (Fig. 49.)**

Auflösung. Jenseits der Linie AB nehme man einen Punct G willkührlich an, und ziehe um den Mittelpunct C mit dem Halbmesser CG einen Kreisbogen, welcher die Linie AB in zwey Puncten D und E schneiden wird. Das durch den Kreisbogen auf der geraden Linie AB abgeschnittene Stück DE halbire man in F (§. 82.) und ziehe CF, so ist CF die verlangte durch C gehende Perpendicularlinie.

Beweis. Da CDE die gleichen Schenkel CD = DE hat, so erhellt die Richtigkeit des Satzes aus §. 92.

100. Daß es nicht möglich sey, durch einen in der geraden Linie AB liegenden Punct C mehr

als eine senkrechte Linie zu ziehen, (Fig. 50.) erhellet von selbst; denn wenn EC, DC beyde senkrecht wären, so müßte ACE = ACD = DCB seyn. Aber es ist jetzt auch einleuchtend, daß sich von dem außerhalb der geraden Linie AB liegenden Puncte D nur eine Linie DC senkrecht auf AB ziehen läßt; denn wäre auch DF auf AB senkrecht, so hätte das Dreyeck DCF bey C und F zwey rechte Winkel, gegen §. 95. 96.

101. Hieraus folgt auch: Wenn man (Fig. 51.) in der Mitte der Grundlinie BC eines gleichschenklichten Dreyecks ABC eine Linie auf BC senkrecht errichtet: so geht diese durch die Spitze A, wo die gleichen Schenkel sich schneiden. Sie kann nämlich nicht in DE fallen, weil die von A nach D gezogene Linie allemal auf BC senkrecht ist, (§. 92.) und es also keine andere, hiervon verschiedene senkrechte Linie geben kann, die auch durch D ginge.

Ferner: Wenn man aus der Spitze A des gleichschenklichten Dreyecks, wo sich die gleichen Schenkel schneiden, eine Linie auf die Grundlinie senkrecht zieht: so halbirt diese die Grundlinie; denn sonst müßte es zwey durch A gehende auf BC senkrechte Linien geben. (§. 92.)

102. 31ster Lehrsatz. Wenn der Punct C außer der geraden Linie AB liegt: so ist 1. die von C gegen AB senkrecht gezogene gerade Linie CD (Fig. 52.) die kürzeste, welche sich von C an die Linie AB ziehen läßt, und 2. wenn man irgend eine andere gerade Linie CF von C an AB zieht: so ist diese desto länger, je weiter der Punct F von D entfernt ist.

Beweis. 1. Wenn CD die senkrechte, und CE irgend eine andere gegen AB gezogene gerade Linie ist: so hat das Dreyeck CDE in D einen rechten, als seinen größesten Winkel, und folglich ist CE die größeste Seite, (§. 91.) also CD $\lessdot$ CE, und dieses findet allemal Statt, E mag so nahe, als man will an D fallen.

2. Sind CE, CF zwey nicht senkrecht an AB gezogene Linien, so ist CEF ein äußerer Winkel am Dreyecke CDE, folglich CEF $\gtrdot$ CDE, CEF $\gtrdot$ R (§. 94.) und CF $\gtrdot$ CE, (§. 91.) weil der stumpfe Winkel allemal der größeste im Dreyecke ist. (§. 95.)

103. Es giebt also keine zwey verschiedene von C an AB gezogene gerade Linien, welche an derselben Seite der senkrechten CD lägen, und dabey gleiche Länge hätten; sondern, wenn von C zwey gleiche Linien an AB gezogen werden: so muß

nothwendig die eine an die eine, die andere an die andere Seite der von C an AB gezogenen senkrechten Linie fallen.

104. **32ster Lehrsatz.** Wenn (Fig. 53.) in zwey Dreyecken ABC, DEF zwey Winkel in dem einen so groß sind als im andern, nämlich ABC = DEE und ACB = DFE, und es ist die zwischen ihnen liegende Seite in beyden gleich groß, BC = EF: so sind die Dreyecke einander völlig gleich.

Beweis. Legt man das Dreyeck DEF so auf ABC, daß E auf B, EF auf BC, also F auf C fällt, so fällt ED längs BA, und es ist zu beweisen, daß ED = BA sey. Wäre nicht ED = BA, so sey ED = BG, und man ziehe CG. Dann hätte man in den Dreyecken GBC, DEF, GB = DE, BC = EF, und den Winkel GBC = DEF, und würde also (§. 73.) schließen, daß diese Dreyecke ganz gleich wären, also der Winkel GCB = DFE. Da nun nach der Voraussetzung des Lehrsatzes ACB = DFE seyn soll, so kann nicht GCB = DFE seyn, und dieser Widerspruch findet immer Statt, wenn G von A verschieden ist; es muß also D auf A fallen und dann erhellet, daß BA = ED, AC = DF und der Winkel A = D sey.

105. 33ster Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF, (Fig. 53.) zwey Winkel des einen, zweyen Winkeln des andern gleich sind, nämlich A = D und B = E; und es ist eine Seite, welche dem einen gleichen Winkel gegenübersteht, in beyden Dreyecken gleich groß, BC = EF: so sind die Dreyecke einander völlig gleich.

Beweis. Man kann beweisen, daß auch die zwischen den gleichen Winkeln liegende Seite in beyden Dreyecken gleich sey, AB = DE. Wäre dieses nicht der Fall, sondern AB > DE, so nehme man BG = ED. Dann würden die Dreyecke GBC, DEF gleich seyn, weil der Winkel B = E und die diesen einschließenden Seiten im einen so groß, als im andern sind; daraus aber würde folgen, daß der Winkel BGC = EDF, da doch der Winkel BGC (§. 94.) als äußerer Winkel am Dreyeck GAC größer als BAC ist, und BAC = EDF angenommen worden. Es kann also nicht BGC = EDF, und folglich nicht BG = ED seyn, sondern G muß mit A zusammenfallen, oder BA = ED seyn, woraus dann nach §. 73. und §. 104. die Gleichheit der Dreyecke folgt.

106. 34ster Lehrsatz. Zwey rechtwinklichte Dreyecke ABC, DEF (Fig. 54.)

sind einander völlig gleich, wenn die Hypotenusen einander gleich sind BC = EF und eine der Catheten in dem einen so groß ist, als im andern, AB = DE.

Beweis. Die Gleichheit der Dreyecke würde erwiesen seyn, wenn die Gleichheit der andern Cathete erwiesen wäre, und diese erhellt daraus, weil die entgegengesetzte Voraussetzung auf unrichtige Folgerungen führt. Nimmt man nämlich an, es sey AC > DF und AG = DF, so würden, wenn man BG zieht, die Dreyecke ABG, DEF gleich seyn, weil in beyden der rechte Winkel von Seiten, die in dem einen so groß als im andern wären, eingeschlossen würden, (§. 73.) dann hätte man also BG = EF und weil BC = EF angenommen ist, auch BG = BC. Aber BG, BC sind gerade Linien, die von dem Puncte B aus, an einerley Seite der senkrechten bis an die Linie AC gezogen sind, und sie können also unmöglich gleich seyn, (§. 103.) folglich ist auch nicht AG = DF, sondern AC = DF, wenn die Voraussetzungen des Lehrsatzes Statt finden, und dann sind beyde Dreyecke ganz gleich.

* 107. 35ster Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ABC, DEF (Fig. 55.) einen gleichen Winkel haben, ABC = DEF, und zwey gleiche Seiten, welche diesen Winkel nicht ein-

schließen, nämlich AB = DE und AC = DF, so sind die Dreyecke einander völlig gleich, wenn zugleich diejenige Seite, welche dem gleichen Winkel gegenüber steht, größer ist, als die, welche demselben anliegt, nämlich AC > AB und DF > DE.

Beweis. Es kommt nur darauf an, zu beweisen, daß auch die dritte Seite in beyden gleich sey, BC = EF, und dieses beweiset man daraus, weil die entgegengesetzte Supposition ergeben würde, daß es an einerley Seite der Senkrechten AH zwey gleich große von A an BC gezogene gerade Linien gäbe. — Nach der verschiedenen Gestalt der Dreyecke sind hier zwey Fälle möglich.

Erster Fall. Wenn die beyden Seiten AB, AC, welche als den Seiten DE, DF des andern Dreyeckes gleich gegeben sind, an verschiedenen Seiten der von A oder D auf die dritte Seite gezogenen senkrechten Linien AH liegen. (Fig. 55.)

Da zu erweisen ist, daß EF = BC seyn muß, so nehme man an, dies sey nicht der Fall, sondern es sey EF = BG. Zieht man dann AG, so hätten die Dreyecke ABG, DEF einen gleichen Winkel, B = E, und die anliegenden Seiten wären in beyden Dreyecken gleich, daher (§. 73.) die Dreyecke einander völlig gleich, und AG = DF, also auch AG = AC. Dieses letztere ist aber nicht möglich, wenn AG, AC zwey verschiedene an einerley Seite der senkrechten AH befindliche Linien sind (§. 103.) und wenn sie auch an verschiedenen Seiten derselben fielen, so müßte doch nach der Construction G dem Puncte H näher liegen, als B demselben liegt, und dann wäre (§. 102.) AG ⋖ AB, also nothwendig AG ⋖ AC, weil AC ⋗ AB angenommen ist. Es kann also in den Fällen, wo AC ⋗ AB ist, nicht AG = AC, und folglich nicht EF ⋖ BC seyn. Eben so läßt sich aus §. 102. zeigen, daß auch nicht EF ⋗ BC seyn kann.

Zweyter Fall. (Fig. 56.) Liegen die Seiten AB, AC an einerley Seite der senkrechten AH, und man wollte annehmen, es sey entweder EF = BG, oder auch EF = Bg: so müßte in jenem Falle AG = DF, in diesem Ag = DF seyn (nach §. 73.); es ist aber nach §. 102. allemal AG ⋖ AC, und Ag ⋗ AC, also kann keiner jener Fälle Statt finden, weil DF = AC ist.

* 108. 13te Aufgabe. An die gerade Linie AB ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem ein an dieser Linie anliegender Winkel dem gegebenen Winkel C gleich ist, in welchem ferner die eine an diesem Winkel anliegende, aber nicht auf AB fallende Seite der Linie D und die jenem Winkel gegenüberstehende Seite der Linie E gleich ist. (Fig. 57.)

Auflösung. Erster Fall, wenn die dem gegebenen Winkel entgegenstehende Seite größer ist, als die anliegende E ⋗ D.

An die Linie AB zeichne man den Winkel GFB = C (§. 77.) und nehme auf seinem Schenkel FG das Stück FH = D. Um den Mittelpunct H ziehe man mit dem Halbmesser HI = E einen Kreisbogen ON, und nach dem Puncte I, wo dieser die Linie AB schneidet, ziehe man HI, so ist FHI das verlangte Dreyeck. — Der Kreis, wovon ON ein Bogen ist, schneidet zwar die Linie AB zweymal, aber nur einer dieser Durchschnittspuncte kann an der Seite von FH liegen, wo der gegebene Winkel sich befindet, (in der Figur rechter Hand,) weil HI $>$ FH ist, also FH der senkrechten Linie näher liegt, als HI oder die ihr gleiche Linie HA (§. 102.); der zweyte Durchschnittspunct giebt also hier kein Dreyeck, welches den gegebenen Winkel in sich faßte.

Zweyter Fall. Ist hingegen die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenübersteht, kleiner als die anliegende, wie der Fall seyn würde, wenn (Fig. 57.) dem Winkel = C eine Seite = D, anliegen, und eine Seite = K gegenüberstehen sollte; so zeichnet man zwar wieder den Winkel GFB = C, nimmt FH = D, und zieht um H mit dem Halbmesser HL = K den Kreisbogen LM; aber dieser schneidet jetzt AB zweymal an einerley Seite von F und die beyden Dreyecke FHL und FHM enthalten beyde den Winkel GFB = C, die anliegende Seite = FH = D, und die gegenüberstehende Seite HL = HM = K; beyde Dreyecke entsprechen also der Forderung der Aufgabe.

Daß hier beyde Durchschnitte L und M an einerley Seite von HF fallen, erhellt wieder aus §. 102. denn die Perpendicularlinie auf AB fällt zwischen L und M (§. 97.) und da HL $<$ HF, so liegt die erstere der senkrechten Linien näher als die letztere.

* 109. Hieraus erhellet, warum in §. 107. die Bedingung nöthig war, daß die Seite, welche dem in beyden Dreyecken gleichen Winkel gegenübersteht, die größere sey. Alle übrigen Bedingungen treffen bey den beyden Dreyecken FHL und FHM (Fig. 57.) zu, denn sie haben den Winkel HFL und die Seite FH gemein und die jenem Winkel gegenüberstehenden Seiten sind gleich, HL = HM, weil aber hier HL < HF, so sind die beyden ungleichen Dreyecke möglich.

Es könnte sogar der Fall eintreffen, daß sich aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel kein Dreyeck so zeichnen ließe, daß die kleinere Seite dem gegebenen Winkel gegenüber stände. Wäre nämlich in Fig. 57. die Linie K kleiner als die von H gegen AB gezogene senkrechte Linie: so würde der um H mit dem Halbmesser = K beschriebene Kreis die Linie AB gar nicht schneiden, sondern ganz oberhalb derselben liegen.

---

110. Die Anwendungen, welche sich von den bisherigen Lehrsätzen machen lassen, sind noch ziemlich beschränkt; indeß geben sie uns doch Mittel an die Hand, um wenigstens alle vorgezeichneten Figuren in eben der Größe abzuzeichnen. Außerdem setzen sie uns in Stand, Winkel auf dem Papiere zu zeichnen, die gegebenen Winkeln auf dem Felde gleich sind, und umgekehrt, Winkel im Felde abzustecken, welche vorgezeichneten Winkeln auf dem Papiere gleich sind. Endlich führen sie doch auch schon zu Methoden, um Entfernungen zu bestimmen, die man nicht unmittelbar messen kann, obgleich die in den bishe

rigen Sätzen begründeten Methoden noch eben nicht die allerbequemsten sind.

111. 14te Aufgabe. Eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen geradlinigten Figur völlig gleich ist. (Fig. 58.)

Auflösung. Man theile die gegebene Figur ABCDEF in lauter geradlinigte Dreyecke, indem man die Linien EA, EB, EC nach allen Winkelpuncten zieht. Dann zeichne man zuerst ein Dreyeck, welches dem Dreyecke AEF völlig gleich ist, füge an die Linie AE ein zweytes, welches AEB genau gleicht, und so fahre man fort, ein Dreyeck an das andere zu fügen, bis die Figur völlig abgezeichnet ist. Bey dieser Abzeichnung muß man Sorge tragen, daß die Seiten jedes Dreyecks auch die gehörige Lage erhalten, daß nämlich im Dreyecke AEF die Seite EF rechts und AE links zu liegen komme und so weiter.

112. Nach dieser Anleitung kann man jede Charte oder ähnliche Zeichnung abzeichnen. Zieht man nämlich zwischen allen Hauptpuncten gerade Linien, so erhält man eben eine solche an einander hängende Reihe von Dreyecken, wie Fig. 58. und kann also alle diese Hauptpuncte auftragen. Kommen in der Charte krumme Linien vor, etwa Flüsse, oder Land-

straßen, oder Grenzen zwischen verschiedenen Besitzungen: so kann man wenigstens einige Puncte dieser krummen Linien auf die vorhin angegebene Art in die Zeichnung eintragen, und es ist dann leicht, die übrigen Theile dieser Linien, allenfalls nach dem Augenmaaß dazwischen zu zeichnen.

113. Welcher Methode man sich bedienen will, um die Dreyecke abzuzeichnen, hängt von Umständen ab. Bey kleinen Dreyecken pflegt man am liebsten nach §. 72. zu verfahren; hingegen, wenn die Dreyecke so groß sind, daß man die Länge der Seiten nicht gut auf einmal mit dem Zirkel fassen kann: so ist es besser, einen Winkel zuerst zu zeichnen; und auf seine Schenkel die Länge der Seiten stückweise aufzutragen. (§. 78.) Auch könnte es wohl kommen, daß man aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln das Dreyeck bestimmen müßte, wozu die Regel erst in der Folge (§. 144.) vorkommt. Dieses würde besonders dann nöthig seyn, wenn auf der abzuzeichnenden Charte bloß die Richtung der beyden übrigen Seiten angegeben wäre, ihr Durchschnittspunct aber, oder die Spitze des Dreyecks auf der Charte nicht mehr Platz gefunden hätte.

114. 15te Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde so abzustecken, daß sie durch zwey gegebene Puncte geht.

Auflösung. Man bezeichnet diese beyden Puncte durch aufgestellte Stangen und setzt zwischen sie andere Stangen so, daß wenn man das Auge an einer von jenen Stangen oder Stäben hält, die zwischengesetzten einander und auch die zweyte zuerst aufgestellte Stange verdecken, oder so, daß dann alle genau hinter einander zu liegen scheinen. Dann stehen alle diese Stangen in der geraden Linie, oder in einer gegen die Erde senkrechten Ebne, welche bezeichnet werden sollte.

115. 16te Aufgabe. Eine gerade Linie auszumessen.

Auflösung. Man nimmt irgend eine gerade Linie als Maß an, und versucht, wie oft dieses in jener enthalten ist. Auf dem Papiere geschieht dieses, indem man den Zirkel um so viel öffnet, als das Maß beträgt, und dann untersucht, wie oft man diese Länge neben einander auf der Linie absetzen kann. Auf dem Felde bedient man sich der Maßstäbe oder Meßketten.

Anmerkung. Das eigentliche Verfahren hierbey und alle Vorsichts-Maßregeln, welche eine genaue Messung erfordert, können hier nicht aus einander gesetzt werden, da es uns hier bloß um Andeutung der Anwendungen zu thun ist.

116. 17te Aufgabe. Einen Winkel auf dem Papiere zu zeichnen, welcher einem auf dem Felde gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung. Man stelle eine ebene Tafel genau im Scheitelpuncte des auf dem Felde gegebenen Winkels horizontal auf, das heißt so, daß keine Seite sich mehr als die andere gegen die Erde neige. Man setze in der Richtung der beyden Schenkel des Winkels Merkmale, etwa Stangen oder Stäbe. Man lege nun auf jener Tafel ein Lineal so, daß es durch den Punct auf der Tafel geht, welcher gerade über dem Scheitelpuncte des auf dem Felde gegebenen Winkels liegt; richte es genau nach dem in dem einen Schenkel aufgestellten Merkmale, und ziehe längs des Lineals auf der Tafel eine Linie. Endlich verfahre man für den andern Schenkel eben so, indem man das Lineal wieder an den Punct bringt, der gerade über dem Scheitelpuncte liegt und es nach dem andern Schenkel richtet. Dann ist auf dem Papieee der verlangte Winkel gezeichnet.

Beweis. Stellt man sich vor, die Tafel sey unmittelbar auf die Erde gelegt, so kann man den Scheitelpunct als auf der Tafel ABCD selbst (Fig. 59.) in E liegend betrachten. Zieht man dann über die Tafel und auf der Erde hin die Linien EF, EG nach den auf dem Felde bemerkten Gegenständen F, G, so ist offenbar der verlangte Winkel aufs Papier gebracht, indem der Winkel auf dem Felde sich durch nichts als durch eine größere Länge der Schenkel von dem auf dem Papiere unterscheidet. Man übersieht aber leicht, daß es in der Hauptsache keinen Unterschied macht, wenn die Tafel auch nicht auf der Erde liegt, sondern sich in einiger Höhe befindet.

117. Um die Richtung des Lineals genau zu bestimmen, bedient man sich der Diopter-Lineale und Fernröhre; statt der einfachen Tafel gebraucht man den Meßtisch, welcher mit gehörigen Vorrichtungen, um genau horizontal und genau über einen gewissen Punct gestellt zu werden u. s. w. versehen ist.

118. 18te Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde abzustecken, der einem auf dem Papiere gegebenen Winkel gleich ist. (Fig. 59.)

Auflösung. Man stellt die Tafel eben so wie in der vorigen Aufgabe; legt das Lineal an den einen Schenkel EF des gegebenen Winkels und bemerkt einen Punct F, der genau in der verlängerten Richtung dieses Schenkels liegt. Eben so verfährt man, während die Tafel unverrückt bleibt, mit dem andern Schenkel und bemerkt zugleich genau den Scheitelpunct, welcher nämlich gerade unter dem Puncte E liegt: so ist das verlangte geschehen.

119. 19te Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde abzustecken, welcher eben so groß ist, als ein anderer, gleichfalls auf dem Felde gegebener Winkel.

Auflösung. Man bringe den gegebenen Winkel auf die Tafel (§. 116.) und gehe nun mit der Tafel nach dem Scheitelpuncte des neuen abzusteckenden Winkels, wo man dann nach §. 118. verfährt.

120. 20ste Aufgabe. Die Entfernung zweyer Puncte A und B auf dem Felde zu bestimmen, wenn man diese nicht unmittelbar messen kann. (Fig. 60.)

Auflösung. Erster Fall. Man nehme einen Standpunct C, von welchem aus man nach den beyden Puncten A und B kommen und dahin messen kann. Dann verlängre man die gerade Linie BC nach D, und AC nach E; messe AC und CB, und nehme CE = AC, DC = BC. Endlich messe man DE, so ist die Entfernung DE mit AB einerley, also AB hierdurch bestimmt.

Beweis. Es sind ACB = ECD Scheitelwinkel (§. 37.) und die Dreyecke ACB, ECD gleich nach §. 73.

Zweyter Fall. Wenn man von dem angenommenen Standpuncte C nur nach dem einen Endpuncte A der zu bestimmenden Linie hinmessen kann. Dann kann man zwar AC und BC nach E und D verlängern, aber weil man BC nicht messen kann, so kann man auch nicht CD = CB nehmen. Mann verlängere also jene Linie über C hinaus, nehme CE = CA und setze an CE einen Winkel CED = CAB, (§. 119) so bestimmt sich ein Punct D, wo die beyden im Felde abgesteckten Linien CD, ED, einander schneiden und ED ist wieder der gesuchten Entfernung gleich.

121. Anmerkung. Die im letzten §. angegebenen Methoden wird man in der Ausübung wenig brauchbar finden; doch könnte die erste allenfalls dienen, um ohne alle Instrumente die Entfernung AB genau zu bestimmen. Der eigentliche Grund aber, warum sie hier angeführt sind, ist nur, einen Begriff von der Benutzung der bisherigen Lehrsätze zu dem Zwecke zu geben, welche die Feldmeßkunst eigentlich hat, nämlich Entfernungen zu bestimmen, die man nicht unmittelbar messen kann. Man könnte die Entfernung AB selbst in dem Falle finden, da man von C aus weder nach A noch nach B hinmessen kann, aber das Verfahren ist sehr viel umständlicher und also noch weniger brauchbar, als die hier angeführten Methoden.

Vierter Abschnitt.

Von den Parallellinien.

122. Erklärung. Zwey gerade Linien AB, CD (Fig. 61.) nähern sich einander, wenn

von den Puncten G, E, welche beyde in AB liegen, der eine G der Linie CD näher ist, als der andere E; das heißt, wenn die von G an CD gezogne senkrechte Linie GH kürzer ist, als die von E an CD gezogne senkrechte EF.

Hingegen sind (Fig. 62.) die geraden Linien AB, CD überall gleichweit von einander entfernt, wenn alle Linien, die man von Puncten E, G der einen senkrecht gegen die andre zieht, einander gleich sind, EF = GH.

123. Grundsatz. Wenn (Fig. 62.) AB eine gerade Linie ist, und man zieht in derselben Ebne eine andere Linie CD so, daß sie überall gleich weit von AB entfernt ist: so wird auch CD eine gerade Linie seyn.

124. Erklärung. Gerade Linien, welche in einerley Ebne liegen, und überall gleichweit von einander entfernt sind, heißen Parallellinien.

125. Grundsatz. Gerade Linien, die sich einander nähern, müssen, wenn man sie hinreichend verlängert, allemal einander schneiden; hingegen schneiden Parallellinien einander nicht, man mag sie verlängern, so weit man

will, sondern bleiben überall gleich weit von einander entfernt.

Man kann sich nämlich nicht denken, daß zwey gerade Linien, die auf einer gewissen Strecke sich einander nähern, bey ihrer Verlängerung nicht fortfahren sollten, sich einander in eben dem Maaße immer mehr zu nähern; und wenn das ist, so müssen sie endlich sich einander schneiden. Eben so einleuchtend aber ist, daß gerade Linien, die sich einander gar nicht nähern, auch wenn man sie verlängert, nicht anfangen können, sich einander zu nähern, und daß sie sich folglich auch nicht schneiden können.

126. 36ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 63.) AB und CD zwey gerade überall gleich weit von einander entfernte Linien sind: so sind alle gerade Linien EF, welche auf der einen senkrecht stehen, auch auf der andern senkrecht.

Beweis. Es läßt sich beweisen, daß die Linien sich einander nähern würden, wenn nicht EF auf beyden zugleich senkrecht wäre.

Es sey EF eine von dem Puncte E aus gegen CD senkrecht gezogne Linie, und man nehme an, sie stehe nicht zugleich auf AB senkrecht. In diesem Falle ist es gewiß möglich, aus F eine andre Senkrechte FG gegen AB zu ziehen; und weil G ein von E verschiedener Punct seyn soll, so kann man nun wieder GH auf CD senkrecht setzen. Wäre aber FGE wirklich ein rechter Winkel, so wäre nothwendig (§. 91.) EF > FG, weil nothwendig FEG kleiner als ein rechter Winkel seyn müßte, (§. 95.); dagegen im Dreyecke FGH, wo FHG ein rechter Winkel ist, hätte man GH < FG, und daraus würde nothwendig folgen, EF > GH. Nun sind EF, GH, die Entfernungen der Puncte E und G von der geraden Linie CD und da diese gleich seyn sollen: so kann nicht EF > FG seyn, sondern es muß die Voraussetzung, daß EF nicht senkrecht auf AB sey, falsch seyn.

127. Erklärung. Wenn (Fig. 63.) zwey Parallellinien AB, CD von einer geraden Linie IK geschnitten werden: so nennt man die Winkel, welche von der letztern mit den Parallellinien an der innern Seite der Parallellinien gebildet werden, innere Winkel, wie ALN, LNC; hingegen diejenigen, welche an der äußern Seite der Parallellinien liegen, äußere Winkel, wie ILA, KND.

Man sagt ferner von den beyden an einerley Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkeln, deren einer an der innern Seite der Parallellinien liegt wie ILA, LNC, der äußere Winkel ILA sey dem innern INC entgegengesetzt.

Endlich nennt man zwey innere Winkel, die an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie und an den beyden verschiedenen Parallellinien liegen, wie ALN, LND innere Wechselwinkel und eben so zwey äußere Winkel, die an den beyden verschiedenen Parallellinien und an verschiedenen Seiten der schneidenden Linien liegen, äußere Wechselwinkel.

128. 37ster Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien AB, CD von einer geraden Linie IK geschnitten werden: so ist die Summe der innern, an derselben Seite von IK liegenden Winkel zweyen rechten gleich, BLN + LND = 2R. (Fig. 63.)

Beweis. Wenn man von den Puncten L, N, wo die Linie IK die Parallellinien schneidet, die Linien LM, NO senkrecht auf beyde Parallellinien zieht: so läßt sich die Gleichheit der Winkel OLN = MNL zeigen. In den Dreyecken OLN, MNL ist nämlich der rechte Winkel bey O und M gleich, LN beyden gemein und in beyden die Hypotenuse, und ON ist = LM, weil die Linien parallel oder überall gleich weit von einander entfernt sind, daher sind die Dreyecke ganz gleich; (§. 106.) also der Winkel OLN = MNL, und daher weil OLN + NLB = 2R, auch MNL + LNB = 2R.

129. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß bey Parallellinien auch die Wechselwinkel gleich sind, ALN = LND, und ALI = KND; und ferner daß jeder äußere Winkel dem innern entgegengesetzten gleich ist. ILB = IND, und KNC = NLA.

130. 38ster Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD, welche in einerley Ebne liegen, von einer dritten IK (Fig. 64.) geschnitten werden, und es ist die Summe der innern Winkel, welche an einerley Seite von IK liegen, gleich zwey rechten, BLN + LND = 2R: so sind die beyden Linien AB, CD parallel.

Beweis. Daß AB und CD einander nicht schneiden können, erhellt schon aus §. 95. weil man sonst ein Dreyeck erhielte, in welchem zwey Winkel zusammen so viel betrügen, als zwey rechte, welches unmöglich ist. Aber die Linien bleiben auch überall gleich entfernt von einander, denn, wenn man LN in P halbirt und durch P eine willkührliche gerade Linie QR zieht, welche die Linien AB, CD in Q und R schneidet: so läßt sich die Gleichheit der auf AB und CD senkrechten Linien QT, SR beweisen.

Man hat nämlich erstlich in den Dreyecken QPL, RPN, die Seiten PN = PL, weil LN in P halbirt ist, und die umliegenden Winkel in beyden gleich, PNR = PLQ nach der Varaussetzung des Lehrsatzes, und NPR = LPQ (§. 37.), als Scheitelwinkel; hieraus folgt also (§. 104.), daß auch der Winkel NRP = LQP. Wenn aber das ist, so sind die Dreyecke QRS, RQT völlig gleich, weil sie die rechten Winkel S = T haben, (indem RS auf AB und QT auf CD senkrecht gezogen ist), der Winkel SQR = TRQ und die Seiten QR = QR, welche dem rechten Winkel gegen über steht, (§. 105.) Es ist also RS = QT und die Linie AB, CD nähern sich einander nicht.

131. Aus diesem Lehrsatze folgt auch, daß zwey gerade Linien parallel sind, wenn die Wechselwinkel gleich sind, BLN=LNC, und wenn der äußere Winkel ILB dem innern entgegengesetzten LND gleich ist.

132. 21ste Aufgabe. Eine gerade Linie zu ziehen, welche der gegebenen geraden Linien AB parallel sey und durch den Punct C gehe. (Fig. 65.)

Auflösung. Man ziehe durch C gegen AB zu eine willkührliche gerade Linie CD, zeichne an

CD den Winkel DCE = CDB (§. 77.) so daß sein Scheitel in C fällt und verlängere die so bestimmte Linie EC nach F: so ist EF die verlangte Parallellinie. (§. 130. 131.)

133. Man hätte auch an der verlängerten CG den Winkel GCF = CDB nehmen können: so würde CF parallel mit AB seyn.

Diese Regel ist es eigentlich die man gewöhnlich befolgt, um mit Leichtigkeit Parallellinien zu ziehen. Man nimmt nämltch ein in Holz ausgeschnittenes Dreyeck abc (Fig. 66.) dessen Seiten, wie beym Lineale völlig gerade gearbeitet sind, legt die eine Seite desselben an die gegebene Linie AB und zieht an der anderu Seite hin, die Linie ac, die man nach C verlängert. An aC kann man der Bequemlichkeit wegen ein grades Linial legen und dann das Dreyeck so daran fortschieben, daß ac immer am Lineale oder an der Linie aC bleibe; dann ist in jeder Lage des Dreyecks abc oder a'' b'' C die Seite ab oder a'' b'' mit AB parallel.

134. Völlig ähnlicher Methoden wie §. 132. kann man sich auch bilden, um auf dem Felde Parallellinien zu ziehen, indem man nach §. 119. gleiche Winkel absteckt.

135. 22ste Aufgabe. Durch den Punct C, welcher nicht in der geraden Linie

AB liegt, eine Linie zu ziehen, die mit AB einen gegebenen Winkel macht. (Fig. 65.)

Auflösung. Man zeichne irgendwo an AB den Winkel IHB dem gegebenen Winkel gleich (§. 77.) und ziehe durch C eine Linie DG mit IH parallel, (§. 132. 133.): so ist CDB dem gegebenen Winkel gleich. (§. 129.)

136. 39ster Lehrsatz. Wenn zwey Linien AB, CD beyde mit einer dritten EF parallel sind; so sind sie auch unter sich parallel. (Fig. 67.)

Beweis. Man ziehe eine gerade Linie GH, welche alle drey Linien schneidet. Da nun AB mit EF parallel; so ist GIB = GLF und weil CD mit EF parallel, GKD = GLF, (§. 129.) also auch GIB = GKD, und folglich AB mit CD parallel. (§. 131.)

137. 40ster Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist der äußere Winkel, welchen die Verlängerung der einen Seite mit der anliegenden Seite macht, so groß als die Summe der beyden innern entgegengesetzten Winkel BCD = A + B, und daher die Summe

aller drey Winkel im Dreyeck gleich zweyen rechten, $BAC + ABC + ACB = 2R$. (Fig. 68.)

Beweis. Wenn man durch C die Linie CE mit AB parallel zieht, so ist $BCE = ABC$, weil es Wechselwinkel sind, und $ECD = BAC$, weil es äußere und innere entgegengesetzte Winkel sind, (§. 129.) Man hat daher $ABC + BAC = BCD$, und ferner $ABC + BAC + ACB = ACB + BCD = 2R$.

138. Im rechtwinklichten Dreyeck ist also die Summe der beyden übrigen Winkel gleich einem rechten Winkel. Im gleichschenklichten Dreyecke ist die Größe aller Winkel bestimmt, wenn man einen Winkel kennt. Denn es ist z. B. in Fig. 48., wo $B = C$; der Winkel $BAC = 2R - 2BCA$ und der Winkel $ABC = \frac{2R - BAC}{2}$. Wenn also im gleichschenklichten Dreyecke der von den gleichen Schenkeln eingeschlossene Winkel ein rechter ist: so ist jeder der gleichen Winkel $= \frac{2R - R}{2} = \frac{1}{2}R$, die Hälfte eines rechte Winkels.

Im gleichseitigen Dreyecke (Fig. 31.) ist $E = C = D$ und $E + C + D = 2R$, also jeder $= \frac{2}{3}R$, zwey Dritteln des rechten Winkels gleich.

139. 23ſte Aufgabe. Durch den Endpunct A einer geraden Linie AB, eine Linie auf AB ſenkrecht zu ziehen. (Fig. 69.)

Auflöſung. Man nehme auf AB das Stück AC willkührlich und errichte darüber ein gleichſchenklichtes Dreyeck ADC, deſſen Schenkel AD = CD man ebenfalls willkührlich annehmen kann. Um den Mittelpunct D ziehe man mit den Halbmeßer BA = DC einen Halbkreis und verlängere CD bis E, wo ſie den Kreis ſchneidet. Endlich ziehe man AE, ſo iſt AE die verlangte Senkrechte.

Beweis. Da DA = DE Halbmeſſer deſſelben Kreiſes ſind, ſo iſt auch ADE ein gleichſchenklichtes Dreyeck und daher ſind die Winkel DEA = DAE und jeder derſelben = $\frac{1}{2}$ ADC; eben ſo DAC = DCA = $\frac{1}{2}$ ADE, (§. 137.) alſo 2 EAD + 2 DAC = ADC + ADE = 2 R, und EAD + DAC = R, das iſt EAC ein rechter Winkel.

140. 41ſter Lehrſatz. In jeder geradlinigten Figur ABCDEF. (Fig. 70.) beträgt die Summe aller Winkel zweymal ſoviel rechte Winkel als die Figur Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.

Beweis. Nimmt man irgend einen Punct G innerhalb der Figur an, und zieht nach allen

Winkelpuncten gerade Linien von G aus: so wird die Figur in eben so viele Dreyecke getheilt, als sie Seiten hat. Die Summe aller Winkel in diesen Dreyecken beträgt also zweymal soviel rechte Winkel als die Figur Seiten hat. Alle Winkel dieser Dreyecke zusammen genommen, machen aber, wenn man die rund um den Punct G liegenden Winkel abrechnet, eben so viel aus, als alle Winkel, welche die Seiten der Figur mit einander machen, folglich weil die um G herumliegenden Winkel vier rechten gleich sind: so ist die Summe aller Winkel der Figur so groß als zweymal soviel rechte Winkel, wie die Figur Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.

Man muß hierbey aber bemerken, daß wenn die Figur einwärts gehende Winkel hat, wie bey F, hier der inwendig liegende Winkel, welcher = AFG + GFE ist, verstanden wird, wenn von den Winkeln der Figur die Rede ist, und nicht der außen liegende AFE. Ein solcher Winkel, wie hier der inwendig liegende F, ist größer als 2 rechte nnd heißt ein erhabener Winkel.

141. Wenn die Figur einwärts gehende Winkel hätte, so könnte es kommen, daß man den Punct G nicht so annehmen könnte, daß alle an die Winkelpuncte gezogenen Linien ganz innerhalb der Figur fielen, sondern einige könnten wie GD (Fig. 71.)

die Seiten der Figur ABCDE schneiden. Dann läßt sich der Beweis des vorigen Lehrsatzes nicht so leicht übersehen, aber wenn man EC zieht: so erhellet aus dem vorigen, daß die Winkel der vierseitigen Figur ABCE betragen = 8R — 4R, und die Winkel des Dreyecks CDE = 2R, also auch hier die Winkel der fünfseitigen Figur 10R — 4R. Und so könnte man sich in jedem ähnlichen Falle helfen.

142. Es beträgt also die Summe der Winkel
in jedem Dreyecke = 2 . 3R — 4R = 2R,
in jedem Vierecke = 2 . 4R — 4R = 4R,
in jedem Fünfecke = 2 . 5R — 4R = 6R,
und so weiter,
in jedem Zwanzigecke = 2 . 20R — 4R = 36R,
in jedem Hunderteckе = 2 . 100R — 4R = 196R.
u. s. w.

143. 42ster Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD von einer dritten IK (Fig. 72.) geschnitten werden, und es ist die Summe der beyden innern Winkel BEL + ELD kleiner als zwey rechte Winkel: so nähern sich jene Linien nach der Seite zu, wo diese Winkel liegen und müssen sich also, wenn man sie nach dieser Seite hin genug verlängert, nothwendig einander schneiden.

Beweis. Die Linie EF, welche auf CD senkrecht steht, ist nicht auf AB senkrecht, und daraus läßt sich beweisen, daß eine zweyte auf CD senkrechte Linie GH < EF ist.

Da die Winkel BEL und ELD zusammen weniger als zwey rechte betragen, so ist allemal wenigstens einer derselben ein spitzer Winkel. Es sey also L ein spitzer Winkel und man ziehe von dem Scheitelpuncte E des andern Winkels die Linie EF auf CD senkrecht, so wird diese an derselben Seit von EL fallen, wo der spitze Winkel L liegt, weil sonst in einem Dreyecke ein rechter Winkel und der Nebenwinkel von L, welcher stumpf ist, seyn würde. Weil nun (§. 137.) in dem Dreyecke ELF die Summe der drey Winkel = 2 R ist, nämlich

ELF + LFE + FEL = 2 R, dagegen aber
ELF + GEF + FEL < 2 R, so ist

GEF < LFE, also GEF < R und EF steht nicht auf AB senkrecht. Zieht man nun von F gegen AB die Linie FG senkrecht: so wird diese an der Seite von E fallen, wo der spitze Winkel GEF liegt, und eine wieder von G auf CD senkrechte Linie GH wird entfernter von IK fallen, als EF. Weil nun im Dreyecke EGF, G ein rechter Winkel ist: so hat man (§. 91.) EF > FG, und aus eben dem Grunde ist im Dreyecke GFH, die Seite FG > GH, folglich auch EF > GH. Diese beyden Linien bestimmen aber die Entfernungen zweyer Puncte in AB von der Linie CD und es erhellet also, daß AB sich der Linie nach der Seite hin nähert, wo die Winkel liegen, deren Summe kleiner als 2R ist, und nach dieser Seite hin werden sie also einander schneiden, wenn man sie hinreichend verlängert. (§. 125.)

144. 24ste Aufgabe. Es ist (Fig. 73.) eine gerade Linie A gegeben, nebst zweyen Winkeln B und C, deren Summe weniger als zwey rechte beträgt; man soll aus diesen drey Stücken erstlich ein Dreyeck construiren, in welchem die gegebenen Winkel der gegebenen Seite anliegen; zweytens ein andres Dreyeck, in welchem der eine Winkel C dieser Seite gegen über steht, der andre B an ihr anliegt.

Auflösung 1. Man nehme die Seite DE = A, setze an D den Winkel FDE = B und an E den Winkel FED = C (§. 77.); so werden die Schenkel DF, EF einander schneiden, weil die Winkel D, E zusammen weniger als zwey rechte betragen, (§. 143.) und das nach dem ersten Theile der Aufgabe verlangte Dreyeck bilden.

2. Um ein Dreyeck nach dem zweyten Theile der Aufgabe zu construiren, nehme man GH = A,

und zeichne an sie den Winkel MHG = B, an den Schenkel KH zeichne man den Winkel KHL = C und ziehe GM mit HL parallel: so ist GMH das verlangte Dreyeck, weil GMH = MHL. (§. 129.)

145. 43ster Lehrsatz. Wenn man auf den Parallellinien AB, CD gleiche Stücke nimmt AB = CD (Fig. 74.) und die Endpuncte derselben durch die geraden Linien AC, BD (welche sich nämlich nicht durchkreuzen,) verbindet: so ist auch AC = BD, und diese Linien sind ebenfalls parallel.

Beweis. Man ziehe BC, so erhellt die Gleichheit der Dreyecke ABC, DCB, weil AB = CD, BC = BC, ABC = DCB, (§. 129.); hieraus folgt, AC = DB und ABC = DBC und dieser letztere Umstand zeigt, daß AC mit BD parallel ist.

146. 44ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 74.) zwey Parallellinien AB, CD von zwey andern Parallellinien AC, BD geschnitten werden: so sind die abgeschnittenen parallelen Stücke gleich, AB = CD und AC = BD.

Beweis. Zieht man BC, so ist wegen der Parallellität der Linien, ABC = DCB und ACB

= DBC, und folglich sind die Dreyecke ABC, DCB völlig gleich (§. 104.) also AB = DC und AC = DB.

147. **45ster Lehrsatz.** Wenn in einer vierseitigen Figur ABCD (Fig. 74.) jede zwey einander gegen überstehende Seiten gleich groß sind, AB = CD, AC = BD: so sind diese Seiten parallel und die einander gegen überstehende Winkel gleich, C = B und A = D.

Beweis. Man ziehe BC, so sind ABC, DCB gleiche Dreyecke wegen der Gleichheit der Seiten (§. 75.), daher die Winkel A = D, ABC = DCB, und ACB = DBC. Diese Gleichheit der Winkel zeigt, daß die Seiten parallel sind, und auch daß ABC + CBD = DCB + BCA oder ABD = ACD.

148. Auf dem letztern Lehrsatze beruht die Zeichnung der Parallellinien vermittelst des Parallellineals. Dieses Instrument besteht nämlich aus zwey Linealen AB, CD (Fig. 74.) an welchen in den Punct A, B, C, D, die so liegen, daß AB = CD ist, gleich lange Verbindungsstücke AC = BD befestigt sind, die sich um die Endpuncte so drehen lassen, daß alle Stücke immer in einer Ebne

bleiben. In welche verschiedene Lagen man nun auch AC und BD bringen mag, indem man die Winkel ändert: so bleiben doch allemal die Lineale AB, CD parallel, und ändern bloß ihre Entfernung von einander.

* 149. Anmerkung. Die bisherige Darstellung der Theorie der Parallellinien ist nicht durchaus so strenge, als man von einem mathematischen Vortrage zu verlangen pflegt. Denn obgleich wohl niemand die Richtigkeit der beyden Grundsätze §. 123. 125. in Zweifel ziehen wird: so könnte man doch, nach der Strenge der mathemathischen Lehrart, klarere Beweise für dieselben fordern. Indeß scheint mir der hier gewählte Gang der Untersuchung, weil er leicht zu übersehen ist, für den Anfänger passender, als manche andre Darstellung dieser Lehre, bey denen man gewöhnlich doch ebenfalls Grundsätze annehmen muß, wogegen ähnliche Erinnerungen statt finden.

Um aber den Geübtern eine Probe von den Bemühungen andrer Schriftsteller für diese Lehre zu geben, setze ich noch als Zugabe diejenigen Sätze hieher, in welchen Legendre in seinen Elémens de géométrie diese Lehre gründlicher, wie es mir scheint, als irgend einer seiner Vorgänger vorgetragen hat. Daß aber diese Darstellung für die Anfänger nicht paßt, wird jeder aus dem Folgenden selbst beurtheilen können.

* 150. Lehnsatz. Wenn unter zwey Größen A, B die eine A größer ist als die andere, so ist es allemal möglich, eine Zahl n so anzunehmen, daß $n(A - B) > C$ sey, wenn C irgend eine gegebene Größe ist. Denn sobald A wirklich B um etwas übertrifft, so kann man diesen, wenn gleich kleinen, Unterschied, gewiß so vielmal nehmen, bis das Vielfache mehr als C beträgt.

Lehnsatz. Wenn D eine viel kleinere Größe als E bedeutet, so ist es gleichwol möglich, eine

Zahl n so anzunehmen, daß $\frac{1}{n}$ E < D werde. Denn da für die Größe der Zahl n keine Gränzen vorgeschrieben sind, so kann man, wenn D < $\frac{1}{1000}$ E ist, doch n = 1000000, und so weiter annehmen bis D > $\frac{1}{n}$ E. Es versteht sich, daß hierbey vorausgesetzt wird, D und A — B haben eine wirkliche Größe und sind nicht = 0 oder gar nichts.

* 151. Lehrsatz. In einem jeden Dreyecke kann die Summe der drey Winkel nicht mehr betragen als zwey rechte Winkel.

Beweis. Wäre (Fig. 75.) im Dreyecke ABC die Summe der drey Winkel größer als zwey rechte Winkel, so ließe sich durch Aneinanderreihung mehrerer gleicher Dreyecke beweisen, daß die zusammen gesetzte Linie ABDFHQP größer als die gerade Linie AP seyn könnte.

Man verlängre nämlich die eine Seite AC des Dreyecks ABC, von welchem wir annehmen, daß die Summe der drey Winkel in demselben größer als zwey rechte Winkel ist, nehme CE = AC, den Winkel DCE = BAC und CD = AB: so ist das Dreyeck CDE völlig gleich dem ABC, also der Winkel CED = ACB. Weil wir nun annehmen, die Summe der drey Winkel betrage in jedem dieser Dreyecke mehr als zwey rechte Winkel: so hat man ABC + BAC + ACB > DCE + DCB + ACB, und weil BAC + ACB = DCE + ACB ist, ABC > DCB. Zieht man also BD, so muß AC > BD seyn, weil die Dreyecke ABC, DCB zwey einander wechselsweise gleiche Seiten haben, der eingeschlossene Winkel aber größer im erstern als im letztern ist (§. 74.)

Verlängert man AC weiter nach G, nimmt EG = AC, den Winkel FEG = BAC und EF = AB, so läßt sich leicht zeigen, daß DF = BD und also AE — BDF = 2 (AC — BD) sey. Und so findet man, wenn man mehrere solche gleiche Dreyecke auf der verlängerten AC an einander reihet, daß AG — BDFH = 3 (AC — BD), AI — BDFHK = 4 (AC — BD) wird, und so wird ferner, wenn PQR das $n$te Dreyeck ist, welches außer ABC diesem gleich gezeichnet worden, AP — BDFHKQ = n (AC — BD). Wie viele solcher Dreyecke man an einander reihen will, ist ganz unbestimmt, und die Zahl n kann daher immer größer, so groß als man will, genommen werden, und wie klein auch der Unterschied AC — BD seyn mag, so kann er doch durch immer fortgesetzte Vervielfältigung endlich $>$ AB und selbst $>$ 2 AB werden, sobald AC wirklich $>$ BD ist. Es würde also möglich seyn die Reihe von Dreyecken so weit fortzusetzen, daß AP — BDFHQ $>$ 2 AB werde, also AP $>$ 2 AB + BDFHQ sey; das heißt, wenn in einem Dreyecke die Summe der Winkel mehr als 2 R betragen kann: so ist es möglich eine Reihe Dreyecke zu zeichnen, in welchen die aus geraden Stücken zusammen gesetzte Linie ABDFHQP kleiner als die zwischen den Endpuncten derselben gezogne gerade Linie AP sey; da nun dieses unmöglich ist, so ist auch jene Voraussetzung unrichtig.

* 152. Grundsatz. **Wenn man zwischen den Schenkeln des Winkels BAC, welcher kleiner als ein rechter ist, irgend einen Punct D annimmt: so ist es allemal möglich, durch D eine gerade Linie zu ziehen, welche beyde Schenkel jenes Winkels irgendwo schneidet.** (Fig. 76.)

Diese Möglichkeit ist für BAC $<$ R gewiß sehr einleuchtend; weniger einleuchtend würde sie seyn, wenn man, wie Euclides, diesen Grundsatz auch auf die Winkel ausdehnte, die größer als R und kleiner als 2 R sind. *)

* 153. Lehrsatz. **In jedem Dreyecke ist die Summe aller drey Winkel gleich zweyen rechten Winkel.**

---

*) Indeß ist es eben dieser Grundsatz, um dessen willen auch diese Darstellung der Theorie von den Parallellinien nicht für vollkommen strenge gilt.

Beweis. Daß diese Summe nicht größer als zwey rechte Winkel seyn kann, ist schon bewiesen; sie kann aber auch nicht kleiner seyn, denn es läßt sich zeigen, daß wenn in einem Dreyecke diese Summe = 2R — Z wäre, sich andre Dreyecke zeichnen ließen, worin sie höchstens = 2R — 2Z; 2R — 4Z; 2R — 8Z und so weiter seyn könnte.

Es sey, wenn es möglich ist, (Fig. 77.) ABC ein Dreyeck, in welchem die Summe der Winkel weniger als zwey rechte, nämlich nur 2R — Z beträgt, wo also Z den Unterschied bedeutet, um welchen jene Summe von zwey rechten abweicht. In diesem Dreyecke sey A der kleinste Winkel, welcher also nach §. 151. allemal spitz und zwar nicht größer als $\frac{2}{3}$R seyn kann. Die Schenkel dieses Winkels A verlängre man unbestimmt nach E und F und weiter, und zeichne an die Seite BC des Dreyeckes die Winkel DBC = ACB und DCB = ABC, so sind (§. 104.) die Dreyecke DBC, ACB völlig gleich *) und es kann daher auch im Dreyecke DBC die Summe der Winkel nicht mehr betragen, als 2R — Z. Zieht man nun durch D eine gerade Linie EF so, daß sie beyde Schenkel des Winkels EAF schneidet, welches nach §. 152. allemal möglich ist: so hat man die Summe folgender Winkel

BAC + ABC + ACB = 2R — Z,
CDB + DCB + CBD = 2R — Z
DEB + EDB + DBE = 2R } oder wenigstens
DFC + DCF + FDC = 2R } nicht größer

die Summe aller dieser Winkel also nicht größer als 8R — 2Z, zieht man nun hievon ab.

EDB + BDC + CDF = 2R,
FCD + DCB + BCA = 2R,
EBD + DBC + CBA = 2R,

---

*) Man kann hier fragen, ob auch die Schenkel BD sich nothwendig schneiden, welches aus §. 104, wo die Dreyecke als schon fertig gezeichnet angenommen wurden, nicht als nothwendig erhellet. Indeß könnte man auch DCB = ABC und DC = AB nehmen, da dann die Gleichheit der Dreyecke vollkommen eben so gut erwiesen wäre.

so bleibt BAC + DEB + DFC nicht größer als 2R — 2Z.

Wenn es also ein Dreyeck ABC giebt, in welchem die Summe der Winkel = 2R — 2Z, so läßt sich die Möglichkeit eines Dreyeckes zeigen, worin die Summe der Winkel gewiß nicht größer als 2R — 2Z seyn kann. Behandelt man nun das Dreyeck AEF eben so, wie vorhin das ABC, so kommt man auf ein Dreyeck, dessen Winkel zusammen nur höchstens = 2R — 4Z seyn können, und aus diesem läßt sich ein andres herleiten, dessen Winkel nicht mehr als 2R — 8Z, und ferner einer, dessen Winkel nicht mehr als 2R — 16Z betragen können und so weiter. Da man nun die Schenkel AE, AF immer fort, bis ins Unendliche verlängern kann: so könnte man mit der Zeichnung von Dreyecken immer fortfahren und erhielte, je weiter man fortfährt, Dreyecke worin die Summe der Winkel immer kleiner würde. Es würde also möglich oder denkbar seyn, daß man diese Arbeit so lange fortsetzte, bis man ein Dreyeck erhielte, worin die Summe der Winkel nur = 2R — nZ wäre und n so groß, daß nZ = 2R, das wäre also ein Dreyeck, worin die Summe der Winkel = 0 wäre. Zu einer solchen Ungereimtheit führt die Voraussetzung, daß die Summe der Winkel in einem Dreyecke ABC kleiner als 2R sey. Diese Summe ist also nothwendig = 2R.

* 154. Setzt man nun den Begriff von Parallellinien so fest, daß es gerade Linien sind, die einander nie schneiden: so läßt sich sehr leicht beweisen, daß Linien parallel sind, wenn die Summe der innern Winkel BLN + LND = 2R ist (Fig. 63.); denn wenn sie sich schnitten, so entstände ein Dreyeck, in welchem zwey Winkel zusammen zweyen rechten gleich wären, gegen §. 95. Aber auch der umgekehrte Satz, den wir oben nur halb erwiesen und halb als Grundsatz annahmen, (§. 125. 143.). läßt sich nun strenge beweisen.

* 155. Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD (Fig. 78.) mit einer dritten sie schneidenden AC innere Winkel machen, deren Summe

kleiner als zwey rechte ist, $BAC + ACD < 2R$: so schneiden sich die Linien nothwendig bey hinreichender Verlängerung einander an der Seite, wo diese Winkel liegen.

Beweis. Man ziehe AE so, daß die Summe der Winkel $EAC + ACD = 2R$ sey, so wird die Linie AB um einen bestimmten Winkel BAE von dieser AE abweichen. Zieht man nun irgend eine gerade Linie AF, welche CD schneidet, so ist $EAF = AFC$, und wenn man $FG = AF$ nimmt und AG zieht, so ist $FAG = FGA = \frac{1}{2}AFC = \frac{1}{2}EAF$; also $EAG = \frac{1}{2}EAF$; Nimmt man nun wieder $GH = AG$, so ist $EAH = \frac{1}{2}EAG = \frac{1}{4}EAF$, und man kann so durch gerade Linien, deren Durchschnittspuncte mit CD ganz genau bestimmt sind, Winkel abschneiden, die $= \frac{1}{8}EAF$; $\frac{1}{16}EAF$; $\frac{1}{32}EAF$ und so weiter sind. Wie klein nun auch EAB seyn mag, so wird man doch durch jene fortgesetzte Eintheilung des Winkels EAF endlich auf einen Winkel EAZ kommen, der kleiner als EAB ist, und weil die Puncte, wo alle diese Eintheilungslinien die Linien CD schneiden, ganz genau bestimmt sind, so wird sich auch für AZ der Durchschnittspunct angeben lassen. Es ist aber klar, daß auch AB die Linie CD schneiden muß, sobald AZ dieselbe schneidet.

* 156. Man kann noch bemerken, daß $AG < AF + FG$, oder $AG < 2FG$, und so auch $AH < 2GH$, also $AH < 2AG$, $AH < 4FG$, und ferner, wenn eine Linie AI den Winkel EAH halbirt $AI < 8FG$ und $HI < 4FG$ und so weiter. Man hat also für AH, welche $EAH = \frac{1}{4}EAF$ macht, $FH < 3FG$ für AI, welche $EAI = \frac{1}{8}EAF$ macht, $FI < 7FG$, für AK, welche $EAK = \frac{1}{16}EAF$ macht, $FK < 15FG$, und so überhaupt, wenn eine Linie AZ den Winkel $EAZ = \frac{1}{2^n}$ EAF macht, so liegt ihr Durchschnitt mit CD um weniger als $(2^n - 1)$ FG von F entfernt, (weil die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ist.) Da man nun endlich gewiß auf einen Winkel EAZ =

$\frac{1}{2^n}$ EAF kommt, der kleiner als EAB ist: so läßt sich ganz bestimmt angeben, daß auch diese Linie die CD in einer Entfernung, die kleiner als $(2^n - 1)$ FG ist, schneiden werde.

Fünfter Abschnitt.

Von den Parallelogrammen und ihrer Vergleichung mit Dreyecken und unter einander selbst in Rücksicht auf den Flächen-Inhalt.

157. Erklärung. Eine vierseitige Figur heißt ein Parallelogramm, wenn je zwey Seiten derselben parallel sind. Die gerade Linie, welche von dem einem Eckpuncte zum entgegengesetzten gezogen wird, wie BC (Fig. 74.) heißt die Diagonallinie.

158. Aus den Lehrsätzen §. 145. 146. 147. ergiebt sich, daß in Parallelgorammen die einander gegenüberstehenden Seiten gleich; und die einander gegenüberstehenden Winkel gleich sind; und daß auch umgekehrt alle die vierseitigen Figuren, in welchen die einander gegenüberstehenden Seiten zwey und zwey einander gleich sind, Parallelogramme sind.

195. 46ster Lehrsatz. Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind alle rechte Winkel.

Beweis. Weil nämlich (Fig. 79.) AB mit CD parallel, so ist ABC + BCD = 2 R, und wenn ABC = R, auch BCD = R. Zugleich ist wegen der Parallellität von BC und DA, BCD + CDA = 2 R, also CDA = R, und so läßt sich dasselbe von dem vierten Winkel beweisen.

160. Erklärung. Jedes rechtwinklichte Parallelogramm heißt ein Rechteck oder Rectangel, wenn es aber vier gleiche Seiten hat, wie Fig. 79. so heißt es ein Quadrat.

Ein schiefwinklichtes Parallelogramm heißt, wenn es vier gleiche Seiten hat, ein Rhombus oder Raute, wenn aber die Seiten nicht alle gleich sind, ein Rhomboid.

161. Erklärung. Vierecke, in welchen nur zwey Seiten einander parallel sind, die übrigen beyden aber nicht parallel, heißen Trapeze, und Vierecke endlich welche gar keine parallele Seiten haben, heißen Trapezoide.

162. Im Trapeze können die parallelen Seiten nicht einander gleich seyn; denn sonst wäre es ein Parallelogramm, (§. 145.) Im Trapezio oder Trapezoide können wohl zwey einander gegenüberstehende Seiten gleich seyn, aber dann sind die beyden übrigen Seiten einander nicht gleich, und die

gleichen Seiten nicht parallel. Eben so können im Trapezoide wohl zwey einander gegenüberstehende Winkel gleich seyn, dann aber sind die beyden übrigen ungleich. In den entgegengesetzten Fällen wären die Figuren Parallelogramme (§. 146. 147.)

163. 25ste Aufgabe. **Ein Parallelogramm an die Linie AB zu zeichnen, (Fig. 80.) dessen einer Winkel gleich dem gegebenen Winkel C ist und dessen Seiten den Linien D, E, gleich sind.**

Auflösung. Man nehme auf AB die Seite FG = DE, mache den Winkel HFG = C und die Seite FH = D; ziehe HI durch H mit FG, und GI durch G mit FH parallel: so ist FHIG das verlangte Parallelogramm.

Man hätte auch, nach dem H bestimmt ist, um H als Mittelpunct mit dem Halbmesser HI = FG einen Kreisbogen und um H mit dem Halbmesser GI = HF einen Kreisbogen ziehen können; die alsdann nach dem Durchschnittspuncte I gezogenen Linien HI, GI bestimmen das Parallelogramm.

164. Um ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seite = BC gegeben ist, braucht man also nur durch die Endpuncte B, C die Linien AB, DC

senkrecht auf BC zu ziehen, (§. 139.) AB = DC = BC zu nehmen, und AD zu ziehn, welche dann auch = BC seyn wird. (§. 145.)

165. Es ist also unmöglich, über der als Seite des Quadrats gegebnen Linie BC ein andres Quadrat, als das eine ABCD zu zeichnen; das heißt: alle Quadrate, welche gleiche Seiten haben, sind einander gleich, und auch das Umgekehrte ist wahr, daß gleiche Quadrate nothwendig gleiche Seiten haben.

166. Erklärung. Wenn man die eine Seite FG eines Parallelogramms FGIH (Fig. 80.) als die Grundlinie desselbe betrachtet, so ist die Höhe des Parallelogramms die Entfernung der entgegengesetzten Seite HI von der Grundlinie; oder es ist die zwischen diesen beyden Seiten gezogne senkrechte Linie KL gleich der Höhe des Parallelogramms.

Eben so, wenn man im Dreyecke (Fig. 43.) eine Seite BC als die Grundlinie betrachtet, so ist die Entfernung der entgegen gesetzten Spitze von dieser Grundlinie, nämlich AD, die Höhe des Dreyeckes.

167. 47ster Lehrsatz. Zwey Parallelogramme von gleichen Grundlinien und

gleichen Höhen, sind an Fläche einander gleich, wenn sie auch an Form verschieden sind. (Fig. 81.)

Beweis. Man kann diese Parallelogramme ABCD, ABEF, wenn sie auch über verschiedenen, aber gleichen Grundlinien gezeichnet sind, sich so an einander gelegt vorstellen, daß die gleichen Grundlinien auf einander fallen; alsdann liegen die entgegengesetzten Seiten CD, EF in derselben zu AB parallelen Linie, weil die Höhen beyder Parallelogramme gleich sind.

Nach der verschiedenen Form der beyden Parallelogramme können dann drey verschiedene Fälle statt finden. Es kann nämlich der Eckpunct E des einen, zwischen C und D, als die beyden Eckpuncte des andern fallen (Fig. 82.) oder E kann gerade mit D zusammenfallen (Fig. 81.) oder EF kann ganz außerhalb CD liegen (Fig. 83.) In allen diesen Fällen läßt sich beweisen, daß die Theile der Parallelogramme, die einander nicht bedecken, an Fläche gleich groß sind, z. B. Fig. 82. CEA = DFB.

Erster Fall. Stoßen (Fig. 81.) die Endpuncte der den Grundlinien entgegenstehenden Seiten in DE zusammen, so sind die Dreyecke CDA, EFB völlig gleich, weil die einander gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms gleich sind, also CD = EF = AB, CA = EB, DA = FB, und man hat also die Flächen CDA + ADB = EFB + ADB, oder ABDC = ABFE.

Zweyter Fall. Wenn, (wie Fig. 82.) Die Seite CD des einen Parallelogramms zum Theil mit der Seite FE des andern zusammenfällt: so hat man doch CD = EF und daher CD — ED = EF — ED oder CE = DF und wieder CA = DB, EA = FB, daher (§. 75.) die Flächen CEA = DFB und ABDC = ABFE.

Dritter Fall. Auch wenn (Fig. 83.) CD und EF gar nicht zusammenstoßen, ist CD + DE = EF + DE oder CE = DF, ferner CA = DB, AE = BF, also die Dreyecke ACE = BDF, folglich ACE — DGE = BDF — DGE oder AGDC = FEGB, und endlich AGDC + AGB = FEGC + AGB, das ist ABDC = ABFE.

Die Parallelogramme sind also gleich, wie sehr sie auch an Gestalt verschieden seyn mögen.

168. Es ist also sehr leicht, statt eines schiefwinklichten Parallelogramms ein eben so großes

rechtwinklichtes anzugeben, indem man über eben der Grundlinie ein eben so hohes, oder zwischen denselben Parallelen liegendes, rechtwinklichtes Parallelogramm zeichnet.

169. 48ster Lehrsatz. Dreyecke, deren Grundlinien und deren Höhen gleich sind, sind an Fläche gleich groß. (Fig. 84.) und halb so groß als Parallelogramme, die mit ihnen gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben.

Beweis. Wenn in den Dreyecken ABC, DEF die Grundlinien AB = DE und die Höhen CG = FH sind, so erhält man, wenn man AI mit BC, CI mit AB, FK mit DE, und EK mit DF parallel zieht, ein Parallelogramm ABCI, welches doppelt so groß, als das Dreyeck ABC ist, weil ABC, CIA gleiche Dreyecke sind, (§. 73.) und eben so das Parallelogramm DEKF doppelt so groß, als das Dreyeck DEF. Da nun ABCE und DEKF Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind: so ist ABCI = DEKF und folglich sind auch die Hälften an Fläche gleich, daß ist, das Dreyeck ABC = DEF.

170. 26ste Aufgabe. Ein Rechteck zu zeichnen, welches einen gegebenen Dreyecke ABC (Fig. 85.) an Fläche gleich ist.

Auflösunng. Man ziehe durch die Spitze des Dreyecks C eine Linie CE mit der Grundlinie AB parallel, halbire die Grundlinie in G, ziehe durch A und G bis an die Parallele DE, die auf AB senkrechten Linien AD, GH: so ist AGHD das verlangte Rechteck = ABC. (§. 169.)

171. 49ster Lehrsatz. Wenn man ein Parallelogramm ABCD durch gerade Linien EF, GH, welche den Seiten 'parallel sind und sich gerade in der Diagonale AC durchschneiden, (Fig. 86.), in vier Theile getheilt: so sind die beyden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich, BGKE = HKFD.

Beweis. Da ABCD so wohl als die vier Theile Parallelogramme sind, so sind die einander gegenüberstehenden Seiten gleich. Es erhellt daher sehr leicht die Gleichheit folgender Dreyecke ABC = CDA; AEK = KHA, KGC = CFK und daraus ferner, daß

ABC — AEK — KGC = CDA — KHA — CFK, oder BGKE = HKFD sey.

172. 27ste Aufgabe. Ein Parallelogarmm zu zeichnen, welches einem gegebenen

Dreyeck ABC an Fläche gleich sey, eine Seite der gegebenen Linie D, und einen Winkel dem gegebenen Winkel E gleich habe, (Fig. 87.)

Auflösung. Man nehme FG = $\frac{1}{2}$ AB, und zeichne an FG den Winkel IFG = E; man ziehe durch F die Linie FP auf FG senkrecht, nehme FP der Höhe des Dreyecks ABC gleich und ziehe durch P, PL mit FG parallel; endlich ziehe man GH mit FI parallel. Dann ist FGHI ein Parallelogramm, welches dem Dreyecke ABC gleich ist.

Man verlängere nun die eine Seite IF dieses Parallelogramms nach K, nehme FK = der gegebenen Linie D, ziehe KG und verlängere sie bis sie in L die gerade Linie IHL schneidet; man ziehe ferner LM mit IK und KM mit FG parallel, verlängere HG nach N und FG nach O: so ist GOMN das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Es ist FGHI = dem Dreyeck ABC nach §. 169. 170. und FGHI = GOMN nach §. 171. also ist GOMN = ABC; dieses Parallelogramm hat aber auch die Seite GN = FK = D und den Winkel GNM = IFG = E.

173. Man kann also sehr leicht ein Rechteck zeichnen, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist,

und dessen eine Seite eine gegebene Länge hat; denn man braucht dann nur den Winkel E einem rechten gleich anzunehmen.

174. 28ste Aufgabe. Ein rechtwinklichtes Parallelogramm zu zeichnen, welches einer gegebenen gradlinigten Figur ABCDE gleich ist, und dessen eine Seite gleich der Linie F ist (Fig. 88.)

Auflösung. Man theile die gegebene Figur durch die Diagonalen CA, CE in Dreyecke; zeichne ein Rechteck GIHO, dessen Seite = F, dem Dreyecke ABC gleich; an dieses füge man ein zweytes Rechteck, dessen Seite IH = F und welches dem Dreyecke AEC gleich ist, HIKL = AEC, und eben so zeichne man an KL = F ein drittes Rechteck LKMN = ECD. Dann ist das Rechteck GMNO = ABCDE und die Seiten desselben GO = MN = F.

Diese verschiedenen Rechtecke kann man zuerst jedes einzeln nach Anleitung der vorigen Aufgabe zeichnen, und dann sie so abzeichnen, daß eins an das andere angefügt wird, dann bilden die Seiten OH, HL, LN eine einzige gerade Linie, weil sie rechtwinklicht gegen die Parallellinien GO, IH, KL sind.

175. Erklärung. Da sich, wenn eine gerade Linie AB als Seite eines Quadrates gegeben ist, keine zwey verschiedene Quadrate zeichnen lassen, welche diese Seite hätten; so nennt man auch wohl (Fig. 79.) das Quadrat ABCD, das Quadrat der Linie AB, so daß also darunter dasjenige Quadrat verstanden wird, dessen vier Seiten jede = AB sind.

Eben so nennt man ein Rechteck (Fig. 85.) dessen Seiten HG, GB sind, der Kürze wegen das Rechteck aus den Linien HG, GB.

176. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet das Quadrat, dessen Seite = AB ist, durch ABq und versteht darunter den Flächenraum des Quadrats, dessen Seite = AB ist; hingegen bezeichnet man den Flächenraum eines Rechteckes, dessen Seiten AB, CD sind durch AB.CD.

So also ist Fig. 79. ABCD = BCq und Fig. 85. BFHG = HG . GB.

177. 50ster Lehrsatz. Wenn man auf alle Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes ABC, Quadrate zeichnet, so ist das Quadrat auf der dem rechten Winkel gegenüberstehenden Seite gleich der Summe der

Quadrate, auf den beyden, dem rechten Winkel anliegenden Seiten, nämlich ACDE = ABHI + BCFG, oder $AC^q = AB^q + BC_q$. (Fig. 89.)

Beweis. Man ziehe aus dem rechten Winkel B auf die entgegengesetzte Seite AC die senkrechte Linie BK, und verlängre sie bis L: so theilt KL das Quadrat ACDE in zwey Rechtecke AELK, CDLK. Jedes dieser Rechtecke ist einem der auf den Catheten errichteten Quadrate gleich, nämlich CDLK = BCFG und AELK = ABHI, welches daraus erhellt, weil CDLK und BCFG beyde jedes doppelt so groß sind, als eines der gleichen Dreyecke BCD, ACF.

Zieht man nämlich von A nach F und von B nach D gerade Linien AF, BD, so ist das Dreyeck BCD in allen Stücken dem FCA gleich; denn man hat AC = CD, CF = CB, als Seiten, die zu einerley Quadraten gehören, und den Winkel, welchen diese Seiten einschließen ACF = R + ACB = DCB, wenn R den rechten Winkel BCF = ACD bezeichnet. Es ist aber das Dreyeck ACF halb so groß, als das Quadrat BCFG, (§. 169.) weil es über derselben Grundlinie CF errichtet ist, und einerley Höhe = BC mit demselben hat, indem die Spitze A des Dreyeckes in der Linie

GBA liegt, die mit CF parallel ist, und daß GBA gerade sey, ist klar, denn es ist ABC = GBC ein rechter Winkel. Eben so ist das Dreyeck BCD halb so groß, als das Rechteck CDLK, weil beyde über einerley Grundlinien CD stehen, und gleiche Höhe = KC haben, oder sich zwischen einerley Parallelen BL, CD befinden. Weil nur ACF = CDB und ACF = $\frac{1}{2}$ BCFG, DCB = $\frac{1}{2}$ CDLK, so ist auch BCFG = CDLK.

Völlig eben so erhellet, daß, wenn man die Linien IC, EB zieht, IA = BA, AC = AE und der Winkel IAC = BAE, daher das Dreyeck IAC = BAE sey, und ferner daß IAC = $\frac{1}{2}$ IABH, weil dieses Dreyeck mit dem Quadraten einerley Grundlinie IA und Höhe AB hat; endlich daß EAB = $\frac{1}{2}$ EAKL, wegen der gleichen Grundlinie AE und gleichen Höhe AK.

Hieraus folgt dann IAHB = AELK und
AELK + LKCD = AEDC = ABHI + BCFG.

178. 51ster Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 90.) das Quadrat der einen Seite BC gleich ist der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten: so ist der Winkel A, welcher der erstern Seite gegenübersteht, ein rechter Winkel.

Beweis. Nimmt man AD auf AC rechtwinklicht und AD = AB, so ist, wenn man DC zieht, nach dem vorigen Lehrsatze, DCq = ADq + ACq = ABq + ACq, und folglich, weil auch BCq = ABq + ACq als Bedingung in diesem Lehrsatze angenommen ist, DCq = BCq, das ist, das Quadrat, dessen Seite DC, gleich dem Quadrate, dessen Seite BC, und folglich auch (§. 165.) BC = DC. Daraus aber folgt (nach §. 75.) daß die Dreyecke ADC, ABC ganz gleich, also der Winkel BAC ein rechter sey, weil DA ein rechter Winkel ist.

179. 29ste Aufgabe. Es sind (Fig. 91.) zwey gerade Linien A, B gegeben, man soll eine Linie bestimmen, deren Quadrat so groß ist, als die Quadrate dieser beyden Linien zusammen genommen.

Auflösung. Man zeichne einen rechten Winkel CDE und nehme auf dessen einen Schenkel DC = A und auf dem andern DE = B: so ist, wenn man EC zieht, EC die verlangte Linie, denn es ist ECq = DCq + DEq = Aq = Bq.

180. 30ste Aufgabe. Es sind zwey Linien A, B (Fig. 92.) gegeben, man soll

eine Linie zeichnen, deren Quadrat so groß ist, als der Unterschied der Quadrate von A und B.

Auflösung. Man zeichne einen rechten Winkel CDE, und nehme auf dessen einem Senkel DE = A, nämlich der kleinern der gegebenen Linien gleich; dann ziehe man um den Mittelpunct E mit dem Halbmesser EF = B = der größern gegebenen Linie einen Kreisbogen GH: so schneidet dieser auf dem andern Schenkel des rechten Winkels das Stück FD ab, welches der verlangten Linien gleich ist.

Beweis. Es ist FEq = FDq + DEq also FEq — DEq = FDq = Bq — Aq

Beyspiel zur Uebung. Linien zu zeichnen, deren Quadrate das doppelte, dreyfache, fünffache, zehnfache, elffache, des Quadrates ABCD Fig. 79. ist, oder Linien zu zeichnen, deren Quadrate $\frac{3}{4}$ mal so groß, $1\frac{1}{2}$ mal so groß als dieses Quadrat sind, oder so groß, als die Summe dreyer gegebener Quadrate u. s. w.

Anmerkung. Der wichtige 50ste Lehrsatz, dessen Anwendung in allen Theilen der Geometrie häufig vorkommt, heißt von seinem Erfinder Pythagoros, der Pythagorische Lehrsatz.

181. 52ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 93.) eine Linie AB in zwey Stücke AE,

EB getheilt ist: so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß, als die Quadrate beyder Stücke, zusammen genommen mit zwey gleichen Rechtecken, deren beyde Seiten jenen beyden Stücken gleich sind, es ist nämlich $AB^q = AE^q + EB^q + 2\ AE.EB$.

Beweis. Man zeichne über der Linie AB das Quadrat ABCD, ziehe durch den Theilungspunct E, EF mit BC parallel, nehme BI = BE, wodurch dann auch CI = AE wird, weil BC = AB, und ziehe GI parallel mit AB und DC. Hiedurch ist das auf AB errichtete Quadrat in vier Stücke getheilt, die alle Rechtecke sind. Das eine derselben DFHG ist das Quadrat von AE, denn es hat die Seiten GH = DF = AE und DG = FH = CI = AE, weil die Parallellinien auf Parallellinien gleiche Stücke abschneiden (§. 146.); also hat DFHG lauter gleiche auf einander senkrechte Seiten und ist das Quadrat von AE.

Das zweite Stück BEAI hat die gleichen Seiten BE = BI = HI = EH und ist das Quadrat von BE.

Die beyden übrigen Stücke AGHE, CFHI sind gleich: denn sie sind rechteckige Parallelogramme von gleichen Seiten oder von gleichen Grundlinien und Höhen, und ihre Seiten sind CI = AE und HI = HE = BE; sie sind also die aus den Linien AE, BE gebildeten Rechtecke. Die vier Stücke sind demnach AEq, BEq, und zwey, die beyde = AE.EB, nach der Bezeichnungsart §. 176. sind.

* 182. 53ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 94.) die Linie BE gleich ist dem Unterschiede der Linien AB, AE: so ist das Quadrat von BE, so groß, als die Summe der Quadrate von AE und AB, wenn man von dieser Summe abzieht, zwey gleiche Rechtecke, deren Seiten die Linien AB, AE sind; oder wenn EB = AB — AE: so ist EBq = ABq + AEq — 2 AB . AE.

Beweis. Man zeichne über der größern Linie AB das Quadrat ABCD, nehme BI = EB und ziehe durch E, EF mit AD, und durch I, IG mit AB parallel; die letzere verlängre man nach K bis IK = AE wird, und vollende das Quadrat CIKL, dessen Seite CI = AB — EB = AE ist.

Die Figur zeigt unmittelbar, daß das Quadrat EBIH = ABCD + CIKL — FHKL — AEFD ist. Es ist aber ABCD das Quadrat der größern Linie AB, CIKL das Quadrat der kleinern AE, und AEFD, FHKL sind gleiche Rechtecke, deren Seiten AD = HK = AB und DF = FH = AE sind.

* 183. Aus §. 181. hätte man auch für das Quadrat von BE, BEq = ABq — AEq — 2 AE . EB.

* 184. 54ster Lehrsatz. Der Unterschied zweyer Quadrate ABCD und EFGH (Fig. 95.) ist gleich einem Rechtecke, dessen eine Seite so groß ist als die Summe der Seiten beyder Quadrate, = AB + EF, und dessen andre Seite so groß ist, als der Unterschied jener Seiten = AB — EF.

Beweis. Auf den Seiten des größern Quadrates nehme man IA = AL = EF, gleich der Seite des kleinern Quadrates und ziehe durch die Theilungspuncte NI und LM mit den Seiten des größern Quadrates parallel: so ist der Unterschied beyder Quadrate ABCD — EFGH = CDLM + BIKM. Da hier BI = CM = AB — EF, so ist es leicht, an CM ein Rechteck zu zeichnen, CMOP, welches gleich BIKM ist; denn man hat nur nöthig LM zu verlängern bis MP = MB ist, und dann CO mit MP, PO mit CM parallel zu ziehen. Dann ist also ABCD — EFGH = DLPO, und es ist DL = AB — EF, und LP = LM + MP = AB + AL = AB + EF, also DLPO ein Rechteck, dessen eine Seite der Summe, die andere der Differenz der Seite der Quadrate ABCD, EFGH gleich ist.

Man könnte also hier setzen ABq — FFq = (AB + EF).(AB — EF) nach Arithm. §. 91. wo dann (AB + EF).(AB — EF) ein Rechteck bedeutet, dessen Seiten = AB + EF und = AB — EF sind.

* 185. 55ter Lehrsatze. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 96.) der Winkel C spitz ist: so ist das Quadrat der Seite AB, welche diesem Winkel gegenübersteht, kleiner als die Summe der Quadrate der beyden anliegenden Seiten, und zwar ist der Unterschied, um welchen diese Summe jenes Quadrat übertrifft, doppelt so groß als ein Rechteck, dessen eine Seite = AC, die andre = AD ist, wenn nämlich BD die von B auf AD senkrecht gezogne Line ist. Oder es ist $ABq = BCq + ACq - 2\ AC.DC$.

Beweis. In Rücksicht der Lage der senkrechten Linie BD können hier zwey Fälle statt finden.

Erster Fall, wenn BD innerhalb des Dreyecks fällt. (Fig. 96.) Dann ist $ABq = BDq + ADq$, oder weil $BDq = BCq - DCq$ ist, $ABq = BCq + ADq - DCq$, es ist aber $AD = AC - DC$ und daher (§. 182.) $ADq = ACq + DCq - 2\ AC.AD$, also $ABq = BCq + ACq - 2\ AC.CD$, wie der Lehrsatz angiebt.

Zweyter Fall. Wenn die senkrechte Linie BD außerhalb des Dreyecks fällt. (Fig. 97.) Dann ist zwar wieder $ABq = BDq + ADq = BCq - DCq + ADq$, aber nun ist $AD = DC - AC$, also $ADq = DCq + ACq - 2\ AC.DC$ und daher wieder $ABq =$

BCq + ACq — 2 AC.DC. In einem Dreyecke also, welches einen spitzen Winkel hat, ist das Quadrat der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite gleich der Summe der Quadrate der anliegenden Seiten, weniger zwey gleichen Rechtecken, die aus der einen anliegenden Seite, und dem Abstande der auf diese Seite gesetzten Senkrechten, von jenem spitzen Winkel gebildet werden.

* 186. Es läßt sich leicht zeigen, daß auch, wenn AE senkrecht auf BC gezogen wäre, ABq = BCq + ACq — 2 BC.CE seyn würde.

* 187. 56ster Lehrsatz. Wenn ein Dreyeck ABC (Fig. 97.) einen stumpfen Winkel A hat: so ist das Quadrat der Seite, welche diesem Winkel gegenübersteht, größer als die Summe der Quadrate der beyden anliegenden Seiten; und wenn man aus dem einen Winkel B eine senkrechte Linie auf die Verlängerung der einen an A anliegenden Seite zieht, BD: so ist jenes Quadrat gleich der Summe dieser Quadrate zusammengenommen mit zwey gleichen Rechtecken, welche aus der Seite AC, auf deren Verlängerung die senkrechte BD gefället ist, und aus dem Abstande dieser Senkrechten von A gebildet worden; oder es ist BCq = ABq + ACq + 2 AC.AD.

Beweis. Es ist (§. 177.) BDq = ABq — ADq, und BCq = BDq + DCq = ABq

— $AD_q + DC_q$, oder weil $DC = AD + AC$ und $DC_q = AD_q + AC_q + 2\,AD.AC$, (§. 181.) $BC_q = AB_q + AC_q + 2\,AD.AC$, wie der Lehrsatz angiebt.

* 188. 57ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 98.) eine gerade Linie AB in dem Puncte C in gleiche, in D aber in ungleiche Theile getheilt ist: so ist das Rechteck, dessen Seiten die ungleichen Theile AD, BD sind, zusammengenommen mit dem Quadrate des Abschnitts CD, zwischen den beyden Theilungspuncten, gleich dem Quadrate der halben Linie AB; das ist, $AD.BD + DC_q = BC_q$.

Beweis. Man zeichne über der Linie BC das Quadrat BCEF; nehme $BH = BD$, ziehe HK mit AB und DG mit BF, auch AK mit BF parallel. Dann läßt sich leicht beweisen, daß $ACLK = BDGF$ und folglich $ADIK + LIGE = BCEF$. Man hat nämlich $AK = BH = BD$ und $AC = CB = BF$, also $ACLK = BDGF$, und daher $ADIK = CLIGFB$; $ADIK + LIGE = BCEF$; es ist aber $ADIK = AD.AK$ ein Rechteck aus den ungleichen Stücken der Linie AB gebildet, weil $AK = BD$; ferner LIGE das Quadrat des Abschnitts CD zwischen den beyden Theilungspuncten, weil $FH = BF - BH = BC - BD = CD$ und LI, GI eben so groß sind; endlich ist BCEF das Quadrat von AC oder von der Hälfte der AB.

* 189. 31ste Aufgabe. Es ist ein Rechteck ABCD gegeben, man soll die Seite eines Quadrates bestimmen, welches diesem Rechtecke an Fläche gleich ist. (Fig. 99.)

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie EG, nehme auf derselben EF = AB, FG = BC, den beyden Seiten des Rechtecks gleich; und ziehe durch den Theilungspunct F die senkrechte Linie FI; dann halbire man EG in H, zeichne um den Mittelpunct H mit dem Halbmesser HE = HG den Halbkreis EIG; dieser schneidet auf der senkrechten Linie FI das Stück EI ab, welches der Seite des gesuchten Quadrates gleich ist.

Beweis. Die Linie EG ist in H in gleiche und in F in ungleiche Theile getheilt, es ist also (§. 188.) $EF.FG + HFq = HGq$ oder $EF.FG = HGq - HFq$, aber auch (§. 177) $FIq = HIq - HFq = HGq - HFq$, also $EF.FG = EIq$, daß ist das Quadrat der Linie FI, ist gleich dem Rechtecke aus den Seiten EF.FG.

190. Erklärung. Eine gegebene Figur quadriren, heißt ein Quadrat zeichnen, dessen Fläche eben so groß, als die Fläche jener Figur ist.

* Es ist also leicht, eine jede gradlinigte Figur zu quadriren, weil man für jede nach §. 174. ein gleich großes Rechteck und dann nach §. 189. ein eben so großes Quadrat zeichnen kann.

Sechster Abschnitt.

Von der Ausmessung der Flächen-Größe gradlinigter Figuren.

191. Erklärung. Das Abmessen einer Größe besteht im Allgemeinen darin, daß man bestimmt, wie oft eine zur Einheit angenommene gleichartige Größe in jener enthalten sey, oder daß man das Verhältniß jener Größe zu der als Einheit angenommenen gleichartigen Größe angebe.

192. Die Größe einer Linie wird also dadurch bestimmt, daß man angiebt, wie sie sich zu der als Einheit festgesetzten Linie verhält; denn wenn man zum Beyspiel das bekannte Maaß eines Fußes zur Einheit annimmt: so will die Bestimmung, eine Linie sey 10 Fuß lang, eben so viel sagen, als die Länge dieser Linie verhalte sich zu der Länge des Fußmaaßes, wie 10 zu 1.

Zur Abmessung der Flächen muß man eine Fläche als Einheit zum Grunde legen; da aber bey einer Fläche nicht bloß die Größe, sondern auch die Figur in Betrachtung kommt: so müssen wir noch erst bestimmen, welche Art von Figuren zur Einheit am bequemsten sey. Wir werden finden, daß das Quadrat sich am besten dazu schickt.

193. 58ster Lehrsatz. Zwey Parallelogramme, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich in Rücksicht der Größe ihrer Flächen zu einander, wie ihre Grundlinien. (Fig. 100.)

Beweis. Erster Fall, wenn die Grundlinie EF das einen Parallelogramms ein genaues Vielfaches der Grundlinie AB des andern ist. In diesem Falle schneide man so viele Stücke EI = AB, IK = AB und so weiter auf der Grundlinie EF ab als die Linie EF enthält, und ziehe durch alle Theilungspuncte I, K Linien wie IL mit den Seiten EH, FG des Parallelogramms parallel. Auf diese Weise theilt man das ganze Parallelogramm in eben so viele gleiche Stücke als die Grundlinie, und weil jedes dieser Stücke dem Parallelogrammen ABDC gleich ist, indem es mit demselben gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 167.): so folgt, daß die Fläche ABCD eben so oft in der Fläche EFGH enthalten sey, als die Grundlinie AB in EF, oder das ABDC: EFGH = AB: EF.

Zweyter Fall, wenn zwar EF kein Vielfaches von AB ist, aber jedoch beyde ein gemeinschaftliches Maaß AM haben. Es sey AM eine Linie, wovon sowohl AB als EF ein genaues Vielfaches ist: so heißt AM das gemeinschaftliche Maaß beyder Linien. Theilt man nun AB sowohl als EF in lauter Theile, welche = AM sind und zieht durch die Theilungspuncte in jedem Parallelogramme Linien, die den Seiten desselben parallel sind: so wird dadurch das Parallelogramm ABCD in eben so viele gleiche Theile getheilt, als die Grundlinie AB, und EFGH in eben so viele gleiche Theile, als die Grundlinie EF, und diese Theile sind in beyden Parallelogrammen gleich groß. Es ist also offenbar auch hier ABCD : FFGH = AB : EF.

* Dritter Fall. Haben die Grundlinien AB, EF ein irrationales Verhältniß, so ist es freylich unmöglich eine Linie AM so anzunehmen, daß sie für deyde ein genaues Maaß oder in beyden genau ganze Male enthalten wäre, weil wenn AB ein Vielfaches von AM ist, nie zugleich auch EF ein genaues Vielfaches derselben seyn wird, wenn das Verhältniß AB : EF irrational ist (Arithm. §. 178.) Verhielte sich z. B. die Linie AB zu EF wie 1 zu $\sqrt{2}$, so gehen, wenn man AB in 100 gleiche Theile eintheilt, etwas mehr als 141, aber nicht völlig 142 solche Theile auf EF; und wenn man AB in 1000 gleiche Theile theilt, so gehen mehr als 1414 und weniger als 1415 solche Theile auf EF und so weiter. Es ist aber einleuchtend, daß gerade eben so, wenn durch die Theilungspuncte der Grundlinien Parallelen zu den Seiten der Parallelogramme gezogen werden, das Parallelogramm ABDC, in dem eben angeführten Beyspiele, in 1000 gleiche Theile

eingetheilt wird, und das Parallelogramm EFGH mehr als 1414 und weniger als 1415 gleich großer Theile enthalten wird, oder daß überhaupt die Eintheilungen der Fläche immer genau mit den Eintheilungen der Grundlinien übereinkommen müssen, weil jede Parallele zu FG, die durch einen diesseits F fallenden Theilungspunct geht, ganz innerhalb des Parallelogramms EFGH liegt, jede Parallele hingegen, die durch einen jenseits F fallenden Punct geht, ganz außerhalb des Parallelogramms liegt, die Theilungspuncte mögen so nahe an F liegen, als sie immer wollen. Also verhalten sich auch in diesem Falle die gleich hohen Parallelogramme, wie ihre Grundlinien.

194. 59ster Lehrsatz. Dreyecke, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis. Da (Fig. 84.) ABC $= \frac{1}{2}$ ABCI und DEF $= \frac{1}{2}$ DEKF, aber (§. 193.) ABCI : DEKF $=$ AB:DE, weil die Höhen dieser Parallelogramme gleich sind: so ist auch ABC:DEF $=$ AB:DE.

195. 60ster Lehrsatz. Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Es sey (Fig. 101.) AB $=$ BC, so verhalten sich die Parallelogramme ABDE, BCGF, wie ihre Höhen BD, BH. Da man, wenn die Parallelogramme schiefwinklicht sind, über denselben Grundlinien gleich große rechtwinklichte zeichnen kann, wie hier BCIH = BCGF: so ist gewiß ABDE : BCGF = ABDE : BCHI. Sind also die beyden zu vergleichenden Parallelogramme, Rechtecke, wie ABDE, BCIH: so kann man BH und BD als die Grundlinien betrachten, und die gleichen Linien AB, BC als die Höhen; die Rechtecke verhalten sich dann wie jene Grundlinien, weil die Höhen gleich sind, nämlich ABDE : BCIH = BD : BH und folglich auch jede schiefwinklichte Parallelogramme ABDE : BCGF = BD : BH.

196. 61ster Lehrsatz. Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Der Beweis läßt sich eben so aus dem vorigen §. herleiten, wie §. 194 aus 193.

197. 62ster Lehrsatz. Die Flächen-Größe oder der Flächen-Inhalt zweyer Parallelogramme ist in zusammengesetztem Verhältnisse ihrer Grundlinien und ihrer Höhen; und auch der Flächen-Inhalt zweyer Dreyecke ist in zusammengesetztem Verhältnisse ihrer Grundlinien und ihrer Höhen.

Beweis. Wir haben gesehen, das ein Parallelogramm doppelt, dreymal, viermal so groß ist, als ein andres gleich hohes, wenn die Grundlinie des erstern das Doppelte, Dreyfache, Vierfache von der Grundlinie des letztern ist; und eben so sind bey gleichen Grundlinien die Flächen den Höhen proportional. Größen aber, deren Verhältniß auf diese Weise von zwey andern Verhältnissen abhängt, sind in zusammengesetztem Verhältnisse der Größen, die in den letztern Verhältnissen vorkommen. (Arithm. §. 190.)

Eben dieser Beweis gilt von den Dreyecken.

198. 63ster Lehrsatz. Wenn man zwey Parallelogramme oder auch zwey Dreyecke hat und man drückt das Verhältniß der Grundlinie des erstern zur Grundlinie des andern, und das Verhältniß der Höhe des erstern zur Höhe des andern, in Zahlen aus: so verhält sich die Fläche des erstern Parallelogramms zur Fläche des zweyten, und auch die Fläche des erstern Dreyeckes zur Fläche des zweyten, wie das Product der vorhergehenden Glieder jener Verhältnisse, zum Producte der nachfolgenden Glieder derselben.

Beweis. Wenn man ein Parallelogramm von 1 Fuß Grundlinie und 1 Fuß Höhe, und ein andres von 5 Fuß langer Grundlinie und 1 Fuß Höhe hat: so verhalten sich ihre Flächen, wie 1 zu 5. Ist nun ein drittes Parallelogramm von 5 Fuß Grundlinie und 7 Fuß Höhen vorhanden: so verhält sich das zweyte zum dritten, wie 1 zu 7, also das erste zum dritten wie 1 zu 5.7, wie 1:35.

Aus diesem Beyspielen erhellt auch die allgemeine Richtigkeit des Satzes, sowohl für Parallelogramme als für Dreyecke.

Beyspiel. Wenn sich die Grundlinien zweyer Dreyecke wie 7:8, die Höhen wie 6:11 verhalten, so verhalten sich die Flächen wie 42:88.

199. Mann pflegt diesen Satz auch wohl so auszudrücken, daß zwey Parallogramme und eben so auch zwey Dreyecke sich zu einander verhalten, wie die Producte aus der Grundlinie eines jeden in seine Höhe. Aber dieser Ausdruck ist nicht von allen Vorwürfen frey; denn da man keine zwey benannte Größen, also auch keine zwey Linien in einander multipliciren kann: so darf mann diesen Ausdruck nicht ohne die Erläuterung gebrauchen, welche der vorige Lehrsatz angiebt, daß man nämlich nicht eigentlich die Linien in einander multiplicirt, sondern die unbenannten Zahlen, welche das Verhältniß der

Linien ausdrücken. Wenn aber die verschiedenen Grundlinien und Höhen in einerley Maaße angegeben sind: so ist es da, wo bloß von Verhältnissen die Rede ist, erlaubt, die Zahlen, welche diese Längen ausdrücken, als unbenannt anzusehen, und so kann man, wenn die Grundlinien AB, BC 7 und 9 Fuß, die Höhen BD, BH 15 und 11 Fuß betragen, setzen

$AB : BC = 7 : 9$,

$BD : BH = 15 : 11$ und dann das Verhältniß der Flächen $ABDE : BCGF = 105 : 99 = 7 \cdot 15 : 9 \cdot 11$.

200. Die bisherigen Betrachtungen leiten uns zu der Wahl einer Flächen-Einheit, deren man sich mit Bequemlichkeit zur Ausmessung aller gradlinigten Figuren bedienen kann. Da nämlich alle gradlinigten Figuren sich auf gleich große Rechtecke zurückführen lassen: so ist es am bequemsten, ein rechtwinklichtes Parallelogramm zur Flächen-Einheit zu wählen, und da ist es dann am natürlichsten, das Quadrat als dasjenige Rechteck, welches gleiche Seiten hat, dazu anzunehmen. Wir bedienen uns daher zur Ausmessung aller Figuren eines Quadrates, dessen Seite der angenommenen Längen-Einheit gleich ist; und eine Figur ihrem Flächen-Inhalte nach ausmessen, heißt daher, ihr Verhältniß

zu einem Quadrate bestimmen, dessen Seite der angenommenen Längen-Einheit gleich ist.

So wie wir also verschiedene Längenmaaßen, Meilen, Ruthen, Fuße, Zolle, Linien, auch Ellen u. s. w. haben, so haben wir auch eben so verschiedene Flächenmaaßen, nämlich Quadratmeilen, Quadratruthen, Quadratfuße, Quadratzolle, Quadratlinien, Quadratellen u. s. w. je nachdem die Seite des als Einheit angenommenen Quadrats eine Meile, eine Ruthe, ein Fuß u. s. w. ist.

201. 32ste Aufgabe. Den Flächen-Inhalt eines jeden Parallelogramms anzugeben, wenn desselben Grundlinie und Höhe in einerley Längenmaaße ausgedrückt, gegeben sind.

Auflösung. Wenn Grundlinie und Höhe in einerley Längenmaaße z. B. in einerley Fußen gegeben sind: so betrachte man die Zahlen, welche diese Längen ausdrücken, als unbenannte Zahlen und multiplicire sie in einander. Das Product giebt an, wie viele Flächen-Einheiten, also hier Quadratfuße die Figur enthält.

Beweis. Wenn (Fig. 102.) aBCD das auszumessende Rechteck ist, und es bedeutet ab =

ad = 1 Fuß: so ist abcd ein Quadratfuß, und es verhält sich

abcd : aBEd = ab:aB = 1 : der Anzuhl Fuße in aB und aBEd:aBCD = ad:aD = 1 : der Anzahl Fuße in aD, also (Arithm. §. 192.)

abcd : aBCD = 1 : dem Producte der Zahlen, die in aB und die in aD vorhandenen Fuße ausdrücken.

In jeder Reihe aBEd liegen so viele Quadrate, als aB Fuße enthält, und es giebt so viele solcher Reihen, als aD Fuße enthält; die Summe aller Quadrate ist also gleich dem Producte der in aB und in aD vorhandenen Anzahl von Füßen.

Daß die Ausmessung schiefwinklichter Parallelogramme über derselben Grundlinie und von gleicher Höhe eben so geschehe, erhellt daraus, weil man statt jedes schiefen Parallelogramms ein eben so großes Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe zeichnen kann.

Beyspiele. Der Flächen-Inhalt eines Parallelogramms von 5 Fuß 10 Zoll oder $5\frac{5}{6}$ Fuß Grundlinie und 7 Fuß 2 Zoll oder $7\frac{1}{6}$ Fuß Höhe, ist $41\frac{29}{36}$ Quadratfuß.

Uebungs-Exempel. Wieviel Quadratzolle und Quadratlinien enthält ein Quadratfuß, wenn 1 Fuß = 12 Zoll und 1 Zoll = 12 Linien?

Wieviel Quadratfuße enthält ein Rechteck von 50 Zoll Grundlinie und 17 Zoll Höhe? — Wieviele Quadratzolle enthält ein Parallelogramm von 7 Fuß lang und 35 Zoll breit?

202. Wir bezeichneten vorhin den Inhalt eines Rechteckes, dessen Seiten CD und DE sind durch CD.DE; die jetzt mitgetheilten Lehren zeigen, daß diese Bezeichnung nicht bloß willkührlich angenommen ist, sondern daß man wirklich CD . DE als Product dieser beyden Größen betrachten kann, weil sich der Inhalt des Rechteckes so verhält, wie das Product der in Zahlen ausgedrückten Seiten. Man kann also nun auch den Inhalt eines Quadrates, dessen Seite AB ist $= AB^2$ oder AB.AB setzen, weil sich dieser Inhalt verhält wie die Quadratzahl der in Zahlen ausgedrückten Länge der Seite.

203. Diese geometrischen Untersuchungen leiten uns nun auch zu einem neuen Beweise oder zu einer noch klarern Ansicht dessen, was in der Arithmetik von der Zusammensetzung des Quadrates einer aus zwey Theilen bestehenden Zahl gelehrt ist. Der Satz nämlich welcher hier §. 181. bewiesen worden, ist in geometrischer Form ganz einerley mit dem 117. §. der Arithmetik. Enthielte, um bey dem dortigen Beyspiele zu bleiben, die Linie AE (Fig. 93.) 40 und EB 7 gleiche Theile: so enthielte das Qua-

drat DGHF 1600, das Quadrat BEHI 49 gleiche Quadrate, und jedes der Reckecke AEHG und HICF 280 gleiche Quadrate; das ganze Quadrat ABCD enthält also $1600 + 2 \cdot 280 + 49 = 2209$ der als Einheit angenommenen Quadrate. Die Figur (Fig. 103.) zeigt diese Zusammensetzung noch näher an dem Quadrate von 13; denn hier ist $BE = 10$, $AE = 3$, und das Quadrat ABCD $= 100 + 2 \cdot 30 + 9 = 169$.

204. Die Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel kommen also, geometrisch betrachtet, darauf hinaus, daß man, wenn z. B. die Quadratzahl 169 gegeben ist, zuerst ein Quadrat $= 100$, dessen Seite $= EB = 10$ bekannt ist, abzieht; dann ein Rrechteck EBIH bestimmt, welches nicht völlig die Hälfte des Restes beträgt, und durch Versuche die Höhe BI dieses Rechteckes so annimmt, daß beyde Rechtecke EBIH, DFHG, (deren Grundlinien dem ersten, die Höhen aber dem zweyten Theile der Quadratwurzel oder der Seite des Quadrates gleich sind,) zusammengenommen mit dem Quadrate des zweyten Theiles dem Reste der Quadratzahl oder der Anzahl kleiner Quadraten in DFHIBA gleich werde.

* 205. Alle die Sätze §. 181. 182. 184. 188. stimmen ganz genau mit arithmetischen und algebraischen Ausdrücken überein. Denn wenn a, b

Zahlen bedeuten: so findet man $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so wie wir §. 181. für das Quadrat einer aus zwey Stücken zusammengesetzten Linie fanden; ferner $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, wie wir §. 182. für das Quadrat einer Linie fanden, die dem Unterschiede zweyer andern gleich ist, auch hat man $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, wie §. 184. und endlich wenn (Fig. 98.) $AB = a$, $DB = b$, also $AD = a - b$, und $CD = \frac{1}{2}a - b$: so ist (übereinstimmend mit §. 188.) $(a-b).b + (\frac{1}{2}a - b)^2 = \frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a)^2$, weil dieser Ausdruck $ab - b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{4}a^2$ wird.

206. 33ste Aufgabe. Den Inhalt eines Dreyeckes, dessen Grundlinie und Höhe in bekannten Längenmaaßen von einerley Art gegeben ist, zu bestimmen.

Auflösung. Man multiplicire die Anzahl von Theilen, welche die Grundlinie enthält, mit der Anzahl gleichartiger Theile, welche die Höhe ausmachen. Die Hälfte dieses Productes ist die gesuchte Anzahl von Flächen-Einheiten (von Quadratfußen, z. B.) welche das Dreyeck enthält.

Beweis. Das ganze Product würde in den mehrmals erklärten Sinne, den Inhalt eines über derselben Grundlinie errichteten gleich hohen Parallelogramms angeben, wovon das Dreyeck die Hälfte ist. (§. 169.)

* 207. 34ste Aufgabe. Ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Flächen-Inhalt und Grundlinie in Zahlen gegeben sind.

Auflösung. Wenn der Flächen-Inhalt in einem Flächenmaaße ausgedrückt ist, welches mit dem Längenmaaße der Grundlinie übereinstimmt: so betrachte man die Zahlen, welche diese Größen ausdrücken, als unbenannte Zahlen; dividire die Zahl, welche den Flächenraum angiebt, mit derjenigen, welche die Grundlinie ausdrückt: so giebt der Quotient die Höhe des Parallelogramms in eben dem Maaße, in welchem die Grundlinie ausgedrückt ist.

Beyspiel. Ein Parallelogramm von 110 Quadratfuß Fläche und 11 Fuß Grundlinie hat 10 Fuß Höhe.

Beweis. Der Inhalt des Parallelogramms ist (Fig. 102.) die Anzahl aller in demselben enthaltenen Quadrate, die Länge der Grundlinie, in Zahlen ausgedrückt, giebt an, wieviel davon in jeder Reihe aB Ed liegen, wenn man also jene Zahl mit dieser multiplicirt: so hat man die Anzahl der Reihen, das ist, die Höhe aD.

* 208. 35ste Aufgabe. Aus dem gegebenen Flächen-Inhalte und der Grundlinie eines Dreyeckes die Höhe desselben zu bestimmen.

Auflösung. Man dividire den Inhalt mit der Grundlinie und nehme die Höhe doppelt so groß als der Quotient angiebt. — (Wie man diese Ausdrücke verstehn muß, ist mehrmals erinnert, und ich gebrauche sie nun der Kurze wegen ohne fernere Erörterung.)

Beweis. Hätte man über der gegebenen Grundlinie ein zweymal so hohes Parallelogramm gezeichnet, als der Quotient angiebt, so würde dieses einen doppelt so großen Inhalt haben, als der gegebene ist: das gleich hohe Dreyeck ist nur halb so groß und entspricht also der gegebenen Flächengröße.

Beyspiel. Ein Dreyeck von 112 Quadratfuß und 32 Fuß Grundlinie ist 7 Fuß hoch.

* 208 b. Die beyden letzten Aufgaben führen auch zu dem Satze, daß in gleichen Parallelogrammen und in gleichen Dreyecken die Höhen sich umgekehet verhalten wie die Grundlinien.

* 209. Da man nach Anleitung der beyden letzten Aufgaben eine Menge verschiedener Parallelogrammen und Dreyecke zeichnen könnte, welche alle der Forderung entsprechen, indem z. B. in Fig. 104. alle über AB errichteten Dreyecken ABC, ABD, ABE, deren Spitzen in CE, welche mit AB parallel ist, liegen, die verlangte Größe haben: so könnte man in der Aufgabe noch ein Bestimmungsstück hinzuzufügen, z. B. die Seite AC oder den Winkel CAB des Dreyecks oder Parallelogromms als gegeben annehmen.

210. 36ste Aufgabe. Den Inhalt eines Trapezes zu bestimmen, wenn die Länge

der beyden parallelen Seiten und ihre senkrechte Entfernung von einander bekannt ist. (Fig. 105.)

Auflösung. Man addire die in Zahlen ausgedrückte Länge der beyden parallelen Seiten AB, CD und multiplicire die Hälfte der Summe mit der im gleichen Maaße ausgedrückten Entfernung CE dieser Seiten: so giebt das Product den Inhalt des Trapezes an.

Beweis. Zieht man auch CF mit AD parallel, so ist, wenn man die Multiplication der Linien in einander richtig versteht, das Parallelogramm $ADCF = CD.CF.$ (§ 201.) und das Dreyeck $FCB = \frac{1}{2}BF.EC.$
Wenn man also ein Rechteck von der Höhe CE zeichnen wollte, welches dem Trapeze gleich wäre, so müßte dessen Grundlinie $= CD + \frac{1}{2}BF$ seyn, oder $= \frac{2CD + BF}{2} = \frac{AB + CD}{2}$, weil $AB = CD + BF$ ist.

* 211. 37ste Aufgabe. Wenn der Inhalt eines Trapezes ADCB, die Länge der einen parallelen Seite AB und die Entfernung der beyden parallelen Seiten CE von einander gegeben sind, die Länge der andern

parallelen Seite CD zu bestimmen. (Fig. 105.)

Auflösung. Man dividire den Inhalt des Trapezes mit der Entfernug CE der beyden parallelen Seiten; den Quotienten verdoppele man und subtrahire davon AB, der Rest giebt DC in eben dem Maaße an, in welchem die übrigen Linien ausgedrückt sind, und man setzt, wie immer, voraus, daß alle Linien und Flächen in gleichartigen Maaße gegeben sind.

Beweis. Da $ABCD = \frac{1}{2} AB . CE + \frac{1}{2} DC . CE$, so ist, nach der Lehre von den Gleichungen $\frac{ABCD}{CE} = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$ und $\frac{2\,ABCD}{CE} = AB + DC$, und wenn man von diesem verdoppelten Quotienten AB abzieht, so erhält man DC. Uebrigens behält DC einerley Werth, der Winkel BAD sey, welcher er wolle.

212. 38ste Aufgabe. Den Inhalt einer jeden gradlinigten Figur auszurechnen, wenn man alle nöthigen Linien messen kann, oder diese gegeben sind.

Auflösung. Man theile (Fig. 106.) die Figur durch die Diagonalen EA, EB, EC in lauter Dreyecke, messe jedes Dreyeckes Grundlinie und Höhe und berechne daraus den Inhalt eines jeden. Die Summe aller Dreyecke giebt den Inhalt der ganzen Figur. Hiebey wird vorausgesetzt, daß man nach einem in gleiche Theile abgetheilten Maaßstabe gerade Linien abmessen kann, welches auch keine Schwierigkeit hat.

213. Wenn bey der Berechnung des Inhalts einer Figur die Linien nicht in einerley Maaße gegeben wären, sondern z. B. die eine in Fußen, die andere in Zollen, oder die eine in Pariser, die andere in Londonner Fußen, so ist es durchaus nöthig sie zuerst alle in einerley Maaße auszudrücken, weil sonst die Flächen-Einheit kein Quadrat, also kein reguläres Maaß wäre.

Man wird also nun auch Aufgaben wie folgende auflösen können. Die Grundlinie eines Dreyecks ist 17 Fuß, die Höhe 1100 Zoll; eines andern Dreyecks Grundlinie 115 hamburger Fuß und die Höhe 115 rheinl. Fuß; wie groß sind diese Dreyecke, wenn 139, 13 hamb. Fuß, 127 rheinl. Fuß betragen?

Andere Aufgaben. Eines Trapezes parallele Seiten sind = 15 Ruthen 7 Fuß 9 Zoll und 17 Ruthen 8 Fuß, ihr senkrechter Abstand von einander 25 Ruthen, wie groß ist dasselbe, wenn die Ruthe 16 Fuß enthält?

* Eines Parallelogramms Inhalt ist = $5799\frac{3}{8}$ Quadratruthen, die Grundlinie 1102 Fuß, wie groß ist die Höhe? Eines an Fläche eben so großen Dreyeckes Grundlinie ist 268,9 Ruthen, wie groß die Höhe? — Endlich wie groß die Höhe eines eben so großen Trapezes, dessen parallele Seiten = 57 Ruthen 8 Fuß und 73 Ruthen 2 Fuß sind?

*214. 39ste Aufgabe. Es sind zwey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks in Zahlen gegeben, man soll die dritte bestimmen.

Auflösung. Sind beyde Catheten gegebenen und die Hypotenuse gesucht, so quadrire man beyde Zahlen, welche die Länge der Catheten ausdrücken, addire diese Quadratzahlen und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, die herauskommende Zahl ist die Länge der Hypotenuse.

Ist eine Cathete und die Hypotenuse gegeben, so subtrahirt man das Quadrat der erstern von dem Quadrate der letztern und zieht aus der Differenz die Quadratwurzel, welche dann die Länge der andern Catheten angiebt.

Beyspiel. Ist die eine Cathete 30, die Hypotenuse 50 Fuß lang, so wird die andre Cathete $= \sqrt{(50^2 - 30^2)} = \sqrt{(2500 - 900)} = 40$.

Beweis. Da das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate beyder Catheten, so folgt, daß eine Cathete sich zu der Hypotenuse verhält, wie die Zahl, welche die Länge dieser Cathete ausdrückt, zu der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate beyder Catheten.

*215. Bey der Auflösung dieser letztern Aufgabe wird man sehr oft auf irrationale Zahlen für die Länge der gesuchten Seiten kommen; denn z. B. ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen beyde Catheten $= 1$ sind, hat znr Hypotenuse eine Linie, deren Länge $= \sqrt{2}$, das ist, größer als 1,414 und kleiner als 1,415 ist. Die Hypotenuse hat folglich in diesen Fällen zu den Catheten ein irrationales Verhältniß, oder diese Linien haben kein gemeinschaftliches Maaß. Da man nun gleiwohl ein solches Dreyeck zeichnen kann, so erhellet, daß man das irrationale Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ durch zwey gerade Linien ganz genau darstellen kann, welches in Zahlen unmöglich ist.

Beyspiel. Die Seite eines jeden Quadrats verhält sich zu seiner Diagonale, wie $1 : \sqrt{2}$. Zeichnet man über dieser Diagonale als Grundlinie ein Rechteck, dessen Höhe $= 1$, so ist die Diagonale dieses Rechtecks $= \sqrt{3}$, u. s. w.

* Uebungs-Aufgaben. 1. Durch Zeichnung oder auch in Zahlen die zweyte Seite eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Seite nebst der Diagonale gegeben ist.

2. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Diagonale gegeben ist.

3. Aus der gegebenen Diagonale eines Quadrats den Inhalt desselben zu berechnen.

4. Wenn die beyden Seiten eines Rechtecks in Zahlen gegeben sind, die Seite eines Quadrates, welches dem Rechteck gleich sey, in Zahlen zu bestimmen.

5. Wenn in einer Figur (Fig. 106.) die Grundlinien und Höhen aller Dreyecke, in welche dieselbe eingetheilt ist, gegeben sind; die Seite eines Quadrates zu bestimmen, welches dieser Figur gleich ist.

216. Anmerkung. Da ein Dreyeck, dessen eine Seite $= 3$, die zweyte $= 4$, die dritte $= 5$ ist, allemal zwischen der ersten und zweyte Seite einen rechten Winkel hat, (§. 177.); so giebt die Zeichnung eines solchen

Dreyecks ein Mittel ab, um einen rechten Winkel zu zeichnen. Manche Handwerker bedienen sich dieses Hülfsmittels.

Siebenter Abschnitt.

Vom Kreise und den Linie und Winkeln im Kreise.

217. Erklärung. Wenn man eine gerade Linie AB (Fig. 107.) zieht, welche den Kreis schneidet, so heißt das Stück AB, welches durch die Kreislinie auf der geraden Linie abgeschnitten wird, ein Sehne des Kreises, das Stück AFB, welches sie von der Kreisfläche abschneidet, heißt ein Kreisabschnitt; das Stück AFB der Kreislinie ein Kreisbogen, und zwar der zu der Sehne AB gehörige Kreisbogen.

218. 64ster Lehrsatz. Jede Sehne AB schneidet die Kreislinie nur in zwey Puncten, A und B, und alle zwischen A und B liegende Puncte der Sehne liegen innerhalb des Kreises. (Fig. 107.)

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes ist §. 98 ausdrücklich bewiesen. Daß aber jeder Punct

D, welcher auf der Sehne zwischen A nnd B liegt, sich innerhalb des Kreises befinde, oder CD < CA sey, wenn C des Kreises Mittelpunct ist, erhellet aus §. 102., weil im gleichschenklichten Dreyecke die Senkrechte CE innerhalb des Dreyecks fällt und dann CD dieser näher liegt, als CA.

219. Jede Sehne theilt also die Kreislinie in zwey Kreisbogen AFB und AKB, die also beyde zu dieser Sehne gehören; und eben so theilt sie die Kreisfläche in zwey Abschnitte AFBA und AKGBA. — Ist die Sehne ein Durchmesser, so sind die beyden zugehörigen Bogen und die beyden zugehörigen Abschnitte beyde gleich, nämlich Halbkreise.

220. 65ster Lehrsatz. Jede von dem Durchmesser verschiedene Sehne AB (Fig. 107.) ist kleiner als der Durchmesser.

Beweis. Wenn man an die Endpuncte der Sehne die Halbmesser AC, BC zieht, so ist gewiß AB < AC + BC, aber AC + BC ist dem Durchmesser gleich.

221. 66ster Lehrsatz. 1. Wenn eine Sehne AB durch den Halbmesser CF in E halbirt wird, so steht dieser Halbmesser auf ihr senkrecht; 2. Wenn der Halbmesser CF

auf der Sehne senkrecht steht, so halbirt er sie. 3. Wenn eine gerade Linie FEC die Sehne halbirt und zugleich auf ihr senkrecht steht, so geht diese gerade Linie durch den Mittelpunct des Kreises. (Fig. 107.)

Beweis. Da die Halbmesser CA = CB, so ist ACB ein gleichschenklichtes Dreyeck und der Satz nr. 1. ist in §. 92., und die Sätze nr. 2 und 3. in §. 101. bewiesen.

222. 67ster Lehrsatz. Zwey Sehnen können einander nicht gegenseitig halbiren, wenn sie nicht beyde Durchmesser sind.

Beweis. Sollten (Fig. 107.) die Sehnen AB, GH beyde einander in E halbiren, so würde (§. 221.) der durch E gezogene Halbmesser CF auf beyden in E senkrecht stehn, welches unmöglich ist.

223. 68ster Lehrsatz. Wenn auf zwey geraden Linien AB, BC, welche einander scheiden, Linien DE, FG senkrecht gezogen sind, so werden auch diese einander schneiden. (Fig. 108.)

Beweis. Wenn die Linie AB, BC einen spitzen Winkel mit einander bilden, so würden AB und FG gehörig verlängert einander schneiden, weil ABF + BFG < 2R (§. 143.); sie würden aber am Durchschitt einen spitzen Winkel mit einander machen, weil das Dreyeck, welches die verlängerten BA, FG mit BF bilden, schon bey F einen rechten Winkel hat. (§. 137.) Dann aber schneiden sich auch DE und FG, weil die Summe der innern Winkel, welche sie mit der verlängerten AB machen < 2R ist.

Ist hingegen ABF ein stumpfer Winkel, so ist sein Nebenwinkel HBF spitz, und wenn GF über F hinaus verlängert wird, so wird sie BH schneiden, und zwar unter einem spitzen Winkel weil auch hier an F ein rechter Winkel entsteht. Und hieraus folgt weiter, weil dieser spitze Winkel am Durchschnittspuncte mit IDH zusammen weniger als 2R beträgt, daß auch DE und FG einander schneiden.

224. 40ste Aufgabe. Eines gegebenen Kreises oder Kreisbogens ABC Mittelpunct zu bestimmen. (Fig. 108.)

Auflösung. Man ziehe in dem Kreisbogen zwey Sehnen AB, BC, welche einander in B schneiden, halbire sie in D und F, und ziehe durch D und F die senkrechten Linien DE und FG, welche einander irgendwo in I schneiden werden (§. 223.), dieser Durchschnittspunct ist des Kreises Mittelpunct, weil §. 221. nr. 3. beyde auf die Mitte der Sehnen senkrechte Linien, durch den Mittelpunct gehn.

225. 41ste Aufgabe. Durch jede drey gegebene Puncte ABC, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu ziehn. (Fig. 108.)

Auflösung. Man ziehe zwischen den Puncten A, B, C die gerade Linien AB, BC; halbire sie in D und F und ziehe durch D auf AB, durch F auf BC die senkrechten Linien DI, FI: wo diese sich schneiden, da ist der Mittelpunct der Kreislinie, welche durch jene drey Puncte geht.

Beweis. Daß DI und FI einander schneiden, wenn AB, BC nicht eine einzige gerade Linie ausmachen, erhellt aus §. 223. daß aber I des verlangten Kreises Mittelpunct sey, oder IA = IB = IC, folgt aus der Gleichheit der bey D und F rechtwinklichten Dreyecke, ADI = BDI und BFI = CFI. (§. 73.)

226. Durch einen Punct A lassen sich unzählige Kreislinien ziehen, die in A einander berüh=

ren oder schneiden können; durch zwey Puncte A und B giebt es gleichfalls unzählige Kreislinien, weil alle Kreislinien, deren Mittelpunct auf der geraden Linie DI und ihrer Verlängerung liegen, durch diese beyden Puncte gehen und sich in denselben schneiden. Dagegen giebt es nur einen einzigen Kreis, welcher durch die drey gegebenen Puncte A, B, C geht, weil sein Mittelpunct nur in dem einzigen Puncte I liegen kann, wo die beyden auf die Sehnen senkrechten Linien einander durchschneiden. Durch drey Puncte ist also der Kreis völlig bestimmt und man kann nicht ganz willkührlich noch einen vierten Punct annehmen, durch welchen die Kreislinie auch noch gehen soll; denn dies ist nicht allemal, sondern nur bey bestimmter Lage dieses vierten Punctes möglich.

227. 69ster Lehrsatz. Zwey Kreislinien können einander nur in zwey Puncten schneiden, und die durch beyder Kreise Mittelpuncte gehende gerade Linie CD steht auf der durch beyde Durchschnittspuncte der Kreislinien gehende Linie AB senkrecht. (Fig. 109.)

Beweis. Hätten die Kreise drey Puncte gemeinschaftlich, so würden ihre Mittelpuncte zusammen fallen und ihre Halbmesser gleich seyn, und die Kreise wären dann gar nicht von einander verschieden. (§. 225.)

Daß die Mittelpuncte zweyer Kreise nicht zusammenfallen können, ist schon eben §. 61. gezeigt; zieht man also zwischen den beyden Mittelpuncten die gerade Linie CD und zwischen den beyden Durchschnittspuncten die Linie AB, nebst den Radien CA, CB, DA, DB: so haben die Dreyecke DAC, DBC gleiche Seiten, CA = CB, DA = DB, CD = CD und sind daher völlig gleich, (§. 75.) und es sind die Winkel ACD = BCD, daher ist im gleichschenklichten Dreyecke ACB, CE auf AB senkrecht und halbirt sie (§. 93.) Diese halbirende Linie ist aber eben diejenige, welche durch den andern Mittelpunct D geht und folglich der Lehrsatz erwiesen.

228. 70ster Lehrsatz. Wenn in einen Kreise (Fig. 110.) die vom Mittelpuncte G aus gezogenen Halbmesser GD, GF einen eben so großen Winkel einschließen, als die gleichfalls vom Mittelpuncte desselben Kreises gezogenen Linien GA, GC: so sind auch die zwischen den Schenkeln dieser Winkel liegen=

den Kreisbogen ABC und DEF einander gleich.

Beweis. Legt man den Winkel AGC so auf DGF, daß beyde Spitzen in G, der Schenkel GA auf GD und GC auf GF fällt, welches wegen der Gleichheit der Winkel möglich ist: so fällt die Sehne AC auf DF, und wegen der Gleichheit der Halbmesser, die ganzen Bogen ABC auf DEF.

229. Zu gleichen Winkel am Mittelpuncte desselben Kreises, oder gleicher Kreise, gehören also gleiche Bogen; und wie man leicht übersieht, zu einem größern Winkel am Mittelpuncte desselben Kreises, oder gleicher Kreise, gehöret ein größerer Bogen. Auch läßt sich leicht umgekehrt beweisen, daß zu gleichen Bogen in gleichen Kreisen gleiche Winkel am Mittelpuncte gehören.

Da diese Sätze noch gelten, wenn die Winkel in verschiedenen aber gleichen Kreisen liegen und ihre Scheitel im Centro dieser Kreise liegen: so folgt, daß, wenn man mit gleichen Halbmessern zwischen den Schenkeln gleicher Winkel Kreisbogen zieht, deren Mittelpunct im Scheitel des Winkels liegt, dann diese Kreisbogen gleich sind, hingegen ungleich bey ungleichen Winkeln.

230. 71ster Lehrsatz. In einerley Kreise oder in gleichen Kreisen gehören gleiche Sehnen AC, DF mit gleichen Bogen ABC, DEF zusammen, und umgekehrt gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen. Dagegen gehört in gleichen Kreisen ein größerer Bogen mit einer größern Sehne, und eine größere Sehne mit einem größern Bogen zusammen, so lange die Bogen kleiner sind, als ein Halbkreis. (Fig. 111.)

Beweis Man ziehe die Halbmesser GA, GC, GD, GF, so sind, wenn AC = DF, die Dreyecke AGC, DGF völlig gleich, und (§. 75.) folglich die Winkel AGC = DGF und eben deswegen auch die Bogen AC = DF, (§. 228.); es gehören also zu gleichen Sehnen gleiche Bogen.

Hätte man die Bogen gleich angenommen, AHC = DIF: so folgt (§. 228. 229.) die Gleichheit der Winkel AGC = DGF und daraus (§. 73.) die Gleichheit der Sehnen AC = DF.

Wäre im Gegentheil DF > AC, so folgt aus §. 76. daß DGF > AGC und daraus ferner (§. 229.) DIF > AHC. Und eben so, wenn man voraussetzt DIF $>$ AHC, also DGF $>$ AGC, so ist auch (§. 74) DF $>$ AC.

231. 72ster Lehrsatz. Gleiche Sehnen AC, DF in einerley, oder in gleichen Kreisen, sind gleich weit vom Mittelpuncte entfernt; und umgekehrt, Sehnen, die gleich weit vom Mittelpuncte abstehn, sind gleich. (Fig. 111.)

Beweis. Man halbire die Sehnen AC, DF in B und E und ziehe GB, GE, nebst den Halbmessern GC, GF. Sind nun die Sehnen gleich AC = DF, also auch ihre Hälften BC = FE, so ist auch GB = GE, weil im rechtwinklichten Dreyecken aus der Gleichheit der Hypotenusen GC = GF und der einen Cathete BC = EF die Gleichheit der andern Cathete folgt. (§. 106. §. 177.) Die Entfernungen gleicher Sehnen vom Mittelpuncte sind also gleich.

Eben so würde umgekehrt aus der Voraussetzung, daß GB = GE sey, folgen BC = EF und AC = DF.

232. 73ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 111.) die Sehnen AC, DF ungleich sind, so ist alle-

mal die kleinere weiter vom Mittelpuncte entfernt, als die größere; und umgekehrt, Sehnen die ungleich vom Mittelpunct entfernt sind, sind auch selbst ungleich, und diejenige ist die größere, welche am weitesten vom Mittelpuncte abliegt.

Beweis. Man ziehe GB, GE senkrecht aus dem Mittelpuncte auf die Sehnen und ziehe ferner die Halbmesser GC, GF. Wenn nun $AC > DF$, also auch unter den Hälften $BC > EF$, so ist auch das Quadrat von BC größer als das Quadrat von EF. Weil nun (§. 177.) $GCq = BCq + GBq = GEq + EFq$, so muß, wenn $BCq > EFq$, nothwendig $GBq < GEq$ seyn, also $GB < GE$. Hieraus läßt sich denn auch übersehn, daß die vom Mittelpuncte entferntern Sehne die kleinere sey, oder daß aus der Voraussetzung $GB < GE$ folgt $AC > DF$.

233. 42ste Aufgabe. Es ist ein Winkel BAC (Fig. 112.) gegeben, man soll einen andern Winkel zeichnen, welcher das Zweyfache, Dreyfache und überhaupt ein Vielfaches dieses Winkels sey.

Auflösung. Man zeichne mit willkührlichem Halbmesser um den Scheitelpunct A des Winkels einen Kreis oder Kreisbogen BCFH; ziehe die zwischen dem Schenkeln des Winkels enthaltene Sehne BC und beschreibe um C mit dem Halbmesser CD = BC einen Kreis oder Kreisbogen de; nach dem Puncte D, wo dieser den erstern Kreis schneidet, ziehe man AD, so ist CAD = BAC, weil ihre Sehnen einander gleich sind BC = CD, also BAD doppelt so groß als BAC; und wenn man wieder DAE = DAC macht, indem man die Sehne DE = BC nimmt, so ist BAE das Dreyfache von BAC u. s. w.

234. 74ster Lehrsatz. **In einerley Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Winkeln, deren Scheitel im Mittelpuncte liegt, wie die Längen der zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Kreisbogen.**

Beweis. Wenn (Fig. 112.) der Kreisbogen BDF ein genaues Vielfaches des Bogens BC ist, so erhellt aus dem vorigen, daß auch der Winkel BAF ein eben so Vielfaches des Winkels BAC ist, und also das Verhältniß der Bogen mit dem Verhältnisse der Winkel zu einander einerley ist. Aber wenn auch BDF kein genaues Vielfaches des Bogens BC ist und es läßt sich nur ein Bogen BG angeben, der im Bogen BC sowohl als in BDF ganze Male enthalten ist, so läßt sich doch übersehen, daß auch der Winkel BAC den Winkel BAG eben so oft enthalte, als der Bogen BC den Bogen BG, und daß der Winkel BAF den Winkel BAG eben so oft enthalte als der Bogen BF den Bogen BG. In beyden Fällen also verhalten sich die Winkel wie die zwischen ihren Schenkel enthaltenen Bogen.

* In den Fällen, wo die Bögen BC, BDF ein irrationales Verhältniß haben, wo es also kein für beyde gemeinschaftliches Maaß BG giebt, welches in beyden ganze Male enthalten wäre, oder in beyden genau aufginge: so läßt es sich doch durch eben die Schlüsse, wie §. 193. zeigen, daß auch dann eben das Verhältniß statt finde.

235. Erklärung. Man nennt den Abschnitt eines Kreises denjenigen Theil ABCA (Fig. 110.) der Kreisfläche, welcher zwischen der Sehne und dem zugehörigen Bogen enthalten ist, hingegen ist ein Ausschnitt des Kreises der Theil ABCGA der Kreisfläche, welcher durch den Bogen ABC und die an seine Endpuncte gezogenen Halbmesser GA, GC begränzt wird.

236. 75ster Lehrsatz. Wenn in einerley Kreise oder in gleichen Kreisen die Bogen AHC und DIF gleich sind: so sind auch

die zwischen ihnen und den zugehörigen Sehnen liegenden Abschnitte gleich, AHCA = DIFD, und die Ausschnitte gleich, AHCGA = DIFGD.

Beweis. Die Gleichheit der Ausschnitte erhellt, weil die Winkel am Mittelpuncte (§. 228.) gleich sind, wenn man sie auf einander legt, eben so wie §. 228. Da aber auch die Dreyecke DGC = DGF, so ist AHCGA — AGC = DIFGD = DGF oder die Abschnitte ABCA = DEFD.

237. Aus diesem Lehrsatze folgt ferner, daß auch die Flächen-Größe mehrerer Ausschitte in gleichen Kreisen sich verhalte, wie die Bögen. Dagegen läßt sich über das Verhältniß ungleicher Abschnitte nicht so leicht etwas bestimmen.

238. 43ste Aufgabe. Einen gegebenen Kreisbogen BDF und einen Kreisabschnitt BDFB zu halbiren. (Fig. 112.)

Auflösung. Beydes geschieht wenn man die Sehne durch eine auf sie senkrechte Linie DI halbirt. Dann nämlich ist der Bogen BD = DF und das Stück der Fläche BDIB = FDIF.

Beweis Wenn man die Halbmesser FA, BA an den (nach §. 224. gefundenen) Mittelpunct zieht; auch DI, welche (§. 221.) durch den Mittelpunct gehen wird, bis an A verlängert, so erhellet die Gleichheit der Dreyecke GIA, FIA aus §. 73. und folglich auch daß der Winkel GAD = FAD und daher (§. 228.) der Bogen BD = DF, der Ausschnitt BADB = FADF (§. 236.) und dann auch daß BADB — ABI = FADF — AIF, oder BIDB = FIDF sey.

239. Auf diese Weise kann man die Theilung des Bogens fortsetzen und seyn Viertel, sein Achtel u. s. w. bestimmen. Um aber einen Kreisbogen in drey, fünf, sieben oder eine andre Anzahl gleicher Theile zu theilen, giebt es keine geometrische Regel, sondern man muß dieses durch Versuche bewerkstelligen, indem man zuerst ein Stück BC, welches zum Beyspiel ein Fünftel des Bogens BH seyn soll, willkührlich annimmt und versucht, ob es genau fünfmal in den Bogen enthalten sey, (wenn man nämlich die gleichen Sehnen BC, CD, DE, EF, FH abschneidet,); findet sich dieses nicht genau, so ändert man BC so lange bis es zutrifft.

240. Durch diese Methode ist man also auch im Stande, einen jeden gegebenen Winkel in eine

bestimmmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, und wenn man den rechten Winkel in eben solche Theile theilt, das Verhältniß eines jeden Winkels zum rechten Winkel zu bestimmen. Es ist daher vortheilhaft für die Eintheilung des rechten Winkels ein für allemal etwas bestimmtes festzusetzen.

241. Willkührlicher Satz. Zieht man in einem Kreise (Fig. 113.) zwey auf einander senkrechte Durchmesser AD, BE, so gehören zu den vier gleichen Winkeln vier gleiche Theile der Kreislinie, welche man Quadranten nennt. Jeden Quadranten, und folglich auch den rechten Winkel, ist man gewohnt in 90 gleiche Theile, oder nach der jetzt in Frankreich üblichen Eintheilung in 100 gleiche Theile zu theilen, die man Grade nennt, und zwar jene Nonagesimalgrade, diese Centesimalgrade, (das ist, Grade der Neunzigtheilung und Grade der Hunderttheilung). Die Nonagesimalgrade theilt man wieder jeden in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden; hingegen theilt man nach der französischen Sitte, (die mancherley Vorzüge vor der ältern und bey uns noch Gangbaren Eintheilung hat,) den Centimalgrad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden. Es ist demnach bey uns 1 Grad $= \frac{1}{90}$ des rechten Winkels oder des Quadranten; 1 Minute $= \frac{1}{90 \cdot 60} = \frac{1}{5400}$ R, und 1 Secunde $= \frac{1}{90 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{324000}$ R.

Hingegen ist nach der Centesimaltheilung 1 Grad = 0,01 R; 1 Minute = 0,0001 R; 1 Secunde = 0,000001. des rechten Winkels oder des Kreisquadranten.

Der ganze Kreis enthält also 360 unsrer Grade. Die Summe aller Winkel im Dreyecke 180 Grade u. s. w.

Man bezeichnet die bey uns gewöhnlichen Grade, Minuten und Secunden durch die Zeichnen $^{\circ}$, ^{I}, ^{II} indem man $5^{\circ}\ 7^{I}\ 19^{II}$ schreibt für 5 Graden 7 Minuten 19 Secunden.

Beyspiele zur Verwandlung der Nonagesimal- in Centesimalgrade. $15^{\circ}\ 7^{I}\ 9^{II}$, wieviel französische Secunden oder wie viel Milliontheile des Quadranten? $127^{\circ}\ 59^{I}\ 58^{II}$, wie viel französische Grade, Minuten, Secunden? — Hingegen 0,57892 des Quadranten, wie viel betragen die nach unsrer Eintheilung oder wie viel 0,6366197?

242. Diese allgemeine eingeführte Eintheilung des rechten Winkel und des Kreisquadranten dient uns nun, um die Größe eines Winkels genau anzugeben, ohne daß wir ihn vorzuzeichnen brauchen. Jeder weiß, daß ein Winkel von 45 Grad der Nonagesimaltheilung die Hälfte eines rechten Winkels ist, und so ist jeder Winkel, wenn man die Größe desselben in Graden angiebt, ganz genau bestimmt.

Um aber nach dieser Angabe ohne viele Schwierigkeit einen Winkel zeichnen zu können, bedarf man eines Instrumentes, nämlich eines eingetheilten Kreises, um in Graden gegebene Winkel zu zeichnen. Ein solches Instrument ist der Transporteur, dem man sich als einen in 180 Graden getheilten Halbkreis vorstellen kann.

243. 44ste Aufgabe. Einen in Graden gegebenen Winkel vermittelst des Transporteurs zu zeichnen; und einen gezeichneten Winkel mit dem Transporteur zu messen.

Auflösung. Soll an die Linie BC (Fig. 114.) ein Winkel ABC = 50 Grad gezeichnet werden: so legt man den Mittelpunct des Transporteurs in C, den Durchmesser BD an BC, und legt dann ein Lineal an den Mittelpunct und an die Abtheilung, wo 50 Grad steht; dann schneidet die Linie AC einen Winkel ACB von 50 Graden ab.

Ist hingegen der Winkel ACB vorgezeichnet, und man will seine Größe wissen: so legt man des Transporteurs Centrum C an den Scheitel, den Halbmesser an den einen Schenkel des Winkels, und sieht zu, bey welchem Grade der andere Schenkel den Umfang des Transporteurs trifft; diese Anzahl von Graden giebt die Größe des Winkels an.

244. Auch auf dem Felde und bey astronomischen und andern Beobachtungen bedient man sich der eingetheilten Kreise, deren es mancherley unter dem Namen Astrolabium, Quadrant u. s. w. giebt. Alle diese kommen darin überein, daß ihr Rand, ungefähr so wie der Halbkreis in Fig. 114. in Grade, oder auch in Theile von Graden, Minuten u. s. w. getheilt ist, und daß sich an dem Instrumente ein um C bewegliches Lineal befindet, welches im Mittelpuncte C befestigt ist, und sich rund um diesen Punct drehen kann. Will man mit einem solchen Instrumente horizontale Winkel, oder solche die der Erdfläche parallel sind, messen, so muß es mit einem Stative oder Fuße versehen sey, der so eingerichtet ist, daß man das Instrument im Felde aufstellen, dem Kreis genau horizontal stellen und nach allen Seiten richten kann. Soll hingegen ein solches Instrument dienen, um Höhen-Winkel, das ist Winkel die in einer gegen die Erdfläche senkrechten Ebne liegen, zu messen, so müssen sie in eine solche senkrechte Ebne gestellt und befestigt seyn, wie die astranomischen Höhen-Quadranten, oder sich auch genau in diese Ebne bringen lassen. Wir werden hier nur die ersten Grundregeln über den Gebrauch dieser Instrumente beybringen können.

245. 45ste Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde mit dem eingetheilten Kreise zu messen.

Auflösung. Ist der Winkel horizontal, so stelle man über dem Puncte, wo der Scheitel des zu messenden Winkels liegt, zuerst das Instrument horizontal; hat der Winkel eine andre Lage, so bringe man die Ebne des Kreises in eine solche Lage, daß sie mit der Ebne des zu messenden Winkels übereinstimmt. Dann richte man BC nach dem Gegenstande, der auf dem einen Schenkel des Winkeln liegt, lasse den Kreis in dieser Lage feststehen, drehe aber das Lineal AC bis es gegen den auf dem andern Schenkel liegenden Gegenstand gerichtet ist. Dann giebt die zwischen BC und dem Lineale AC enthaltene Anzahl von Graden die Größe des Winkels an.

Erläuterung. Auf dem Lineale AC ist, wenn das Instrument genaue Resultate geben soll, ein Fernrohr befestigt, in welchem zwey ins Kreutz gespannte Fäden den Mittelpunct des Fernrohrs oder die Axe desselben bezeichnen. Diese Axe wird eigentlich nach dem Gegenstande gerichtet, oder das Fernrohr so gestellt, daß der Gegenstand in der Mitte dieses Fadenkreutzes erscheint. Auf BC, nämlich dem Durchmesser, wo der Nullpunct der Gerade ist, befindet sich entweder ein zweytes Fernrohr, welches sich nicht verschieben läßt, oder man kann auch zuerst AC auf BC stellen und das Instrument nach dem einen Gegenstande richten, und dann, indem der Kreis selbst unbeweglich bleibt, AC verschieben bis es nach dem andern Gegenstande gerichtet ist.

* 246. Mit einem so eingetheilten Kreise aber würde man doch noch keine so große Genauigkeit in der Angabe der Größe eines Winkels erreichen, als man gewöhnlich verlangt; denn selbst bey ziemlich großen Kreisen wird der Raum, den eine Minute auf dem eigetheilten Ringe einnimmt, doch so klein, daß die Theilungs-Linien sich nicht fein genug ziehen lassen, um noch Minuten auf dem Gradbogen selbst anzugeben. Um den Winkel genauer anzugeben, als es nach der auf dem Rande wirklich befindlichen Eintheilung geschehen kann, ist daher noch eine besondre Einrichtung nöthig, und es dient dazu besonders der **Nonius**, wovon Fig. 115. eine Vorstellung giebt. Ist nämlich AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, und die gleich große Linie CD enthält einen Theil weniger, z. B. jene fünf und diese vier, so bezeichnen die Theilungsstriche der letztern, wenn sie neben der erstern liegt, die Viertel der Theile auf jener, ohne daß man die Linie AB mit Eintheilungen zu überhäufen braucht; denn der auf AB genau neben e liegende Punct ist um $1\frac{1}{4}$ solcher Theile wie Aa von A entfernt. Ist also Fig. 116. FG ein Theil des Kreisbogens, so ist der **Nonius** ein Stück eines Kreisbogens KL, welches sich längs FG verschieben läßt, oder vielmehr sich mit dem Lineale fortschiebt. Steht nun

das Lineal bey IH und trift nicht genau an einen Theilungsstrich des Randes, welcher, wie ich annehmen will, in eizelne Grade = Fa = ab getheilt ist, so läßt sich vermittelst des Nonius bestimmen, wie groß das Stück am ist. Sind nämlich 4 Abtheilungen des Nonius = 5 Graden, so ist eine = $1\frac{1}{4}$ Grad: wenn also bey i ein Theilstrich des Nonius und des Randes zusammen trifft, so ist der auf dem Rande neben K liegende Punct um $1\frac{1}{4}$ Grad von d entfernt, und der neben l liegende Punct um $2\frac{1}{2}$ Grad von d entfernt. Das Lineal steht also genau $\frac{1}{2}$ Gerad von a entfernt. Wäre die Eintheilung des Nonius anders, daß z. B. 31 Theile des Randes 30 Theilen des Nonius gleich wären, so gäbe der Nonius Dreyßigstel der Randtheilung und wenn die Striche d, i genau zusammen träfen: so wäre der nächste K um $\frac{1}{30}$. ab von c entfernt, der zweyte l um $\frac{2}{30}$. ab von b u. s. w.

Dieses Nonius oder Verniers kann man sich auch bey der genauen Abmessung geradrr Linien bedienen.

* 247. Aber wenn auch durch diese und ähnliche Hülfsmittel die Größe des Winkels bis auf sehr kleine Theile angegeben wird; so ist man damit noch nicht immergewiß, daß der Winkel darum bis auf so kleine Theile genau bestimmt sey. Denn wenn er das seyn sollte: so müßte das Instrument ganz vollkommen genau und die Beobachtung selbst ohne Fehler seyn; beyes aber findet nie vollkommen statt. Ist nämlich das Instrument auch mit noch so großer Sorgfalt gearbeitet: so ist doch keine menschliche Arbeit ganz ohne Fehler, und eben so

wenig kann man die Messung des Winkels, die Stellung des Instruments und des Lineals ganz ohne Fehler bewerkstelligen. Man muß daher auf Mittel denken, den Einfluß dieser Fehler möglichst zu vermindern

*** 248. 46ste Aufgabe. Durch Vervielfältigung einen Winkel genauer zu messen, als es durch eine einzelne Messung geschehen kann.**

Auflösung. 1. Man stelle zuerst über dem Scheitelpuncte des zu messenden Winkels, den ich als horizontal annehme, den getheilten Kreis auf und richte BC genau nach dem einen Schenkel des Winkels, lasse dann den Kreis feststehn und drehe bloß das Lineal bis es in CA die Richtung des andern Schenkels hat;

2. Man befestige nun das Lineal in der Stellung, die es jetzt auf dem Kreise hat und drehe das ganze Instrument so herum, daß CA dahin gerichtet ist, wohin vorher CB gerichtet war; alsdann stelle man den Kreis wieder fest und drehe das Lineal abermals nach dem zweyten Schenkel des Winkels. Da nun jetzt der Nullpunct des Instruments in CF steht und FCB = BCA, so zeigt CA jetzt auf die doppelte Anzahl Grade, wie vorhin.

3. Befestigt man nun abermals das Lineal an den Kreis, und dreht das ganze Instrument bis CA in CB, also der Nullpunct nach E kommt: so ist, wenn man wieder das Lineal nach dem zweiten Schenkel des Winkels richtet, der jetzt abgeschittene

Bogen auf dem getheilten Kreise das Dreyfache das zu messenden Winkels, und so kann man das Vierfache, Fünffache u. s. w. durch Wiederholung derselben Operation finden.

Bemerkung. Diese Methode hat den Vortheil, daß 1. die bey der Beobachtung des Winkels vorkommenden Fehler durch diese Vervielfältigung größtentheils aufgehoben werden. Gesetzt nämlich, man habe bey der ersten Messung des Winkels die Linie BC nicht ganz vollkommen, genau auf den Schenkel des Winkels gerichtet, und dadurch den Winkel etwas zu groß gefunden: so wird doch bey den folgenden Operationen nicht immer derselbe Fehler vorkommen, sondern es wird sich eher treffen, daß man auch einmal einen Fehler begeht, wodurch der Winkel zu klein ausfällt, und folglich der Einfluß jenes Fehlers auf gehoben wird. Ist aber auch daß nicht der Fall, so vermindert sich doch der Einfluß jenes Fehlers bey der Vervielfältigung immer mehr; denn wenn z. B. der zu messende Winkel wirklich = 50° ist, man findet aber bey der ersten Messung 50°. 1'.: so wird, wenn die zweyte Messung ohne Fehler ist, nach derselben das Lineal auf 100° 1', stehn und man wird den Winkel zu 50° ½' ansetzen, also nur halb so viel irren, als bey der einmaligen Messung. 2. Auch die Fehler des Instruments verlieren hiedurch ihren Einfluß; denn gesetzt auf dem Instrumente stände da 50° 1', wo eigentlich 50° stehn sollte: so ist doch nicht wahrscheinlich, daß da wo 100° stehn müßte, 100° 2', und wo 350° stehn müßte, 350°. 7' stehn wird, zumal da 360° auf dem Instrumente, und in der Wirklichkeit genau übereinstimmen, weil dies der ganze Umfang ist. Bey einer mehrmaligen

Vervielfältigung hat es also keinen großen Einfluß wenn auch der Theilstrich des Grades, wo das Lineal steht, etwas falsch ist. Wäre nämlich nach der siebenten Vervielfältigung das Lineal auf 350°. 1'. und dieser Theilstrich um 1 Minute falsch, so schlösse man daraus die wahre Größe des Winkels = $50^{9}\ \frac{1}{2}^{\prime}$ und irrte sich doch nur um $\frac{1}{7}$ Minute u. s. w.

* 249. 47ste Aufgabe. Die Fehler in der Theilung eines Winkelmessers zu finden.

Auflösung. Ich will als Beyspiel annehmen, man wolle wissen, ob das Lineal ganz genau einen Winkel von 30 Graden mit BC mache, wenn es genau auf den Theilstrich des 30sten Grades gestellt ist — Man stelle dann das Lineal (etwa vermittelst einer Schraube) fest auf den Kreis und stelle das Instrument horizontal auf. Man setze nun auf dem Felde ein Signal genau in der Richtung von BC und ein zweytes in der Richtung von AC; drehe dann das Instrument, bis BC genau in die Richtung kommt, wo eben AC war, und setze ein drittes Siegnal dahin, wohin jetzt AC gerichtet ist, so wird das dritte vom ersten um einen Winkel von 60° entfernt seyn, wenn die 30° des Instruments wirklich wahre 30° ausmachen. Stellt man wieder BC nach dem dritten Signal und in der neuen Richtung von AC ein viertes, so ist dies um 90° vom ersten entfernt, und so wird endlich das dreyzehnte Signal, wenn man so fortfährt um 360° vom ersten entfernt seyn, das heißt es wird mit dem ersten zusammentreffen, wenn der 30ste Grad des

Instruments genau richtig angegeben ist. Treffen diese nicht zusammen und hat man in der Bestimmung der Signale keine Beobachtungsfehler begangen, so läßt sich hieraus bestimmen um wieviel der 30ste Grad des Instruments von der Wahrheit abweiche. Und so könnte man bey allen Winkeln verfahren, deren Vervielfachung auf einen oder mehrere ganze Umkreise führt.

250. Da in einem bestimmten Kreise, z. B. dessen Halbmesser = 1000 bekannten Theilen ist, zu jedem Winkel eine bestimmte Sehne gehört: so ist es möglich, sich eine Tabelle der Sehnen von 1°, 2°, 3° . . . . 10°, 20° u. s. w. zu entwerfen und diese Tabelle der Sehnen kann ebenfalls dienen, um Winkel zu zeichnen, deren Größe in Graden gegeben ist. Man kann auch diese Sehnen auf eine gerade Linie auftragen und dann erhält man das, was man einen geradlinigten Transporteur nennt.

251. 48ste Aufgabe. Einen geradlinigten Transporteur zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne einen Kreis und theile denselben genau in seine einzelnen Grade. Dieses geschieht, wenn man Nonagesimalgrade verlangt, am besten, indem man jeden Quadranten in 3 Theile, jeden zu 30 Grad, diese Stücke wieder in 6 Theile, jeden zu 5 Grad und so weiter eintheilt. Man nehme nun mit dem Zirkel die Sehnen von 1 Grad, von 2 Grad, 3 Grad u. s. w. ab und trage sie auf einer geraden Linie auf, indem man immer den einen Zirkelfuß in denselben Endpunct der geraden Linie einsetzt. So trage man alle Sehnen bis zu 180 Graden auf, so hat man einen geradlinigten Transpateur. Die Fig. 117. giebt als Beyspiel AB = Sehne von 30°, AC = Sehne von 60°, AD = Sehne von 90° u. s. w. an und man könnte so für alle einzelne Grade die Sehnen auftragen.

252. 49ste Aufgabe. 1. Einen vorgezeichneten Winkel mit Hülfe des geradlinigten Transporteurs zu messen; 2. einen in Graden angegebenen Winkel, mit Hülfe des geradlinigten Transporteurs zu zeichnen.

Auflösung. Wenn alle Sehnen auf dem geradlinigten Transporteur richtig aufgetragen sind, und man will (Fig. 118.) den Winkel BAC messen: so ziehe man um A einen Kreisbogen BC mit einen Halbmesser AB, welcher der zu 60° auf dem geradlinigten Transporteur verzeichneten Sehne gleich ist; fasse dann die zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltene Sehne BC mit dem Zirkel und sehe zu, welcher Sehne auf dem Transporteur sie gleich ist, findet man sie z. B. der Sehne von 24° gleich, so ist BAC = 24°.

Sollte umgekehrt ein Winkel von 24 Grad an AC gezeichnet werden, so zeichne man zuerst einen Kreisbogen BC mit einem Halbmesser, welcher der Sehne von 60° auf dem Transporteu gleich ist; trage dann von C an in den Kreis eine Sehne BC, gleich der auf dem Transportrur stehenden, zu 24 Grad gehörigen Sehne und ziehe AB, so ist BAC der verlangte Winkel.

Beweis. Es ist offenbar, daß man den Winkel richtig mißt oder aufträgt, wenn man einen Kreis mit dem Halbmesser zieht, welcher bey den auf dem Transporteur verzeichneten Sehnen zum Grunde liegt, und auf diesem die Sehnen abmißt und mit dem Transporteur vergleicht. Es muß also nur bewiesen werden, daß die auf dem Transporteur stehende Sehne zu 60°, dem Halbmesser des Kreises gleich ist, in dem die Sehnen des Transporteurs gemessen worden. Nimmt man am Mittelpuncte eines Kreises (Fig. 109.) den Winkel ACB = 60°, so ist die Sehne AB = AC. Denn im gleichschenklichten Dreyeck ist dann die Summe der beyden übrigen Winkel = 2R — 60° = 180° — 60° = 120° und also jeder = 60°, das Dreyeck ist also gleichwinklicht, und folglich (§. 88.) auch gleichseitig; also in jedem Kreise die Sehne an 60° dem Halbmesser gleich.

253. Erklärung. Eine gerade Linie HI (Fig. 109.) berührt den Kreis, wenn sie die Kreislinie zwar irgendwo in I trifft, aber sie nicht schneidet, sondern sich, wenn sie nach K verlängert wird, wieder davon entfernt. Eine solche Linie heißt eine Tangente, jede andre wie HMN, die durch den Kreis geht, eine Schneidende oder Secante.

254. 76ster Lehrsatz. Wenn man durch den Endpunct I eines Radius CI eine gerade Linie senkrecht auf CI zieht so ist diese Linie eine Tangente und liegt ganz außerhalb des Kreises.

Beweis. Wenn man irgend einen Punct L auf der geraden Linie IH auch noch so nahe bey I nimmt, so ist doch (§. 91.) CL > CI, weil CIL ein rechter Winkel ist, und L liegt folglich außerhalb des Kreises, da I gerade auf dem Umfange desselben liegt.

255. 77ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 119.) eine durch den Endpunct A des Radius AC gezogne gerade Linie AB mit die-

sem Radius einen Winkel macht, welcher kleiner als ein rechter, ist: so schneidet sie den Kreis oder fällt zum Theil innerhalb desselben.

Beweis. Man ziehe vom Mittelpuncte die auf AB senkrechte Linie CD, so ist AC > CD, (§. 102.) und D liegt folglich innerhalb des Kreises, da A auf dem Umfange liegt.

256. 78ster Lehrsatz. Wenn FG (Fig. 119.) eine Tangente des Kreises ist, so steht die von dem Berührungspuncte E an den Mittelpunct gezogene gerade Linie auf derselben senkrecht; und umgekehrt, wenn man durch den Berührungspunct eine auf die Tangente senkrechte Linie zieht, so geht diese durch den Mittelpunct.

Beweis. Wäre die durch den Mittelpunct und den Berührungspunct gezogne gerade Linie CE nicht senkrecht auf die Tangente, so sey eine andere CH darauf senkrecht; dann Wäre aber CH < EC, (§. 102.) und H läge innerhalb des Kreises, die Linie FG wäre also keine Tangente. Daß aber auch allemal die durch den Berührungspunct E auf FG senkrecht gesetzte Linie durch den Mittelpunct gehe, ist offenbar; denn sonst müßten es zwey durch E gehende auf FG senkrechte Linien geben, indem CE gewiß auch senkrecht auf FG ist.

257. 50ste Aufgabe. An einen gegebenen Punct I einer Kreislinie eine Tangente zu ziehen (Fig. 109.)

Auflösung. Man ziehe nach I den Radius CI und durch den Endpunct I desselben IH senkrecht auf CI (§. 139.), so ist IH die gesuchte Tangente. (§. 254.)

*258. 51ste Aufgabe. Durch einen gegbenen Punct A, welcher außerhalb des Kreises BCD liegt, (Fig. 120.) an die Kreislinie BCD eine Tangente zu ziehn.

Auflösung. Um den Mittelpunct E des Kreises BCD zeichne man mit dem Halbmesser EA den Kreis AFG, der also durch den gegebenen Punct A geht; man ziehe den Halbmesser EA und an C, wo diese den Kreis BCD schneidet, die Tagente CF, (§. 257.) welche den größern Kreis in F schneidet. Von diesem Durchschnittspuncte der Tangente mit dem durch A gehenden Kreise, ziehe man FE an den Mittelpunct, und endlich von A nach H, wo FE den kleinern Kreis schneidet, die Linie AH, so ist AH die verlangte Tangente.

Beweis. Die Dreyecke AHE und FCE sind völlig gleich; denn sie haben den Winkel AEF gemeinschaftlich und AE = FE, HE = CE, als Halbmesser von einerley Kreisen. Da nun das eine Dreyeck bey C einen rechten Winkel hat, indem CF eine Tangente an C ist, so hat auch das andre bey H einen rechten Winkel und AH ist eine Tengente des Kreises BCD (§. 254.)

* 259. Da die Linie CF, wenn man sie über C hinaus verlängert, den durch A gezogenen Kreis noch einmal in I schneidet, so giebt der Radius IE noch einen zweyten Punct K, an welchen man von A aus die Tangente AK ziehen kann. Aber außer diesen Linien AH, AK ist keine andre durch A gehende Tangente an den Kreis BCD möglich.

* 260. Wenn zwey Kreise einander in B (Fig. 30.) oder in A (Fig. 29.) berühren, so haben sie in diesen Puncten eine gemeinschaftliche Tangente; denn die Linie, die durch B oder A auf den Halbmesser des einen senkrecht gezogen ist, steht auch auf dem Halbmesser des andern senkrecht. (§. 66. 68.)

261. Erklärung. Ein Winkel am Mittelpuncte eines Kreises oder ein Centriwinkel ist derjenige, dessen Scheitel in des Kreises Mittelpuncte liegt; ein Winkel am Umfange des Kreises oder ein Peripheriewinkel heißt ein Winkel, dessen Scheitel im Umfange des Kreises und dessen Schenkel sich innerhalb desselben befinden. Beyde Arten von Winkeln stehen auf demjenigen

Kreisbogen, welchen ihre Schenkel zwischen sich abschneiden.

So also ist (Eig. 121.) BCD ein Winkel am Mittelpuncte, BAD ein Winkel am Umfange und beyde stehen auf dem Bogen BD.

262. Erklärung. Ein Winkel im Abschnitt ACDBA (Fig. 123.) ist der Winkel, dessen Scheitel im Umfange des zu diesem Abschnitte gehörigen Bogens liegt, und dessen Schenkel durch die beyden Endpuncte A, B der Sehne des Abschnitts gehen. Es sind also ACB, und ADB Winkel die in einerley Abschnitten liegen.

263. 79ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 121.) der Winkel am Umfange BAD mit dem Winkel am Mittelpuncte BCD auf einerley Kreisbogen BD steht: so ist jener halb so groß als dieser.

Beweis. Erster Fall. Wenn (Fig. 121.) der Mittelpunct des Kreises zwischen den Schenkeln des Winkels am Umfange liegt, so ziehe man den Durchmesser ACE. Dann ist $DCE = CAD + CDA$ (§. 137.) und weil $CD = CA$, auch (§. 85.) $CAD = CDA$, also $DCE = 2 . CAD$ und $EAD = \frac{1}{2} DCE$.

Eben so ist BCE = BAC + CBA = 2 BAE und BAE = $\frac{1}{2}$ BCE, also BAE + EAD = $\frac{1}{2}$ BCE + $\frac{1}{8}$ ECD, oder BAD = $\frac{1}{2}$ BCD.

Zweyter Fall. (Fig. 122.) Liegt der Mittelpunct nicht zwischen den Schenkeln des Winkels BAD, es stehen aber gleichwohl BAD und BCD auf einerley Bogen, so zieht man wieder den Durchmesser AE und erhält durch ähnliche Schlüsse, wie vorhin BCE = 2.BAE, DCE = 2 DAE, DCE — BCE = 2.DAE — 2 BAE oder BCD = 2 BAD.

264. 80ster Lehrsatz. Alle Winkel, welche in einerley Kreisabschnitte liegen, sind gleich, zum Beyspiel ACB = ADB. (Fig. 123.)

Beweis. Zieht man von den Endpuncten A, B der Sehne die Radinen AE, EB, so ist (§. 263.) AEB = 2.ACB = 2.ADB, also ACB = ADB.

265. 81ster Lehrsatz. Der Winkel im Kreisabschitte ist 1. ein rechter Winkel, wenn der Abschitt ein Halbkreis ist; 2. ein spitzer Winkel, wenn der Abschitt, wie

HADEFH, Fig. 124. größer als ein Halbkreis, endlich 3. ein stumpfen Winkel, wenn der Abschnitt, wie HGFH kleiner als ein Halbkreis ist.

Beweis. 1. In Fig. 124. ist ABDE ein Halbkreis, also ABE ein Winkel im Halbkreise. Zieht man hier durch B einen Durchmesser BI, so ist (§. 263.) $ACI = 2 . ABI$ und $ICE = 2 . IBE$, also $ACI + ICE = 2 . ABE$. Da nun $ACI + ICE = 2 R$, so ist $ABE = R$, und weil dies für alle Winkel gilt, deren Scheitel im Umfange liegt und die auf dem Halbkreise stehen, so ist jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel.

2. Im Abschnitt HADEFH, welcher größer als ein Halbkreis ist, hat man $HDF = \frac{1}{2} HCF$, aber $HCF < 2 R$, also $HDF < R$.

3. Wenn hingegen der Abschnitt HGFH kleiner als ein Halbkreis, so ist, wenn man einen Durchmesser GK zieht, $HCK = 2 . HGK$ und $KCF = 2 . KGF$, also $HCK + KCF = 2 HGK + 2 . KGF = 2 . HGF$. Nun aber ist $HCK + KCF > 2 R$, also $HGF > R$.

* 266. 82ster Lehrsatz. In jedem Vierecke ADBF (Fig. 125.) dessen Ecken

alle im Umfange eines Kreises liegen, betragen jede zwey einander gegenüberstehende Winkel zwey rechte, nämlich AFB + ADB = 2R = FAD + FBD.

Beweis. Wenn man durch alle Winkelpuncte Durchmesser AI, BH, DK, FL zieht, so ist (§. 263.) FAD = $\frac{1}{2}$ FCI + $\frac{1}{2}$ ICD und FBD = $\frac{1}{2}$ FCA + $\frac{1}{2}$ ACD; also FAD + FBD = $\frac{1}{2}$ FCI + $\frac{1}{2}$ ICD + $\frac{1}{2}$ DCA + $\frac{1}{2}$ ACF; aber FCI + ICD + DCA + ACF = 4 R, also FAD + FBD = 2R. Und eben so läßt sich der Beweis für AFB + ADB führen.

*267. 83ster Lehrsatz. Wenn ADBF (Fig. 125.) ein Viereck ist, in welchem die Summe jeder zwey gegen einander über stehender Winkel gleich zweyen rechten Winkeln ist: so läßt sich allemal eine Kreislinie ziehen, welche durch alle Winkelpuncte A, D, B, F des Vierecks geht.

Beweis. Man ziehe durch drey Winkelpuncte A, D und B eine Kreislinie, (§. 225.) und nehme an, diese Kreislinie gehe nicht durch F, sondern schneide AF oder ihre Verlängerung in H oder M. Dann würde im ersten Falle ADBH ein Viereck seyn, durch dessen Winkelpuncte die Kreislinie geht, und folglich (§. 266.) AHB + ADB = 2 R. Da nun AHB > AFB (§. 94.), so könnte dann nicht zugleich AFB + ADB = 2R seyn, wie doch vorausgesetzt worden. Eben so wenig kann der Kreis durch M gehen, denn da AFB + ADB = 2 R, so kann nicht AMB + ADB = 2 R seyn. Die Kreislinie schneidet also die Linie AF nicht in H oder M, sondern in F.

* 268. Es erhellet hieraus auch, das sich durch die Winkelpuncte A, D, B, M eines Vierecks keine Kreislinie ziehen läßt, wenn MAB + ABD nicht = 2 R. Denn zieht man alsdann BF so, das FAD + FBD = 2 R, so geht die durch A, D, B gezogne Kreislinie durch F und kann also nicht durch M gehen.

Dieses ist demnach die oben (§. 226.) erwähnte Bestimmung der Lage, welche vier Puncte haben müsse, wenn sich eine Kreislinie durch dieselben soll ziehen lassen, und es erhellt, daß bey fünf Puncten, durch die man eine Kreislinie ziehen soll, diese Bedingung für jede vier, die man zusammen nimmt, gelten müsse.

* 269. 84ster Lehsatz. Wenn an den Endpunct B eines Kreisabschnitts ADB (Fig. 126.) eine Tangente BE nach der Seite hin gezogen wird, wo der Abschnitt, liegt, so beträgt der Winkel im Abschnitt, zusammengenommen mit dem Winkel, welchen die Tangente und Sehne mit einander machen, zwey rechte Winkel ABF+ ADB = 2 R.

Beweis. Man ziehe durch B den Durchmesser BF und von A nach F die Sehne AF, so ist

(§. 265.) FAB = R, also auch (§. 183.) AFB + ABF = R; ferner ist (§. 256.) FBA + ABE = R, also AFB = ABE. Es ist aber AFB + ADB = 2R, weil die Winkelpuncte des Vierecks AFBD alle im Umfange des Kreises liegen, also auch ADB + ABE = 2R.

* 270. 85ster Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD sich innerhalb des Kreises in E schneiden, (Fig. 127.) so ist CEB so groß als die Summe der Peripheriewinkel, die auf den Bogen CB und AD stehen, die zwischen den Schenkeln der gleichen Winkel CEB, AED abgeschnitten werden.

Beweis. Zieht man AC, so ist CEB = CAE + ACE (§. 137.) aber EAC ist ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen BC steh utnd ECA ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen AD steht.

* 271. 86ster Lehrsatz. Wenn die geraden Linien AE, DE, welche die Kreislinien schneiden sich außerhalb des Kreises durchschneiden, so ist der Winkel den sie einschließen AED, gleich dem Unterschiede der Perpheriewinkel, welche auf den zwischen dessen Schenkeln enthaltenen Bögen AD und BC stehen. (Fig. 128.)

Beweis. Zieht man AC, so ist ACD = AEC + CAE, also AEC = ACD — CAE, und ACD, CAE sind Peripheriewinkel, die auf den Bogen stehn, welche zwischen den Schenkeln des Winkels abgeschnitten werden.

* 272. 87ster Lehrsatz. Wenn durch den Punct E außerhalb des Kreises zwey gerade Linien gezogen werden, deren eine den Kreis in B und A schneidet, die andere EF ihn in F berührt: so ist der Winkel, den sie mit einander machen, gleich dem Unterschiede der Peripheriewinkel, welche auf den zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bogen stehen. (Fig. 128.)

Beweis. Es ist nämlich, wenn man AF eht, AFG = AEF + FAE (§. 137.), also AEF = AFG — FAE, aber AFG ist gleich dem auf AF stehenden Peripheriewinkel (§. 269.) also der Lehrsatz erwiesen.

* 273. 88ster Lehrsatz. Wenn EH, EF zwey aus einerley Puncte E an die Kreislinie AHBF gezogne Tangenten sind, so ist der Winkel HEF gleich dem Unterschiede der auf HAF und HBF stehenden Peripheriewinkel. (Fig. 128.)

Der Beweis läßt sich leicht aus dem vorigen ableiten.

Achter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

274. **89ster Lehrsatz.** Wenn (Fig. 129.) im Dreyecke ABC die Linie DE der einen Seite BC parallel gezogen Wird: so sind die abgeschnittenen Stücke EC, DB und auch AE, AD den Seiten selbst proportional, oder AE : AD = AC : AB.

Beweis. Wenn man die Linien CD, BE zieht, so läßt sich beweisen, daß die Flächen der Dreyecke DEB, DEC gleich sind; aber das erste dieser Dreyecke verhält sich zum Dreyecke ADE, wie BD zu AD, das letzte zu demselben Dreyecke wie EC zu AE, daher BD : AD = EC : AE.

Die Dreyecke DEB, DEC sind nämlich deswegen gleich groß, weil sie einerley Grundlinien DE haben und sich zwischen einerley Paralellinien befinden, also gleiche Höhen haben, (§. 169.) Es finden also folgende Proportion zwischen den Flächen der verschiedenen Dreyecke statt: ADE : BDE = ADE : CDE.

Wenn man nun AE, EC als Grundlinie der Dreyecke AED, ECD betrachtet, so haben diese

Dreyecke gleiche Höhe, weil ihre Grundlinien in einerley geraden Linie liegen und ihre Spitzen in D zusammenfallen und ihre Flächen verhalten sich (§. 194.) also wie die Grundlinien
ADE : CDE = AE : CE, und aus eben dem Grunde ADE : BDE = AD : BD, weil die Spitzen in E zusammenfallen, wenn man AD, BD als Grundlinien an sieht. Wegen der Gleichheit der Dreyecke CDE = BDE ist also AE : CE = AD : BD und nach Arithm. §. 170. AE : AE + EC = AD : AD + DB, das ist AE : AC = AD : AB.

275. 90ster Lehrsatz. Wenn die Seiten eines Dreyeckes ABC (Fig. 129.) von der geraden Linie DE so geschnitten werden, daß AD : AB = AE : AC, so ist DE der dritten Seite BC parallel.

Beweis. Aus der Proportion AD : AB = AE : AC folgt (Arithm. §. 171.) AD : AB — AD = AE : AC — AE, oder AD : BD = AE : EC. Wenn man nun DC, BE zieht, so verhalten sich aus dem im vorigen §. erörterten Gründen ADE : BDE = AD : BD,
ADE : CDE = AE : CE.
Weil nun AD : BD = AE : EC seyn soll, so ist auch ADE : BDE = ADE : CDE, folglich BDE

= CDE. Diese Dreyecke stehen beyde über der Grundlinie DE, und da sie gleich groß seyn sollen: so müssen ihre Höhen gleich seyn, oder ihre Spitzen in einer Linie BC liegen, die mit BC parallel ist. (§. 169.)

276. 52ste Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB (Fig. 130.) in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. An dem einen Endpunct der Linie AB ziehe man willkührlich die gerade Linie Af und schneide darauf gleiche Stücke von willkührlicher Größe Aa = ab = bc = cd u. s. w. und zwar eben so viele ab, als man Theile in AB zu haben verlangt. Von dem letzten Theilungspunct f ziehe man nach B die Linie fB, und ziehe dann durch alle übrigen Theilungspuncte gerade Linien mit fB parallel: so schneiden diese auf AB gleiche Theile Ag = gh = hi u. s. w. ab, und da die Anzahl dieser Theile so groß ist, als verlangt ward, so ist die gesuchte Eintheilung geschehen.

Beweis. Da ga parallel ist mit fB, so ist Aa : Af = Ag : AB; ist also Aa = $\frac{1}{5}$ Af, so ist auch Ag = $\frac{1}{5}$ AB und so Ah = $\frac{2}{5}$ AB, wenn Ab = $\frac{2}{5}$ Af u. s. w.

277. Sollte man AB in zwey Stücke theilen, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben: so würde man auf Af Stücke wie Ab, bf so nehmen, daß sie sich wie die gegebenen Zahlen oder Linien verhielten, und durch eine mit fB parallelen Linie bh die Linie AB in die verlangten Stücke eintheilen.

278. 53ste Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien A, B, C die vierte Proportionallinie zu finden, daß nämlich A : B = C : der gesuchten Linie sey. (Fig. 131.)

Auflösung. Man nehme auf einer willkührlich gezogenen geraden Linien DE, das Stück DF = A und FG = B, ziehe durch D eine zweyte willkührlich Linie, und nehme auf derselben DI = C, dann ziehe man IF und mit derselben durch G, GK parallele, so ist IK die gesuchte vierte Proportionallinie; denn es ist (§. 274.) DF : FG = DI : IK.

Anmerkung. So könnte man auch zu zwey Linien A, B die dritte Proportionallinie finden, wenn mann DI = FG = B nähme, dann wäre DF : FG = FG : IK.

279. Erklärung. Gradlinigte Figuren sind einander ähnlich, wen bey einer gleichen An-

zahl von Seiten alle Winkel der einen den Winkeln der andern nach der Ordnung gleich sind, das also Fig. 132. in den beyden Figuren A = a, B = b, C = c, D = d; und wenn ferner die Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen alle einerley Verhältniß zu einander haben, nämlich AB : ab = BC : bc = CD : cd = DA : da.

Die Aehnlichkeit besteht also darin, daß die Figuren in der Gestalt übereinstimmen, und bloß vielleicht an größe verschieden sind. — Ein Beyspiel solcher ähnlicher Figuren geben (Fig. 129.) die Dreyecke ABC, ADE.

280. Figuren die einander decken sind allemal einander ähnlich, dabey aber noch einander gleich; Figuren die zwar an Fläche gleich sind, aber sich nicht decken, wie die Parallelogramme ABDC, ABFE (Fig. 82.) sind einander unähnlich.

281. Erklärung. Die Seiten, welche in ähnlichen Figuren zwischen den in den verschiedenen Figuren sich gleichen Winkeln liegen, wie AB und ab in Fig. 132. nennt man ähnlich liegende, auch wohl gleichnamige Seiten.

282. Willkührlicher Satz. Man gebraucht zur Bezeichnung der Aehnlichkeit der Figuren das zeichen ∽, also ist ABCD ∽ abcd. Wenn

die Figuren nicht bloß ähnlich sind, sondern auch gleich: so drückt man dies durch $\underline{\underline{\backsim}}$ aus.

283. 91ster Lehrsatz. Wenn eine Figur ABCD, den beyden andern abcd, efgh ähnlich ist, so sind auch diese beyden Figuren unter sich einander ähnlich.

Beweis. Wegen der Aehnlichkeit sind die Winkel nach der Ordnung gleich, $A = a$, $A = e$, $B = b$, $B = f$, $C = c$, $C = g$, $D = d$, $D = h$, also $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$. und für die Seiten finden, weil ABCD beyden Figuren ähnlich ist, folgende Proportionen statt:

$$AB:ab = BC:bc = CD:cd = DA:da,$$
$$AB:ef = BC:fg = CD:gh = DA:he,$$

und hieraus folgt (Arithm. §. 177.)

$ab : ef = bc : fg = cd : gh = da : he$ und die Aehnlichkeit der Figuren abcd und efgh ist also erwiesen.

284. 92ster Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc (Fig. 133.) die Winkel nach der Ordnung in dem einen so groß sind, als in dem andern, $A = a$, $B = b$,

$C = c$: so sind die Dreyecke ähnlich, nämlich auch die ähnlich liegenden Seiten einander proportional, $AB : ab = BC : bc = AC : ac$.

Beweis. Man nehme in dem größern Dreyecke auf der Seite AB das Stück $AD = ab$, gleich der in abc ähnlich mit AB liegenden Seite und ziehe DE mit BC parallel: so ist (§. 104.) $ADB \cong abc$, weil der Winkel $ADE = ABC = abc$. Eben so nehme man $CG = cb$ und ziehe GF mit BA parallel, so ist das Dreyeck $FGC \cong abc$. Aber nach §. 274. hat man
$AD : AB = AE : AC =$ oder $ab : AB = ac : AC$ und
$CG : CB = CF : AC$ oder $bc : BC = ac : AC$.

285. Wäre auch nur bekannt, daß $A = a$ und $B = b$, so wäre damit die Aehnlichkeit der beyden Dreyecke schon bestimmt, weil dann gewiß auch $C = c$ ist, (§. 137.)

286. 93ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 133.) in den Dreyecken ABC, abc die Seiten nach der Ordnung einerley Verhältniß zu einander haben, $AB : ab = BC : bc = AC : ac$: so sind die Dreyecke ähnlich, näm-

sich auch die Winkel gleich, welche den einander proportionalen Seiten gegenüberstehn.

Beweis. Nimmt man auf den Seiten des größern Dreyecks AD = ab und AE = ac, und zieht DE: so ist nach der Voraussetzung AD : AB = AE : AC und folglich (§. 275.) DE mit BC parallel. Eben so, wenn man auf BC, CG = cb und auf CA, CF = ca nimmt und FG zieht: so ist CG : CB = CF : CA und FG mit AB parallel. In den Dreyecken ADE, FGC sind daher (§. 129.) die Winkel DAE = GFC und DEA = GCF und diese Dreyecke einander gleich, (§. 104) folglich DE = GC = bc und das Dreyeck ADE = abc. Da nun ADE mit ABC gleiche Winkel hat: so ist dies auch mit abc der Fall und abc ∽ ABC.

287. 94ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 133.) in zwey Dreyecken ABC, abc die Winkel A = a und die anliegenden Seiten in dem einen eben das Verhältniß zu einander haben, wie in dem andern, AB : AC = ba : ac, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Beweis. Man nehme AD = ab, AE = ac, so ist das Dreyeck ADE = abc; es ist aber auch DE mit BC parallel (§. 275.), weil AD : AB = AE : AC, folglich ist AED = c = C, ADE = b = B und sind also (§. 284.) die Dreyecke ABC, abc einander ähnlich.

*288. 95ster Lehrsatz. Wenn in den Dreyecken ABC, abc ein Winkel C = c, und die eine an diesem Winkel anliegende Seite zu der ihm gegenüberstehenden im einen Dreyecke eben das Verhältniß hat, wie im andern, BC : AB = bc : ab: so sind die Dreyecke wenigstens dann gewiß einander ähnlich, wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite größer als die anliegende, AB > BC ist.

Beweis. Man nehme auf BC, CG = bc und ziehe GF mit BA parallel: so ist CGF ∽ CBA (§. 284.) und folglich GF : GC = AB : BC = ab : bc, folglich weil CG = bc, GF : bc = ab : bc, also GF = ab. Wenn aber GF = ab und CG = bc, und C = c, so ist das Dreyeck CGF wenigstens dann dem cba gleich, wenn ab > bc (§. 107.), und in diesem Falle ist also auch gewiß ABC ∽ abc.

289. 96ster Lehrsatz. Wenn man (Fig. 134.) in einem rechtwinklichten Dreyecke ABC aus der Spitze B des rechten Winkels eine Linie BD senkrecht auf die Hy-

potenuse zieht: so theilt diese 1. das Dreyeck in zwey unter sich und auch dem Ganzen ähnliche Dreyecke, und 2. theilt sie die Hypotenuse so, daß die Senkrechte BD die mittlere Proportionallinie zwischen den Winkeln AD, CD der Grundlinie ist.

Beweis. Da ABC bey B rechtwinklicht ist, so ist die Summe der beyden übrigen Winkel $C + A = R$, und aus eben dem Grunde $DBC + C = R = DBA + A$, also $DBC = A$ und $DBA = C$. Die Dreyecke ABC, ADB, BDC sind also ähnlich, weil die Winkel in dem einen so groß als im andern sind. Aus dieser Aehnlichkeit folgt denn die Proportionalität der ähnlich liegenden Seiten, nämlich wenn man die Dreyecke ADB, DBC vergleicht, $AD : BD = BD : DC$; also ist BD die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken der Hypotenuse.

* 290. Dieser letztere Satz hätte sich auch aus §. 177. und 181. herleiten lassen, denn nach denselben ist
$AB^2 + BC^2 = AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD.DC$,
aber $AB^2 = AD^2 + DB^2$ und $BC^2 = DC^2 + BD^2$,
also $2\,BD^2 = 2\,.\,AD\,.\,DC\,.\,BD^2 = AD\,.\,DC$.
Da sich nun die Höhe gleichgroßer Rechtecke umgekehrt wie ihre Grundlinien verhalten, (§. 208. b): so ist $AD : BD = BD : DC$. Eben das erhellt

aus Arithm. §. 159. weil man doch immer die Verhältnisse der Linien als in Zahlen ausgedrückt betrachten kann.

* 291. 97ster Lehrsatz. Wenn sich zwey gerade Linien CD, AB (Fig. 127.) innerhalb des Kreises durchschneiden, so verhalten sich die von der Kreislinie abgeschnittenen Stücke, die an einer Seite des Durchschnittspuncts liegen, umgekehrt wie die an der andern Seite desselben liegenden Stücke derselben Linien, nämlich CE : AE = EB : ED.

Beweis. Zieht man AC und BD, so sind die Dreyecke ACE, DBE ähnlich wegen der Gleichheit ihrer Winkel. Es ist nämlich AEC = DEB, weil es Scheitelwinkel sind, und CAE = BDE, ACE = DBE, weil sie Peripheriewinkeln sind, und auf einerley Kreisbogen stehn, (§. 263.); es sind also die Seiten in einerley Verhältniß, welche den gleichen Winkeln gegenüberstehn, das ist, CE : AE = BE : ED.

* 292. 98ster Lehrsatz. Wenn zwey geraden Linien EA, ED sich einander in E und eine Kreislinie A in A, B, C, D schneiden (Fig. 128.): so werden sie, wenn E außerhalb des Kreises liegt, von der Kreislinie so geschnitten, daß die Stücke, die zwischen E und dem ersten Durchschnitte mit der Kreislinie liegen, sich umgekehrt verhalten, wie die zwischen E und dem zweyten Durchschnitte

liegenden Stücke nämlich EB : EC = ED : EA.

Beweis. Zieht man BC, AD, so sind die Dreyecke EBC, EDA einander ähnlich wegen der respectiven Gleichheit der Winkel. Denn E ist ein beyden Dreyecken gemeinschaftlicher Winkel, BCE ist = 2R — BCD = BAD, und CBE = 2R — CBA = CDA Es stehen nämlich BCD und BAD, und so auch CBA und CDA als Periphewinkel auf Kreisbogen, die zusammen den ganzen Kreis betragen, die zugehörigen Centriwinkel betragen also zusammen 4 R und mithin diese Peripheriewinkel, jede zwey zusammen, zwey rechte Winkel. (§. 266.) Man hat also innerhalb der Dreyecke C = A, B = D und daher EC : EB = EA : ED.

*293. 99ster Lehrsatz. Wenn von zwey Linien, welche sich in E außerhalb des Kreises HBD schneiden (Fig. 128.), die eine den Kreis in H berührt, die andre ihn in B und A schneidet: so ist EH die mittlere Proportionallinie zwischen EB und EA.

Beweis. Die Linien BH, AH machen ähnliche Dreyecke, EHB, EAH; denn es ist EBH = 2R — ABH = AHE. (§. 269.) und EHB = EAH, weil beyde letztere den Winkel im Abschnitt BH zu 2R ergänzen, oder mit ihm 2R betragen. Demnach ist EB : EH = EH : EA.

294. 54ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Linien E, F (Fig. 135.) eine mittlere Proportionallinie zu bestimmen.

Erste Auflösung. Auf einer geraden Linie nehme man die Stücke AD = F, DC = E, halbire die Summe beyder oder AC in G, und ziehe um G mit dem Halbmesser GC einen Halbkreis. Dann errichte man im Theilungspuncte D eine auf AC senkrechte Linie BD: das Stück BD, welches die Kreislinie auf dieser abschneidet, ist die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Beweis. Zieht man AB, BC so ist ABC ein rechtwinklichtes Dreyeck (§. 265.) und folglich gilt der ganze Beweis des §. 289.

* zweyte Auflösung. Man nehme (Fig. 128.) auf der geraden Linie EA, EB gleich der einen, EA gleich der andern der gegebnen Linien; ziehe eine Kreislinie, welche EA in A und B schneidet und aus E an dieselbe eine Tangente EH (§. 258.): diese Tangente EH ist die gesuchte mittlere Proportionallinie (§. 293.)

* 295. Erklärung. Eine Linie oder eine Zahl in stetige Proportion theilen, heißt sie so theilen, daß der kleinere Theil sich zum größern verhalte, wie der größere zum Ganzen, daß nämlich, wenn AB (Fig. 136.) in F in stetige Proportion getheilt ist, BF : AF = AF : AB sey.

* 296. 55ste Aufgabe. Eine gegebene Linien AB (Fig. 136.) in stetiger Proportion zu theilen.

Auflösung. Im Endpuncte B derselbe errichte man BC senkrecht und nehme BC $= \frac{1}{2}$ BA. Um C beschreibe man mit dem Halbmesser BC einen Kreis, den folglich (§. 254.) AB in B berührt; ziehe durch A und C die gerade Linie AD: so ist, wenn man AF $=$ AE nimmt, die Linie in F stetig getheilt.

Beweis. Es ist AE : AB $=$ AB : AD, (§. 293.) aber AB $=$ 2 . BC $=$ DE, also AE : AB $=$ AB : AE $+$ AB; folglich (Arithm. §. 171.) auch AB $-$ AE : AE $=$ AE $+$ AB $-$ AB : AB, das ist AB $-$ AE : AE $=$ AE : AB,
oder BF : AF $=$ AF : AB.

* 297. Nach den Regeln der Algebra findet man, daß wenn eine Linie oder Zahl $=$ a in stetigem Verhältniß getheilt werden soll, der eine Theil $= a. \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{0{,}764.a}{2} = 0{,}282.a$; und der andre $=$ 0,618 . a wird.

298. 56ste Aufgabe. Eine Figur zu zeichnen, welche der gradlinigten Figur ABCDE ähnlich, und an welcher die mit AB ähnlich liegende Seite einer gegebenen Linie F gleich sey. (Fig. 137.)

Auflösung. Man theile die gegebene Figur ABCDE in Dreyecke ABE, EBD, DBC; suche dann zu AB, F und AE, und auch zu AB, F und BE die vierte Proportionallinie; und bilde aus ab = F, ae = der ersten und be = der zweyten jener Proportionallinien des Dreyecks abe, welches (§. 286.) dem ABE ähnlich seyn wird, weil AB : ab = AE : ae = BE : be. Eben so bestimme man die Linien bd, ed so, daß AB : ab = BD : bd = ED : ed sey, und zeichne an eb ein Dreyeck dessen rechtes liegende Seite = bd, die links liegende = ed sey. Und so fahre man fort die ähnlichen Dreyecke ähnlich liegend aneinander zu fügen, so erhält man die ähnliche Figur abcde.

Beweis. Nach der Construction sind die ähnlich liegenden Seiten in einerley Verhältnisse AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae; aber auch die Winkel sind gleich. Denn da die einzelnen Dreyecke ähnlich sind: so ist der Winkel ABE = abe, EBD = ebd, DBC = dbc, also ABC = abc, und so läßt sich auch die Gleichheit der übrigen Winkel beweisen.

299. Man hätte statt der Diagonalen auch eine andre Eintheilung in Dreyecke annehmen können wie Fig. 138. bey der Figur GHIKLMN, wo O in der Seite MN liegt; und auch dann

kann man eine dieser ähnliche Figur zeichnen, wenn man Dreyecke, die den einzelnen Dreyecken GNO, GOH, HOL, LOM, HLI, ILK ähnlich sind, auf ähnliche Weise aneinander fügt. Hieraus erhellt dann allgemein, daß Figuren, die aus ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecken zusammengesetz sind, ähnliche Figuren sind.

300. 100ster Lehrsatz. In ähnlichen gradlinigten Figuren sind die ähnlich liegenden Dreyecke ähnliche Dreyecke.

Beweis. Wenn (Fig. 137.) ABCDE und abcde ähnliche Figuren sind, so ist EAB = eab, und AB : ab = AE : ae, dann aber ist auch (§. 287.), AB : ab = EB : eb, und BEA = bea, also auch BED = bed, weil wegen der Aehnlichkeit der ganzen Figuren der Winkel AED = aed. So läßt sich also die Aehnlichkeit der Dreyecke AEB, aeb, der Dreyecken EBD, ebd und so aller folgenden beweisen.

Auch wenn die Figuren anders, so wie Fig. 138., eingetheilt wären, so findet noch eben das statt; aber damit die Dreyecke wirklich ähnlich liegende seyn mögen, so müssen O und o ähnlich liegende Puncte seyn, das ist, es muß ON : on = OM : om = GN : gn seyn. Dann läßt sich beweisen, daß GON, gon ähnliche Dreyecke sind und daraus die Ähnlichkeit der Dreyecke GOH, goh und aller übrigen beweisen.

301. 101ster Lehrsatz. Die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander wie die ähnlich liegenden Seiten, oder wie die ähnlich liegenden Diagonalen dieser Figuren.

Beweis. Wenn (Fig. 137.) $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$, so ist auch $AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab$, (Arithm. §. 174.) Da nun auch die ähnlich liegenden Diagonalen eben das Verhältniß haben, wie die ähnlich liegenden Seiten: so erhellt, daß der Umfang der ersten Figur sich zum Umfang der zweyten Figur auch verhält, wie $BE : be = BD : bd$.

302. 102ter Lehrsatz. Wenn in zwey ähnlichen Dreyecken ABC, abc (Fig. 139.) ähnlich liegende Seiten als Grundlinien angenommen werden: so stehen die Höhen dieser Dreyecke in eben dem Verhältnisse zu einander, wie die ähnlich liegenden Seiten.

Beweis. Nimmt man die gleichnamigen Seiten AC, ac als Grundlinien an, und zieht aus dem entgegengesetzten Winkel B, b, die senkrechten Linien BD, bd auf AC und ac: so ist das Dreyeck ADB ∽ adb, weil beyde bey D, d rechtwinklicht sind, und den Winkel BAD = bad, also auch ABD = abd haben; es ist also BD : bd = AB : ab = AC : ac, oder die Höhen BD, bd den gleichnamigen Seiten proportional.

303. 103ter Lehrsatz. Der Flächen-Inhalt ähnlicher Dreyecke, und überhaupt aller ähnlicher gradlinigter Figuren, verhält sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten, daß nämlich (Fig. 137.), Fläche ABCDE : Fläche abcde = $AB^2 : ab^2$.

Beweis. Die Flächen der Dreyecke ABC und abc (Fig. 139.) verhalten sich wie die Producte aus der Grundlinie und Höhe eines jeden, (§. 198.), also ABC : abc = AC . BD : ac . bd, da aber AC : ac = BD : bd, (§. 302.) so ist auch AC . BD : ac . bd = AC . AC : ac . ac = $AC^2 : ac^2$; also verhalten sich die Flächen ähnlicher Dreyecke, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Wenn aber (Fig. 137.) ABE : abe = AB^2 : ab^2, und EBD : ebd = DBC : dbc = AB^2 : ab^2, so ist auch (Arithm. §. 174.) ABE + EBD + DBC : abe + ebd + dbc = AB^2 : ab^2.

304. Diese Lehren dienen dem wichtigsten Theile der Feldmeßkunst, nämlich der Zeichnung von Charten und Grundrissen zur Grundlage. Wenn man nämlich ein Grundstück oder auch eine größere Gegend oder ganze Provinz in eine Charte bringen soll: so heißt das nichts anders, als man soll auf dem Papiere eine Figur zeichnen, die der auf dem Felde gemessenen ähnlich ist; denn man kann alle aufzutragenden Puncte durch gerade Linien verbinden, und so die ganze Gegend in Dreyecke theilen, wodurch dann die Charte gleichfalls in eine Reihe von Dreyecken getheilt wird, die jenen ähnlich sind.

305. 57ste Aufgabe. Einen genauen Maßstab zu Abmessung gerader Linien auf dem Papiere zu zeichnen.

Auflösung. Wenn die gegebene Linie ab (Fig. 140.) in fünfhundert gleiche Theile getheilt werden sollte: so würde dies unmittelbar wegen der Kleinheit Theile nicht wohl angehn. Man theile daher die Linie ab zuerst nur in fünf gleiche Theile ac = cd = de = ef = fb und ziehe durch die Puncte a, c, d, e, f, b Linien auf ab senkrecht. Den am einem Ende liegenden Theil ac theile man in 10 gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspuncte wieder Linien auf ab senkrecht. Auf einer dieser senkrechten Linien ag nehme man zehn willkührliche, aber gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspuncte Linien, wie 2.2; 4.4; 6.6; 8.8; g.10 mit ab parallel. Da nun die auf ac senkrecht gezogenen Theilungslinien auf gh eben solche Stücke abschneiden, wie auf ac, so ziehe man zwischen dem ersten Theilungspuncte auf ac und dem zweyten auf gh eine gerade Linie, und so zwischen dem zweyten auf ac und dem dritten auf gh und so weiter. Auf diese Weise erhält man eine Eintheilung der Linie ab in 500 Theile.

Es ist nämlich einleuchtend, daß die Diagonale gk auf der ersten mit gh parallelen Linie $\frac{1}{10}$ ak abschneidet, auf der zweyte parallelen $\frac{2}{10}$ ak, auf der dritten $\frac{3}{10}$ ak u. s. w. und diese Zehntel sind Fünfhunderttel von ab.

Gebrauch dieses Maßstabes. Soll man eine Linie auftragen, die genau z. B. 347. Theilen des Maßstabes gleich ist: so setzt man den einen Fuß des Zirkels auf die durch f senkrecht gezogne Linie, weil cf = 300 Theilen; setzt diesen Zirkelfuß auf der siebenten mit ab parallelen Linien, von unten her gerechnet, fest, und öfnet den Zirkel, bis er auf dieser Parallellinie, die vom vierten zum fünften Theilungsstriche gezogne Diagonale erreicht. Dann sind die Zirkelspitzen genau 347 Theile des Maßstabes von einander entfernt.

Denn fc = 300; c.4. = 40, und der Abstand der Dieagonale auf dem siebten Theilstriche von der senkrechten = 7.

Wenn man eine auf dem Papier vorgezeichnete Linie abmessen soll: so faßt man die länge der Linie zwischen den Spitzen des Zirkels und versucht zuerst ungefähr zwischen welche Hunderte diese Länge fallen. Für die Linie AB (Fig. 140.) würde man z. B. finden, daß sie zwischen 200 und 300 Theile betrage. Man setzt dann den einen Zirkelfuß auf einen der Puncte d, e, f, b, und zwar auf denjenigen, wo er stehen muß, damit der andre zwischen a und c zu stehen komme, (bey der Abmessung von AB setzt man ihn in e) und giebt Acht, wo der andre Zirkelfuß in ac trifft, (in diesem Beyspiel zwischen 50 und 60). Trifft nun der andre Zirkelfuß nicht genau auf einen Theilungspunct in ac, so rückt man den Zirkel, indem der eine Fuß immer auf der durch e gezogenen Senkrechten bleibt, von einer Parallele zur andern fort, (hier bis zur vierten) bis der andre Firkelfuß auf derselben Parallelle, wo jener steht, die Diagonale erreicht; geschieht dieses z. B. auf der vierten so kommen zu den auf ba abzulesenden größern

Theilen noch vier kleinere hinzu, (und man findet AB = 254 Theile.)

306. 58ste Aufgabe. Die Entfernung AB zweyer Gegenstände auf dem Felde zu bestimmen, wenn man sie nicht unmittelbar messen kann.

Erste Auflösung. Mit Hülfe des Meßtisches und zwar erstlich aus einem einzigen Standpuncte. (Fig. 141.) Man stelle den Meßtisch über den Standpunct C und zeichne darauf den Winkel aCb = ACB. Dann zeichne man sich einen solchen Maßstab, wie im vorigen §. gelehrt ist und setze fest, was für Größen auf dem Felde durch Theile wie ak sollen angedeutet werden z. B. daß ak = 10 Ruthen bedeuten soll.

Kann man nun von C nach A und B hinmessen, so nimmt man auf dem Meßtische die Linien Ca, Cb nach dem Maaße des sogenannten verjüngten Maßstabes (Fig. 140.) so lang, als CA, BC in der Würklichkeit sind, z. B. Ca = 30 Theilen des Maßstabes, wenn CA = 30 Ruthen; dann enthält ab so viele Theile des Maßstabes als AB zehn Ruthen enthält; wenn also ab = 40, so ist AB = 40 Ruthen.

Kann man von C nicht nach A kommen, so kann man zwar Cb nach dem verjüngten Maßstabe bestimman, aber nicht Ca. Man nehme nun einen Punct D, wohin man von C messen kann, willkühr=lich an und bemerke einen Punct F, der in der geraden Linie AD liegt, und wohin man auch von C aus hinmesseu kann; zeichne die Winkel aCd = ACD und aCf = ACF auf den Meßtisch, trage Cd und Cf nach dem verjüngten Maßstabe gehörig auf, (daß nämlich Cd, Cf so viel Ruthen des verjüngten Maßstabes enthalten, als CD, CF wirklich Ruthen,) und ziehe durch df eine gerade Linie: wo diese Ca schneidet, in a, da wird a in der Zeichnung liegen, weil das Dreyeck adC mit dem Dreyecke ADC die Winkel aCd = ACD, adC = ADC hat und folglich aCd ∽ ACD und CD: CB = CA: Ca. Es ist aber adC = ADC, weil fCd = FCD und fC: FC = dC: DC.

Eben so könnte man auch b in der Zeichnung bestimmen, wenn man nicht von C nach B hinmessen könnte.

Zweytes. Mit Hülfe des Meßtisches aus zwey Standpuncten die Entfernung AB zu messen. (Fig. 142.)

Man wähle zwey Standpuncte C und D, zwischen denen man die Linie CD messen kann und von welchen man nach A und B hinsehen kann.

Man stelle den Meßtisch in C, ziehe eine nach D gerichtete Linie Cd, und zeichne daran die Winkel dCa = DCA, dCb = DCB. Alsdann bringe man den Meßtisch nach D, nehme cD nach dem verjüngten Maßstabe so groß wie CD nach wirklichem Maße ist; stelle D über den zweyten Standpunct und richte Dc, welche DC vorstellt, genau nach C. An DC zeichne man die Winkel aDc = ADC, bDc = BDC: so wird die von C aus nach B gerichtete Linie cb die Db irgendwo schneiden und so auch die ca die Da, und so werden die Puncte a, b auf dem Meßtische so bestimmt, daß ab nach dem verjüngten Maßstab eben so viel beträgt, als AB nach wirklichem Maße.

Man kann nämlich leicht beweisen, daß Dreyeck aDc ∽ ADC, abD ∽ ABD und so weiter.

Zweyte Auflösung. Mit Hülfe des Winkelmessers. Da man in diesem Falle die Winkel in Graden ausgedrückt erhält, so unterscheidet diese Methode sich dadurch, daß man die Winkel, die vorhin sogleich fertig gezeichnet waren, nun erst nachher aufträgt: die gemessenen Linien aber eben so nach dem verjüngten Maßstabe zeichnet und die zu bestimmenden Linien, wie ab, nach demselben abmißt.

307. 59ste Aufgabe. Die senkrechte Höhe eines Punctes A über einem andern B zu bestimmen.

Auflösung. Erster Fall, wenn man von einem angenommenen Standpuncte C horizontal bis an D messen kann. Wenn der Winkelmesser nicht so niedrig gestellt werden kann, daß er mit B genau gleich hoch liegt: so stelle man ihn über C vertical, das ist, senkrecht gegen die Erdfläche auf; richte seine Ebne nach dem Gegenstand AB; stelle die nach dem Nullpunct gerichtete Linie genau horizontal und drehe das Lineal bis es nach cA gerichtet ist. *) Dann hat man den Winkel DcA in Graden, ADc ist ein rechter Winkel; wenn man also cD = CB mißt, so kann man ein Dreyeck zeichnen, welches ABc ähnlich ist, darauf die Linie, welche AD gleichnamig ist, abmessen, und daraus AB so wie in der vorigen Aufgabe bestimmen. Endlich addirt man CC = DB hinzu, so hat man AB.

Zweyter Fall. Kann man nicht bis an den Fuß B der Höhe hinmessen, aber

*) Die Linie co, oder o.180 stellt man horizontal, wenn man den Winkelmesser so richtet, daß ein genau bey 90° eingehängtes Loth, sich über dem Mittelpunct und dem Theilstrich von 270° anlegt.

diesen doch sehn, so muß man zwey Standpuncte C, E auf der Erdfläche annehmen, über denen man das Instrument aufstellt. Man bringe es zuerst in E oder e, stelle das Instrument horizontal und messe den Winkel ceD, es wird nämlich vorausgesetzt, daß man sich Puncte D, c gleich hoch mit e bemerkt habe. Auf ganz ähnliche Art stelle man das Instrument in c auf und messe, indem man den Nullpunct nach e und das Lineal nach D richtet, den Winkel Dce; fernet aber messe man aus C nach dem Winkel AcD, dessen eine Seite eD horizontal ist, so wie beym ersten Falle. Endlich messe man die Entfernung CE = ce. Aus diesen Stücken kann man erstlich ein Dreyeck dem horizontalen Dce ähnlich zeichnen, worin alle Seiten sich zu den ähnlich liegenden Seiten von Dce verhalten, wie die auf dem Papiere für ce angenommene Länge zu ce selbst. So also bestimmt man, wenn ce nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen ist, mit Hülfe eben dieses Maßes cD in wahrem Maße und kann nun nach Anleitung des ersten Falles verfahren.

* Dritter Fall. Wenn man nicht bloß nach B nicht hinmessen, sondern B oder D auch nicht sehen könnte, wie bey schief abhängigen Bergen der Fall ist: so muß man für Ace ein ähnliches Dreyeck zu zeichnen suchen. Man erhält dieses, wenn man zuerst in e das In-

strument so zu stellen sucht, daß man bey verschiedenen Stellungen des Lineals, ohne die Lage des Kreises selbst zu ändern, nach c und auch nach A sehen kann, dann den Nullpunct nach c richtet, das Lineal nach A dreht und dem Winkel Aec mißt. Eben so verfährt man in c mit Messung des Winkels Ace, und mißt hier zugleich AcD. Ist dann ce gemessen und nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen: so bestimmt man leicht die wahre Größe von cA. Dann aber kann man aus dem rechten Winkel, dem Winkel AcD und der Seite Ac ein Dreyeck dem AcD ähnlich zeichnen und AD bestimmen. (§. 144. 298.)

* 307. b. Der letzte Fall kommt auch da vor, wo man Dc nicht einmal ungefähr bestimmen kann, z. B. wenn Beobachter in c und e ein Meteor, eine Feuerkugel u. dgl. oder auch nur eine merkwürdige Wolke u. s. w. gesehn haben. Dann hat freylich die Abmessung der Winkel weit mehrere Schwierigkeiten, zumal da in solchen Fällen CE oft sehr groß genommen werden muß. Aber es erhellt doch schon hieraus die Möglichkeit, auch die Höhe solcher Metore zu bestimmen; ja man kann sich sogar eine oberflächliche Vorstellung von der Art machen, wie man die Entfernung des Mondes oder andrer Himmelskörper von uns bestimmen könnte, wenn es möglich wäre für CE eine überaus große Entfernung anzunehmen.

308. 60ste Aufgabe. Von einem Felde oder ganzen Gegend eine Charte zu verfertigen.

Man kann dieses auf mancherley Weise bewerkstelligen.

Erste Auflösung, bloß mit der Kette. Man theilt, wie Fig. 144. das ganze Feld in Dreyecke und zeichnet aus allen gemessenen Seiten und Diagonalen eine ähnliche Figur nach dem verjüngten Maßstabe (§. 298.). Liegen Puncte a, b, c innerhalb des Feldes, die man mit auftragen will: so muß man sie durch Dreyecke, wie ade, mit den schon aufgetragenen Linien in Verbindung bringen, alle Seiten messen und daraus ein ähnliches, ähnlich liegendes Dreyeck in der Charte zeichnen, wodurch dann a bestimmt wird.

Zweyte Auflösung. Mit dem Meßtische und zwar aus Einem Standpuncte. (Fig. 145.) Man trage die aus diesem Standpuncte C nach allen Eckpuncten oder andern merkwürdigen Puncten gehenden Linien CA, CB auf den Meßtisch, oder zeichne auf demselben die Winkel ACB, BCD gehörig auf, messe dann die Linien CA, CB, CD und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe auf Ca, Cb, Cd; so sind die Puncte A, B, D, gehörig in der Charte gezeichnet, (§. 287.) und man kann so die ganze Charte vollenden.

Mit dem Meßtisch aus zwey Standpuncten. Man wählt sich (Fig. 142.) zwey

Standpuncte C, D und mißt ihre Entfernung CD, welche nun die Standlinie heißt. Diese muß so gewählt werden, daß sie in Vergleichung mit der Entfernung der zu bestimmenden Puncte A, B, eine passende Länge, auch eine solche Lage hat, daß die Winkel der Dreyecke ACD, BCD nicht zu spitz oder zu stumpf werden. Man zeichnet dann jeden Punct, den man von dieser Standlinie aus eintragen kann, nach denselben Regeln, wie §. 306. in die Charte und erhält so eine Abzeichnung aller dieser Puncte. Ist die abzuzeichnende Gegend sehr groß, oder liegen nicht alle einzutragende Puncte so, daß man sie von der einen Standlinie aus gut eintragen kann: so muß man mehrere Standlinien annehmen, wozu man z. B., DA als zweyte wählen könnte, wenn an der linken Seite von DA die Charte sich weiter erstrecken sollte, oder auch AB, wenn jenseits AB noch einzutragende Puncte lägen.

Dritte Auflösung. Mit dem Winkelmesser. Man bedient sich des Winkelmessers vorzüglich bey sehr großen, weitläuftigen Messungen. Bey diesen nämlich, z. B. wenn von einer ganzen Provinz eine Charte gezeichnet werden soll, müssen die Hauptpuncte mit großer Genauigkeit bestimmt werden, weil man die einmal durch Winkelmessung bestimmten Puncte wieder als Standpuncte anzunehmen pflegt. Man mißt dann gewöhnlich nur eine einzige Standlinie von ansehnlicher Größe unmittelbar mit Meßstäben; bestimmt von ihren Endpuncten aus die Winkel CDA, DCA für jeden Punct A, berechnet aber dann nach Regeln der Trigonometrie die Seiten CA, CD. Hiedurch ist dann der Punct A so genau bestimmt, daß man wenn es nöthig ist DA wieder als Standlinie annehmen und so die Operationen fortsetzen kann. Diese Arbeit erfordert in solchen Fällen eine Sorgfalt und Vorsichtsmaßregeln, wozu sich hier keine Anleitung geben läßt. Wie man krumme Linien theils durch einzelne in denselben bestimmte Puncte, theils nach Augenmaß einzeichnet, muß ich hier nebst vielen andern Dingen übergehn.

309. Zur vollständigen Zeichnung einer Charte gehört endlich noch, daß man sie orientire, das ist, die Himmelsgegenden auf derselben anzeige. Da die Magnetnadel immer (fast genau) sich nach einerley Richtung stellt, wenn sie sich frey bewegt: so bedient man sich hiezu eines mit einer Magnetnadel versehenen Instrumentes, der Boussole. Diese nämlich ist so eingerichtet, daß auf der Platte, über welcher die Magnetnadel sich bewegt, eine Linie, parallel mit einem außerhalb angebrachten Lineale gezogen ist; stellt man nun, während der Meßtisch etwa in D Fig. 142. aufgestellt ist, die Boussole oder den Kasten der Magnetnadel so, daß

sie genau auf jener Linie still steht, und zieht am Lineale eine Linie auf dem Meßtische: so zeigt diese die Richtung der Magnetnadel an; und wenn der Meßtisch richtig gerichtet ist, daß Dc nach DC, Da nach DA gerichtet liegen, so zeigt jene Linie die Richtung aller dieser Linien gegen die magnetische Nordlinie. Will man die Richtung gegen die Mittagslinie, (das ist, gegen die Himmelsgegend wo die Sonne Mittags steht,) bestimmen, so muß man wissen, daß in unsern Gegenden die Magnetnadel etwa 20 Grad westlich von dem wahren Nordpuncte oder von dem Puncte, welcher der mittäglichen Stellung der Sonne gerade entgegen liegt, abweicht.

310. In den Bergwerken findet noch eine andre Anwendung der Geometrie statt, von der sich hier noch kein vollständiger Begriff geben läßt, weil sich der Begriff von Projectionen erst in der körperlichen Geometrie deutlich machen läßt. Die Gänge nämlich, in welchen das Erz gefunden wird, gehen nur in einzelnen Streifen durch die Gebirge, und diesen geht man bey der Arbeit nach und arbeitet so nach und nach an einander hängende, bald horizontale, bald verticale, bald schiefe Gänge, die aus einzelnen geraden Stücken bestehen, aus. Nun muß man aber doch das Ganze auch übersehn können, und verlangt daher Zeichnungen dieser Gänge; auch

muß man angeben können, unter welchem Puncte der obern Erdfläche sich ein gewisser Theil des Ganges befindet.

Wenn man sich durch den Punct, wo man in die Grube hineingeht, eine verticale, etwa von Norden nach Süden gehende Ebne und zugleich eine horizontale Ebne gelegt denkt, so will man hier eigentlich wissen, neben welchem Puncte der erstern und über welchem Puncte der letztern man sich in jedem Puncte des unterirdischen Ganges, Schachts oder Stollens befindet. Könnte man dies beydes in zwey verschiedenen, zusammen gehörigen Zeichnungen darstellen, so hätte man einen verticalen und horizontalen Abriß von dem Bergwerke. Man erhält diesen, wenn man bey jedem geraden Stücke des Ganges bemerkt, wie lang er ist, unter welchem Winkel er gegen den Horizont geneigt ist, und um welchen Winkel er von der nach Norden und Süden gehenden Ebne abweicht. Die Regeln aber, nach welchen man die Charte selbst zeichnet gehören, noch nicht hierher.

Neunter Abschnitt.

Von den regulären Poligonen und der Ausmessungen des Kreises.

311. Erklärung. Ein Polygon oder Vieleck heißt regulär, wenn alle seine Seiten

einander gleich und alle Winkel einander gleich sind.

Das gleichseitige Dreyeck und das Quadrat sind solche reguläre Figuren.

312. Erklärung. Eine gradlinigte Figur heißt in dem Kreis beschrieben, wenn der Kreis durch alle ihre Winkelpuncte oder Ecken geht; dagegen heißt sie um den Kreis beschrieben, wenn alle ihre Seiten die Kreislinie berühren.

313. Erklärung. Man beschreibt also um eine gradlinigte Figur einen Kreis, wenn man eine Kreislinie durch alle ihre Winkelpuncten zieht, und man beschreibt in derselben einen Kreis, wenn man eine Kreislinie zieht, welche alle Seiten der Figur berührt.

314. 61ste Aufgabe. In einem Kreis ein regulaires Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten zu zeichnen, wenn vorausgesetzt wird, daß man die Kreislinie in eine jede gegebene Anzahl von Theilen eintheilen kann. Fig. 146.)

Auflösung. Obgleich es keine geometrische Methode giebt, die Kreislinie in jede verlangte Anzahl von Theilen einzutheilen: so kann man doch durch Versuche dieses bewerkstelligen. Ist die Eintheilung geschehen, so zieht man zwischen den Theilungspuncten Sehnen, und hat dann nicht bloß ein gleichseitiges, sondern auch ein gleichwinklichtes Polygon.

Beweis. Gleichseitig ist das Polygon, weil man bey der Eintheilung des Kreises gleiche Sehnen einträgt, wie §. 239.; aber auch die von den Seiten eingeschlossenen Winkel sind gleich EAB = BCD, denn sie liegen in den gleichen Abschnitten EABE und BCDB, und so alle ähnlichen.

315. 62ste Aufgabe. Um ein gegebenes reguläres Vieleck einen Kreis zu zeichnen. (Fig. 146.)

Auflösung. Man halbire zwey an derselben Seite AB anliegende Winkel EAB, ABC durch die geraden Linien BG, AG (§. 81.); diese Linien werden sich irgendwo in G schneiden und dann ist G das Centrum des verlangten Kreises.

Beweis. Daß BG und AG einander schneiden, erhellt, weil ABC = EAB < 2 R, also auch $\frac{1}{2}$ ABC + $\frac{1}{2}$ EAB < 2 R. Ferner ist GB = GA, weil GAB = GBA, (§. 87.) und GB =

GC, weil in den Dreyecken GAB, GBC, die Seiten AB = BC, AG = BG und der Winkel BAG = CBG = $\frac{1}{2}$ CBA. Eben so erhellt, daß GD = GE = GC u. s. w. sey.

316. 63ste Aufgabe. Um einen Kreis ein reguläres Polygon zu zeichnen, welches eine gegeben Anzahl von Seiten hat. (Fig. 147.)

Auflösung. Man theile die Peripherie des gegebenen Kreises in A, B, D, E, F, G in so viele gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben soll, und ziehe an jeden dieser Puncte Tangenten IAH, HBK u. s. w. (§. 257.) diese werden einander schneiden und das verlangte Polygon bilden.

Beweis. Daß die Tangenten einander schneiden, erhellt aus §. 223. weil HB, HA, senkrecht gegen die Halbmesser BC, AC sind, die einander schneiden. Das so gebildete Polygon hat aber auch lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel: denn da die Bogen AB = BD genommen sind, so sind die zugehörigen Centriwinkel gleich ACB = BCD, (§. 229.) und folglich ist auch AHB = BKD, weil die Summe der Winkel in beyden Vierecken ACBH, BCDK gleich viel beträgt, (§. 140.) und die Winkel bey A, B, D, rechte sind. Was die Seiten betrifft, so ist wenn man HC zieht, das Dreyeck HCB dem HCA, völlig gleich, weil beyde rechtwinklicht sind, und HC = HC, CA = CB als Halbmesser desselben Kreises haben. (§. 106.) Es ist also der Winkel HCB = HCA und ferner HCB = KCB, also auch HB = BK = KD, und es läßt sich so weiter die Gleichheit der Seiten zeigen.

317. 64ste Aufgabe. In ein gegebenes reguläres Polygon einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 147.)

Auflösung. Man halbire zwey einander zunächst liegende Seiten und errichte in ihrer Mitte die senkrechten Linien AC, BC. Diese schneiden sich in einem Puncte C und wenn man um C mit dem Halbmesser AC einen Kreis zeichnet, so berührt dieser alle Seiten und ist also in das Vieleck gezeichnet.

Beweis. Daß AC, BC einander schneiden ist klar, (§. 223.) und daß AC = BC läßt sich aus §. 104. beweisen, weil die Dreyecke CAH, CBH, bey A, B rechtwinklicht sind, und HC = HC, AH = BH haben, indem diese Linien die Hälfte der gleichen Polygonseiten sind. Es läßt sich aber ferner zeigen, daß auch wenn man die übrigen Seiten halbirt und von C aus Linien wie CD zieht, diese = CB und senkrecht auf die Seiten seyn werden; denn in den Dreyecken BCK, DCK ist dann BK = DK, CK = CK und BKC = BKD, (weil im regulären Palygon AHK = BKD und AHC = BHC = BKC = $\frac{1}{2}$ AHK), und es ist daher (§. 73.) CD = BC und bey D so gut wie bey B ein rechter Winkel. Der Kreis berührt also alle Seiten in ihrer Mitte.

318. Erklärung. Man versteht unter dem Centriwinkel eines regulären Polygons denjenigen, welchen zwey an die Endpuncte der Seiten gezogne Radien des um das Polygon beschriebenen Kreises mit einander machen; der Polygonwinkel hingegen ist der Winkel, welchen zwey Seiten des Polygons mit einander bilden.

319. 65ste Aufgabe. Wenn die Anzahl der Seiten eines regulären Polygons bestimmt ist, die Größe seines Centriwinkels und seines Polygonwinkels anzugeben.

Auflösung. Wenn der rechte Winkel in 90 Grade getheilt wird, so erhält man die Größe des

Centriwinkels in Graden ausgedrückt, wenn man 360 Grade mit der Anzahl der Seiten dividirt; denn alle Centriwinkel sind gleich groß und betragen zusammen 4 rechte Winkel. Den Polygonwinkel bestimmt man, wenn man den Centriwinkel von 180 Graden abzieht, denn es ist (Fig. 146.) $ABC = ABG + CBG = 2R - AGB$, nämlich $ABG + CBG = CBG + BAG$.

Beyspil. Im regulären Zwölf-Eck ist also der Centriwinkel $= 30^\circ$, der Polygonwinkel $= 150^\circ$; im Hundert-Eck jener $= 3^\circ\ 36^I$ und dieser $= 176^\circ\ 24^I$.

320. 66ste Aufgabe. An die Linie AB (Fig. 148.) ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten zu zeichnen, wenn vorausgesetzt wird, daß man einen in Graden gegebenen Winkel zeichnen kann. (Fig. 148.)

Auflösung. Aus der gegebenen Anzahl von Seiten suche man den Polygonwinkel und zeichne an jeden Endpunct von AB, wenn diese die Seite des Polygons seyn soll, einen Winkel $CAB = CBA$ dem halben Polygonwinkel gleich; ziehe um C mit dem Halbmesser $CA = CB$ einen Kreis und trage die Sehne AB in der Peripherie herum, so wird dadurch der Kreis in so viele Theile getheilt, als das Polygon Seiten haben soll.

Der Beweis erhellt daraus, weil mit dem richtig bestimmten Polygonwinkel auch der Centriwinkel bestimmt ist.

321. 67ste Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man nehme einen Punct B auf dem Umfange des Kreises willkührlich an, und ziehe um B als Mittelpunct mit dem Halbmesser AB = BC die Kreisbogen CAG, CDH, ziehe nach den Durchschnittspuncten A, D, Sehnen AB, BD, so sind dieses zwey Seiten des Sechsecks, und es ist nun leicht, daß ganze Sechseck zu zeichnen.

Beweis. Da AB = AC = BC, so ist das Dreyeck ABC gleichwinklicht und folglich jeder Winkel = 60 Grad = $\frac{2}{3}$R, (§. 138.), also ACB = BCD = $\frac{2}{3}$R, und so groß ist auch der Centriwinkel des Sechsecks, also ist der Bogen AB ein Sechstel des Kreises und AB die Seite des Sechsecks.

322. Da es leicht ist, einen gegebenen Bogen IL zu halbiren, so ist es nun auch möglich ein

reguläres Zwölf-Eck, 24-Eck, 48-Eck u. s. w. in den Kreis zu zeichnen und in der Figur 148. würden KI, KL Seiten des Zwölf-Ecks seyn. Da man durch die Eintheilung des Kreises in vier Theile, vermöge zweyer auf einander senkrechter Durchmesser, ein Quadrat im Kreise und um den Kreis zeichnen kann, so ergiebt sich durch Halbirung ferner das reguläre 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, 64-Eck, 128-Eck u. s. w. welche sich also alle zeichnen lassen. Auch zur zeichnung des Fünf-Ecks, Zehn-Ecks und 15-Ecks giebt es strenge geometrische Regeln, die ich hier übergehe, aber das 7-Eck, 11-Eck, 13-Eck und ähnliche lassen sich nur durch mechanische oder versuchsweise geschehenen Eintheilung zeichnen.

* 323. 68ste Aufgabe. Wenn (Fig. 184.) der Halbmesser CI eines Kreises und die Seite eines in demselben gezeichneten Polygons IL in Zahlen gegeben sind, die Länge der Seiten IK eines Polygons von doppelt so vielen Seiten in demselben Kreise gleichfalls in Zahlen zu bestimmen.

Auflösung. Man halbire die Länge IL in M, suche ihr Quadrat und ziehe dies vom Quadrate des Halbmessers ab; die Quadratwurzel aus der Differenz giebt MC. Diese Linie MC ziehe man vom Halbmesser KC ab, um KM zu erhalten.

Dann addire man die Quadrate von KM, MI und ziehe aus der Summe die Wurzel, so hat man IK, als Seite des gesuchten Vielecks von doppelt so vielen Seiten.

Der Beweis ist ganz im 50sten Lehrsatz enthalten.

Beyspiel. Ist der Halbmesser CI = 1, so ist auch die Seite des Sechsecks IL = 1, also IM = 0,5 und $MC = \sqrt{(1 - (0,5)^2)} = \sqrt{(1 - 0,25)} = \sqrt{0,75} = MC = 0,8660254$, also $KM = 0,1339746$, $KM^2 = 0,017949$; $KI^2 = 0,267949$, also $KI = 0,517638$, als die Seite des Zwölf-Ecks. Und so könnte man die Seite des 24 Ecks u. s. w. finden.

324. 104te Lehrsatz. 1. der Umfang eines jeden in den Kreis gezeichneten regulären Polygons ist kleiner, als der Umfang des Kreises, und 2. der Umfang eines jeden um den Kreis gezeichneten Polygons ist größer, als der Umfang des Kreises.

Beweis. Der erstere Satz erhellt von selbst, da jede Sehne kleiner ist als der zugehörige Bogen; aber auch den zweyten Satz wird niemand läugnen, da die einfach gekrümmte Linie AB (Fig. 147.) gewiß kleiner ist, als die Linie AHB, welche sich mehr von der geraden Linie AB entfernt; denn man kann es wohl als Grundsatz annehmen, daß unter mehrern Linien, (Fig. 16.) deren kleine sich schlangenförmig krümmt, diejenige die kürzere ist, welche sich der geraden Linie AB am meisten nähert, also AEB $<$ ACDB.

325. Hieraus erhellt dann ferner, daß der Umfang eines um oder in den Kreis beschriebenen Vielecks desto weniger von dem Umfange des Kreises selbst verschieden ist, je mehrere Seiten das Vieleck hat, und daß man folglich den Umfang des Kreises sehr nahe finden kann, wenn man den Umfang eines in denselben und eines um denselben gezeichneten Vieleckes von sehr vielen Seiten bestimmt.

* 326. 69ste Aufgabe. Wenn der Halbmesser GA eines Kreises und die Seite eines in denselben gezeichneten Vielecks in Zahlen gegeben sind, die Seiten des um denselben Kreis gezeichneten Vieleckes, welches eben so viele Seiten als jenes hat, zu bestimmen. (Fig. 146.)

Auflösung. Man berechne die Senkrechte $GM = \sqrt{(GE^2 - ME^2)}$ so wie in §. 323. so findet man die halbe Seite des um den Kreis beschriebenen Polygons durch die Proportion $MG : GN = ME : NL$, wo alles bis auf NL bekannte Linien sind.

Beweis. Daß man die Seite des um den Kreis beschriebenen Polygons von gleich vielen Seiten erhält, wenn man GA, GE verlängert, bis sie die an die Mitte des Bogens AE gezogne Tangente schneiden, ist daraus klar, weil der Centriwinkel für beyde Polygone einerley seyn muß, da sie gleich viele Seiten haben, also die eine Ecke des Polygons in die verlängerte GE fällt, wenn die andre in der verlängerten GA liegt; daß aber der Berührungspunct N dieser Seite in der Mitte des Bogens AE liegt, läßt sich aus dem vorigen leicht einsehn. Ist aber das, so sind GME, GNL ähnliche Dreyecke, weil ME, NL beyde auf GN senkrecht sind. (§. 221. 256.)

Beyspiel. Für das Sechseck war (§. 323.) GM = 0,866, also NL = 0,57735, also die Seite das um jenen Kreis vom Halbmesser = 1 beschreiben Sechsecks = 0,57735.

327. 70ste Aufgabe. Wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, die Länge seines Umfangs in Zahlen sehr nahe zu bestimmen.

Auflösung. Obgleich die wirkliche Ausführung dieser Rechnung für den Anfänger mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft ist: so sieht man doch ein, daß es möglich ist, ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten in den Kreis und ein eben so vielseitiges reguläres Polygon um den Kreis zu zeichnen. Da man nun die Seiten beyder berechnen, also den ganzen Umfang beyder bestimmen kann, so erhält man zwey Zahlen, deren eine größer, die andre kleiner, als der Umfang des Kreises ist und die beyde von der genauen Größe des Kreis-Umfanges desto weniger abweichen, je größer die Anzahl ihrer Seiten ist. So z. B. hat man den Umfang des in den Kreis beschriebenen regulären 64-Ecks = 6,27310, den Umfang des um den Kreis beschriebenen regulären 64-Ecks = 6,28824 gefunden, bey einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, und der Umfang eines solchen Kreises ist also ziemlich nahe = 6,28.

Aus der Seite des in den Kreis beschriebenen Sechsecks, welche dem Halbmesser gleich ist, suche man die Seite das in denselben beschriebenen 12-Ecks 24-Ecks, 48-Ecks, 96-Ecks, 192-Ecks und so weiter (§. 323.) und daraus die Seiten der eben so vieleckigen um den Kreis gezeichneten regulären Figuren (§. 326.) Die Länge der Seiten eines jeden solchen Polygons ergiebt seinen ganzen Umfang, und man findet also, weil der Umfang des Kreises z. B. größer ist, als der Umfang des in denselben gezeichneten 192-Ecks und kleiner als der Umfang des um denselben gezeichneten 192-Ecks, zwey Gränzen, zwischen welchen der Umfang des Kreises enthalten ist.

* 328. Man könnte eben so aus der Seite des in den Kreis und um den Kreis beschriebenen Quadrates die Seiten und den ganzen Umfang des

8-Ecks, 16-Ecks u. s. w. herleiten und würde z. B. für einen Kreis vom Halbm. = 1 den Umfang des in den Kreis beschriebenen 64-Ecks finden, = 6,27310, den Umfang des um den Kreis beschriebenen 64-Eckes = 6,28824; der Umfang des Kreises ist kleiner als jener und größer als dieser. Und wenn man diese Rechnung fortsetzt, so findet man den Umfang des in den Kreis vom Halbmesser = 1 beschriebenen 16348-Ecks = 6,283185; den Umfang des um denselben beschriebenen 16384-Ecks = 6,2831854. Der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser = 1 ist, kann also nicht viel von 6,283185 verschieden seyn.

329. **105ter Lehrsatz.** 1. Alle reguläre Polygone von gleichvielen Seiten sind ähnliche Figuren, und 2. der Umfang derselben ist dem Halbmesser der um sie beschriebenen Kreise proportional.

Beweis. 1. Sie sind ähnlich, weil ihre Winkel gleich sind und alle ihre Seiten einerley Verhältniß haben. Der Polygonwinkel ist nämlich bey allen regulären Polygonen von gleich vielen Seiten gleich groß, (§. 319.) und da jeder dieser Polygone lauter gleiche Seiten hat so verhält sich auch die eine Seite des einen zur einen Seite des zweyten, wie die andre Seite des einen zur andern Seite des zweyten.

2. Wenn (Fig. 149.) ABCDEF, HIKLMN solche ähnliche Polygone sind, so ist (§. 301.) Um-

fang ABCDEF : Umfang HIKLMN = AF : HN. Legt man nun die Polygone so, daß ihre Mittelpuncte in G zusammen fallen, und die Puncte A, H in einerley durch G gezognen Linie liegen: so fallen auch wegen der Gleichheit der Centriwinkel die Mittelpuncte N, F und so weiter auf einerley Radius, und die Seiten HN, AF sind parallel, (wegen der Gleichheit der halben Polygonwinkel GHN = GAF.) Hieraus aber ergiebt sich wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke HGN, AGF, daß AF : HN = AG : HG, also die Seiten der ähnlichen regulären Polygone sich verhalten, wie die Halbmesser der um sie beschriebenen Kreise, und eben so verhält sich demnach der Umfang dieser Polygone.

* 330. 106ter Lehrsatz. Wenn zwey concentrische Kreise gegeben sind, so ist es allemal möglich, in den größern ein reguläres Polygon zu zeichnen, dessen Seiten den kleinern Kreis nicht berühren; und eben so, ein reguläres Polygon, um den kleinern Kreis zu zeichnen, dessen Seiten den äußern Kreis nicht erreichen. (Fig. 150.)

Beweis. Wenn ABDE, HIK diese concentrischen Kreise sind, so ziehe man eine Tangente LM des kleinern Kreises, welche einen Bogen LM auf dem größern Kreise abschneidet. Da es nun allemal möglich ist, einen Bogen AB < LM anzunehmen, so wird es auch möglich seyn, diesen Bogen AB so zu wählen, daß AB die Seite eines regulären Vielecks werde, welches also den innern Kreis nicht berührt. Man übersieht leicht, daß es gleichfalls möglich ist, ein reguläres Polygon um den kleinern Kreis zu zeichnen, dessen Seiten den äußern nicht erreichen, und dieses allemal, wie nahe auch die beyden Kreise an einandern liegen mögen; indeß müssen die Polygone, welche jene Eigenschaften haben sollen, sehr vielseitig sind, wenn die Kreise sich einander sehr nähern.

*331. 107ter Lehrsatz. Die Umkreise zweyer Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser, oder Halbmesser.

Beweis. Wäre nicht (Fig. 150.) Umfang ADF : Umfang OQS = CK : TU, so nehme man an, es sey TU : CK = Umfang OQS : Umfang HIK und HIK ein Kreis vom Halbmesser CI < CK. Man beschreibe in dem Kreise ADF ein reguläres Polygon, dessen Seiten den Kreis HIK nicht berühren (§. 330.) und im Kreise OQS ein ähnliches Polygon. Wegen der Aehnlichkeit dieser Polygone verhält sich der Umfang des einen ABDEFG, zum Umfange des andern NOPQRS, wie die Halbmesser der umschriebenen Kreise, also ABDEFG : NOPQRS = CK : TU. Es ist aber ABDEFG > Umfang HIK, und NOPQRS < Umfang OQS, also kann mit jener Proportion nicht die Proportion Umfang HIK : Umfang OQS = CK : TU bestehn, und es verhält sich also nicht TU : CK = Umfang OQS, zu einem Kreisumfange HIK, der zu einem kleinern Halbmesser als CK gehört.

Eben so zeigt man, daß das vierte Glied dieser Proportion auch nicht der Umfang eines Kreises von größeren Halbmesser als CK seyn kann. Denn wenn TU:CK = Umfanb OQS: Umfang eines größern Kreises als ADF, so hätte man auch CK: TU = Umfang ADF: Umfang eines kleineren Kreises als OQS und könnte alle vorigen Schlüsse anwenden um diese Proportion zu wiederlegen.

Da also die Unrichtigkeit bey der Proportionen gezeigt ist, so erhellt daß CK: TU = ADF: OQS, oder die Halbmesser sich wie die Umkreise verhalten.

332. Es erhellt also aus §. 328. daß bey allen Kreisen der Halbmesser sich zum Umfange verhält, wie 1:6,283185 ungefähr, oder der Durchmesser zum Umfange, wie 1 : 3,1415926. Man hat dieses Verhältniß noch weit genauer berechnet, indeß begnügt man sich gewöhnlich mit folgenden Verhältnißzahlen, die mit jener näher oder weniger nahe überein kommen. Man setzt nämlich das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, wie 7:22 oder 100 : 314, oder, (welches schon sehr genau ist,) 113:355; will man es genauer haben, so ist es 1 : 3,1415926536 beynahe. Ganz genau läßt dieses Verhältniß sich nicht angeben, aber man hat es so genau berechnet, daß man bey den schärfsten Rechnungen sich ganz darauf verlassen kann, ja genauer als man es je braucht, nämlich die Zahlen 3,1415.... bis auf 200 Decimalstellen. Man würde also bey

einem Kreise, dessen Durchmesser in Fußen durch eine Zahl von 200 Ziffern ausgedrückt würde, dennoch den Umfang bis auf 1 Fuß berechnen können.

333. 108ter Lehrsatz. Wenn in ungleichen Kreisen, (Fig. 149.) Winkel am Mittelpuncte gleich sind, AGB = HGI, so sind die Längen der zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bögen AB, HI den ganzen Peripherien proportional.

Beweis. Nach §. 234. hat man: Bogen HI : Umfang HKMH = Winkel HGI : 4 R, und Bogen AB : Umfang ACEA = Winkel HGI : 4 R, also: Bogen HI : Bogen AB = Umfang HKMH : Umfang ACEA.

334. Hieraus erhellt auch umgekehrt, daß in ungleichen Kreisen die Bogen HI, AB zu einerley Winkel am Mittelpuncte gehören, wenn ihre Längen sich wie die ganzen Peripherien verhalten.

* 335. 109ter Lehrsatz. Wenn in ungleichen Kreisen (Fig. 149.) ungleiche Winkel am Mittelpuncte gezeichnet sind AGC, HGI, so sind die Längen der zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bögen ABC und HI in zusammengesetztem Verhältnisse der Größe

der Winkel und der Halbmesser oder der Peripherien der Kreise.

Beweis. Sind AGB, HGI gleiche Winkel, so hat man Bogen AB: Bogen HI = Umfang ACEA: Umfang HKMH, oder weil die Peripherien sich wie die Halbmesser verhalten, (§. 331.) auch AB:HI = GB:GI. Ferner aber ist AB: AC = Winkel AGB:AGC, also ist das Verhältniß HI:AC zusammengesetzt aus den Verhältnissen GI:GB und AGB:AGC.

*336. 110ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 149.) zwischen den Schenkeln ungleicher Winkel AGB, HGK aus dem Scheitelpuncte mit ungleichen Halbmesser AG, GH die Bogen AB, HK beschrieben sind, so ist das Verhältniß der Winkel AGB, HGK zusammengesetzt aus dem directen Verhältnisse der Längen der Bogen AB, HK und dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser AG, HG.

Beweis. Macht man den Winkel AGC = HGK, so ist AGB:AGC = Bogen AB: Bogen AC. Es ist aber auch

$$\text{Bogen } AC:HK = AG:HG \text{ also } AC = \frac{HK.AG}{HG}$$

und Winkel

$$AGB:HGK = \text{Bogen } AB: \frac{AG}{HG} \cdot \text{Bogen } HK$$

$$\text{oder} = AB \,.\, HG : HK \,.\, AG$$

oder das Verhältniß AGB : HGK aus
den Verhältnissen AB : HK
und GH : AG zusammengesetzt.

337. 71te Aufgabe. Es ist der Durchmesser eines Kreises in Längenmaße gegeben, man soll seinen Umfang, oder auch die Länge jedes in Graden gegebenen Bogens in gleichem Längenmaße bestimmen.

Auflösung. Um den ganzen Umfang zu finden, multiplicire man den Durchmesser mit 3, 14, oder wenn man mehr Genauigkeit verlangt, mit 3, 14159, so erhält man den Umfang. — Aus diesem läßt sich dann die Länge jedes Bogens finden, indem sich 360 Gr. zur Anzahl von Graden eines Bogens verhalten, wie die Länge des ganzen Umfangs zur Länge dieses Bogens.

Beyspiele. Wenn ein Kreis 25 Fuß 10 Zoll Durchmesser hat, wie lang ist ein Bogen von $60^{\circ}\ 10^{12}$ — der ganze Umfang ist = 81, 15 Fuß, also dieser Bogen $= \frac{60\frac{1}{8}}{360} \cdot 81, 15, = 13, 56$ Fuß.

Der Halbmesser der Erde ist = 19632120 Paris. Fuß, wie groß ihr Umfang? — wie groß ein Bogen von 1 Grad, von 1 Minute, von 1 Secunde, oder von 115 Graden 7 Minuten? Und umgekehrt, wie viele Grade, Minuten und Secunden beträgt auf der Erde ein Bogen von 20000 Fuß lang?

338. 72ste Aufgabe. Wenn die Länge des ganzen Umfangs oder eines in Graden gegebenen Bogens bekannt ist, die Länge des Durchmessers zu bestimmen.

Auflösung. Wenn die Länge eines in Graden bekannten Bogens gegeben ist, so suche man daraus zuerst den ganzen Umfang; die Zahl, welche die Länge des Umfangs ausdrückt, dividire man mit 3,14159...., so hat man den Durchmesser.

Beyspiele. Einen Bogen von 45 Grad findet man 8 Fuß lang, so ist der ganze Umfang $= \frac{360 \, . \, 8}{45}$ $= 64$ Fuß, und der Durchmesser $= \frac{64}{3,1416} = 20,372$ Fuß.

Uebungsaufgaben. Wie viel Grade, Minuten, Secunden enthält der Bogen, welcher dem Durchmesser gleich ist? — $\frac{360}{3,14159..}$ Grade.

Nach der Erdmessung in Peru fand man $\frac{1}{400}$ des Erd-Umfangs $= 51077,7$ Toisen, jede zu 6 Pariser Fuß, wie groß würde darnach der Erddurchmesser seyn? — Die Messung in Lappland ergab $\frac{1}{400}$ des Erd-Umfangs $= 51664,5$, wie groß würde dies den Erddurchmesser geben? — Die Ungleichheit der Resultate zeigt, daß die Erde keine Kugel ist.

339. 73ste Aufgabe. Eine gerade Linie zu zeichnen, welche dem halben Umfange des Kreises sehr nahe gleich ist.

Auflösung. Man ziehe die beyden auf einander senkrechten Durchmesser AB, DE; halbire den Halbmesser BC in F, und ziehe DF, welche man verlängert, bis sie in G den Kreis schneidet. Aus dem Puncte G der Peripherie ziehe man GH auf DE senkrecht, verlängere sie und nehme IK = GK. Hierauf halbire man CH in L, nehme LM = GH, und zeichne mit diesem Halbmesser einen Kreisbogen um L, welcher GH in M schneidet. Dann ist IM die gesuchte Linie.

* Beweis. Diese Linie ist nicht ganz vollkommen, aber doch sehr nahe dem halben Umfange gleich, wie sich aus folgender Berechnung in Zahlen ergiebt.

Ist der Halbmesser des Kreises $= 1$, so ist $CF = \frac{1}{2} = 0,5$, also $DF = \sqrt{(DC^2 + CF^2)} = \sqrt{(1 + 0,25)} = \sqrt{1,25}$. Ferner (§. 291.)

$DF : AF = BF : FG$,

und (§. 274.) $DF : DC = FG : CH$,

also (Arithm. §. 176.) $DF^2 : AF \cdot DC = BF : CH$, das ist $1,25 : 1,5 \times 1, = 0,5 : CH$,

$$\text{oder } CH = \frac{0,75}{1,25} = 0,6, \text{ und weil}$$

$DC : CF = DH : HG$, oder $1 : 0,5 = 1,6 : HG$, so ist $HG = 0,8 : GK = 1,6$, und $GI = 3,2$. Da nun ferner $LH = \frac{1}{2} CH = 0,3$, und $LM = GH = 0,8$, so ist (§. 177.) $HM = \sqrt{(0,64 - 0,09)}$ $HM = \sqrt{0,55} = 0,74161985$ und $MG = 0,05838015$

also $MI = 3,2 - 0,05838015 = 3,14161985$

die wahre Länge des Halbkreises ist $= 3,1415926$

also MI zu groß um 0,0000272 des Halbmessers, welches so wenig ist, daß man es selbst in den größten Zeichnungen nicht bemerken kann. *)

340. **IIIter Lehrsatz.** Die Fläche eines regulären Polygons ist gleich einem Dreyecke, dessen Grundlinie dem Umfange des Polygons, und dessen Höhe dem Halbmesser des in das Polygon gezeichneten Kreises gleich ist.

Beweis. Jedes reguläre Polygon (Fig. 147.) läßt sich durch die von den Endpuncten an den Mittelpunct gezogenen geraden Linien KC, HC in lauter gleiche Dreyecke theilen, deren so viele sind, als das Polygon Seiten hat. Jedes solche Dreyeck hat zur Grundlinie eine Seite des Poligons, und zur Höhe den Halbmesser CB des eingezeichneten Kreises. Ist nun das Polygon z. B. ein Fünfeck, so erhält man ein dem ganzen Fünfecke gleiches

*) Diese Construction ist eine Entdeckung von Hr. Dr. Olbers.

Dreyeck, wenn man ein Dreyeck von gleicher Höhe, und fünfmal so großer Grundlinie zeichnet, das ist, dessen Grundlinie dem ganzen Umfange des Polygons gleich ist.

Beyspiel. Des regulären Sechseckes Umfang war im Beyspiele der 65sten Aufgabe = 6. und die Höhe MC (Fig. 148.) = 0, 866, also der Inhalt = $\frac{1}{2}$. 6 . 866 = 2, 598, also etwas über $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als das Quadrat des Halbmessers.

341. 112ter Lehrsatz. Die Fläche eines Kreises ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem Umfange und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Beweis. Da man in den Kreis ein Polygon von so vielen Seiten zeichnen kann, daß der Umfang des Kreises sich sehr wenig von dem Umfange des Polygons unterscheidet: so übersieht man, daß dieser Satz sich als eine Folgerung des letzten Lehrsatzes betrachten läßt.

* Man kann diesen Satz kurz so ausdrücken, daß (Fig. 150.) Inhalt ADF = $\frac{1}{2}$ CK . ADFA sey, wo ADFA den Umfang bedeutet. — Wäre dieser Satz nicht wahr, so müßte $\frac{1}{2}$ CK . ADFA dem Inhalte eines andern, größern oder kleinern Kreises gleich seyn. Es sey also erstlich $\frac{1}{2}$ CK . ADFA = Inhalt HIK, und HIK ein kleinerer Kreis als

ADF. Man zeichne in ADFA ein Vieleck, welches den Kreis HIK nicht berührt (§. 330.), so ist der Inhalt des Vielecks $= \frac{1}{2}$ CN . (AB + BD + DE + EF + FG + GA), und CN < CK und zugleich sein Umfang kleiner, als ADFA. Das Vieleck aber, wo der Kreis HIK ganz innerhalb liegt, ist unstreitig größer als dieser Kreis; es kann also nicht der Inhalt von HIK $= \frac{1}{2}$ CK. ADFA seyn, weil dieses Product größer als jenes Vieleck ist.

Das Product aus dem halben Halbmesser in den Umfang des Kreises kann also nicht der Fläche eines kleinern Kreises gleich seyn; aber auch nicht der Fläche eines größern Kreises. Nimmt man nämlich an, es sey Inhalt ADFA $= \frac{1}{2}$ CI . Umfang HIK: so würde, wenn man in jenen Kreis das Vieleck zeichnet, welches den kleinern Kreis nicht berührt, $\frac{1}{2}$ CN . (AB + BD + DE + EF + FG + GA) der Inhalt dieses Polygons seyn; dieses Product ist größer als $\frac{1}{2}$ CI . HIK, und kleiner als der Inhalt des Kreises ADFA, also können die beyden letztern Größen nicht gleich seyn; und weil es allemal möglich ist, zwischen zwey concentrische ungleiche Kreise ein solches Polygon zu zeichnen, so erhellt, daß das Product aus dem halben Halbmesser in den Umfang eines Kreises genau die Fläche dieses nämlichen Kreises abmißt, — in dem Sinne, welches im 6ten Abschnitte hinreichend erklärt ist.

342. Hieraus erhellt nun auch, daß ein Kreisausschnitt AHBGA (Fig. 146.) so

groß ist, als ein Dreyeck, dessen Basis der Bogen AHB und dessen Höhe der Halbmesser AG ist; denn (§. 237.) die Flächen der Ausschnitte in gleichen Kreisen verhalten sich wie die Bögen, also Fläche AHBGA : Fläche ABCDEA = Bogen AB : ganzen Umfang.

343. 74ste Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser oder Umfange eines Kreises seinen Inhalt zu berechnen.

Auflösung. Ist der Durchmesser gegeben, so suche man den Umfang, oder umgekehrt suche man den Durchmesser, wenn der Umfang bekannt ist, (§. 337.); dann multiplicire man den ganzen Umfang mit dem vierten Theile des Durchmessers oder dem halben Durchmesser. Das Product drückt den Flächen-Inhalt des Kreises in eben solchen Quadratmaße aus, als der Umfang und Durchmesser im Längenmaße ausgedrückt ist.

Beyspiel. Eines Kreises, von 1 Fuß Durchmesser, Umfang ist = 3, 1415926 Fuß, also der Inhalt = 0, 78539815 Quadratfuß.

Der Umfang der Erde beträgt 5400 Meilen, wie viel Quadratmeilen die Durchschnittsfläche ihres größten Kreises? — wie viel beträgt dieselbe in Quadratfuß, nach der Angabe im 337 §. ?

344. 75ste Aufgabe. Es ist der Durchmesser eines Kreises gegeben, man soll den Inhalt eines Ausschnitts von einer gegebenen Anzahl Grade bestimmen.

Auflösung. Man suche den Inhalt des ganzen Kreises und suche dann das vierte Glied folgender Proportion: 360 Gr. verhalten sich zu der Gradezahl des Ausschnitts, wie der Inhalt des ganzen Kreises zum Inhalt des Ausschnitts.

Beyspiel. Der Inhalt eines Ausschnitts von 60 Graden ist also für den Kreis von 1 Fuß Durchmesser = 0, 1308997 Quadratfuß.

345. 76ste Aufgabe. Den Inhalt eines Kreisabschnitts zu finden, wenn man die Länge der nöthigen Linie wissen kann, oder diese gegeben ist.

Auflösung. Wenn (Fig. 146.) der Inhalt des Abschnitts AHBA gesucht wird, so berechne man den Inhalt des Ausschnitts AHBGA und des Dreyecks ABG und ziehe letzteres von ersterm ab: so hat man den Inhalt des Abschnitts.

346. Diese Aufgaben setzen uns in Stand, ein Quadrat zu zeichnen, welches einem gegebenen

Kreise oder Theile eines Kreises gleich ist, und man kann also den Kreis quadiren, so genau als es nur je verlangt werden kann. Mit Hülfe der Fig. 151. kann man auch dieses geometrisch so genau thun, daß der Fehler gar nicht merklich ist. Das Bemühen eine streng geometrische Quadratur des Kreises zu finden, ist also für die Ausübung ganz unnütz.

* 347. Erklärung. Krumme Linien AB, CD, (Fig. 152.) sind einander ähnlich, wenn die an Länge proportionalen Stücke der einen eben die Lage gegen einander haben, wie die gleich proportionirten der andern; daß ist, wenn man Tangenten AE, CF an die Endpuncte A, C zieht und nimmt den Bogen $AG = \frac{1}{n} AB$ und $CH = \frac{1}{n} . CD$, so müssen die an G und H gezogenen Tangenten GI, HK mit AE, CF allemal gleiche Winkel $AIG = CHK$ machen, man mag für den Bruch $\frac{1}{n}$ nehmen, welchen Theil man will.

Dieses ist dem Begriffe, den wir vorhin von der Aehnlichkeit aufgestellt haben, ganz gemäß, denn die Tanganten deuten die Richtung der krommen Linie an der Stelle an, wo sie dieselbe berühren, und wir haben also nach dieser Erklärung, wenn AB zum Beyspiel zehnmal so lang als CD ist, dann eine Aehnlichkeit, wenn jedes Stück in CD gegen das nächste eben die Lage, wie jedes vom

Endpuncte her ähnlich liegende zehnmal so große Stücke in AB hat.

* 348. 113ter Lehrsatz. Alle Kreise sind ähnliche Figuren, auch alle Kreisausschnitte von gleich viel Graden und alle Kreisabschnitte, die gleich viel Grade fassen, sind unter einander ähnlich.

Beweis. Nimmt man auf den zwey Kreisen (Fig. 153.) die Bogen AB, DF der ganzen Peripherien proportinal und zieht Tangenten an die Endpuncte dieser Bogen: so machen diese mit einander gleiche Winkel, weil ACB = DEF (§. 333. 334.) und AGB + ACB = 2 R = DHF + DEF; also haben die dem ganzen Umfange proportionale Stücke der ganzen Kreislinie einerley Lage gegen einander, und diese sind ähnliche Figuren.

Daß auch bey den Ausschnitten ABCA und DFED die Bogen ähnlich sind, erhellt eben hieraus, wenn sie gleich viel Grade fassen, oder sich auf einerley Weise zu den ganzen Peripherien verhalten; aber auch die Winkel, welche die Bogen bey A und D, so wie bey B und F mit dem Radien machen sind gleich, da ihre Tangenten mit dem Radien rechte Winkel bilden. Endlich ist auch AC : DE = Bogen AB : Bogen DF, weil diese Bogen den Peripherien, folglich auch den Halbmessern proportional angenommen sind.

Auch die Abschnitte AaBA DbFD sind ähnlich, denn die Bogen sind es; die Bogen machen mit der Sehne einerley Winkel, da CAB = EDF = R — ½ DEF (§. 135.), und man hat Sehne AB : Sehne DF = Bogen AB : Bogen DF, weil jene Sehne, als ähnlich liegende Seiten in den ähnlichen Dreyecken ABC, DFE, sich wie die Halbmesser AC, DE, folglich wie die Peripherien und wie die den Peripherien proportionale Bogen verhalten.

* 349. 114ter Lehrsatz. **Die Flächen zweyer Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.**

Beweis. Da (Fig. 150.) Fläche IKH : Fläche ADF = $\frac{1}{2}$ CI . Umfang HIK : $\frac{1}{2}$ CK . Umfang ADF, und
(§. 331.) Umfang HIK = 6,28 . . . CI ; und Umfang ADF = 6,28 . . . CK, so ist

$$\text{Fläche HIK} : \text{Fläche ADF} = \frac{6{,}28}{2} \cdot CI^2 : \frac{6{,}28}{2} CK^2, = IC^2 : CK^2.$$

* 350. Es läßt sich leicht beweisen, daß auch ähnliche Ausschnitte sich verhalten, wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser, und dann folgt eben dies von ähnlichen Abschnitten, denn (Fig. 153.) sind ABC, DFE ähnliche Dreyecke, also (§. 303.) Inhalt ABC : Inhalt DFE = $AC^2 : DE^2$, folglich da auch AaBCA : DbFED = $AC^2 : DE^2$, so ist auch AaBCA — ABC : DbFED — DFE = $AC^2 : DE^2$, oder Abschnitt AaBA : Abschnitt DbFD = $AC^2 : DE^2$.

* 351. 77ste Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche so groß sey, als die Summe der Flächen der gegebenen Kreise ABI, DFK, eben so einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche so groß sey, als der Unterschied dieser Kreise. (Fig. 153.)

* Auflösung. 1. Will man einen Kreis der Summe der gegebenen Kreise gleich zeichnen, so füge man die Halbmesser AC, DE dieser Kreise rechtwinklicht an einander, wie NL, LM (Fig. 154.) wo $NL = DE$, $LM = AC$, und ziehe NM: so ist ein mit dem Halbmesser NM gezeichneter Kreis so groß, als jene beyde Kreise zusammen genommen. 2. Soll ein Kreis der Differenz jener Kreise gleich gezeichnet werde, so zeichne man den rechten Winkel OPQ (Fig. 154.) nehme $OP = DE$ (Fig. 153.) dem Halbmesser des kleinern Kreises gleich, und schneide mit OR = dem Halbmesser des größern Kreises von O aus in den andern Schenkel ein, dann ist PR der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Da (§. 177.) $NM^2 = LN^2 + LM^2 = AC^2 + DE^2$, und (§. 349.) Fläche $ABI = \frac{6,28\ldots}{2} AC^2$; und Fläche $DFK = \frac{6,28\ldots}{2} DE^2$, so ist $ABI + DFK = \frac{6,28\ldots}{2} (AC^2 + DE^2) = \frac{6,28}{2}. NM^2$, aber eben so groß ist ein mit dem Halbmesser NM beschriebener Kreis.

Der Beweis für den zweyten Fall, ist diesem ganz ähnlich.

* 352. Auf diesen Satz gründet sich die Quadratur der sogenannten Möndchen des Hippocrates. Zeichnet man nämlich (Fig. 155.) das bey C rechtwinklichte Dreyeck ABC und beschreibt über den drey Seiten die Halbkreise ADCEB, AGC, CFB, so ist erstlich aus §. 265. klar, daß der Halbkreis ADCEB durch C geht; ferner aus §. 350. daß Inhalt ADCEB = Inhalt AGC + Inhalt CFB, weil das dort erwiesene auch für die Halbkreise gilt. Da nun die Abschnitte ADCA, CEBC Theile der kleineren Kreise bedecken: so müssen die übrigen Theile der kleineren Kreise zusammen, denn übrigen Theile des größeren Kreises gleich seyn, oder AGCDA + CFEBC = ACB. Die Summe der mondförmigen Abschnitte AGCDA, CFBEC ist also dem Dreyecke ABC genau gleich.

Anmerkung. Diese Quadratur, die weiter keinen Nutzen hat, zeigt, was man müßte thun können, wenn man den ganzen Kreis quadriren wollte; man müßte nämlich eine Construction finden, durch die sich mit geometrischer Genauigkeit eine geradlinigte Figur dem Inhalte des Kreises gleich zeichnen ließe, so wie hier das Dreyeck den beyden Möndchen gleich ist. Aber die hierauf gewandte Bemühungen sind bisher sämmtlich vergeblich gewesen, und da man die Quadratur des Kreises auf andere Weise nach §. 346. völlig genau genug finden kann: so sind Bemühungen der Art als gänzlich unnütz zu achten.

Anhang einiger Aufgaben, von der Eintheilung geradlinigter Figuren.

* 353. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC (Fig. 156.) so zu theilen, daß die Stücke sich wie m : n verhalten und die Theilungslinie durch die Spitze gehe.

Auflösung. Man theile die Grundlinie AC so, daß $AD : DC = m : n$ (§. 277.) und ziehe BD, so ist $ADB : CDB = m : n$. (§. 194.)

* 354. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC (Fig. 157.) so zu theilen, daß die Stücke sich wie m zu n verhalten und die Theilungslinie einer Seite parallel sey.

Auflösung. Da m, n in Zahlen gegeben sind, so suche man $\sqrt{m}$ und $\sqrt{(m + n)}$ und theile die Grundlinie so, daß $EC : AC = \sqrt{m} : \sqrt{(m + n)}$; zieht man dann ED mit AB parallel, so ist (§. 303.) $EDC : ABC = EC^2 : AC^2 = m : m + n$, also $EDC : AEDB = m : n$.

* 355. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC so zu theilen, daß sich die Stücke, wie m : n verhalten und die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct D der Grundlinie gehe (Fig. 158.), vorausgesetzt, daß man alle nöthige Linie messen kann, oder diese in Zahlen gegeben sind.

Auflösung. Da alle nöthigen Linien in Zahlen gegeben sind, so berechne man den Inhalt des ganzen Dreyecks ABC, und multiplicire ihn mit $\frac{m}{m + n}$, so hat man den Inhalt des einen gesuchten Stückes. Da nun die Grundlinie dieses Stücks = AD seyn soll, so findet man die Höhe nach §. 208. Zieht man also EF in dieser Entfernung mit AB parallel, so läßt sich GD ziehen und es wird ADG : DGCB = m : n oder ADG : ABC m : m + n seyn.

* 356. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC (Fig. 159.) so zu theilen, daß sich die Stücke wie m : n verhalten und die Theilungslinie einer gegebenen Linie DE parallel sey, wenn die nöthigen Linien in Zahlen gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe durch die Spitze CF mit DE parallel und berechne den Inhalt von ACF; ist nun dieser größer als derjenige Theil, welcher sich zum Ganzen, wie m : m + n verhalten soll, so läßt sich die Theilungslinie GH nach §. 353. finden. Wäre z. B. ABC = 100, ACF = 80, und die Stücke sollten sich verhalten wie 3 : 5, also AHG : ABC = 3 : 8, so verhält sich ABC : ACF = 100 : 80, also AHG : ACF = 300 : 640, und AG : AF = $\sqrt{300} : \sqrt{640}$. Hiernach kann man auch in andern Fällen die Rechnung einrichten.

* 357. Aufgabe. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 160.) so zu theilen, daß sich die Stücke, wie m zu n verhalten und die Theilungslinie durch einen Endpunct B gehe.

Auflösung. Man theile die Grundlinie so, daß AF sich zu AD verhalte, wie 2m zu m + n, so ist BF die Theilungslinie und ABF : BFDC = m : n oder ABF : ABCD = m : m + n. Denn es ist ABF = $\frac{1}{2}$ CE . AF und ABCD = AD . CE, wenn also AF : AD = 2m : m + n, so haben die Stücke das verlangte Verhältniß.

* 358. Aufgabe. Ein Trapezium (Fig. 161.) so zu theilen, daß sich die Stücke, wie m : n verhalten und die Theilungslinie KE durch einen gegebenen Punct E in einer der parallelen Seiten gehe.

Auflösung. Man ziehe GH mit AD, BC so parallel, daß sie von beyden Linie gleich entfernt sey, indem man AG = GB nimmt; theile GH so, daß GI : GH = m : m + n und ziehe durch E und I die gerade Linie EK, so ist die Theilung geschehen. Denn man hat den Inhalt des ganzen Trapezes = $\frac{1}{2}$ CL (AD + BC) = CL . GH und den Inhalt des Stücks AEKB = $\frac{1}{2}$ CL (AE + BK) = CL. GI. also AEKB : ABCD = GI : GH = m : m + n.

Diese Auflösung gilt nur, wenn die Linie EK in BC einschneidet, schnitte sie in AB ein, so müßte man die Höhe des Dreyecks, welches abgeschnitten wird, so wie in §. 354. suchen.

* 359. Aufgabe. Ein Trapezium ABCD (Fig. 161.) so zu theilen, daß die Stücke sich wie m zu n verhalten und die Theilungslinie mit einer derjenigen Seiten, welche unter sich nicht parallel sind, parallel läuft.

Auflösung. Man halbire AB in G, ziehe GH mit AD parallel, theile GH in I so, daß GI zu GH wie m : m + n, dann ist BKEA : KCDE = m : n, denn ABKE = CL . GI und KCDE = III . CL, wenn CL senkrecht auf beyden parallelen Seiten ist.

* 360. Aufgabe. Ein Trapezium ABCD (Fig. 162.) so zu theilen, daß die Stücke sich wie m zu n verhalten, und die Theilungslinie den parallelen Seiten parallel sey.

Auflösung. In der Figur sind AB, CD die parallelen Seiten. Man verlängere die beyden andern Seiten bis sie sich in E schneiden und ziehe von E, EG auf die beyden parallelen Seiten senkrecht. Man zeichne nun ein rechtwinklichtes Dreyeck HIK, dessen eine Cathete $= CD . \sqrt{m}$, die andere $= AB . \sqrt{n}$ sey und ziehe die Hypotenuse KI. Endlich ziehe man durch E die gerade Linie EL in willkührlicher Richtung, nehme $EM = FG$, $EL = (CD - AB) \sqrt{(m + n)}$ und auf der Linie EG, $EN = KI$, ziehe MO mit NL und durch O, PQ mit AB parallel, so ist PQ die verlangte Theilungslinie.

Beweis. Der Inhalt der Trapeze ABPQ u. ABCD ist, $ABPQ = \frac{AB + PQ}{2} . FO$ und $ABCD = \frac{AB + CD}{2} . FG$, und diese sollen sich zu einander verhalten, wie $m : m + n$. Nach der Construction ist (§. 278.) $EL : EM = EN : EO$, und weil $EM = FG$, $EL = (CD - AB) \sqrt{(m + n)}$, $EN = KI = \sqrt{(HK^2 + HI^2)} = \sqrt{(m . CD^2 + n . AB^2)}$ so ist $(CD - AB) \sqrt{(m + n)} : FG = \sqrt{(m . CD^2 + n . AB^2)} : EO$.

$$\text{also } EO = \frac{FG}{CD - AB} . \frac{\sqrt{(m . CD^2 + n . AB^2)}}{\sqrt{(m + n)}}$$

Ferner ist $EF : FG = AB : (CD - AB)$

$$\text{also } EF = \frac{AB . FG}{CD - AB} .$$

$$\text{und } EO - EF = FO = \frac{FG}{CD - AB} . \left(\frac{\sqrt{(m . CD^2 + n . AB^2)}}{\sqrt{(m + n)}} - AB \right)$$

Auch hat man $EF : EO = AB : PQ$

$$EF : EF + EO = AB : AB + PQ$$

$$\text{also } AB + PQ = \frac{AB . (EF + EO)}{EF}$$

$$AB + PQ = \frac{AB}{EF} \cdot \frac{FG}{(CD - AB)}$$
$$\left(\frac{\sqrt{(m \cdot CD^2 + n \cdot AB^2)}}{\sqrt{(m + n)}} + AB\right)$$

Hieraus folgt

$$FO \cdot (AB + PQ) = \frac{AB \cdot FG^2}{EF \cdot (CD - AB)^2}$$
$$\left(\frac{m \cdot CD^2 + n \cdot AB^2}{m + n} - AB^2\right)$$

oder $FO \cdot (AB + PQ) = \frac{AB \cdot FG^2}{EF \cdot (CD - AB)^2}$
$$\left(\frac{m \cdot CD^2 - m \cdot AB^2}{m + n}\right)$$

$$FO \cdot (AB + PQ) = \frac{AB \cdot FG^2}{EF \cdot (CD - AB)^2}$$
$$\frac{m}{(m + n)} (CD^2 - AB^2)$$

also der Inhalt des Trapezes $ABPQ = \frac{1}{2} \cdot FO \cdot (AB + PQ) =$
$$\frac{AB \cdot FG^2 \cdot (CD + AB)}{2 EF (CD - AB)} \cdot \frac{m}{m + n}.$$

der Inhalt des ganzen Trapezes ABCD ist $= \frac{1}{2} FG$
$(AB + CD)$.

Es ist aber $EG : FG = AB : CD - AB$, also
$$\frac{AB \cdot FG}{EF \cdot (CD - AB)} = 1. \text{ und } \frac{1}{2} FO. (AB + PQ) =$$
$$\frac{m}{m + n} \cdot \frac{FG \cdot (CD + AB)}{2}.$$

also Inhalt $ABQP : ABCD = \frac{m}{m + n} \cdot$
$$\frac{FG \cdot (AB + CD)}{2} : \frac{1}{2} FG \cdot (AB + CD)$$

oder $ABPQ = ABCD = \frac{m}{m + n} : 1 = m : m + n$ wie verlangt wird.

* 361. Aufgabe. Eine vielseitige Figur ABCDEF (Fig. 163.) so zu theilen, daß die Stücke ein gegebenes Verhältniß habe, und die Theilungslinie der gegebenen Linie GH parallel sey, wenn man alle nöthigen Linien messen kann.

Auflösung. Man ziehe durch alle Eckpuncte die Linien BI, EK, FN mit der gegebenen Linien GH parallel, messe alle nöthigen Linien, berechne den Inhalt der ganzen Figur und aller durch diese parallele Linien abgeschnittenen Stücke: so findet man zwischen welche dieser parallelen Linien die Theilungslinie fallen muß. Gesetzt sie fiele zwischen KE und NF: so ergiebt die Berechnung, wie groß das zu KBCDE noch hinzukommende Stück seyn und wie es sich zu dem ganzen Trapeze KEFN verhalten muß. Man kann also die Theilungslinie nach §. 359. ziehen.

* 362. Aufgabe. Eine vielseitige Figur soll in mehrere Stücke so getheilt werden, daß die Theilungslinien in dem Puncte I zusammen laufen, und die Stücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben; — man setzt wieder voraus, daß alle nöthigen Linien gemessen werden können. (Fig. 164.)

Man berechne den Inhalt der ganzen Figur und daraus den Inhalt, welchen jedes Stück haben soll. Man ziehe von I nach allen Eckpuncten gerade Linien IA, IB und so weiter, und berechne den Inhalt der so entstehenden Dreyecke. Soll nun IA eine der Theilungslinien seyn, so ergiebt diese Berechnung, ob z. B. zwischen IA, IG eine zweyte Theilungslinie falle, welches nämlich geschieht, wenn BIA kleiner, aber BIA + AIG größer, als das verlangte Stück ist; auch findet man wie viel zu AIB hinzukommen müsse, und wie sich diese Zugabe zu dem Dreyecke AIG verhalte; man kann also AIG in dem gehörigen Verhältnisse nach §. 352. theilen.

Noch eine Aufgabe aus der Feldmeßkunst.

* 363. Aufgabe. Die Lage der drey Puncte A, B, C (Fig. 165.) ist gegeben, und man kann von einem vierten Puncte D, dessen Lage unbekannt ist, die Winkel ADB und BDC messen: die Lage dieses Punctes D soll bestimmt werden.

Auflösung. Man zeichne nach dem verjüngten Maßstabe die Puncte A, B, C in ihrer verhältnißmäßigen Lage richtig auf, zeichne an B und C die gleichen Winkel EBC = ECB = R — BDC, und ferner an A und B die gleichen Winkel FAB = FBA = R — ADB. Man zeichne um den Punct E, wo EB und EC sich schneiden mit dem Halbmesser EB = EC einen Kreis, und zeichne um den Punct F, wo AF und BF sich schneiden, mit dem Halbmesser AF = BF einen Kreis. Da beyde Kreise sich in B schneiden, so schneiden sie sich noch einmal in D, und dieser Durchschnittspunct giebt in der Zeichnung die richtige Lage des unbekannten Punctes an, von woaus die Winkel gemessen worden, so daß AD nach dem verjüngten Maßstabe die wahre Entfernung dieses Punctes von A ist.

Beweis. Da EBC + ECB = 2 R — 2 BDC, so ist BEC = 2. BDC; also liegt D im Umfange des Kreises, dessen Mittelpunct E ist, (§. 263). Eben so ist AFB = 2 ADB, also liegt D im Umfange des Kreises, dessen Mittelpunct F ist; es muß also D im Durchschnittspuncte beyder Kreise liegen.

Die körperliche Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien gegen ebne Flächen, und ebner Flächen gegen einander.

364. **Grundsatz.** Wenn man durch die beyden Endpuncte einer geraden Linie eine Ebne legt, so liegt die gerade Linie und auch ihre Verlängerung ganz in dieser Ebne.

Es ist nämlich gewiß, daß sich zwischen jenen zwey Puncten eine in dieser Ebne liegende gerade Linie ziehen läßt, (§. 16.) und diese kann nicht von der gegebenen, durch eben jene zwey Puncte gehenden geraden Linie verschieden seyn. (§. 15.)

365. Es lassen sich aber durch zwey Puncte oder durch eine gerade Linie mehr als eine Ebne legen und die Lage der Ebne ist folglich durch zwey Puncte nicht bestimmt. Man kann nämlich (Fig. 166.) die Ebne ABDC um AB drehen, und sie in die Lagen ABFE, ABHG, ABKI bringen.

366. **Grundsatz.** Es ist möglich, durch jede drey gegebene Puncte eine Ebne zu legen, und wenn diese drey Puncte nicht

in gerader Linie liegen, so ist durch sie die Lage der Ebne völlig bestimmt.

Man muß hiebey sich erinnern, daß wir die Ebne als unbegränzt oder so weit ausgedehnt, als man will, annehmen, und dann ist es offenbar, wenn man eine Ebne durch zwey Puncte gelegt hat, und sie um die durch diese Puncte gezogene gerade Linie dreht, daß man ihr dann allemal eine solche Lage geben kann, daß sie auch durch den dritten Punct geht. Liegt dieser dritte Punct nicht mit jenen beyden in einer geraden Linie: so sieht man leicht, daß durch diese drey Puncte die Lage der Ebne völlig bestimmt ist, und nicht ein vierter Punct, der auch in eben der Ebne liege, ganz willkührlich kann angenommen werden. Es lassen sich also durch drey, nicht in gerader Linie liegende Puncte, nicht zwey verschiedene Ebnen legen.

367. Hieraus erhellet, daß jeder geradlinigte Winkel, auch jedes geradlinigte Dreyeck, ganz in einer Ebne liegt, da beyde durch drey Puncte vollig bestimmt werden. Dagegen liegt nicht ein jedes geradlinigtes Viereck ganz in einerley Ebne; denn man kann vier Puncte, deren einer nicht mit den drey andern in derselben Ebne liegt, durch gerade Linien verbinden und so ein Viereck bilden, das nicht ganz in einer Ebne liegt.

Zwey Parallellinien liegen immer in einerley Ebne, weil dieses bey dem Begriffe der Parallele vorausgesetzt ist; eben deswegen liegt auch jedes Parallelogramm ganz in einer Ebne.

368. Grundsatz. Wenn man einen Punct L in der Ebne ABDC (Fig. 166.) und einen Punct M außerhalb derselben annimmt: so schneidet die zwischen L und M gezogene gerade Linie ML diese Ebne in L, und hat außer L keinen Punct mit ihr gemein; sondern wenn man ML nach N verlängert, so liegt auch LN außerhalb der Ebne.

Wenn eine Ebne eine solche Lage gegen eine andere Ebne hat, daß sie durch einen Punct B in dieser Ebne CIKD und durch einen Punct E außerhalb derselben geht: so schneiden beyde Ebnen einander, und der Durchschnitt bildet eine Linie AB; außer dieser Linie haben beyde Ebnen weiter keine Puncte gemein.

369. Erklärung. Der Punct L, wo eine gerade Linie MN eine Ebne schneidet, heißt der Durchschnittspunct; die Linie AB, in welcher zwey Ebnen einander schneiden, heißt die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beyder Ebnen.

370. 1ster Lehrsatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebnen ist eine gerade Linie. (Fig. 166.)

Beweis. Wenn AOB die Durchschnittslinie der beyden Ebnen CIKD und AEFB, und diese keine gerade Linien wäre: so hätten beyde Ebnen mehrere Puncte gemein, die nicht alle in gerader Linie liegen, und folglich würden beyde Ebnen ganz zusammen fallen, und gar nicht von einander unterschieden seyn. (§. 366.)

371. Die gerade Linie AB liegt also sowohl in der Ebne ABCD (Fig. 167.) als in der Ebne ABEF und es ist (§. 84.) möglich, in jeder dieser Ebnen eine Linie IK und IL durch den Punct I senkrecht auf AB zu ziehen. Da nun die beyden geraden Linien IK, IL gewiß in einer Ebne liegen (§. 367.): so ist es möglich eine gerade Linie AB so gegen eine Ebne KIL zu ziehen, daß sie auf zwey verschiedenen in dieser Ebne durch den Durchschnittspunct I gezogenen geraden Linien senkrecht stehe.

372. 2ter Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie EF (Fig. 168.) gegen die Ebne ABCD so gezogen ist, daß sie auf zweyen durch den Durchschnittspunct E gezogenen, in

der Ebne ABCD liegenden geraden Linien GH, IK senkrecht steht: so ist sie senkrecht auf alle in dieser Ebne durch E gezogene gerade Linien.

Beweis. Man nimmt auf den Linien GH, IK die Stücke EG = EH, EI = EK und zieht aus einem willkührlichen Puncte F der senkrechten Linie die geraden Linien FG, FH, FI, FK; zieht man dann auch noch IH, GK: so läßt sich beweisen, daß GK = IH, FG = FH, FI = FK ist. Hieraus folgt die Gleichheit der Dreyecke FGK, FHI; ferner wenn man in der Ebne ABCD eine willkührliche gerade Linie LM durch E zieht, so ist, weil GL = HM, das Dreyeck FGL ≅ FHM und FL = FM; endlich auch, weil EL = EM, die Winkel FEL = FEM = R.

Da GEK, HEI als Scheitelwinkel gleich (§. 37.) und nach der Construction EG = EH, EK = EI, so ist Winkel EHM = EGL und GK = HI. Zieht man nun in der Ebne ABCD irgend eine willkührliche Linie LM durch E, so ist wegen der schon erwiesenen Gleichheit der Winkel EHM = EGL und Seiten EH = EG; da auch die Scheitelwinkel MEH = LEG, (§. 104.) die Seiten EM = EL und MH = LG.

Für die außerhalb jener Ebne liegenden Dreyecke finden folgende Vergleichungen Statt. In den Dreyecken GEF, HEF, ist EG = EF, EF = EF und die Winkel FEG = FEH = R, also (§. 73. 177.) FG = FH, und aus völlig ähnlichen Gründen auch FK = FI wegen der völligen Gleichheit der Dreyecke FEK, FEI. So hat man also in den schiefliegenden Dreyecken FGK, FHI, die Seiten GK = HI, FG = FH, FK = FI und (§. 75.) die Winkel FGL = FHM.

Da nun auch die Gleichheit von HM = GL, FH = FG erwiesen, so ist (§. 73.) FM = FL und endlich in den Dreyecken FME, FLE, FE = FE, FM = FL, EM = EL, also (§. 75.) die Winkel FEM = FEL. LM ist, wie wir angenommen haben, eine gerade Linie und folglich liegen die Dreyecke FEM, FEL in einer Ebne und die Winkel FEM, FEL sind Nebenwinkel, folglich da sie gleich sind, beyde rechte Winkel. (§. 25.) EF steht also auf LM senkrecht und da der Beweis für jede andere in der Ebne ABCD durch E gezogene gerade Linie gilt, so steht EF auf jeder solchen Linie senkrecht.

373. Anmerkung. Für Anfänger ist es gut, diesen Beweis und alle ähnliche nicht bloß an der gezeichneten Figur zu erläutern, sondern alle, nicht in der Ebne ABCD liegende Linien durch Stifte und Fäden darzustel-

len, weil in der Figur diese Linien nicht alle in ihrem natürlichen Verhältnisse erscheinen können.

374. Erklärung. Eine Linie FE steht auf einer Ebne ABCD senkrecht, (Fig. 168.) wenn sie auf allen Linien senkrecht steht, die in dieser Ebne durch den Durchschnittspunct E gezogen werden können. Die Ebne ABCD heißt dann eine auf die Linie EF senkrechte Ebne.

375. Eine gerade Linie ist also gegen eine Ebne senkrecht, wenn sie auf zwey verschiedenen in dieser Ebne durch den Durchschnittspunct der Linie mit ihr gezogenen Linien senkrecht steht. (§. 372.)

376. 3ter Lehrsatz. Es ist nicht möglich durch einen Punct mehr als eine gerade Linie zu ziehen, welche auf einer bestimmten Ebne senkrecht stände, jener Punct mag in dieser Ebne oder außerhalb derselben liegen. (Fig. 169.)

Beweis. Wollte man annehmen, es wäre möglich, zwey durch den in der Ebne ABCD liegenden Punct E gehende gerade Linien zu ziehen, die beyde auf ABCD senkrecht ständen, nämlich EF und EG: so ließe sich durch beyde eine Ebne legen (§. 367.), welche gehörig erweitert die Ebne ABCD in einer geraden Linie HI schneiden würde.

Wären nun EF, EG beyde auf der Ebne ABCD senkrecht, so müßten (§. 374.) auch beyde auf EH senkrecht seyn, welches bey geraden Linien, die mit EH in derselben Ebne liegen, unmöglich ist. (§. 100.)

Auch wenn durch F, welcher Punct außerhalb der Ebne ABCD liegt, zwey gerade Linien FE, FK auf ABCD senkrecht gezogen werden könnten, und die Ebne EFK schnitte die Ebne ABCD in HI: so müßten FK, FE beyde auf HI senkrecht seyn, welches unmöglich ist. (§. 96.)

377. 4ter Lehrsatz. 1. Durch einen Punct I der geraden Linie IP (Fig. 167.) lassen sich nicht zwey verschiedene Ebnen legen, die beyde auf IP senkrecht wären. 2. Auch ist es unmöglich, daß zwey Ebnen, die einander schneiden, beyde auf derselben geraden Linie NO senkrecht stehen.

Beweis. 1. Wäre zugleich die Ebne ABEF und auch die Ebne ABGH auf IP senkrecht, so müßten, wenn man IK willkührlich in der Ebne ABEF zieht und der Durchschnitt IM der durch IP und IK gehenden Ebne mit der Ebne ABGH bemerkt, KI und IM beyde auf IP senkrecht seyn, welches (§. 100.) unmöglich ist, da KI, MI, IP in einerley Ebne liegen.

2. Auch kann NO nicht auf beyden Ebnen ABEF, ABGH senkrecht seyn, wenn diese sich in AB schneiden; dann, zieht man von N und O, als den Durchschnittspuncten der Linie NO mit jenen beyden Ebnen, gerade Linien IN, IO nach einem willkührlichen Puncte der Durchschnittslinie beyder Ebnen: so würde INO ein bey N und O zugleich rechtwinklichtes Dreyeck seyn, wenn NO auf allen in diesen Ebnen durch N und O gezogenen Linien senkrecht stände. (§. 96.)

378. 5ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 170.) eine Linie AB auf den dreyen durch einerley Punct A derselben gezogenen geraden Linien CD, EF, GH senkrecht steht, so liegen diese drey Linien in einerley Ebne.

Beweis. Legt man durch zwey derselben AE, AG eine Ebne (§. 367.) und nimmt an, diese gehe nicht durch AC, so wird sie die Ebne des Winkels CAB in einer andern geraden Linie IA schneiden. Dann aber wäre IAB = R (§. 372.) und da CAB, IAB in derselben Ebne liegen, so können nicht beyde zugleich rechte Winkel seyn; es muß also IA mit CA, zusammenfallen und die durch EAG oder FE und GH gelegte Ebne auch durch CD gehen.

379. 6ter Lehrsatz. Wenn man (Fig. 171.) von dem Puncte A, welcher nicht in der Ebne FGHI liegt, gerade Linien an diese Ebne zieht: so ist 1. die senkrechte Linie AB die kürzeste; 2. wenn die Puncte C, D, E in der Ebne FGHI gleich entfernt von dem Durchschnittspuncte B der Senkrechten liegen, so ist AC = AD = AE; 3. hingegen ist AC > AK, wenn BC > BK und die Puncte C, K beyde in der Ebne FGHI liegen.

Beweis. 1. Zieht man von A, die Linie AB senkrecht und AE schief gegen die Ebne FGHI, so ist im Dreyecke ABE bey B ein rechter Winkel, also AE > AB. (§. 91.) 2. Wenn BE = BC = BD, so ist im rechtwinklichten Dreyecke auch AE = AC = AD, weil AB in allen gleich ist. (§. 73. 177.) 3. Endlich wenn BK < BC, so ist (§. 177.) AKq = BKq + ABq und ACq = BCq + ABq, und also ACq > AKq, AC > AK.

380. Erklärung. Unter der Entfernung eines Punctes A von der Ebne FGHI, versteht man den senkrechten Abstand jenes Punctes von derselben, also AB. (Fig. 171.)

381. 1ste Aufgabe. Durch den Punct A, welcher in der Ebne BCDE liegt, (Fig. 172.) eine gerade Linie senkrecht auf diese Ebne zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe durch A in der Ebne BCDE die gerade Linie FG willkührlich, und in derselben Ebne AI auf FG senkrecht. Man ziehe ferner eine, nicht in diese Ebne fallende, auf FG senkrechte Linie AH, indem man durch FG eine willkührliche Ebne FGH legt und in derselben AH senkrecht auf FG zieht, (§. 84.). Endlich ziehe man in der durch HIA gelegten Ebne AK auf AI senkrecht: so ist AK die verlangte, gegen die Ebne BCDE senkrechte Linie.

Beweis. Da AH, AI beyde auf AF senkrecht sind, so ist die Ebne HAI und folglich (§. 372. 374.) AK auf AF senkrecht. Nach der Construction ist aber auch AK auf AI senkrecht, also (§. 372.) AK auf der Ebne BCDE senkrecht, in welcher sich die Linien AF, AI befinden.

382. 7ter Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie AB auf der Ebne CDEF senkrecht ist, so ist jede mit AB parallele Linie GH gleichfalls gegen diese Ebne senkrecht. (Fig. 173.)

Beweis. Wenn man durch beyde Parallellinien AB, GH eine Ebne legt (§. 367.), so schneidet diese die Ebnen CDEF in der geraden Linie GA, und AGH ist ein rechter Winkel, weil GAB es ist (§. 128.); man muß also noch beweisen, daß GH auch auf einer zweyten in CDEF liegenden Linie senkrecht stehe. Man zieht zu dem Ende GI senkrecht auf AG in der Ebne CDEF, nimmt GI = AB und zieht GB, BI: dann sind die Dreyecke ABG $\cong$ GIA, und ABI $\cong$ GIB, daher GI auf der Ebne HGA und auch auf HG senkrecht.

Nach der angegebenen Zeichnung haben die Dreyecke ABG, GIH die Seiten AB = GI, AG = GA, und die Winkel GAB = AGI = R, also (§. 73.) GB = AI. Daraus aber folgt für die Dreyecke ABI, GIB (§. 75.), weil AB = GI, AI = GB, BI = BI, daß der Winkel BAI = IGB. Weil nun IAB ein rechter Winkel, so ist es auch IGB, also IG auf AG und BG senkrecht und daher (§. 372.) auf der Ebne HGAB, mithin auf HG senkrecht. HG ist also auf IG und GA, also auf der Ebne CDEF senkrecht. (§. 372.)

383. 8ter Lehrsatz. Wenn AB und GH beyde senkrecht auf die Ebne CDEF sind, so sind sie parallel. (Fig. 173.)

Beweis. Wäre GH nicht mit AB parallel, so würde es möglich seyn, durch G eine andere Linie mit AB parallel zu ziehen, und diese stände, nach dem vorigen Lehrsatze gleichfalls auf der Ebne CDEF senkrecht. Es ist aber nicht möglich, zwey verschiedene auf derselben Ebne senkrechte Linien durch einerley Punct zu ziehen, (§. 376.) also kann eine solche von GH verschiedene Linie nicht Statt finden, und GH ist selbst mit AB parallel.

384. 2te Aufgabe. Durch einen Punct A, welcher außerhalb der Ebne BCDE liegt, (Fig. 174.) eine Linie AI gegen diese Ebne senkrecht zu ziehen.

Auflösung. Um auf die Ebne BCDE durch A eine Linie AI senkrecht zu ziehen, zeichne man zuerst eine willkührliche gerade Linie FG in jener Ebne und setze von A aus AH darauf senkrecht (§. 99.); auch ziehe man in eben jener Ebne BCDE, HI durch H auf FG senkrecht. Die alsdann von A auf HI senkrechte Linie AI ist die gesuchte Perpendicularlinie auf die Ebne BCDE.

Beweis. Da AH und HI beyde senkrecht auf FG, so ist (§. 372.) FG auf die Ebne AHI senkrecht; folglich, wenn man durch I, KL mit FG parallel zieht, auch KL senkrecht auf AHI, (§. 382.) und KL senkrecht auf AI. Da nun auch AI auf HI senkrecht ist, so steht AI senkrecht auf der Ebne BCDE. (§. 372.)

385. 9ter Lehrsatz. Wenn AH (Fig. 174.) eine in willkührlicher Richtung gegen die Ebne BCDE gezogene gerade Linie ist, und man zieht von einem Puncte A dieser Linie die gerade Linie AI senkrecht auf die Ebne BCDE und verbindet die Durchschnittspuncte H, I durch eine gerade Linie HI: so ist der Winkel AHI kleiner, als irgend ein anderer Winkel, welchen die Linie AH mit einer andern in der Ebne BCDE gezogenen geraden Linie HM macht.

Beweis. Nimmt man HM = HI, und zieht AM, so ist (§. 379.) AM > AI; man hat also in den Dreyecken AHI, AHM, AH = AH, HI = HM und AI < AM, also auch (§. 76.) den Winkel AHI < AHM, die Linie HM mag in der Ebne BCDE wie man will gezogen seyn.

386. Erklärung. Da man von einer Linie AH, (Fig. 174.) welche die Ebne BCDE schnei-

det, sagt, die Linie sey gegen die Ebne geneigt: so heißt der im vorigen Lehrsatze als der kleinste Winkel, den AH mit irgend einer in der Ebne BCDE gezogenen Linie machen kann, bezeichnete Winkel, der Neigungswinkel der Linie AH gegen die Ebne BCDE, die durch den Neigungswinkel gelegte Ebne AHI ist also zugleich diejenige, in welcher alle von Puncten der Linie AH auf die Ebne BCDE senkrecht gezogene Linien liegen, und daß diese alle in einerley Ebne liegen, erhellt aus §. 124. weil sie Parallellinien sind. (§. 383.)

387. 3te Aufgabe. Den Neigungswinkel einer Linie AH gegen die Ebne BCDE zu bestimmen. (Fig. 174.)

Auflösung. Man ziehe aus irgend einem Puncte A der Linie AH, eine Senkrechte AI gegen die Ebne BCDE (§. 384.), ziehe zwischen den Durchschnittspuncten beyder Linien mit dieser Ebne die gerade Linie HI, so ist AHI der gesuchte Neigungswinkel. (§. 385. 386.)

388. 10ter Lehrsatz. Wenn die Linie AB parallel ist mit CD, so ist sie auch parallel mit jeder Linie EF, die parallel mit CD gezogen ist. (Fig. 175.)

Beweis. Man ziehe von einem willkührlichen Puncte A der Linie AB die Linie AC auf CD senkrecht, und ferner in der durch CD und EF gelegten Ebne (§. 367.) CE senkrecht auf CD: so ist CD senkrecht auf die Ebne ACE (§. 372.) und es sind folglich AB und EF gleichfalls senkrecht gegen diese Ebne (§. 382.) und folglich auch AB mit EF parallel. (§. 383.)

389. 11ter Lehrsatz. Wenn die Winkel CAE, DBF ihre Oeffnung nach derselben Seite gekehrt haben, (Fig. 175.) und die Schenkel des einen sind den Schenkeln des andern gegenseitig parallel, nämlich AC parallel BD, und AE parallel BF: so sind diese Winkel gleich, CAE = DBF, wenn sie auch in verschiedenen Ebnen liegen.

Beweis. Nimmt man AC = BD, AE = BF und zieht CD, EF, so ist (§. 145.) CD = AB = EF und CD, EF beyde mit AB, (§. 147.), also auch CD, EF unter sich parallel (§. 388.). Daraus aber folgt (§. 145.) CE = DF, und dann die völlige Gleichheit der Dreyecke CAE, DBF (§. 75.), in welchen also die Winkel CAE = DBF.

390. **12ter Lehrsatz.** Wenn die Linien AC, BD, (Fig. 175.) parallel sind, so sind beyde gegen jede sie schneidende Ebne GHIK unter einerley Winkel geneigt.

Beweis. Nimmt man CA = DB und zieht AL, BM senkrecht auf die Ebne GHIK, so sind auch AL, BM mit einander parallel (§. 383.) und folglich (§. 389.) die Winkel CAL = DBM, also weil ALC = DMB = R, auch die Winkel ACL = BDM, (§. 137.) und dieses sind die Neigungswinkel der beyden Linien AC, BD gegen die Ebne GHIK. (§. 385.)

391. Erklärung. Eine gerade Linie AB ist mit einer Ebne GHIK parallel, wenn alle Puncte dieser Linie gleich weit von der Ebne GHIK entfernt sind. (Fig. 175.) Zwey Ebnen sind mit einander parallel, wenn alle Puncte der einen gleiche Entfernung von der andern haben, oder wenn alle von der einen Ebne auf die andere senkrecht gezogenen geraden Linien gleich sind.

392. Eine gerade Linie kann also eine ihr parallele Ebne nicht schneiden und parallele Ebnen können einander nicht schneiden. (vergleiche §. 125.)

393. **13ter Lehrsatz.** Wenn (Fig. 175.) eine gerade Linie AB mit einer andern

CD parallel ist, so ist sie auch mit jeder durch CD gelegten Ebne parallel.

Beweis. Es sey GHIK eine durch CD gelegte Ebne und man ziehe von willkührlichen Puncten der Linie AB die geraden Linien AB, AC, BD auf die Linie CD und AL, BM auf die Ebne GHIK senkrecht: so ist (§. 130.) AC parallel mit BD, und (§. 383.) AL parallel mit BM, folglich (§. 389.) die Winkel CAL = DBM, und weil ALC = BMD = R und AC = BD (§. 146.) so ist AL = BM (§. 105.), also die Puncte A, B gleich entfernt von der Ebne GHIK und AB mit dieser Ebne parallel.

394. 14ter Lehrsatz. Wenn zwey Ebnen ABCD, EFGH (Fig. 176.) parallel sind, so ist jede Linie, IK, welche auf der einen senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.

Beweis. Im entgegengesetzten Falle würden nicht alle von Puncten der einen Ebne auf die andere Ebne senkrecht gezogenen Linien gleich seyn.

Zieht man nämlich IK auf die Ebne EFGH senkrecht, und nimmt an, diese Linie sey nicht auf ABCD senkrecht, so wird es möglich seyn, aus K eine andere Linie KL auf ABCD und wieder LM auf EFGH senkrecht zu ziehen (§. 384.). Dann hätte das Dreyeck IKL bey L und KLM bey M einen rechten Winkel, also wäre (§. 91.) IK > KL und KL > LM, also IK > LM und ABCD nicht mit EFGH parallel, welches der Voraussetzung entgegen ist.

395. 4te Aufgabe. Durch den gegebenen Punct B (Fig. 175.) eine Ebne mit der Ebne ACE parallel zu legen.

Auflösung. Man ziehe von B die Linie AB senkrecht auf die Ebne ACE, (§. 384.) und errichte nun in willkührlichen nicht mit A in gerader Linie liegenden Puncten C, E derselben Ebne, die auf dieselbe senkrechten Linien CD, EF und nehme CD = EF = AB, so ist die durch B, D, F gelegte Ebne mit der Ebne ACE parallel.

Beweis. Wäre diese Ebne nicht parallel mit CAE, so müßte eine andere durch B gelegte mit CAE parallele Ebne möglich seyn, die also wenigstens durch einen der beyden andern Puncte nicht gehen würde, (§. 366.); diese schnitte also z. B. die Linie CD oder ihre Verlängerung anderswo als in D und wäre demnach hier nicht eben so weit als in B von ACE entfernt; welches mit der Voraussetzung der Parallelität nicht bestehen kann.

396. 15ter Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie IK (Fig. 176.) auf zweyen Ebnen senkrecht steht, so sind diese Ebnen ABCD, EFGH parallel.

Beweis. Wären sie nicht parallel, so könnte man durch K eine andere Ebne mit ABCD parallel legen, und IK müßte auch auf dieser Ebne senkrecht stehen (§. 394.); es ist aber unmöglich, daß IK auf zwey verschiedenen durch K gelegte Ebnen senkrecht sey. (§. 377.)

397. 16ter Lehrsatz. Wenn die beyden Ebnen ABCD, EFGH (Fig. 176.) parallel sind, so ist jede gerade Linie KL gegen beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

Beweis. Zieht man KI senkrecht auf ABCD und LM senkrecht auf EFGH, so ist, wegen der Parallelität der Ebnen KI = LM, folglich wegen der rechten Winkel bey I und M, die beyden Dreyecke KIL, LMK gleich und die Winkel KLI = LKM, (§. 106.) und dieses sind die Neigungswinkel der Linie LK gegen beyde Ebnen. (§. 386.)

398. 17ter Lehrsatz. Wenn mehrere parallele Linien von zwey parallelen Ebnen geschnitten werden, so sind die zwischen bey-

den Ebnen abgeschnittenen Stücke gleich. (Fig. 176.)

Beweis. Wir brauchen dies nur für zwey derselben IN, KL zu beweisen. Man ziehe aus I und L die Linien IK, LM auf EFGH senkrecht (§. 384.), so ist bey parallelen Ebnen IK = LM, ferner (§. 390.) INK = LKM, und K = M rechte Winkel, also (§. 105. 137.) IN = KL.

399. 18ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 175.) drey Parallel-Linien AB, CD, EF, welche nicht in einerley Ebne liegen, von zwey Ebnen ACE, BDF so geschnitten werden, daß die zwischen beyden abgeschnittenen Stücke gleich sind, AB = CD = EF, so sind diese beyden Ebnen parallel.

Beweis. Wären sie nicht parallel, so könnte man durch B eine andere Ebne BNO mit ACE parallel legen, dann aber würde (§. 398.) CN = EO = AB seyn, welches der Voraussetzung entgegen ist.

400. 19ter Lehrsatz. Wenn die Schenkel der Winkel CAE, DBF gegenseitig parallel sind, nämlich AC parallel mi

BD, AE parallel mit BF, so sind die Ebnen dieser Winkel parallel. (Fig. 175.)

Beweis. Man nehme BD = AC, BF = AE, so ist, weil die gleichen Linien parallel sind, (§. 145.) CD = AB = EF und auch diese Linien parallel, folglich (§. 399.) die Ebnen der beyden Winkel parallel.

401. 20ster Lehrsatz. Wenn in parallelen Ebnen die gleichen Winkel CAE, DBF gezeichnet sind, und es ist der eine Schenkel des einen Winkels dem einen Schenkel des andern Winkels parallel, AE, parallel BF: so sind auch die beyden andern Schenkel parallel, AC, parallel BD, vorausgesetzt, daß beyde Winkel an einerley Seite der Schenkel AE, BF liegen. (Fig. 175.)

Beweis. Wäre BD nicht mit AC parallel, so könnte man eine andere Linie BN durch B mit AC parallel ziehen. Nimmt man nun an, diese liege nicht in der Ebne DBF, so ist gewiß der Punct N weniger oder mehr von der Linie AC entfernt, als der Punct B, weil alle Puncte der Linie AC gleich entfernt von der Ebne DBF sind; dann wäre aber BN nicht parallel mit AC, und es muß daher die durch B gezogene mit AC parallele Linie in der Ebne DBF liegen. Alsdann aber kann sie auch nicht von BD verschieden seyn, weil in derselben Ebne nicht der Winkel DBF = NBF seyn kann, und nach §. 389. doch NBF = CAE = DBF seyn müßten.

402. **21ster Lehrsatz.** Wenn man in parallelen Ebnen (Fig. 177.) ABCD, EFGH, die gleichen und ähnlichen geradlinigten Figuren IKLM und NOPQ zeichnet, und es sind in diesen Figuren zwey gleichnamige Seiten ML, QP parallel, so sind 1. auch alle übrigen gleichnamigen oder ähnlich liegenden Seiten parallel, LK parallel PO, KI parallel ON, IM parallel NQ; und 2. sind die geraden Linien, welche, zwischen den beyden Ebnen gezogen, die ähnlich liegenden Winkelpuncte verbinden, parallel und gleich, MQ = und parallel LP u. s. w.

Beweis. Da IKLM $\cong$ NOPQ, so sind die Seiten nach der Reihe und die Winkel nach der Reihe gleich, IK = NO, KL = OP, LM = PQ, MI = QN, und die Winkel I = N, K = O, L = P, M = Q. 1. Wenn also ML parallel mit QP, so ist wegen der Parallelität der

Ebnen und weil, M = Q, auch (§ 401.) MI mit QN parallel, und aus eben den Gründen wieder IK mit NO, KL mit OP parallel, weil I = N, K = O. 2. Daß aber dann IN = KO = LP = MQ, und alle diese Linien parallel sind, erhellt aus §. 145.

403. 22ster Lehrsatz. Wenn zwischen parallelen Ebnen (Fig. 177.) ABCD, EFGH mehrere parallele Linien IN, KO, LP, MQ gezogen werden, welche beyde Ebnen schneiden, so bilden die zwischen den Durchschnittspuncten in beyden Ebnen gezogenen geraden Linien gleiche und ähnliche Figuren, in denen die gleichnamigen Seiten parallel sind.

Beweis. Die zwischen den parallelen Ebnen abgeschittenen Stücke der Parallellinien sind gleich, (§. 398.) also sind auch die zwischen den Durchschnittspuncten je zweyer Parallelinien, mit den beyden Ebnen gezogenen geraden Linien, gleich und parallel (§. 145.) IK = NO, KL = OP, LM = PQ, MI = QN, und eben deswegen auch die ähnlich liegenden Winkel gleich (§. 389.)

404. Es ergiebt sich hieraus auch der Satz: wenn parallele Ebnen ABCD, EFGH (Fig. 177.) von einer dritten Ebne LKOP ge-

schnitten werden, so sind die Durchschnitts-linien LK, PO parallele Linien; denn wenn man in der schneidenden Ebne LP parallel mit KO zieht, so ist LP = KO, (§. 398.) folglich (§. 145.) LK = PO parallel, also die Durchschnitts-linien beyder Ebnen parallel.

405. Auch folgende Sätze lassen sich leicht beweisen: wenn zwey Ebnen parallel sind, und eine dritte Ebne schneidet die eine derselben, so schneidet sie auch die andere; denn, wenn sie (Fig. 177.) EFGH schneidet, so liegt sie theils unterhalb, theils oberhalb derselben, nähert sich also nach einer Seite hin der Ebne ABCD und muß, wenn man sie erweitert, dieselbe schneiden. (§. 125.)

Ferner: wenn zwey Ebnen einer dritten parallel sind, so sind sie auch untereinander parallel; denn wären jene beyden nicht parallel, so näherten sie sich nach einer Seite hin einander, und würden also gehörig erweitert einander schneiden; dann aber schnitte eine derselben auch die dritte und wäre folglich auch ihr nicht parallel.

406. 23ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 178.) zwey gerade Linien GH, IK von drey parallelen Ebnen AB, CD, EF geschnitten werden, so haben die zwischen jeden zwey

Ebnen abgeschnittenen zwey Stücke einerley Verhältniß zu einander.

Beweis. Man ziehe HI, so sind die Durchschnittslinien GI, NL der Ebne GIH mit den parallelen Ebnen AB, CD unter sich parallel (§. 404.), folglich (§. 274.) GL : GH = IN : IH. Eben so erhellet, daß auch MN parallel mit HK, also IM : IK = IN : IH, daher GL : GH = IM : IK und auch GL : LH = IM : MK. (Arithm. §. 171.)

407. 24ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 179.) parallele Ebnen AB, CD von geraden Linien EF, EG, EH, EK geschnitten werden, welche sich alle in dem Puncte E durchschneiden, und man zieht zwischen den Durchschnittspuncten dieser Linien mit jeder der beyden Ebnen gerade Linien FG, GH, HK, KF, und folglich fg, gh, hk, kf, so bilden diese in den beyden Ebnen ähnliche Figuren, deren ähnlich liegende Seiten sich zu einander verhalten, wie Ef zu EF.

Beweis. Legt man durch zwey dieser Linien EF, EK eine Ebne, so sind die Durchschnitte derselben fk, FK mit beyden parallelen Ebnen Parallellinien (§. 404.); aus eben dem Grunde ist fg mit FG, gh mit GH, HK mit hk parallel und folglich die Winkel f = F, g = G, h = H, k = K. (§. 389.) Ferner folgt aus §. 274. Ef : EF = fk : FK = fg : FG, und ferner, da auch Ef : EF = Eg : EG = Ek : EK, Ef : EF = gh : GH = hk : HK, die Figuren fghk, FGHK sind also ähnliche Figuren, deren ähnlich liegende Seiten sich zu einander verhalten, wie Ef : EF

408. Erkärung. Ebnen, welche einander schneiden, wie (Fig. 167.) ABEF, CDHG sind gegen einander geneigt und bilden einen Winkel wenn man einen Flächenwinkel nennt. Die Größe dieses Winkels oder die Größe der Neigung wird abgemessen durch die Größe des Neigungswinkels beyder Ebnen. (vergl. §. 415.)

409. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet einen Flächenwinkel, z. B. den Winkel, welchen (Fig. 167.) die Ebnen ABEF, CDHG mit einander machen, durch vier Buchstaben, indem man ihn mit HABF benennt. Die beyden mittlern Buchstaben sind hier die an der Durchschnittslinie stehenden, die äußern Buchstaben stehen irgendwo sonst, an jeder der beyden Ebnen einer.

410. Da unter einem Flächenwinkel bloß die Größe der Neigung zweyer Ebnen gegen einander

verstanden wird, so können zwey Flächenwinkel gleich seyn, ohne daß die Ebnen, von welchen sie gebildet werden, gleich groß sind oder einerley Figur haben. Der Flächenwinkel DAIK oder DAIF ist also (Fig. 167.) eben so groß als der Flächenwinkel DABE, wenn DAIL ein Stück der Ebne ABCD und FAIK ein Stück der Ebne FABE ist. So können also auch Flächenwinkel gleich seyn, obgleich bey dem einen die Ebnen, die ihn bilden, Dreyecke bey dem andern Vierecke sind, da es hiebey bloß auf die gegenseitige Lage der Ebnen ankommt.

411. Erklärung. Zwey Flächenwinkel passen in einander, z. B. EABK (Fig. 166.) und FABG (Fig. 167.) passen in einander, wenn, indem man die Ebne HABG auf IABK so legt, daß die Durchschnittslinien AB zusammen fallen, auch die Ebne FABE (Fig. 167.) sich dicht an EABF (Fig. 166.) anlegt.

Man muß sich hiebey erinnern, daß die Ebnen als ohne alle Dicke angenommen werden, so daß also die Ebnen, die an einander gelegt werden, völlig, ohne den mindesten Abstand zusammen schließen — Uebrigens erhellt aus dem vorigen §. daß nicht die ganzen Ebnen ihrer Größe und Figur nach auf einander zu passen brauchen, sondern daß es bloß darauf ankommt, daß die Ebnen ihrer Richtung nach an einanderschließen.

412. Grundsatz. Zwey Flächenwinkel, welche in einander passen, sind gleich groß: und gleich große Flächenwinkel passen in einander.

Dieses ist aus der Erklärung des Ausdrucks einleuchtend.

413. 25ster Lehrsatz. Wenn die Ebnen ABEF, ABGH (Fig. 180.) einander schneiden, und man zieht durch einerley Punct I der Durchschnittslinie AB, die Linien IK in der einen und IM in der andern Ebne senkrecht auf AB, so dient der geradlinigte Winkel KIM, welchen jene beyden Senkrechten mit einander machen, zur Abmessung des Flächenwinkels FABG.

Beweis. Wenn der geradlinigte Winkel KIM zur Abmessung des Flächenwinkels FABG dienen soll, so muß erstlich dieser Winkel gleich groß ausfallen, man mag I in der Durchschnittslinie AB nehmen, wo man will, und zweytens muß der Winkel KIM wirklich mit der Neigung der Ebnen in genauem Verhältniß stehen.

Was das erste betrifft, so ist jede in der Ebne BAEF auf AB senkrecht gezogene Linie mit KI parallel und jede in der Ebne ABGH auf AB senkrechte Linie mit IM parallel und folglich (§. 389.) der von diesen Linien, die durch einerley Punct in AB gehen, gebildete Winkel gleich, man mag den Punct I, wo man will, annehmen. Wenn also auch EB senkrecht steht auf AB in der Ebne ABEF, und BG senkrecht auf AB in der Ebne ABGH: so ist EBG = KIM.

Um aber zu beweisen, daß dieser ebne Winkel auch der Neigung beyder Ebnen gegen einander proportional sey, wollen wir annehmen, der Winkel KIM sey durch die Linie IP, und der Winkel EBG durch die Linie BO halbirt; (§. 81.) dann liegen die Linien IP, BO in einer Ebne, und sind parallel, und auch die Flächenwinkel NA, BG, NABE sind gleich, und ferner ist der Winkel PIM für die Ebnen NABO, HABG ganz eben das, was der Winkel KIM für die Ebnen FABE, HABG ist.

Da PIM = OBG = $\frac{1}{2}$. KIM: so sind, weil die Parallelität der Ebnen KIM, EBG aus §. 400. erhellt, die Linien PI, OB parallel (§. 401.), und liegen folglich in einer Ebne, und diese Ebne halbirt alle nach der Vorschrift des Lehrsatzes gezeichnete, mit KIM gleich große Winkel.

Die Ebne NABO theilt aber auch die Flächenwinkel FAHB in zwey gleiche Hälften. Denn, wenn man sich den Winkel NABG in NABE gepaßt denkt, so fällt GB auf OB und OB auf EB, MI auf PI und PI auf KI; und da statt KI, PI, MI so viele ähnlich gezogene Linien, als man verlangt, möglich sind: so passen die Flächenwinkel ganz in einander. Man übersieht leicht, daß eben so, wenn PIK = $\frac{1}{3}$ MIK wäre, der Flächenwinkel NABE ein drittel von HABE ist und überhaupt PIK : MIK = NABE : HABE. Endlich aber ist auch PIK gerade eben das für den Flächenwinkel FABO, was MIK für HABE ist. Denn da die ganze Ebne KIMP auf AB senkrecht steht: so ist PI auf AB senkrecht und liegt in der Ebne NABO, so wie KI auf AB senkrecht ist und in der Ebne FABE liegt.

Der Ebne Winkel MIK ist also das Maß des Flächenwinkels FABG.

414. Erklärung. Da die Größe des Flächenwinkels FABG (Fig. 180.) abgemessen wird durch den Neigungswinkel der beyden Ebnen gegen einander: so ist der Neigungswinkel zweyer Ebnen ABEF, ABGH derjenige geradlinigte Winkel KIM, welcher entsteht, wenn man durch irgend einen Punct I der Durchschnittslinie AB in jeder der beyden Ebnen gerade Linien senkrecht auf AB zieht.

Die Ebne dieses Winkels heißt die Ebne des Neigungswinkels.

415. Die Ebne des Neigungswinkels steht also auf der Durchschnittslinie beyder Ebnen senkrecht und eine jede Ebne, welche auf dieser Durchschnittslinie senkrecht steht, ist die Ebne des Neigungswinkels, weil durch keinen Punct I der Durchschnittslinie zwey verschiedene auf AB senkrechte Ebnen möglich sind. (§. 377.)

416. Da die Flächenwinkel durch den geradlinigten und ebnen Neigungswinkel gemessen werden, so erhellen folgende Sätze von selbst: Wenn zwey Ebnen sich durchschneiden, so sind die wie Scheitelwinkel, einander entgegengesetzte Winkel gleich, und ferner, wenn eine Ebne, wie (Fig. 167.) ABEF, auf einer andern Ebne CDHG steht, so betragen die den Nebenwinkeln ähnliche Flächenwinkel zusammen zwey rechte Winkel.

417. Erklärung. Eine Ebne steht auf einer andern senkrecht, wenn der Neigungswinkel beyder Ebnen gegen einander ein rechter Winkel ist.

418. 26ster Lehrsatz. Wenn die gerade Linie AB (Fig. 171.) auf der Ebne

FGHI senkrecht steht: so steht jede durch AB gelegte Ebne gleichfalls auf FGHI senkrecht.

Beweis. Ist ACD eine solche durch AB gelegte Ebne und die Linie BE auf die Durchschnittslinie CD senkrecht gezogen: so ist ABE der Neigungswinkel beyder Ebnen gegen einander und dieser ist ein rechter Winkel, weil AB auf alle durch B in der Ebne FGHI gezogene Linien senkrecht steht.

419. Es ist also nicht schwer, durch die in der Ebne FGHI liegende gerade Linie CD (Fig. 171.) eine Ebene auf FGHI senkrecht zu setzen. Man hat nämlich bloß nöthig, die auf diese Ebne senkrechte Linie AB durch irgend einen Punct der Linie CD zu ziehen, (§. 381.) und eine Ebne durch ABD zu legen.

420. 27ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 171.) zwey Ebnen ACD und FGHI auf einander senkrecht sind, und es ist in einer derselben eine Linie BE auf die Durchschnittslinie CD senkrecht gezogen: so steht sie zugleich auf der andern Ebne senkrecht.

Beweis. Zieht man in der andern Ebne die Linie AB auf die Durchschnittslinie CD in demselben Puncte B senkrecht: so ist ABE der Neigungswinkel, von welchem vorausgesetzt ist, daß er ein rechter Winkel sey. Es steht also BE auf AB und CD, folglich auf der ganzen Ebne ACD senkrecht. (§. 372.)

421. 28ster Lehrsatz. **Wenn (Fig. 181.) zwey Ebnen EFGH und IKLM auf einer dritten Ebne ABCD senkrecht stehen: so steht 1. auch die Durchschnittslinie jener beyden Ebnen auf dieser dritten senkrecht, und 2. die dritte Ebne ist die Ebne des Neigungswinkels jener beyden.**

Beweis. 1. In der dritten Ebne ziehe man OP senkrecht auf OG, und OQ senkrecht auf OL, wo OG, OL die Durchschnittslinien der beyden ersten Ebnen mit der dritten sind; dann ist (§. 421.) OQ auf die Ebne IKLM und OP auf die Ebne EFGH senkrecht, folglich sind beyde Linien auf ON senkrecht und diese ist eine Perpendiculärlinie gegen die Ebne ABCD. (§. 372.)

2. Da aber NO auf ABCD senkrecht steht: so ist GO eine in der Ebne EFGH, und MO eine in der Ebne IKLM auf die Durchschnittslinie NO senkrecht gezogene Linie, und folglich (§, 413.) die durch GOM gelegte Ebne ABCD die Ebne des Neigungswinkels jener beyder Ebnen.

422. 29ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 182.) die Ebne AFEB die Ebne CDHG in AB schneidet, und man zieht von einem Puncte K der einen Ebne eine Linie KL auf die andere Ebne und eine Linie KI auf die Durchschnittslinie AB senkrecht: so ist die Ebne KIL die Ebne des Neigungswinkels.

Beweis. Es ist nämlich dann auch die zwischen den Durchschnittspuncte I und L gezogene Linie IL auf AB senkrecht. Wäre sie es nicht, so könnte man eine andere Linie IM auf AB senkrecht und auf diese KM senkrecht ziehen, und dann würde (nach §. 384.) KM auf CDHG senkrecht seyn, welches unmöglich ist, wenn KL als senkrecht angenommen worden. Sind aber KI in der einen und LI in der andern Ebne auf AB senkrecht: so ist KIL der Neigungswinkel. (§. 413.)

423. 30ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 182.) die Ebne CDHG von der Ebne ABFE in AB geschnitten wird, und man errichtet in einem willkührlichen Puncte L der einen Ebne die auf diese Ebne senkrechte Linie LK, und zieht von demselben Puncte die Linie IL auf die Durchschnittslinie AB senk-

recht: so ist auch die in der andern Ebne zwischen den Durchschnittspuncten I und K gezogene Linie IK auf AB senkrecht, und die Ebne ILK ist die Ebne des Neigungswinkels.

Beweis. Wäre nicht KI auf AB senkrecht, so sey KO auf AB und ON auf AB, auch KN auf NO senkrecht; dann wäre (§. 384.) KN senkrecht auf die Ebne CDHG, und es könnte nicht zugleich KL auf dieselbe senkrecht seyn. (§, 376.) Also ist IK auf AB senkrecht und KIL der Neigungswinkel beyder Ebnen. (§. 413.)

424. Aus dem bisherigen erhellet, daß 1. Der Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebne in der durch die Linie auf die Ebne senkrecht gelegten Ebne liegt (§. 386. 419.); 2. daß die Ebne des Neigungswinkels zweyer Ebnen auf diese beyden Ebnen senkrecht steht. (§. 422.) Auch erhält, daß es (Fig. 167.) keine andere durch I gelegte Ebne geben kann, die auf beyden Ebnen senkrecht sey, außer der Ebne des Neigungswinkels KIM; denn sonst stände (§. 422. Nro. 1.) die Durchschnittslinie AB so wohl auf dieser, als auf der Ebne des Neigungswinkels, die durch I geht, senkrecht (§. 416.), welches gegen §. 376. 377. streitet.

425. 5te Aufgabe. Eine Ebne zu bestimmen, welche (Fig. 167.) durch die Linie AB geht und gegen die Ebne CDHG unter einem bestimmten Winkel geneigt ist.

Auflösung. Man ziehe in der Ebne CDHG die Linie IM auf AB senkrecht; errichte in einem Puncte O der Linie IM eine Linie NO senkrecht auf die Ebne CDGH, (§. 381.) und lege durch IM, NO die Ebne NIM. In dieser Ebne zeichne man den Winkel NIM demjenigem Winkel gleich, unter welchem die verlangte Ebne gegen CDHG geneigt seyn soll: so ist eine durch ABN gelegte Ebne diejenige, welche gegen CDHG unter dem verlangten Winkel geneigt ist.

Beweis. Da NO senkrecht steht auf CDHG, so ist die Ebne INO senkrecht auf CDHG (§. 419.), also AB sentrecht auf INO, weil sie senkrecht auf IO ist (§. 421.). Jede durch AB gelegte Ebne ist also auf INO senkrecht und folglich INO die Ebne des Neigungswinkels der Ebnen ABEF, ABGH, und NIO ist dieser Neigungswinkel; da nun NIO dem gegebenen Winkel gleich ist: so ist die Neigung der Ebnen gegen einander so groß, als verlangt wird.

426. 31ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 183.) zwey parallele Ebnen AB, CD von

einer dritten Ebne EF geschnitten werden: so ist diese letzere gegen beyde parallele Ebnen unter einerley Winkel geneigt; es ist nämlich FGHB = FIKD.

Beweis. Man ziehe in der Ebne EF die Linie FL auf die eine Durchschnittslinie GH senkrecht, so wird ihre Verlängerung auch auf der andern Durchschnittslinie IK senkrecht seyn, (§. 126.) weil GH mit IK parallel ist. (§. 404.) Zieht man ferner in der Ebne AB die Linie LB auf GH senkrecht, so ist FLB die Ebne des Neigungswinkels der Ebne EF gegen AB; (§. 413.) und wenn man diese Ebne erweitert, so schneidet sie IK in M, (weil die Linie FLM ganz in dieser Ebne liegt, und also die zu GH parallele Linie nothwendig schneiden muß,) und die Ebne CD in MD; es ist aber (§. 404.) LB mit MD parallel, also (§. 389.) KMD = HLB = R und LMD ist die Ebne des Neigungswinkels für die Ebnen EF, CD. (§. 416.) Da nun LB parallel MD, so ist (§. 128.) der Neigungswinkel FLB = LMD, wie der Lehrsatz angiebt.

427. 32ster Lehrsatz. Wenn zwey Ebnen AB, CD (Fig. 183.) von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die Durchschnittslinien GH, IK parallel, und die

ähnlich liegenden Neigungswinkel der dritten Ebne gegen beyde gleich sind: so sind jene beyden Ebnen AB, CD parallel.

Beweis. Wenn GH die Durchschnittslinie der Ebnen AB, EF und FLB ihr gegenseitiger Neigungswinkel ist: so steht GH (§. 416.) und folglich auch die als parallel zu GH angenommene IK auf der Ebne FLB senkrecht (§. 382.); wenn also die Ebne FLB die Ebne CD in MD schneidet: so stehen beyde Ebnen CD und FE auf der Ebne FMD senkrecht (§. 419.) und FMD ist die Ebne des Neigungswinkel (§. 422.), also, nach der Voraussetzung, der Winkel FMD = FLB, und LB mit MD parallel (§. 131.), folglich die Ebnen AB, CD parallel. (§. 400.)

428. Anmerkung. Die bisherigen Lehren zeigen ihren Nutzen zwar schon dadurch, daß sie die Grundlage der ganzen körperlichen Geometrie, der Lehre von der Ausmessung der Körper u. s. w. ausmachen; aber es giebt auch andere Anwendungen derselben, besonders in der Feldmeßkunst und der Perspective. Die letzere ist diejenige Wissenschaft, welche lehrt, wie man Körper oder auch ebne Figuren, die in andern Ebnen liegen, auf einer bestimmten Ebne so abzeichnen kann, wie sie dem Auge in einer bestimmten Lage erscheinen.

429. In der ebnen Geometrie nahmen wir überall an, daß bey Messungen auf dem Felde alle

in die Charte (§. 308.) einzutragenden Puncte in einerley Ebne liegen; aber dies ist sehr oft nicht der Fall, und besonders in gebirgigen Gegenden kann es sich ereignen, daß einige Puncte viel höher oder tiefer liegen, als andere, und da ist es dann eigentlich die Absicht des Feldmessers alle diese Puncte in der Charte auf einerley Ebne, wozu man gewöhnlich die horizontale Ebne wählt, zu projiciren, das ist, anzugeben, wo die Puncte in der horizontalen Ebne liegen, über oder unter welchen sich senkrecht die beobachteten Puncte befinden.

430. Man erhält nämlich im Allgemeinen die Projection einer Linie oder Figur, IKLM (Fig. 177.) auf eine gegebene Ebne EG, wenn man von allen Puncten jener Figur entweder parallele Linien, oder Linien die in einem gegebenen Puncte zusammen laufen an diese Ebne zieht, und die Durchschnittspuncte der Linien mit dieser Ebne gehörig unter einander verbindet.

So also ist NOPQ die Projection der Figur IKLM auf die Ebne EG, (Fig. 177.) und fghk gleichfalls eine Projection der Figur FGHK auf die Ebne AB (Fig. 179.)

431. Man übersieht leicht, daß die Projection derselben Figur IKLM (Fig. 177.) anders ausfällt, je nachdem die Lage der Ebne EFG verschieden ist, und je nachdem die gegen diese Ebne

gezogenen Linien einander parallel oder in einem oder dem anderen Puncte zusammen laufend sind. Man muß daher bestimmen, was für eine Projection man in jedem Falle verlange.

In der Feldmeßkunst projicirt man fast ohne Ausnahme durch parallele Linien auf eine horizontale Ebne; in der bergmännischen Meßkunst (§. 310.) oder der sogenannten Markscheidekunst ebenfalls durch parallele Linien, aber bald auf eine verticale (das ist senkrecht auf der horizontalen stehende) Ebne, bald auf eine horizontale Ebne. In der Perspective hingegen gebraucht man Projectionen die durch Linien, welche in einen Puncte E (Fig. 179.) zusammen laufen, gebildet werden.

432. 6te Aufgabe. Wenn im Felde die Standlinie ce (Fig. 143.) horizontal abgemessen ist, den Punct D in der Charte einzutragen, welcher in der durch ce gelegten horizontalen Ebne senkrecht unter A liegt, besonders in dem Falle, wo D kein bestimmt zu beobachtender Punct ist.

Auflösung. Man stelle in c und e den Meßtisch genau horizontal auf, und drehe das Lineal bis es nach der durch A gezogenen Verticallinie gerichtet ist: so schneidet sich auf dem Meßtische der Punct ab, welcher in der Charte dem Puncte A entspricht.

Anmerkung. Die Forderung, das Lineal nach der durch A gezogenen Verticallinie zu stellen, ist in dem gewöhnlichen Falle, wo der Winkel AcD und AeD selten erheblich ist, leicht zu erfüllen, da man dann A im Fernrohre sieht, wenn auch dieses horizontal gestellt ist. Wenn hingegen AcD ein großer Winkel ist, so thut man da, wo Genauigkeit erfordert wird, besser, die Lage des Puncts D trigometrisch zu berechnen.

* 433. 7te Aufgabe. In einem Bergwerke sind (Fig. 184.) die Gänge AB, BC, CD, DE, welche nicht in einerley Ebne liegen, ausgearbeitet; man verlangt von diesen Gängen eine Projection auf die verticale Ebne FGH und die horizontale Ebne HIK.

Auflösung. Die hier verlangte Projectionen entstehen, wenn man Linien von jedem Puncte senkrecht auf die Ebnen zieht, und ich nehme an, daß ein Punct A des Ganges in der verticalen Ebne, und ein Punct E desselben in der bestimmten horizontalen Ebne liegt.

Um nun zuerst den horizontalen Riß zu verfertigen, ziehe man eine Linie HN, welche dem Durchschnitt der verticalen Ebne mit der horizontalen vorstellt; diese Linie will ich die Nordlinie nennen und annehmen, die verticale Ebne sey von Norden nach Süden gerichtet. Man messe nun die Länge des geraden Stückes ED des Ganges und den Neigungswinkel DEQ desselben gegen den Horizont, so kann man daraus und aus dem rechten Winkel bey Q ein Dreyeck zeichnen, wo sich dann die Seite QE als die Länge der horizontalen Projection des Ganges ED ergiebt. Die Richtung dieser Projection gegen die Nordlinie findet man, wenn man in E einen Compaß horizontal aufstellt und den Winkel bestimmt, welchen die verticale Ebne QDE mit der Nordlinie macht. Eben so bestimmt man bey jedem Stücke CD die Länge und Richtung der Projection PQ, bis die ganze Reihe von Gängen aufgezeichnet ist. Ist ein Stück AB des Ganges genau vertical, so kommt bey O im horizontalen Risse bloß der Querschnitt dieses Schachtes.

Für den verticalen Riß muß man bemerken, daß es in demselben nicht bloß auf die Länge der vom Ende D eines Ganges gezogenen Verticallinie ankommt, sondern auch auf die Richtung gegen die Ebne GH; man berechnet daher zwar zuerst die Linie QD, welche die senkrechte Entfernung des Punctes M von der Linie HN im Verhältnisse ergiebt, muß aber zugleich aus dem horizontalen Risse abnehmen, wie weit Q von der auf HN senkrechten Linie absteht; dann nimmt man NS = QR diesem Abstande, MS der Höhe des Punctes D gleich und erhält M als Projection von D. So verfährt man ferner für den zweyten Theil des Ganges DC, indem man den senkrechten Abstand des Punctes P im Horizontalrisse von QS, die senkrecht auf HN steht, von S nach O trägt und die verticale Höhe OL = CP nimmt; dann stellt L den Punct C vor.

Es entspricht also dem Puncte E, im Horizontal-Risse E, im Vertical-Risse N, dem Puncte D, im Horizontal-Risse Q, im Vertical-Risse M,

dem Puncte C, im Horizontal-Risse P, im Vertical-Risse L, u. s. w.

* 434. Diese beyden Abrisse vereinigt, geben also eine vollkommene Vorstellung von der ganzen Lage der Gänge. Man sieht nämlich, wenn N Norden, H Süden bezeichnet, daß BC etwas südlich läuft und sich um eben so viel, als BL senkt, dagegen läuft CD etwas nördlich und DE mit starker Senkung wieder südwärts.

435. Aus der Perspective ließen sich hier sehr viele Aufgaben zur Erläuterung mittheilen, aber es würde zu weitläufig seyn, auch nur das Nöthigste hier zu erwähnen. Die allgemeine Aufgabe der Perspective ist folgende: Wenn CDEF eine Figur oder ein Körper von gegebener Gestalt und Lage ist, und es befindet sich ein Auge in O (Fig. 185.), auf der gegebenen Ebne AB, eine in dieser Ebne liegende Figur GH zu zeichnen, welche dem Auge O jene Figur oder Körper genau verdeckt. — Offenbar geschieht dies, indem man von jedem Puncte des Umrisses des Körpers gerade Linien nach dem Auge zieht und die dadurch auf AB abgeschnittene ebne Figur bemerkt. Diese Figur fällt anders aus bey verschiedener Lage der Ebne AB und des Auges. — — Eigentlich verlangt man nun in der Abzeichnung GH nicht bloß den Umriß des Körpers dargestellt

zu sehen, sondern man will auch alle Kanten, Winkel u. s. w. deutlich erkennen, wozu dann eine richtige Schattirung mit gehört. Aber alles dies läßt sich hier bloß andeuten.

436. Grundsatz. Zwey Ebnen oder drey Ebnen reichen nicht hin, um einen Körper zu begränzen, sondern es werden hiezu nothwendig wenigstens vier ebne Flächen erfordert.

Drey Ebnen nämlich welche sich einander so durchschneiden, wie (Fig. 186.) die Ebnen ABC, ABD, ACD, machen zwar eine Abtheilung des Raumes oder umschließen einen Raum, aber dieser Raum ist bey BCD noch unbegränzt und es ist hier eine vierte Ebne nöthig, um den Raum völlig auch von dieser Seite zu begränzen.

437. Erklärung. Wenn drey oder mehrere geradlinigte Winkel (Fig. 186.) BAC, CAD, DAB so an einander liegen, daß ihre Spitzen in A zusammen fallen und jeder Schenkel zweyen Winkeln, die aber nicht in einerley Ebne liegen, gemeinschaftlich ist: so bilden diese ebnen Winkel eine Ecke oder einen körperlichen Winkel; und die Ecke heißt dreyseitig, vierseitig u. s. w. je nach, dem der an einander gefügten ebnen Winkel drey, vier oder mehrere sind.

438. Eine solche Ecke wird also nach BCD hin unbegränzt angenommen, indem man bloß die Form des körperlichen Winkels bey A betrachtet, ohne sich darum zu bekümmern, wie weit die einzelnen Flächen sich nach B, C, D hin erstrecken.

439. Erklärung. Die ebnen Winkel, aus welchen die körperliche Ecke gebildet wird, heißen ihre Seitenflächen, hingegen heißen die Neigungswinkel der Flächen gegen einander die Winkel der körperlichen Ecke; auch heißen die Durchschnittslinien AB, AC, AD die Seitenlinien.

* 440. Es läßt sich leicht übersehen, daß alle andere körperlichen Winkel sich in dreyseitige zertheilen lassen, und es ist daher nur nöthig, die dreyseitigen Ecken genauer zu betrachten.

* 441. Erklärung. Man nennt jede dreyseitige Ecke auch ein körperliches Dreyeck, die drey ebnen Winkel, von dem sie eingeschlossen wird, die Seitenflächen oder Seiten des Dreyecks, und die Neigungswinkel der Ebnen gegen einander die Winkel desselben. Es ist übrigens von selbst einleuchtend, daß der Neigungswinkel der Ebne ABC gegen ACD der Seitenfläche ABC anliegt, aber der Seitenfläche ABD gegenüber steht, und so auch mit den übrigen Seiten.

* 442. Erklärung. Ein körperliches Dreyeck paßt in ein anderes, wenn die ebnen Win-

kel, welche die Seitenfläche bilden, und die Neigungswinkel in dem einen so groß sind, als im andern und in beyden in einerley Ordnung auf einander folgen, so nämlich daß der Seitenfläche die in beyden gleich ist, auch gleiche Winkel gegenüber liegen und rechts unter sich gleiche und links wieder unter sich gleiche Winkel anliegen.

* 443. Anmerkung. Ebne Dreyecke kann man auf einander decken, wenn bey gleichen Grundlinien auch die rechts liegende Seite im einen der links liegenden im andern, und die links liegende Seite in jenem der rechts liegenden in diesem gleich ist; denn man stellt sich dann vor, das eine werde umgekehrt und so aufgedeckt; aber eine solche Umkehrung findet bey den körperlichen Dreyecken nicht Statt.

* 444. **Grundsatz. Körperliche Dreyecke sind gleich, wenn sie in einander passen.**

* 445. Dagegen erhellt aus dem Vorigen, daß zwey körperliche Dreyecke auch dann einander in gewissen Sinne gleich seyn können, wenn sie auch nicht in einander passen, es kann nämlich in beyden die eine Seitenfläche gleich seyn, und der rechts anliegende Winkel des einen dem links anliegenden Winkel des andern, und so die rechts anliegende Seitenfläche des einen der links anliegenden Seitenfläche des andern gleich seyn, auch der dritte Winkel in beyden gleich. Dann passen beyde nicht in einander und weichen von der völligen Gleichheit doch allein darin ab, daß das eine nach der rechten Seite so gebildet ist, wie das andere nach der linken Seite. Man kann solche Dreyecke symmetrisch nennen.

* 446. 33ster Lehrsatz. Wenn in den körperlichen Dreyecken (Fig. 187.) ABCD, abcd jede Seitenfläche des einen einer Seitenfläche des andern gleich ist, BAC = bac, CAD = cad, BAD = bad: so sind auch die Winkel gleich, welche zwischen den wechselseitig gleichen Seiten eingeschlossen sind, nämlich CBAD = cbad, CDAB = cdab, DCAB = dcab.

Beweis. Wenn man in der Ebne CAB, die Linie und in der Ebne DAB die Linie BD auf AB senkrecht zieht: so ist CBD der Neigungswinkel der Ebne CAB gegen BAD, und wenn man auf ähnliche Weise cb, bd zieht, nachdem man ac = AC genommen, so ist cbd der Neigungswinkel der Ebne cab gegen bad; es ist also zu beweisen daß cbd = CBD sey. Man hat AC = ac, BAC = bac, CBA = cba = R, folglich (§. 105.) AB = ab, BC = bc. Ferner ist AB = ab, BAD = bad, ABD = abd = R, also (§. 104.) AD = ad, BD = bd; endlich weil AD = ad, AC = ac, CAD = cad (§. 73.) auch CD = cd. Hieraus erhellt daß die Dreyecke BCD, bcd einander gleich und ähnlich sind, indem alle Seiten im einen sind, wie im andern, also sind die Winkel CBD = cbd und dieses sind die Neiguugswinkel, deren Gleichheit zu erweisen war.

Eben so könnte man die Gleichheit der übrigen zwischen gleichen Seiten eingeschlossenen Neigungswinkel beweisen; wobey man indeß bemerken muß, daß nicht CDB der Neigungswinkel der Ebnen ABD, CAD gegen einander ist, weil unmöglich zugleich

AB und auch AD senkrecht auf der Ebne BCD seyn können, diese also nicht die Ebne beyder Neigunswinkel seyn kann. (§. 416.)

* 447. 34ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 187.) in zwey körperlichen Dreyecken ABCD, abcd zwey Seiten im einen so groß als im andern sind, BAC = bac und BAD = bad, und es ist die Neigung beyder gegen einander gleich groß, so ist auch die dritte Seitenfläche gleich und die Winkel sind gleich, welche gleichen Seiten gegen über stehen.

Beweis. Nimmt man AC = ac und zieht CB in der Ebne CAB, BD in der Ebne BAD senkrecht auf AB, und auf ähnliche Weise cb und bd senkrecht auf ab, so sind CBD, cbd die Neigungswinkel, welche nach der Voraussetzung des Lehrsatzes gleich sind. Die Schlüsse des vorigen Lehrsatzes ergeben auch hier, daß BD = bd, BC = bc sey, und da auch CBD = cbd, so ist (§. 73.) CD = cd. Wir wissen aber ferner aus den Schlüssen des vorigen §., daß AD = ad und folglich sind ACD, acd Dreyecke, wo im einen die Seiten so groß als im andern sind, daher auch die Winkel CAD = cad. Es ist also bey den Voraussetzungen des Lehrsatzes auch die dritte Seitenfläche gleich und dann erhellt die Gleichheit der übrigen Neigungswinkel aus dem vorigen §.

* 448. 35ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 188.) in jedem der körperlichen Dreyecke ABCD, abcd eine Seitenfläche ist, welche auf einer

andern senkrecht steht, BAC senkrecht auf BAD, und bac senkrecht auf bad; und es ist zugleich in beyden die eine am rechten Winkel anliegende Seite, und an beyden die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite gleich groß, BAC = bac, CAD = cad: so ist auch die dritte Seite und folglich die ähnlich liegenden Winkel gleich.

Beweis. Man nehme AC = ac und ziehe CB auf AB und cb auf ab senkrecht: so steht erstere auf der Ebne BAD, letzere auf der Ebne bad senkrecht; ist nun ferner CD auf AD und cd auf ad senkrecht und endlich BD, bd gezogen: so läßt sich die Gleichheit der Dreyecke BCD, bcd und ACD, acd beweisen.

Da nämlich AC = ac, BAC = bac, ABC = abc = R, so ist (§. 105.) AB = ab, BC = bc; daraus aber folgt, weil auch CDA = cda = R angenommen und CAD = cad ist, daß AD = ad, CD = cd sey. Die Dreyecke BCD, bcd haben also zwey gleiche Seiten BC = bc, CD = cd und beyde bey B, b rechte Winkel, weil CB, in der auf BAD senkrechten Ebne auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beyder senkrecht, also auf jeder in BAD durch B gezogenen Linien senkrecht steht, (§. 421.) und dies mit cb derselbe Fall ist. Hieraus erhellt, daß BD = bd und folglich, weil AB = ab, AD = ad, daß auch CAD = cad oder die dritte Seitenfläche beyder körperlichen Dreyecke gleich sey.

* 449. Dieser Lehrsatz dient um durch eine leichte Construction in Fig. 143. den horizontalen Winkel Dce zu finden, wenn der Höhenwinkel Acd und der geneigte Winkel Ace gemessen sind. Setzt man nämlich auf einer Ebne DBA die Ebne des Winkels BAC, (Fig. 188.) welcher dem Höhenwinkel gleich genommen ist, senkrecht, und fügt daran die Ebne eines Winkels CAD, der dem schief liegenden Winkel gleich ist: so wird sich, wenn die letztere Ebne als um AC beweglich angenommen wird, der Durchschnitt AD mit der erstern Ebne BAD so bestimmen lassen, daß CAD jenem schiefen Winkel gleich werde und dann ist BAD dem gesuchten horizontalen Winkel gleich, dessen Größe in Graden man also in diesem Modell abnehmen kann.

* 450. Anmerkung. Mehrere Sätze über die Eigenschaften der körperlichen Dreyecke werden nachher vorkommen, wo die Beweise sich mit Hülfe der Kreise auf der Kugel leichter führen lassen.

Zweyter Abschnitt.

Von den prismatischen Körpern und dem Cylinder.

451. Erklärung. Wenn man (Fig. 177.) in parallelen Ebnen die gleichen und ähnlichen geradlinigten Figuren IKLM, NOPQ so zeichnet, daß die ähnlich liegenden Seiten beyder Figuren einander parallel sind, und man legt durch jedes Paar dieser parallelen Seiten die Ebnen MLPQ, IMQN,

IKON, KOPL so heißt der von allen diesen Ebnen eingeschlossene Körper ein Prisma oder Ecksäule.

452. Erklärung. Die parallelen ebnen Figuren IKLM, NOPQ heißen die Grundflächen des Prisma's, hingegen die durch jedes Paar paralleler Seiten der Grundflächen gelegten Ebnen, die Seitenflächen des Prisma's; die Linien, wo die Seitenflächen zusammen stoßen, heißen die Seitenlinien; überhaupt aber nennt man die Linien, wo zwey Ebnen einen Flächenwinkel bilden, Kanten.

453. Die Grundflächen des Prima's sind also völlig gleiche Polygone in parallelen Ebnen, die Seitenflächen sind Parallelogramme. (§. 402.)

454. Erklärung. Ein Prisma heißt dreyseitig, vierseitig u. s. w. je nachdem die Grundflächen Dreyecke, Vierecke u s. w. sind. Ferner nennt man ein gerades Prisma dasjenige, wo alle Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen stehen, hingegen ist ein Prisma schief, wo die Seitenflächen unter andern Winkeln gegen die Grundflächen geneigt sind.

455. Erklärung. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedum und zwar ein gerades, wenn

die Seitenflächen senkrecht auf die Grundflächen, ein schiefes, wenn sie anders gegen dieselben geneigt sind, und ein rechtwinklichtes, wenn alle Seitenflächen und Grundflächen des Parallelepipedi Rechtecke sind.

455. Erklärung. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Seitenflächen und Grundflächen sämmtlich gleiche Quadrate sind, ein Cubus oder Würfel.

456. Der Würfel ist also ein Körper, welcher von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist.

457. Erklärung. Die Höhe eines Prisma's oder Parallelepipedi ist der senkrechte Abstand beyder Grundflächen von einander.

458. 36ster Lehrsatz. Zwey gerade Prismen ABCDEF, GHIKLM sind gleich, wenn ihre Grundflächen völlig gleich sind und sie gleiche Höhe haben. (Fig. 189.)

Beweis. Die Grundflächen EDF, LKM passen auf einander und da die Seitenflächen beyder Prismen senkrecht auf diesen Grundflächen stehen: so passen auch diese an einander, und wegen der gleichen Höhen fallen endlich auch die beyden andern Grundflächen ABC, GHI zusammen.

* 459. 37ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 190.) die beyden schiefen Prismen ABCDEF, GHIKLM völlig gleiche Grundflächen haben, und es ist zugleich die Seitenfläche BCDF des einen der ähnlich liegenden Seitenfläche HIKM des andern gleich und ähnlich, und beyde sind unter einerley Winkel gegen die Grundfläche geneigt: so sind auch die übrigen ähnlich liegenden Seitenflächen der Prismen je zwey einander gleich und gegen die Grundfläche gleich geneigt, und folglich die beyden Prismen in allen Stücken einander gleich.

Beweis. Die Ebnen BCDF, FDE, und ACDE bilden ein körperliches Dreyeck, dessen Spitze in D liegt; eben so bilden die Ebnen HIKM, MKL und GIKL ein körperliches Dreyeck an dem Puncte K. Weil nun der Winkel CDF = IKM, EDF = LKM angenommen, und der zwischen diesen Seitenflächen eingeschlossene Neigungswinkel gleich ist, so sind in den körperlichen Dreyecken auch die Seitenflächen CDE = IKL, und diese Ebnen sind gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt. (§. 447.) Wenn aber CDE = IKL, so ist auch AED = GLK, weil die Seitenflächen Parallelogramme sind, und der Beweis läßt sich so für die dritte und jede folgende Seitenfläche fortsetzen, daß die Figur und Neigung jeder ähnlich liegenden Seitenflächen bey beyden Prismen ganz gleich ist.

Daß aber dann die Prismen einander völlig gleich sind, erhellt, wenn man sie in einander gepaßt denkt. Legt man nämlich die Grundflächen gehörig an einander, so schließen die Seitenflächen BCDF, HIKM genau an einander, wegen der Gleichheit der Neigungswinkel, und bedecken eine die andere, weil sie ganz gleich sind; eben so schließt ACDE an HIKL und bedeckt sie, und so jede folgende; also passen die Prismen in einander und sind ganz gleich.

* 460. 38ster Lehrsatz. Wenn zwey Prismen (Fig. 190.) ABCDEF, GHIKLM gleiche Grundflächen haben, und es sind überdem zwey an einander stoßende Seitenflächen im einen an Größe und Gestalt genau wie im andern BCDF $\cong$ HIKM und ACDE $\cong$ GIKL, so sind die Prismen völlig gleich.

Beweis. In den körperlichen Dreyecken, deren Spitzen in D und K liegen, sind im einen die Seitenflächen alle genau wie im andern, nämlich EDF = LKM, EDC = LKI, CDF = IKM, und folglich (§. 446.) auch die Neigungswinkel der Ebnen ACDE und BCDF gegen die Grundfläche eben so groß, als die Neigung der Ebnen GIKL und HIKM gegen die Grundfläche. Wenn aber das ist, so erhellt die völlige Gleichheit der Prismen aus dem vorigen Lehrsatze.

461. 8te Aufgabe. Ueber einer gegebenen Grundfläche EDF ein Prisma zu construiren, dessen durch ED gelegte Seitenfläche ein Parallelogramm von gegebener Gestalt ist,

und eine bestimmte Neigung gegen die Grundfläche hat.

Auflösung. Man zeichne in einer Ebne die Figur der Grundfläche, lege durch ED eine unter dem bestimmten Winkel gegen die Grundfläche geneigte Ebne, (§. 425.) und zeichne in derselben das Parallelogramm ACDE dem zur Seitenfläche gegebenen Parallelogramm gleich. Man lege dann durch die Seitenlinie CD und durch die neben liegende Seite der Grundfläche DF, die Ebne CDF und ziehe in derselben FB mit CD, und CB mit DF parallel: so ist auch diese Seitenfläche völlig bestimmt und man kann so jede Seitenfläche aus den vorigen bestimmen.

462. 39ster Lehrsatz. In jedem Parallelepipedo ABCDEFGH (Fig. 191.) sind jede zwey einander entgegengesetzte Seitenflächen parallele und gleiche Parallelogramme.

Beweis. Da die Seitenfläche ABCD sowohl als die Grundfläche ABGH ein Parallelogramm ist, so ist AD mit BC, AH mit BG parallel, also der Winkel DAH = CBG (§. 389.) und die Ebnen der Seitenflächen ADEH, BCFG parallel (§. 400.). Da nun AD, HE, BC, FG parallel und gleich sind, so sind jene Seitenflächen gleiche Parallelogramme.

463. 40ster Lehrsatz. Wenn ein Parallelepipedum ABCD (Fig. 192.) von einer den Seitenflächen AB, CD parallelen Ebne EF geschnitten wird: so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum EFCD zum Ganzen, wie die Flächen EG und AG sich zu einander verhalten.

Beweis. Das auf der Fläche AGD, abgeschnittene Stück EG verhält sich zur ganzen Fläche AG, wie die Seite ED zu AD (§. 193.); haben also AD und ED ein gemeinschaftliches Maß Ah, so theile man AD sowohl als ED in lauter Stücke, die = Ah sind und lege durch die Theilungspuncte Ebnen wie hikl den Seitenflächen AB und DC parallel. Durch diese wird offenbar das ganze Parallelepipedum ABCD in eben so viele gleiche Stücke getheilt, als die Fläche AG, und das Parallelepipedum EFCD in eben so viele gleiche Stücke, als die Fläche EG, und die Stücke beyder Körper sowohl als dieser Seitenflächen sind gleich, also ABCD : EFCD = AG : EG.

* Auch wenn AD und ED kein gemeinschaftliches Maß haben: so läßt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, wie §. 193. übersehen, daß auch dann das abgeschnittene Parallelepipedum sich zum Ganzen verhalte, wie die Fläche EG zu AG, weil allemal, wenn die Theilungslinie der Fläche dies:

seits EL fällt, auch die ganze Theilungs-Ebne dies-seits EF liegt, und letztere jenseits fällt, so bald jene jenseits EL liegt.

464. 41ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 193.) zwey über einerley Grundfläche ABCD stehende Parallelepipeda gleiche Höhen haben, und es liegen überdies zwey Seitenflächen des einen mit zweyen Seitenflächen des andern in einerley Ebne: so sind diese Parallelepipeda an körperlicher Größe gleich.

Beweis. Da die Höhen beyder Körper gleich sind, so liegen die der Grundfläche ABCD entgegengesetzten Flächen EFGH, IKLM in einer Ebne und weil vorausgesetzt wird, daß auch die Seitenflächen ABFE, ABKI in einer Ebne liegen und eben so CDHG und CDML in einer Ebne: so sind die körperlichen Räume ADHEIM und BCGFLK dreyseitige Prismen, welche völlig gleich sind, zieht man nun von beyden den dreyseitigen Körper FGMINO ab und fügt den Raum ADCBNO hinzu, so erhellt die Gleichheit der Parallelpipeden.

Daß nun zuerst die Körper ADHEIM, BCGFKL gleiche Prismen sind, erhellt aus folgendem. Da die Seitenfläche ADHE mit BCGF und eben so ADMI mit BCKL parallel ist (§. 462.)

so ist jede der beyden gegen die Grundfläche gleich geneigt (§. 426.) und es ist überdas wegen der parallelen Seitenlinien die Fläche HDM = GCL = EAI = FBK. Denkt man sich nun diese dreyseitigen Ebnen auf einander gepaßt, so schließt sich BCGF an ADHE und BCLK an ADMI genau an, weil diese Seitenflächen als parallele Ebnen einerley Neigung gegen die Seitenflächen DHM, CGL haben (§. 426.), und die Ebnen BCGF, ADHE, so wie BCLK, ADMI decken einander (§. 462.). Dann aber müssen nothwendig auch die Seitenflächen EHMI und FGLK, so wie die Grundflächen AEI, BFK zusammen fallen, weil ihre Eckpuncte dieselben sind. Diese Prismen sind demnach völlig gleich, und wenn man von beyden das Stück FGMINO abnimmt, so sind auch die prismatischen Körper ADHEFGON und BCONIMLK an Größe, obgleich nicht an Gestalt, gleich; und endlich, wenn man zu beyden das Stück ADCBNO hinzu fügt: so sind die Parallelepipeda ADHEFGCB und ADMIKLCB an Größe gleich, obwohl sie an Gestalt verschieden sind.

Anmerkung. Man übersieht leicht, daß bey der Vergleichung der parallelepipedischen Körper eben so wie §. 167. bey den Parallelogrammen drey verschiedene Fälle vorkommen können, für welche aber der Beweis fast genau derselbe bleibt.

465. 42ster Lehrsatz. Wenn über der Grundfläche ABCD zwey Parallelepipeda von gleicher Höhe stehen, so sind dieselben, in allen Fällen an Inhalt oder körperlicher Größe gleich. (Fig. 193.)

Beweis. Sind ABCDHEFG u. ABCDSPQR diese Parallelepipeda, so liegen wegen der gleichen Höhen die Grundflächen EFGH, PQRS in einer Ebne, und wenn man die Ebnen ABFE, CDHG erweitert und so auch die Ebnen ADSP, BCRQ: so schneiden diese Ebnen einander in AI, DM, BK, CL; diese Linien sind parallel, (§. 404.) und die Ebnen bilden ein Parallelepipedum, dessen Seitenflächen ABKI, DCLM mit den Seitenflächen ABFE, DCGH des erstern in einerley Ebne liegen, und welches folglich wegen der gleichen Grundfläche und Höhe (§. 464.) diesem Parallelepipedo gleich ist; aber eben dies Parallelepipedum ABCDMIKL ist auch dem ABCDSPQR gleich, weil es auch mit diesem gleiche Grundfläche und Höhe und die Seitenfläche ADSP mit ADMI und BCRQ mit BCLK in einerley Ebne hat. (§. 464.) Hieraus folgt also, daß auch die Parallelepipeda ABCDHEFG und ABCDSPQR an Größe oder körperlichen Inhalt gleich sind.

466. 43ster Lehrsatz. Statt eines jeden Parallelepipedi ABCDEFGH (Fig. 194.) läßt sich ein eben so großes rechtwinklichtes Parallelepipedum angegeben, welches mit jenem gleiche Höhe und eine gleich große (obgleich unähnliche) rechtwinklichte Basis hat.

Beweis. Man errichte über der Grundfläche ABCD, die durch die Eckpuncte gezogenen senkrechten Linien AI, BK, CL, DM, und verlängere dieselben bis sie die gehörig erweiterte Ebne EFGH treffen. Dann ist ABCDIKLM ein mit ABCD EFGH gleich großes Parallelepipedum, (§. 465.) und ersteres steht auf der Grundfläche senkrecht; seine Seitenflächen sind also Rechtecke. Wären nun zugleich die Grundflächen Rechtecke, so wäre schon ABCDIKLM das verlangte rechtwinklichte Parallelepipedum. Ist hingegen ABCD ein schiefes Parallelogramm, so errichte man AO, BN auf AB und IO, KP auf IK in der Ebne der Grundflächen senkrecht, und ziehe OQ, PN: so erhellt aus §. 401. und 146. daß AO = IQ = BN = KP und folglich, weil diese Linien parallel sind, (§. 402.) OQ parallel AI, NP parallel BK und das Parallelepipedum ABNOIKPQ ist ein rechtwinklichtes. Es ist aber auch dem ABCDIKLM an Größe gleich; denn die Prismen ADOIMQ und BCNKLP haben völlig gleiche Grundflächen, sind gerade Prismen und haben gleiche Höhen, also sind sie gleich (§. 458.) und das rechtwinklichte Parallelepipedum ABNOIKPQ ist dem ABCD IKLM und folglich auch dem ABCDEFGH gleich.

467. 44ster Lehrsatz. Wenn zwey Parallelepipeda gleiche Höhen haben, so verhält sich der körperliche Inhalt beyder zu einander, wie die Grundflächen. (Fig. 195.)

Beweis. Da sich statt der gegebenen parallelepipedischen Körper, wenn sie schiefwinklicht sind, allemal rechtwinklichte Parallelepipeda angeben lassen, (§. 466.) welche eben so große Grundflächen haben: so brauchen wir nur zu beweisen, daß der Inhalt rechtwinklichter Parallelepipeden sich bey gleichen Höhen verhalte wie ihre Grundflächen. Man füge demnach die rechtwinklichte Parallelepipeda ABCDEFGH und IKLEMNOA so an einander, daß die Seitenflächen AEIM und ADHE in eine Ebne fallen und die Seitenflächen AOLE, ABFE, an einander anschließen. Erweitert man nun die Ebne KLON, daß sie das andere Parallelepipedum in LOPQ durchschneidet: so ist (§. 463.)

AMNOEIKL : AOPDELQH = AMNO : AOPD,

aber auch AOPDELQH : ABCDEFGH = AOPD : ABCD,

also AMNOEIKL : ABCDEFGH = AMNO : ABCD.

oder die gleich hohen Parallelepipeda verhalten sich wie ihre Grundflächen.

463. 45ster Lehrsatz. Wenn zwey Parallelepipeda gleich große Grundflächen haben: so verhalten sie sich dem körperlichen Inhalte nach wie ihre Höhen. (Fig. 192.)

Beweis. Nach dem letzten Lehrsatze sind Parellelepipeda mit gleich großen Grundflächen gleich groß, wenn sie gleiche Höhe haben, auch wenn die Grundflächen einander nicht ähnlich, und wenn die Parallelepipeda schief sind; es folgt also hieraus von selbst, daß bey gleich großen Grundflächen ein doppelt so hohes Parallelepipedum doppelt so groß, ein dreymal so hohes dreymal so groß ist u. s. w. und der Beweis läßt sich hieraus leicht allgemein führen, wenn man die Parallelepipeda in gleich große Stücke theilt, deren Höhe dem gemeinschaftlichen Maße beyder Höhen gleich ist, wie in §. 463.

* Die Anwendung auf Parallelepipeda, deren Höhen kein gemeinschaftliches Maß haben, läßt sich dann leicht nach §. 463. machen.

469. 46ster Lehrsatz. Der körperliche Inhalt zweyer Parallelepipeden ist in zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Schneidet man nämlich gleich hohe parallelepipedische Stücke dieser Körper ab, so verhalten diese sich wie die Grundflächen; die Anzahl solcher Stücke aber verhält sich in beyden wie die Höhen: also ist der Inhalt der ganzen Körper in zusammengesetzten Verhältnisse jener beyden Größen.

470. 47ster Lehrsatz. Wenn man ein Parallelpipedum durch eine Diagonal-Ebne, welche nämlich durch zwey einander entgegengesetzte Seitenlinien geht, in zwey Theile zerlegt: so sind die so entstandenen dreyseitigen Prismen an körperlicher Größe einander gleich.

Beweis. Es sey ABCDEFGH das Parallelepipedum (Fig. 196.) welches durch die Ebne BFHD in zwey dreyseitige Prismen getheilt wird. Diese Prismen lassen sich zwar, wenn das Parallelepipedum schief ist, nicht in einander passen; aber wenn man durch die Endpuncte der Seitenlinie BF die Ebnen aBcd und eFgh auf BF senkrecht legt: so schneiden diese in a, c, d und in e, g, h die übrigen Seitenlinien des Parallelepipedi und man erhält zwey gerade, dreyseitige Prismen aBdeFh und BcdFgh, welche gleich sind, und es läßt sich beweisen, daß das gerade Prisma aBdeFh dem schiefen ABDEFH gleich und jedes die Hälfte des Parallelepipedi ABCDEFGH sey.

Daß erstlich aBdeFh ein gerades Prisma sey, erhellet aus folgendem: Es sind aB, eF Durchschnitte einer Ebne mit zwey parallelen Ebnen, die nämlich beyde auf BF senkrecht stehen, folglich sind (§. 404.) aB und eF parallel, und daher ist, weil auch ae mit BF parallel, die Seitenfläche aBFe ein Parallelogramm, und eben dieses findet für die übrigen Seitenflächen Statt. Dieses Prisma ist aber auch gerade, weil die Seitenlinien auf den Grundflächen senkrecht stehen. Eben dieses gilt von dem Prisma BcdFgh. Diese beyden geraden Prismen sind einander gleich (§. 458.) weil die Grundflächen gleiche Dreyecke sind, indem (§. 404. 146.) aB = dc, ad = Bc, Bd = Bd, und die Höhen ebenfalls gleich; wenn sich also zeigen läßt, daß jedes der schiefen Prismen einem dieser geraden an Inhalt gleich sey, so ist der Lehrsatz bewiesen. Es ist aber aBdeFh dem ABDEFH an Inhalt gleich, weil die abgeschnittenen Stücke abdDAeFhHE ganz gleich sind und in einander passen. Denn wenn F auf B, Fe auf Ba gelegt wird, so passen die Grundflächen aBd, eFh auf einander, weil die ähnlich liegenden Seiten gleich sind, (§. 404. 146.) und ferner schließt dann hH an Dd und eE an aA an, weil beyde auf einerley Puncten der Grundfläche senkrecht stehen; endlich fallen H mit D und E mit A zusammen, weil Hh = Dd, Ee = Ae, da aAB und eEF rechtwinklichte Dreyecke sind, in welchen aB = eF, AB = EF (§. 106.); die abgeschnittenen Stücke passen also in einander, und da eben das sich für die Körper BdDCc, FhHGg zeigen läßt, so ist aBdeFh = ABDEFH = cBdgFh = CBDGFH und folglich ist jedes dreyseitige Prisma ABDEFH die Hälfte des Parallelepipedi ABCDEFGH, welches entsteht, wenn man mit zwey Seitenflächen des Prisma's AF und ED, die Ebnen DG, FC parallel legt und sie bis zum Durchschnitte mit den Ebnen der Grundflächen des Prisma's erweitert.

* 471. Die schiefen Prismen, in welche das Parallelepipedum zerlegt wird, sind an Gestalt nicht ganz gleich; denn wenn der nach der innern Seite des Prisma's liegende Flächenwinkel EADB ein stumpfer ist, so ist der an der ähnlich liegenden Seitenlinie BC liegende Flächenwinkel FBCD ein spitzer. Gleichwohl sind die Seitenflächen des einen Prisma's denen des andern genau gleich, und die ähnlich liegenden körperlichen Winkel zum Beyspiel bey A und C sind nur dadurch ungleich, daß EAD = 180° — GCB, und EAB = 180° — GCD. Man kann solche Körper symmetrisch nennen,

da sie nur darin ungleich sind, daß der eine sich da auswärts neigt, wo der andere sich seitwärts neigt und umgekehrt.

472. 48ster Lehrsatz. Ein jedes Prisma ist an Inhalt gleich einem Parallelepipedo, welches mit ihm gleiche Höhe und zur Grundfläche ein Parallelogramm hat, dessen Fläche der Grundfläche des Prisma's an Größe gleich ist.

Beweis. Für das dreyseitige Prisma erhellt dieses aus §. 470. denn da (Fig. 196.) das Prisma ABDEFH gleich der Hälfte des Parallelepipedi ABCDEFGH, so ist auch, wenn man die Grundfläche durch die mit BA parallele Linie IK halbirt und die Ebne IKLM mit ABFE parallel legt, das Prisma ABDEFH gleich dem Parallelpipedo ABIKEFML, weil ABIKEFML $= \frac{1}{2}$ ABCD EFGH ist, (§. 467.) und es ist ferner ABD $=$ ABIK, (§. 169.) also das Prisma einem eben so hohen Parallelepipedo von gleich großer Grundfläche gleich.

Gilt aber dieses für das dreyseitige Prisma, so gilt es für jedes vielseitige, da jedes vielseitige, wie ABDFGL (Fig. 197.) sich durch die Ebnen BGLD, BGKE in dreyseitige zerlegen läßt.

473. Alle gleich hohe Prismen sind also an Inhalt gleich, wenn ihre Grund-

flächen einen gleichen Flächenraum enthalten.

474. Bemerkung. Wenn man Prismen construirt, deren Grundflächen reguläre Polygone sind, so nähern sich diese Grundflächen desto mehr einem Kreise, je mehrere Seiten sie haben, und da man die Anzahl der Seiten der Polygone nach Willkühr vermehren kann, so führt uns dies auf die Vorstellung von Prismen, deren Grundflächen sich dem Kreise sehr nähern, und so auf den Cylinder.

475. 49ster Lehrsatz. Wenn man von mehreren Puncten E, F, G, H einer Kreislinie EFGH parallele Linien EI, FK, GL, HM zieht, welche außerhalb der Ebne dieses Kreises liegen: so liegen die Durchschnittspuncte I, K, L, M dieser Linie mit jeder Ebne CD, welche der Ebne des Kreises parallel ist, auf dem Umfange eines Kreises, welcher dem Kreise EFHG gleich ist. (Fig. 198.)

Beweis. Zieht man zwischen vier oder mehrern solcher Puncte E, F, G, H gerade Linien: so erhellt aus §. 403. daß die zwischen den Durchschnittspuncten I, K, L, M auf der parallelen Ebne gezogenen geraden Linien ein Vieleck, dem EFGH genau gleich, bilden. Es liegen also auch die Puncte I, K, L, M im Umfange eines Kreises, welcher dem FEGH genau gleich ist, und dieses findet eben so statt, wenn man auch von mehrere Puncten des Kreises EFGH parallele Linien an die Ebne CD gezogen hätte.

476. Erklärung. Wenn man in den parallelen Ebnen AB und CD (Fig. 198.) die gleichen Kreise EFGH und IKLM zeichnet, und man zieht von jedem Puncte im Umfange des einen Kreises parallele Linien nach dem Umfange des andern Kreises, so liegen alle diese Linien auf der Oberfläche des Cylinders. Man kann den Cylinder also betrachten, als einen dem Prisma ähnlichen Körper, dessen Grundflächen aber gleiche Kreise sind.

477. Erklärung. Die zwischen den Mittelpuncten der Grundflächen gezogene gerade Linie NO heißt die Axe des Cylinders und der Cylinder ist gerade, wenn diese Axe auf den Grundflächen senkrecht steht, und schief, wenn sie gegen dieselben geneigt ist.

478. Die Entstehung des geraden Cylinders kann man sich auch so vorstellen. Es sey ENOI (Fig. 199.) ein rechtwinklichtes Parallelogramm, dessen eine Seite NO unverrückt, aber so fest ge-

halten wird, daß sich die Ebnen ENOI um dieselbe drehen kann: so beschreibt die Seite EI, während man die Ebne ENOI ganz um NO dreht, die krumme Oberfläche des Cylinders, und der gerade Cylinder ist also der Körper, welcher durch diese krumme Oberfläche und zwey kreisförmige Grundflächen begränzt wird.

Von dem geraden Cylinder werden wir vorzüglich hier nur reden.

479. Folgende Sätze erhellen aus dem Vorigen von selbst:

1. Wenn eine den Grundflächen parallele Ebne, die Oberfläche des Cylinders schneidet: so ist der Durchschnitt mit derselben eine den Grundflächen gleiche Kreislinie, (§. 475.)
2. Wenn eine durch die Axe des Cylinders gehende oder auch dieser Axe parallele Ebne die Oberfläche des geraden Cylinders schneidet: so ist der Drurchschnitt mit der krummen Oberfläche und den Grundflächen ein rechtwinklichtes Parallelogramm.

* Ebnen, welche gegen die Axe oder Grundfläche unter schiefen Winkeln geneigt sind, schneiden die krumme Fläche des Cylinders in einer länglichen, etwa eyförmigen krummen Linie, die in der höhern

Geometrie unter dem Namen der Ellipse vorkommt, deren Betrachtung aber hier zu schwer seyn würde.

480. Erklärung. Wenn man in die eine Grundfläche des Cylinders eine Polygon zeichet, und legt durch die Seiten desselben Ebnen mit der Axe des Cylinders parallel: so erhält man ein in dem Cylinder construirtes Prisma. Zeichnet man hingegen um die kreisförmige Grundfläche des Cylinders ein Polygon, und legt durch dessen Seiten Ebnen mit der Axe des Cylinders parallel: so erhält man ein um den Cylinder construirtes Prisma.

481. Es läßt sich leicht übersehen, daß die Seitenlinien des in den Cylinder gesetzten Prisma's der Axe parallel sind, und ganz in die Oberfläche des Cylinders fallen; denn sie gehören nach der Definition des Cylinders zu denen, die ganz in seiner Oberfläche liegen; und eben so, wenn man durch die Puncte, wo das um die Grundfläche beschriebene Polygon diese berührt, gerade Linien mit der Axe parallel zieht: so liegen diese in den Seitenflächen des um den Cylinder gezeichneten Prisma's und zugleich in der Oberfläche des Cylinders. Dieses Prisma berührt also den von ihm umschlossenen Cylinder in geraden Linien die der Axe parallel sind.

482. 50ster Lehrsatz. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist eben so groß, als der Inhalt eines gleich hohen Prisma's, dessen Grundfläche an Flächenraum gleich ist der Grundfläche des Cylinders.

Beweis. Da bewiesen ist, daß alle vieleckigen Prismen gleich groß sind, wenn sie gleich hoch sind und ihre Grundflächen gleichen Inhalt haben: so gilt dies auch für Prismen, deren Grundflächen reguläre Polygone sind, die Anzahl ihrer Seiten mag seyn so groß sie will. Da nun sehr vielseitige Polygone sich an den Kreis und folglich sehr vielseitigen Prismen sich an den Cylinder sehr nahe und so nahe als man will anschließen können, wenn man die Anzahl der Seiten groß genug nimmt, so erhellt schon daraus die Richtigkeit des Satzes auch für den Cylinder.

* Genauer läßt sich der Beweis für den geraden Cylinder so führen. Man bezeichne den körperlichen Inhalt eines mit dem Cylinder gleich hohen Prisma's, dessen Grundfläche der Grundfläche des Cylinders gleich ist, mit $= A$: so ist zu beweisen, daß auch des Cylinders Inhalt $= A$ sey.

Nimmt man an, dieß sey nicht der Fall, so wird A der Inhalt eines andern eben so hohen Cylinders seyn, dessen Grundfläche entweder größer oder kleiner, als die des gegebenen Cylinders wäre. Es sey CA (Fig. 200.) der Halbmesser der Grund=

fläche des gegebenen Cylinders und man nehme an, die körperliche Größe = A sey der Inhalt eines geraden Cylinders von gleicher Höhe mit dem gegebenen und von kleinerer Grundfläche, deren Halbmesser = CD. Dann wird (§. 330.) es möglich seyn, um diesen neuen Cylinder ein gerades Prisma zu construiren, dessen Grundfläche GHIP den Kreis ABE nicht berührt und dessen Seitenflächen folglich die Oberfläche des auf der Grundfläche ABE stehenden Cylinders nicht berühren. Dieses Prisma ist größer als der über CD errichtete Cylinder also nach unsrer Voraussetzung größer, als A; aber des Prisma's Grundfläche ist kleiner als der Kreis ABE, also nach §. 473. das über GHIP errichtete gerade Prisma kleiner als ein gleich hohes, dessen Grundfläche dem Kreise ABE gleich ist, und dieses ist = A, also das gerade Prisma über GHIP kleiner als A. Auf diese beyden widerstreitenden Schlüsse geräth man aber immer, wenn man annimmt, ein über der kleinern Grundfläche stehender Cylinder sey gleich einem eben so hohen Prisma, dessen Grundfläche der Grundfläche des größern Cylinders gleich sey.

Hätte man umgekehrt angenommen, der Inhalt = A sey gleich einem eben so hohen Cylinder als der gegebene, dessen Grundfläche aber größer sey: so ließe sich in diesem größern ein gerades Prisma construiren, welches den gegebenen kleinern Cylinder nicht berührt, dieses müßte, wenn unsere Voraussetzung richtig wäre, kleiner als A seyn; es hat aber eine größere Grundfläche als der kleine Cylinder und gleiche Höhe, ist also offenbar größer als A, weil A der Inhalt eines Prisma's von dieser

Höhe und von kleinerer, der Grundfläche des kleinen Cylinders gleicher Grundfläche ist.

Der Inhalt des geraden Cylinders ist also gleich einem Prisma von eben so großer Grundfläche und Höhe. Derselbe Beweis aber läßt sich auf den schiefen Cylinder anwenden, wenn man die auf der kleinern oder größern Grundfläche construirten Cylinder annimmt, daß die Mittelpuncte so wohl der obern als der untern Grundfläche zusammen fallen. Der Lehrsatz gilt also für alle Cylinder.

483. 51ster Lehrsatz. Die körperliche Größe zweyer Prismen oder Cylinder verhält sich 1. wie die Größe der Grundflächen, wenn die Höhen dieser Körper gleich sind; 2. wie die Höhen, wenn die Grundflächen an Größe gleich sind; 3. im Allgemeinen ist die körperliche Größe der Prismen und Cylinder in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Da jedes Prisma und folglich (§. 482.) auch jeder Cylinder gleich ist einem eben so hohen Parallelepipedo von gleich großer Grundfläche: so ist dieser Lehrsatz eine leichte und nothwendige Folgerung aus den Lehrsätzen §. 467. 468. 469.

Dritter Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel.

484. Erklärung. Wenn (Fig. 179.) durch die Seitenlinien des in einer Ebne CD gezeichneten geradlinigten Vieleckes FGHK, die Ebnen FKE, FGE, GHE, HKE gelegt werden, welche alle durch den Punct E gehen: so begränzen diese Ebnen zusammengenommen mit jenem Polygone einen Körper, der eine Pyramide heißt.

485. Erklärung. Das Polygon FGHK heißt die Grundfläche der Pyramide, und die Pyramide ist dreyseitig, vierseitig, fünfseitig u. s. w. je nachdem die Grundfläche es ist. Die Ebnen FKE, FGE, GHE, HKE sind die Seitenflächen der Pyramide; und diese sind allemal Dreyecke und ihre Anzahl so groß als die Anzahl der Seiten der Grundfläche. Die Linien EF, EG, EH, EK heißen die Seitenlinien, und auch hier alle die Linien in welchen zwey der begränzenden Ebnen zusammenstoßen Kanten. Der Punct E wo die sämmtlichen Seitenflächen zusammentreffen, ist die Spitze der Pyramide.

486. Erklärung. Eine Pyramide ist regulär, wenn ihre Grundfläche ein reguläres Polygon

ist, und ihre Seitenflächen als gleichschenklichte Dreyecke sind.

487. Erklärung. Die Höhe einer Pyramide ist der senkrechte Abstand ihrer Spitze von der Ebne der Grundfläche.

488. 52ster Lehrsatz. Wenn eine Pyramide EFGHK (Fig. 179.) durch eine der Grundfläche parallele Ebne AB geschnitten wird: so haben die Seitenlinien und die Höhe der an der Spitze abgeschnittenen Pyramide Efghk unter einander und zu den Seiten der Grundfläche fghk eben das Verhältniß, welches die Seitenlinien und die Höhe der ganzen Pyramide unter einander und zu den Seiten der Grundfläche FGHK haben.

Beweis. Es ist schon oben (§. 407.) bewiesen, daß die Grundfläche der abgeschnittenen Pyramide der Grundfläche der ganzen Pyramide ähnlich ist, und daß die Seiten derselben sich zu einander verhalten, wie die ähnlich liegenden Seitenlinien EF, Ef der Pyramide, auch daß Ef : EF = Eg : EG u. s. w. Wir haben also nur noch zu beweisen, daß auch für die Höhe Em, EM eben das Verhältniß Statt finde. Da die Ebnen AB, CD parallel sind, so steht die gerade

Linie EM auf beyden zugleich senkrecht, (§. 394.) und wenn man FM, fm zieht so sind diese Linien parallel, (§. 404.) und daher (§. 274.) EF : Ef = EM : Em.

489. 53ster Lehrsatz. Wenn die Grundflächen BCDE, FGHIK zweyer Pyramiden ABCDE, AFGHIK in einer Ebne liegen und ihre Spitzen zusammenfallen: so verhalten sich die Flächen der Durchschnitte einer der Grundfläche parallelen Ebne mit beyden Pyramiden, bcde, fghik zu einander, wie die Grundflächen. (Fig. 201.)

Beweis. Man hat nämlich, wenn AL senkrecht auf der Ebne beyder Grundflächen ist und diese Linie die Ebne hd in l trifft, FG : fg = AL : Al = BC : bc (§. 488.) und BCDE : bcde = BCq : bcq : und FGHIK : fghik = FGq : fgq (§. 303.), also weil FGq : fgq = BCq : bcq, auch FGHIK : fghik = BCDE : bcde oder FGHIK : BCDE = fghik : bcde.

490. 54ster Lehrsatz. Wenn zwey Pyramiden (Fig. 202.) ABCDE und abcde völlig gleiche Grundflächen haben, und es ist daben nicht bloß die Höhe beyder gleich, AF

= af, sondern es haben auch die Durchschnittspuncte F, f der aus der Spitze gezogenen senkrechten Linien mit den Ebnen der Grundflächen eine ähnliche Lage, daß nämlich BF = bf, EBF = ebf: so sind die Pyramiden in allen Stücken gleich.

Beweis. Legt man nämlich die gleichen Grundflächen so auf einander, daß sie einander decken, so fällt auch f auf F, weil (§. 73.) die Dreyecke FBC, fbc gleich sind, und die Senkrechte fa fällt mit FA, also weil fa = FA, auch a mit A zusammen, und es erhellt daß die Seitenfläche der einen Pyramide genau an die Seitenflächen der andern Pyramide passen, also beyde genau gleich sind.

* 491. 55ster Lehrsatz. Wenn zwey Pyramiden (Fig. 202.) ABCDE, abcde völlig gleiche Grundflächen haben, BCDE ≅ bcde und es sind die der Grundfläche anliegenden und zu derselben körperlichen Ecke gehörenden ähnlich liegenden Winkel zweyer an einander stoßender Seitenflächen in einer so groß als in der andern ABC = abc, ABE = abe, und die durch B und b gehenden Seitenlinien gleich, AB = ab: so sind die Pyramiden einander völlig gleich.

Beweis. In diesem Falle haben die körperlichen Dreyecke, deren Spitzen B und b sind, alle Seiten gegenseitig gleich, und es ist daher die Ebne ABC unter eben dem Winkel wie abc gegen die Grundfläche geneigt und ABE unter eben dem Winkel wie abe (§. 446.). Da nun auch AB = ab und BC = bc, so ist (§. 73.) AC = ac, ACB = acb, und folglich an den körperlichen Ecken bey C, c, zwey Seiten gleich, ACB = acb, DCB = dcb und der Neigungswinkel beyder gegen einander gleich, ACBD = acbd, also (§. 447.) auch die dritte Seitenfläche gleich, ACD = acd, und diese beyden Ebnen gleich geneigt gegen die Grundfläche. Dann aber folgt weiter, weil AC = ac, DC = dc, daß auch AD = ad, ADC = adc und so lassen sich die Schlüsse fortsetzen und die Gleichheit aller Seitenflächen und aller körperlichen Ecke beweisen, woraus dann die gleiche Lage und Länge der aus der Spitze herabgelassenen senkrechten Linie von selbst folgt, folglich die Gleichheit der ganzen Pyramiden.

* 492. 56ster Lehrsatz. **Wenn die Pyramiden ABCDE, abcde nicht bloß gleiche und ähnliche Grundflächen haben, sondern es ist auch in beyden eine Seitenfläche gleich, ABC $\cong$ abc, und dabey ähnlich liegend und in beyden gleich geneigt gegen die Grundfläche: so sind die Pyramiden in allen Stücken gleich. (Fig. 202.)**

Beweis. Die körperlichen Ecken an B und b sind in diesem Falle völlig gleich, weil zwey Seitenflächen und der eingeschlossene Neigungswinkel in einer so wie in der andern sind (§. 447.); man hat also den Winkel ABE = abe und die Neigung beyder Ebnen gegen die Grundflächen gleich, auch weil AB = ab, (§. 73.) AE = ae. Hieraus läßt sich dann weiter die Gleichheit und gleiche Neigung der übrigen Seitenflächen beweisen.

* 493. 57ster Lehrsatz. Wenn man (Fig. 203.) die sämmtlichen Seitenlinien oder Kanten einer dreyseitigen Pyramide SABC in D, E, F, G, H, I, halbirt: so theilen die durch diese Puncte gelegten Ebnen DEF, FEGH, EGI die Pyramide in zwey gleich große Prismen DEFAGH, EGIFHC und zwey in allen Rücksichten gleiche Pyramiden SDEF, EGBI.

Beweis. Daß zuerst die vier Puncte E, F, G, H in einer Ebne liegen, erhellt daraus, weil (§. 275.) sowohl EG als FH mit AS parallel sind, da EB : GB = SB : AB und FC : HC = SC : AC; es ist also auch FH mit EG parallel (§. 388.) und da (§. 275.) DE mit AG, DF mit AH parallel, so ist die Ebne DEF der Grundfläche parallel (§. 400.) und DEF $\cong$ AGH und EG = FH (§. 402.), also ist DEFAGH ein Prisma. Eben so erhellt daß die Ebne EGI mit FHC parallel und EF = GH = CI, also auch EGIFHC ein Prisma sey. Daß diese Prismen gleich sind, läßt sich zeigen, wenn man über der Grundfläche CHGI ein Parallelepipedum construirt, dessen eine Seitenfläche EFHG ist; denn jedes der Prismen ist halb so groß, als das Parallelepipedum, CHGIPFEY. Dieses erhellt für das Prisma EGIFHC unmittelbar aus §. 470. für das Prisma DEFAGH aber, weil die Dreyecke AGH, CGH gleiche Grundlinien AH = HC haben und ihre Spitzen in G zusammen fallen; die Dreyecke AGH, HCG sind also an Fläche gleich und folglich die Prismen AGHDEF und GCHEPF gleich, (§. 473.) jedes halb so groß, als das Parallelepipedum CHGIPFEY. Endlich sind die beyden Pyramiden SDEF, EGBI so völlig gleich, daß sie in einander passen, denn es ist GI = HC = AH = DF, BI = EF, GB = AG = DE, also die Grundflächen gleich, ferner GE = AD = SD, EB = SE und also die Seitenfläche EGB, SDE gleich, die durch ähnlich liegende Seiten der Grundflächen gehen, und die Neigung dieser Seitenflächen gegen die parallelen Grundflächen ist gleich, weil SDE, EGB in einer Ebne liegen. (§. 426.) Die Pyramiden passen also in einander. (§. 492.)

* 494. 58ster Lehrsatz. Wenn man über der dreyeckigen Grundfläche ABC (Fig. 203.) eine Pyramide SABC und ein eben so hohes Prisma ABCSKL setzt: so ist der körperliche Inhalt der Pyramide größer als das Viertel und kleiner als die Hälfte des Prisma's.

Beweis. Wenn man die Pyramide so wie im vorigen §. eintheilt, so ist AG = $\frac{1}{2}$ AB, das Dreyeck AGH ∽ ABC, und die Fläche dieses Dreyeckes AGH = $\frac{1}{4}$ ABC, (§. 303.) also das Prisma AGHDEF = $\frac{1}{4}$. ABCDOP, (§. 483.) und ferner ABCD = $\frac{1}{2}$ ABCSKL, also AGHDEF der achte Theil des ganzen Prisma's ABCSKL und da die Pyramide größer ist, als die beyden gleich großen Prismen AGHDEF und EHIFHC (§. 493.) so ist sie größer als ein Viertel des Prisma's ABCSKL.

Zugleich ist sie kleiner als die Hälfte dieses Prisma's, denn wenn man DG, DH zieht, so ist die Pyramide DAGH der SDEF gleich, weil beyder Pyramiden Grundflächen und ähnlich liegende Seitenflächen ganz gleich sind. Die Pyramide DAGH ist aber offenbar kleiner, als das Prisma AGHDEF; also die ganze Pyramide SABC, welche $= 2 \,.\, DAGH + 2 \,.\, AGHDEF$ ist kleiner als $4 \,.\, AGHDEF$, also kleiner als die Hälfte des Prisma's ABCSKL, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat.

495. 59ster Lehrsatz. Jede dreyseitige Pyramide ist an körperlichem Inhalte genau so groß, als der dritte Theil des über derselben Grundfläche errichteten, gleich hohen Prisma's.

Erster Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zuerst zeigen, daß alle gleich hohe dreyseitige Pyramiden gleichen Inhalt haben, wenn ihre Grundflächen gleich groß, obgleich nicht einander ähnlich sind. Wenn man in gleichen und sehr geringen Höhen über der Grundfläche die Ebnen Fig. 204. IKL, MNO parallel mit den Grund=

flächen legt, so ist, wenn BCD = FGH, auch IKL = MNO, (§. 489.) und die Höhen dieser Abschnitte sind gleich; man wird daher wohl nicht zweifeln, daß der Inhalt dieser Abschnitte gleich sey, welche ihrer geringen Höhe wegen sehr wenig von eben so hohen über der Grundfläche errichteten Prismen verschieden sind. Eben so ließe sich aber der Beweis für einen zweyten, dritten, vierten Abschnitt führen und so die Gleichheit der ganzen Pyramiden wenigstens einsehen, obgleich dieser Beweis nicht strenge geometrisch ist.

Setzt man nun dieses voraus, daß Pyramiden, die nicht in einander passen gleich groß sind, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben: so läßt sich der Beweis folgendermaßen führen. Man errichte (Fig. 205.) über der Grundfläche der Pyramide ein Prisma von gleicher Höhe, dessen eine Ecke A mit der Spitze der Pyramide zusammen fällt; dann wird durch die Ebne ADC eine Pyramide abgeschnitten und wenn man durch AFD eine zweyte Ebne legt, so ist das Prisma in drey Pyramiden ABDC, DAEF, AFCD getheilt, von denen leicht zu beweisen ist, daß sie gleich groß sind. Die Pyramiden ABDC und DAEF haben die gleichen Grundflächen BDC, AEF und sind gleich hoch, indem sie zwischen einerley parallelen Ebnen stehen, sie sind also an Inhalt gleich.

Aber auch die Pyramiden AEFD, ACDF sind gleich; denn wenn man DEF, FCD als ihre Grundflächen betrachtet, so sind diese gleich und die Spitzen beyder Pyramiden fallen in A zusammen, sie sind also gleich hoch und folglich an Inhalt gleich. Es ist also das Prisma in drey gleiche Pyramiden getheilt und die Pyramide ABCD ist ein Drittel des über derselben Grundfläche stehenden gleich hohen Prisma's.

* Zweyter Beweis. Da der vorige Beweis nicht völlig strenge ist, so wollen wir annehmen (Fig. 206.) sey die Pyramide SABC nicht gleich dem Drittel eines eben so hohen, über derselben Grundfläche errichteten Prisma's. Wäre dieses nicht, so würde die Pyramide SABC dem Drittel eines gleich hohen Prisma's, entweder von größerer oder kleinerer Grundfläche gleich seyn. Ich setze also zuerst, die Pyramide sey gleich dem Drittel eines eben so hohen Prisma's von der Grundfläche AED, also SABC $= \frac{1}{3}$. ADESGF. Wir haben gesehen, daß wenn man die Seiten der Pyramide in H, I, K, L, M halbirt, die Pyramide SABC $= 2$. KLMAHI $+ 2$. SKLM sey. Es ist aber KLMAHI $= \frac{1}{8}$ SNOACB, wenn SNOACB das über der Grundfläche der Pyramide in gleicher Höhe errichtete Prisma ist. (§. 494.) Wäre also SABC $= \frac{1}{3}$ ADESGF, so wäre $\frac{1}{3}$ ADESGF oder $\frac{1}{3}$ SNOACB $+ \frac{1}{3}$ FGONEDBC $= \frac{1}{4}$ SNOACB $+ 2$ SKLM, (§. 493.) daher wenn man an beyden Seiten des Gleichheitszeichens subtrahirt $\frac{1}{12}$ SNOACB $+ \frac{1}{3}$ FGONEDBC $= 2$ SKLM, oder, weil SNOACB $= 8$. SPQKLM,

$\frac{2}{3}$ SPQKML + $\frac{2}{3}$ FGONRUTS = 2 SKLM, wenn die Ebne RSTU mit FGON parallel ist und die Seitenlinien und folglich das ganze Prisma FGONEDBC halbirt. Dann wäre also die Pyramide RKLM = $\frac{1}{3}$ SPQKML + $\frac{1}{3}$ FGON RUTS, gleich dem Drittel eines mit der Pyramide gleich hohen Prisma's, dessen Grundfläche = KLM + BCED ist.

Halbirt man abermals die Seiten dieser Pyramide in V, W, X, so läßt sich durch eben die Schlüsse zeigen, die Pyramide SVWX sey gleich dem Drittel eines mit ihr gleich hohen Prisma's, dessen Grundfläche = VWX + BCED sey, und so abermals, wenn SV, SW, SX in V, W, X halbirt sind, es sey die Pyramide SVWX gleich dem Drittel eines mit dieser Pyramide gleich hohen Prisma's, dessen Grundfläche = VWX + BCED. Durch diese Eintheilungen kommt man gewiß endlich auf eine Pyramide, deren Grundfläche gleich BCDE oder kleiner als BCED ist; wenn wir nun annehmen SVWX sey diese Pyramide, also VWX = BCDE, so wäre SVWX gleich dem Drittel eines gleich hohen über der Grundfläche = VWX + BCDE = 2 VWX errichteten Prisma's, oder gleich zwey Dritteln des über der Grundfläche VWX errichteten, mit der Pyramide gleich hohen Prisma's; und es ließe sich sogar beweisen, daß man endlich auf eine Pyramide kommen könnte, die größer wäre, als ein gleich hohes über derselben Grundfläche errichtetes Prisma, welches unmöglich ist. Es kann also nicht SABC > $\frac{1}{3}$ SNOACB seyn. Aber die Pyramide kann auch nicht kleiner seyn, als das Drittel dieses Prisma's. Denn wäre SfgAed ein über einer kleinern Grundfläche errichtetes, mit der

Pyramide gleich hohes Prisma, und es sollte SABC $= \frac{1}{3}$ SfgAed seyn: so hätte man $\frac{1}{3}$ SNOACB $- \frac{1}{3}$ NOgfCBde $= 2 \,.\,$ KLMAHI $+ 2$ SKLM $= \frac{1}{4}$ SNOACB $+ 2$ SKLM, oder $\frac{2}{3}$ SPQKLM $- \frac{2}{3}$ fgONruTS $= 2$ SKLM; also SKLM gleich dem Drittel eines mit dieser Pyramide gleich hohen, über der Grundfläche KLM — ruTS = KLM — BCed errichteten Prisma's. Eben so findet man, wenn in V, W, X die Seiten SK, SL, SM halbirt sind, daß die Pyramide SVWX gleich seyn würde einem mit ihr gleich hohen Prisma von der Grundfläche = VWX — BCed und so ferner; und da die Grundfläche VWX, wenn man die Halbirungen fortsetzt, bey jeder Pyramide kleiner wird, BCed aber einerley bleibt, so kommt man gewiß endlich auf eine Pyramide, deren Basis kleiner als BCed, und deren Inhalt folglich = 0 wäre, obgleich sie noch eine bestimmte Basis und Höhe hätte. Da nun diese Schlüsse zu Ungereimheiten führen: so ist der Inhalt einer Pyramide weder größer noch kleiner, als das Drittel des über derselben Grundfläche errichtete gleich hohen Prisma's.

496. 60ster Lehrsatz. Jede Pyramide ist so groß, als eine über derselben Grundfläche errichtetes Prisma, dessen Höhe ein drittel von der Pyramide ist.

Beweis. Da seine jede Pyramide sich in mehrere dreyseitige zerlegen läßt, und jede dreyseitige Pyramide dem Drittel eines eben so hohen über derselben Grundfläche errichteten Prisma's gleich ist: so ist auch die ganze Pyramide gleich dem Drittel eines über ihrer Grundfläche errichteten, mit ihr gleich hohen Prisma's, oder gleich einem über dieser Grundfläche errichteten Prisma, dessen Höhe nur ein Drittel von der Höhe der Pyramide beträgt.

497. 61ster Lehrsatz. 1. Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich in Rücksicht ihres körperlichen Inhalts wie Grundflächen; 2. Pyramiden von gleich großen, wenn auch unähnlichen Grundflächen verhalten sich der körperlichen Größe nach, wie ihre Höhen, und 3. der körperliche Inhalt zweyer Pyramiden ist in zusammengesetztem Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Da jede Pyramide gleich ist einem über eben der Grundfläche errichteten Prisma, dessen Höhe ein Drittel von der Höhe der Pyramide ist: so verhalten sich zwey Pyramiden, wie diese ihnen gleichen Prismen und daß bey diesen die im Lehrsatze angegebenen Verhältnisse Statt finden, ist §. 483. gezeigt.

* 498. 62ster Lehrsatz. Wenn von einer Pyramide AFGH (Fig. 207.) durch eine mit der Grundfläche parallele Ebne BCD das Stück, BCDFGH abgeschnitten wird:

so ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide BCDFGH so groß, als drey vollständige, mit diesem Stumpfe gleich hohe Pyramiden, deren Grundflächen gleich sind den beyden Grundflächen BCD, FGH der abgekürzten Pyramide und einer mittlern geometrischen Proportional-Größe zwischen diesen beyden Grundflächen.

Beweis. Legt man durch FCH eine Ebne, so schneidet diese eine Pyramide EFGH ab, welche die untere Grundfläche der abgekürzten Pyramide zur Grundfläche und mit diesem Stumpfe gleiche Höhe hat; und wenn man durch BCH eine Ebne legt, so schneidet diese von dem übrigen Stücke eine Pyramide HBCD, ab, welche zur Grundfläche die obere Grundfläche BCD des Stumpfes und mit ihm gleiche Höhe hat. Dies sind also zwey von dem im Lehrsatze erwähnten Pyramiden, und es ist nur noch zu beweisen, daß das nach Wegnahme dieser beyden Pyramiden übrig bleibende Stück HBCF gleich ist einer mit der abgestumpften Pyramide gleich hohen Pyramide, deren Grundfläche die mittlere Proportionalgröße zwischen BCD und FGH ist.

Nimmt man nun H für die gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden HBCF und HFCG an, so haben diese gleiche Höhen, weil ihre Grundflächen BCF, FCG in einerley Ebne liegen und die Spitzen zusammenfallen, und ihr Inhalt ist daher der Größe dieser Grundflächen proportional, (§. 497.) nämlich HFCG : HFCB = FCG : FCB = FG : BC. Denn die Flächen FCG, FCB sind gleich hohe Dreyecke, da BC parallel mit FG, und ihr Inhalt also den Grundlinien proportional. Die zuerst abgeschnittene Pyramide verhält sich also zu dieser dritten wie FG : BC; aber die erste verhielt sich zur zweyten wegen der gleichen Höhe, wie FGH : BCD, das ist wegen der Aehnlichkeit dieser Figuren (§. 303.) wie $FG^2 : BC^2$. Es ist also erste Pyramide : zweyte Pyramide $= FH^2 : BC^2$ dritte Pyramide : erste Pyramide $=$ BC : FG; also (Arithm. §. 176.) dritte Pyramide : zweyte Pramide $=$ FG : BC und folglich erste Pyramide : dritten Pyramide $=$ dritte Pyramide : zweyte Pyramide und diese dritte ist die mittlere Proportionalgröße zwischen den beyden andern. Sollten also alle drey gleiche Höhen haben, so muß die Grundfläche der dritten die mittlere Proportionalgröße zwischen den Grundflächen der beyden übrigen seyn.

* 499. Wir werden in der Folge sehen, daß der Inhalt einer Pyramide sich betrachten läßt, als ein Product aus ihrer Grundfläche in ein Drittel ihrer Höhe. Setze ich also hier $FGH = a^2$; $BCD = b^2$, die Höhe der abgestumpften Pyramide $= c$, die Höhe der oben fehlenden Stücke $= d$, so ist der Inhalt des Stumpfes $= \frac{1}{3} a^2 (c + d) - \frac{1}{3} b^2 d$, und man hat (§. 488.) $FG : BC = c + d : d$, und auch $FG^2 : BC^2 = a^2 : b^2$, (§. 303.) also $c + d : d = a : b$ und (Arithm. §. 159.) $ad = cb + bd$, also $ad - bd = cb$, und $d = \frac{bc}{a-b}$; $c + d = \frac{ac}{a-b}$; folglich der Inhalt des Stumpfes $= \frac{1}{3} a^2 . \frac{ca}{a-b} - \frac{1}{3} b^2 . \frac{bc}{a-b} = \frac{\frac{1}{3} a^3 c - \frac{1}{3} b^3 c}{a-b}$, oder wenn

man dividirt $= \frac{1}{3} a^2c + \frac{1}{3} abc + \frac{1}{3} b^2c$, das ist gleich dreyen Pyramiden von der Höhe $= c$, deren Grundflächen sind: die der einen $= a^2$, der zweyten $= b^2$, der dritten $= ab$, wo $a^2 : ab = ab : b^2$.

Hier ergiebt also die Buchstabenrechnung eben das, was die geometrische Betrachtung zeigt.

* 500. **63ster Lehrsatz.** Wenn ein dreyeckiges Prisma von einer Ebne EFD, welche der Grundfläche ABC nicht parallel ist, geschnitten wird: so ist der Inhalt des Stückes ABCDEF, dreyen Pyramiden gleich, die gleiche Grundflächen, der Grundfläche ABC des Prisma's gleich, haben, und deren Höhen den Entfernungen der drey Eckpuncte D, E, F von der Grundfläche gleich sind. (Fig. 208.)

Beweis. Man lege durch den einen Eckpunct F die Ebne AFB, so schneidet diese eine Pyramide ab, deren Grundfläche mit der Grundfläche ABC des Prisma's einerley ist, und deren Spitze in F liegt. Dieses ist also eine der angegebenen Pyramiden. Das übrig bleibende Stück FAEDB theile man durch die Ebne FDB in zwey dreyseitige Pyramiden: so ist zu beweisen, daß diese den beyden andern, im Lehrsatze angegebenen Pyramiden gleich sind.

Betrachtet man C als die gemeinschaftliche Spitze der beyden Pyramiden BADF, CABF, so haben diese gleiche Höhen, weil ihre Grundflächen

ADF, ACF in einerley Ebne liegen; ihr Inhalt ist also den Grundflächen ADF, ACE proportional und folglich den Linien AD, CF, weil ADF, ACF gleich ACF hohe Dreyecke über den Grundlinien AD, CF sind. Die Linien AD, CF aber verhalten sich zu einander, wie die senkrechten Abstände der Puncte D, F von der Grundfläche, weil AD, CF parallel, folglich (§. 390.) gleich geneigt gegen die Grundfläche sind, und daher die Dreyecke ähnlich sind, welche von dem aus D und F auf ABC gezogenen Lothe, den Linien AD, CF und den in ABC zwischen A, C und den gehörigen Durchschnittspuncten des Lothes gezogenen Linien gebildet werden. Die Pyramide FADB ist also eben so groß, als eine über ABC errichtete Pyramide, deren Spitze in D läge.

Endlich verhalten sich die Pyramiden ABCF, EFBD, wie die Flächen BCF, FBE, weil sie, wenn man diese Flächen als Grundflächen betrachtet, gleiche Höhe haben, da die Spitzen A, D in einer der Grundfläche parallelen Linie liegen. Diese Pyramiden verhalten sich also wie CF zu BE, und daher aus den vorhin erwähnten Gründen, wie der senkrechte Abstand des Punctes F von der Grundfläche zu dem senkrechten Abstande des Punctes E von derselben. Eben so aber verhält sich FABC zu einer über ABC errichteten Pyramide, deren Spitze in E liegt, und es erhellt also, daß das Stück des Prisma's so groß ist, als drey über ABC errichtete Pyramiden, deren Spitzen in den drey Eckpuncten D, E, F lägen.

501. **Erklärung.** Wenn man von allen Puncten im Umfange des Kreises ABC (Fig. 209.)

gerade Linien nach einem Puncte D zieht, der nicht in der Ebne dieses Kreises liegt: so befinden sich alle diese Linien auf der Oberfläche eines Kegels. Der Kegel ist also ein mit der Pyramide zu vergleichender Körper, welcher aber zur Grundfläche einen Kreis hat.

502. Erklärung. Der Kreis ABC heißt nämlich die Grundfläche, D die Spitze des Kegels, und wenn man von der Spitze nach dem Centro der Grundfläche eine gerade Linie zieht, so ist diese die Axe des Kegels. Jede von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche gezogene gerade Linie aber, heißt eine Seitenlinie des Kegels.

503. Erklärung. Ein Kegel ist gerade, wenn seine Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, aber schief, wenn sie nicht senkrecht gegen dieselbe ist. Die Entstehung des geraden Kegels kann man sich auch so vorstellen, daß man annimmt, ein rechtwinklichtes Dreyeck drehe sich um eine seiner Catheten, während diese unverrückt gehalten wird, dann beschreibt die Hypotenuse die Oberfläche eines geraden Kegels; und diese Hypotenuse ist in jeder Lage des Dreyecks eine Seitenlinie des Kegels.

504. Aus den Lehrsätzen §. 475 und 407. läßt sich leicht schließen, daß alle Durschnitte ebner Flächen, die der Grundfläche paral-

lel sind, mit der Kegelfläche Kreise seyn werden, deren Halbmesser dem Abstande dieser Ebnen von der Spitze des Kegels proportional sind. Auch übersieht man leicht, daß jede durch die Axe des Kegels gelegte Ebne mit der Oberfläche desselben zwey geradlinigte Durchschnitte macht, oder daß die Durchschnitte solcher Ebnen mit der krummen Oberfläche und der Grundfläche des Kegels ein geradlinigtes Dreyeck bilden, welches bey dem geraden Kegel das Doppelte desjenigen Dreyeckes ist, durch dessen Umdrehung der Kegel gebildet wird.

* Ebnen aber, welche weder durch die Axe gehen noch auch der Grundfläche parallel sind, machen mit der Kegelfläche andere krummlinigte Durchschnitte, deren Gestalt nach der Lage dieser Ebnen verschieden ist. Stellt man sich vor, es sey ADC die durch die Axe des geraden Kegels gelegte Ebne und EF in derselben mit der Grundfläche parallel gezogen: so wird der Durchschnitt einer auf ADC senkrechten Ebne mit der Kegelfläche desto länglicher ausfallen, je größer der Winkel FEG ist, welchen die Durchschnittslinie EG dieser beyden Ebnen mit EF macht. Zieht man in der durch die Axe gelegten Ebne EH mit DC parallel, so schneiden alle Ebnen, wie EG, in die Linie DC ein, so lange der Winkel FEG $<$ FEH, und die Durchschnitte sind krumme Linien, die in sich selbst zurückkehren, und einen Raum rundum begränzen. Diese Linien heißen Ellipsen. Legt man aber durch EH eine Ebne senkrecht auf ADC, so kann diese in DC nicht einschneiden,

wenn man auch die Kegelfläche nach unten noch so weit erweitert, und der Durchschnitt einer solchen Ebne mit der Kegelfläche ist eine krumme Linie, die nicht in sich zurückkehrt, sondern den Raum an einer Seite unbegränzt läßt; sie heißt die Parabel. Ebnen endlich, die mit EF einen Winkel machen, der größer als FEH ist und dabey senkrecht auf der Ebne ADC stehen, durchschneiden die Kegelfläche in einer krummen Linie, die Ebenfalls nicht in sich zurückläuft, deren Schenkel weiter aus einander laufen, als die der Parabel, und welche die Hyperbel heißt. Die Ellipsen sind zwar nicht alle ähnliche Linien, aber sie haben gewisse Eigenschaften gemein, um derenwillen man berechtigt ist, sie alle als Linien von einerley Art zu betrachten. Ein gleiches gilt von den Parabeln und Hyperbeln.

505. 64ster Lehrsatz. **Jeder Kegel ist an körperlichem Inhalt einer Pyramide gleich, die eben so hoch ist und eine eben so große Grundfläche hat, als der Kegel.**

Beweis. Da alle vielseitige Pyramiden gleich an körperlicher Größe sind, wenn bey gleicher Höhe auch ihre Grundflächen gleiche Größe haben: so gilt dieses auch noch, wenn die Grundfläche der Pyramide ein überaus vielseitiges reguläres Polygon ist. Eine solche Pyramide aber nähert sich sehr, ja so sehr als man will, dem Kegel und man wird also nicht zweifeln dürfen, daß auch für ihn eben die Regel gilt.

* Der strenge Beweis läßt sich auch hier auf eben die Weise führen, wie beym Cylinder §. 482. nur mit dem Unterschiede, daß man statt der Prismen, die man dort in und um den Cylinder construirte sich hier Pyramiden in dem Kegel denkt, deren, Seitenlinien in der Oberfläche des Kegels liegen und Pyramiden um den Kegel, deren Seitenflächen die Oberfläche des Kegels berühren. Diesen Beweis wird der Leser daher leicht selbst entwickeln.

506. Ist also ein Cylinder und ein Kegel von gleicher Höhe über einerley Grundfläche errichtet: so ist der Cylinder dreymal so groß, als der Kegel.

507. 65ster Lehrsatz. Der körperliche Inhalt zweyer Kegel, oder auch eines Kegels und einer Pyramide ist 1. in directem Verhältnisse der Größe der Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind; 2. in directem Verhältnisse der Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind; 3. im Allgemeinen im zusammengesetzten Verhältnisse der Grundflächen und Höhen.

Beweis. Da sich statt des Kegels allemal eine gleich große Pyramide von gleicher Höhe und eben so großer Grundfläche angeben läßt: so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes aus §. 497.

Vierter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Körper, welche durch ebne Flächen begränzt werden, wie auch des Cylinders und Kegels.

508. **Erklärung.** Einen Körper ausmessen, heißt das Verhältniß seiner Größe zu einem als Einheit angenommenen Körper bestimmen.

Hiervon ist verschieden die Ausmessung der Oberfläche eines Körpers, welche darin besteht, daß man die Größe der Oberfläche mit einer als Einheit angenommenen Fläche vergleicht.

509. Nach dem, was wir in den vorigen Abschnitten gezeigt haben, ist es nicht schwer, denjenigen Körper auszuwählen, welcher zum Maße oder zur Einheit am passendsten ist. Wir haben nämlich gesehen, daß statt jeder Pyramide, statt jedes Cylinders und Kegels sich ein eben so großes Prisma angeben läßt, und statt jedes Prisma's, also auch statt jener Körper ein Parallelepipedum (§. 472.) und zwar ein rechtwinklichtes Parallelepipedum (§. 466.) angegeben werden kann. Das rechtwinklichte Parallelepipedum ist also derjenige Körper auf welchen alle bisher betrachteten und überhaupt alle von ebnen Flächen begränzten Körper sich zurückführen lassen, und dieses selbst wird

am bequemsten ausgemessen durch den Cubus oder Würfel.

510. Willkührlicher Satz. Wir nehmen demnach als Körpermaß, oder als Einheit für die Ausmessung der Körper einen Würfel an, dessen Seitenlinien der festgesetzten Längen-Einheit gleich sind. Diese Körper-Einheit heißt dann ein Cubikfuß, Cubiklinie, Cubikruthe, Cubikmeile u. s. w. je nachdem die Seitenlinie des Würfels ein Fuß, Zoll, Linie, Ruthe, Meile u. s. w. und seine Seitenfläche ein Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinie, Qradratruthe, Quadratmeile ist.

511. 9te Aufgabe. Den Inhalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi zu bestimmen.

Auflösung. Man drücke die Länge und Breite der Grundfläche und die Höhe des Parallelepipedi in einerley Längenmaße aus und multiplicire die Zahlen, welche diese Längen ausdrücken, in einander: Das Product giebt an, wie vielmal der Körper die angenommene Körper-Einheit enthält, oder wie viel Cubikfuße es groß ist, wenn die Längen im Fußen angegeben werden.

Beweis. Das Product der Länge und Breite der Grundfläche in einander giebt an, wie viel solche Würfel, welche wir als Körper-Einheit angenommen haben, in einer Schichte neben einander auf der Grundfläche liegen können; die Höhe zeigt die Anzahl der Schichten an, und folglich jenes Product aus drey Factoren die Anzahl aller solcher Würfel, welche in dem Körper Platz finden.

512. Der Inhalt eines Parallelepipedi, dessen Länge z. E. $= 5$, Breite $= 6$, und Höhe $= 8$, wird also durch $5 \cdot 6 \cdot 8 = 240$ ausgedrückt; und der Inhalt eines Würfels, dessen Seitenlinie $= 7$ wäre, ist $= 7^3 = 343$, das heißt die Anzahl der Fuße in der Seitenlinie eines Würfels verhält sich zu der Anzahl von Cubikfußen, die er enthält, wie jene Zahl zu ihrer Cubikzahl.

Beyspiele. Ein Cubikfuß ist ein Würfel, dessen Seite $=$ 12 Zoll, wie viel Cubikzoll enthält ein Cubikfuß, und wie viel Cubiklinien, wenn der Zoll $=$ 12 Linien?

* 513. Da der Inhalt eines Würfels $= a^3$ ist, wenn seine Seite $= a$, so ist (nach Arithm. §. 132.) desjenigen Würfels, dessen Seite $= a + b$ ist, Inhalt $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und diese Zusammensetzung des Würfels läßt sich nun auch geometrisch zeigen.

* 514. 66ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 210.) die Seite eines Würfels gleich ist der Summe zweyer Linien AB, BC, so läßt sich der Würfel in folgende Stücke zertheilen: in einen Würfel, dessen Seitenlinie $=$ AB, in

einen Würfel, dessen Seitenlinie = BC, in drey gleiche Parallelepipeda, deren Höhe = BC und deren Grundfläche das Quadrat von AB; endlich in drey gleiche Parallelepipeda, deren Höhe = AB und deren Grundfläche das Quadrat von BC ist.

Beweis. Es sey ACDEFGHI der Cubus, dessen Seite = AB + BC. Man nehme AV = AL = AB und lege durch B eine Ebne mit CDHG, durch V eine Ebne mit DEIH, durch L eine Ebne mit FGHI parallel: so durchschneiden diese Ebnen alle einander rechtwinklicht, weil die ihnen parallelen Ebnen sich rechtwinklicht durchschneiden und theilen den Würfel in acht rechtwinklichte Parallelepipeda, die wir nun näher betrachten wollen.

Das erste ABaVWXZL hat das Quadrat ABaV, dessen Seite = AB, zur Grundfläche und seine Höhe ist = AL = AB; es ist also ein Würfel, dessen Seitenlinien = AB sind. Das zweyte EVaQKWXR, das dritte aBCUXZMY und das vierte WLZXSFPb sind einander völlig gleich, denn sie haben die Quadrate aVWX, aBZX, WLZX, deren Seiten = AB sind, zu Grundflächen und ihre Höhe ist, EV = BC = FL = AC — AB. Ferner sind das fünfte, sechste und siebte Stück KWXRISbO, MZXYGPbT, aQRXUDNY völlig gleich, man kann nämlich die Quadrate KWSI, ZMGP, aQDU als Grundflächen dieser Körper betrachten und diese Quadrate sind gleich, indem sie die Seiten EV = ZM = aU = AC — AB = BC haben, und dann sind die Höhen EK = CM = KR = AB. Endlich das achte Parallelepipedum bOHTXRNY ist ein Würfel, dessen Seitenlinien = BC. Diese acht Stücke sind also die im Lehrsatze angegebenen. (*)

* 515. Der Würfel, dessen Seitenlinie = AB + BC ist, läßt sich also durch $AB^3 + 3 \cdot AB^2 \cdot BC + 3 \cdot AB \cdot BC^2 + BC^3$ ausdrücken, wenn man bey der Bezeichnung des Inhalts der Parallelepipeden nach eben der Regel verfährt, wie §. 176., und §. 511. Diese Eintheilung des Würfels dient nun eben so zu Erläuterung der Lehre von Ausziehung der Cubikwurzel, wie oben die Eintheilung des Quadrates (§. 203.) die Lehre von der Quadratwurzel deutlich machte. Wenn nämlich AB = 20, BC = 7 gleiche Theile enthielte, so enthielten die acht Stücke des Würfels folgende Menge kleiner Würfel: ABaVLZXW = 8000, indem in jeder Schichte ABaV, 400 liegen und es 20 solcher Schichten giebt; VWXaEKRQ = BaXZCUYM = WLZXSFPb = $400 \cdot 7 = 2800$; ISWKObXR = aQDUXRNY = ZMGPXYTb = $49 \cdot 20 = 980$; endlich ObTHRXYN = $7^3 = 343$. Der ganze Cubus enthält also $8000 + 3 \cdot 2800 + 3 \cdot 980 + 343 = 19683$.

* 516. Auch andere Sätze, auf welche die Buchstabenrechnung führt, lassen sich nun geometrisch erläutern. So findet man z. B. daß $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$ (vergl. Arith. §. 96, wenn man dort im 2ten Beyspiel c = 0 annimmt,) und auch die geometrische Betrachtung

---

(*) Den umständlichen Beweis, daß ZM = XY = aU = BC u. s. w. sey, wird der Leser des zweyten Cursus leicht selbst finden.

zeigt, daß der Unterschied des körperlichen Inhalts zweyer Würfel, deren Seitenlinien $= a$ und $= b$ sind, oder daß $a^3 - b^3$ gleich ist dreyen parallelepipedischen Körpern, die alle gleiche Höhe $= a - b$ haben, und deren Grundflächen gleich sind, dem Quadrate von a, $= a^2$, dem Quadrate von b, $= b^2$, und der mittlern geometrischen Proportionalgröße zwischen diesen beyden Flächen $= ab$. Betrachtet man nämlich die Figur (Fig. 210.) und setzt $AC = a$, $AB = b$, so ist der ganze Würfel $ACDI = a^3$, und das Stück $ABaW = b^3$, wenn die Eintheilung so gemacht ist, wie §. 514. und die übrigen Stücke des großen Würfels sind dann folgende: $LMYWFGTS = a.b.(a-b)$, weil $LM = AC = a$, $LW = AB = b$, $LF = BC = a - b$, $EVUDISTH = a^2 (a = b)$, da $VU = VS = a$, $EV = a - b$; $BCUaZMYX = b^2 (a - b)$, da $Bt = aB = b$, $BC = a - b$. Es ist also $a^3 - b^3 = a^2 (a - b) + ab (a - b) + b^2 (a - b) = (a^2 + ab + b^2) (a - b.)$.

517. 10te Aufgabe. **Den körperlichen Inhalt eines jeden Prisma's oder Parallelepipedi anzugeben, wenn die Größe der Grundfläche und die Höhe dieser Körper bekannt sind.**

Auflösung. Man drücke die Größe der Grundfläche in eben solchem Quadratmaße aus, als das Längenmaß ist, in welchem die Höhe angegeben worden, betrachte die Zahlen als unbekannte und multiplicire sie in einander. Das Product ergiebt den Cubik-Inhalt des Körpers in dem Cubikmaße, welches jenem Längenmaße entspricht.

Beweis. Da jedes Prisma (§. 478), auch jedes schiefe Parallelepipedum gleich ist einem eben so hohen rechteckigen Parallelepipedo, dessen Grundfläche eben so groß ist, als die Grundflächen jener Körper: so erhellt die Richtigkeit dieser Auflösung aus dem vorigen Beweise.

Uebungs-Aufgaben. 1. Eines Prisma's Grundfläche ist ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Catheten = 17 und = 35 Fuß, die Höhe des Prisma's = 5 Fuß 9 Zoll, wie viel Cubikzoll enthält das Prisma?

2. Wenn die Grundfläche und der körperliche Inhalt eines Parallelepipedi gegeben ist, die Höhe zu bestimmen. Der körperliche Inhalt sey = 1779 Cubikfuß 705 Cubikzoll und die Grundfläche = 97 Quadratfuß; wie hoch ist dieser Körper?

* 3. Eines Parallelepipedi Inhalt ist gegeben = 1577 Cubikfuß, und seine Höhe = 19 Fuß, auch weiß man, daß die Grundfläche ein Quadrat ist; man sucht die Seiten dieses Quadrates.

* 4. Ein Prisma von 17 Fuß Höhe hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Sechseck, dessen Seite = 2 Fuß; man soll den Inhalt bestimmen.

* 5. Eines Würfels Inhalt ist gegeben = 5798 Cubikfuß; man soll die Seite desselben in Zolle angeben.

518. 11te Aufgabe. Eines geraden Cylinders Höhe ist gegeben, nebst dem Durch-

messer seiner Grundfläche; man soll die körperliche Größe desselben finden.

Auflösung. Man suche den Inhalt der Grundfläche (§. 343.) und multiplicire damit die Höhe, nachdem man alles in gleichförmigem Maße ausgedrückt hat: so erhält man den Cubik-Inhalt in eben dem Maße.

Der Beweis erhellt aus dem vorigen und dem 50sten Lehrsatze.

Exempel. Eines Cylinders Umfang ist = 8 Fuß, Höhe = 7 Fuß; man sucht den Inhalt.

519. 12te Aufgabe. Einer Pyramide, auch eines geraden Kegels körperliche Größe zu finden, wenn die Höhe gegeben ist, nebst denjenigen Stücken, woraus man die Größe der Grundfläche bestimmen kann.

Auflösung. Man berechne den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire sie mit dem Drittel der Höhe, nachdem man alle Größen in einerley Maße gehörig ausgedrückt hat. Das Product ist der Inhalt der Pyramide oder des Kegels.

Beweis. Da jede Pyramide an körperlicher Größe ein Drittel des über derselben Grundfläche errichteten gleich hohen Prisma's ist, und jeder Kegel gleich dem Drittel des über derselben Grundfläche errichteten Cylinders, so folgt diese Auflösung aus §. 517. von selbst.

* 520. 13te Aufgabe. 1. Den Inhalt einer abgekürzten Pyramide, und 2. eines abgekürzten Kegels zu finden, wenn die Höhe dieser Körper nebst dem Inhalte beyder parallelen Grundflächen gegeben ist.

Auflösung. Man suche zwischen der Größe der beyden parallellen Grundflächen, die man als unbekannte Zahlen betrachten kann, die mittlere geometrische Proportionalzahl (Arithm. §. 162.) und addire jene beyden Zahlen zu dieser; die Summe multiplicire man mit dem Drittel der Höhe des Körpers: so giebt das Product den Inhalt desselben.

Beweis. Der Beweis für die Berechnung des Inhaltes der dreyseitigen abgekürzten Pyramide, wenn die schneidende Ebne der Grundfläche parallel ist, wie hier allemal angenommen wird, ergiebt sich aus §. 498. unmittelbar. Aber dann folgt auch die Richtigkeit der Auflösung für Pyramiden, die mehrere Seitenflächen haben. Ist z. B. (Fig. 201.) die Fläche $BCE = a^2$, $CED = b^2$, $bce = c^2$, so ist (§. 489.) $BCE : CED = bce : ced$, also $ced = \frac{b^2 \cdot c^2}{a^2}$ und der Inhalt beyder dreyseitigen abgekürzten Pyramiden zusammen

$$= \tfrac{1}{3} f \left(a^2 + ac + c^2 + b^2 + \frac{b^2 c}{a} + \frac{b^2 c^2}{a^2} \right)$$

wenn f ihre Höhe ist, oder dieser Inhalt $= \frac{1}{3}$ f $\left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{(a^2 + b^2) c}{a}\right)$ und hier ist $a^2 + b^2 = BCDE$; $\frac{a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2} = bcde$, und $\frac{(a^2 + b^2) c}{a}$ die mittlere Proportionalgröße zwischen BCDE und bcde, weil (Arith. §. 162.) $\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) c^2}{a^2}} = \frac{(a^2 + b^2) c}{a}$ ist. Die Auflösung ist also richtig für die vierseitigen, und wie man leicht übersicht für jede vielseitige Pyramide.

Der Inhalt des abgekürzten Kegels AEFC (Fig. 209.) ist offenbar gleich dem ganzen Kegel DAC, weniger dem Kegel DEF. Ist nun der Grundfläche AC Halbmesser $= a$, der Grundfläche EF Halbmesser $= b$ und des abgekürzten Kegels Höhe $= c$, so ist die Höhe der Spitze DEF, $= \frac{bc}{a - b}$, weil $a : b = c + DK : DK$, also (nach §. 343, 519.) der Inhalt von DAC $= \frac{3,1415}{3} \cdot a^2 \left(c + \frac{bc}{a - b}\right)$ und der Inhalt von DEF, $= \frac{1}{3} \cdot 3,1415 \cdot b^2 \cdot \frac{bc}{a - b}$, also ACFE $= 3,1415 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{a^3 c - b^3 c}{a - b}\right) = \frac{3,1415}{3} \cdot c \cdot (a^2 + ab + b^2)$

und hier ist 3, 1415 . a^2 der Inhalt der einen, 3, 1415 . b^2. der Inhalt der andern Grundfläche und 3, 1415 . ab die mittlere Proportionalgröße zwischen beyden.

* 521. 14te Aufgabe. Den Inhalt eines abgestutzten Prisma's zu finden, wenn dasselbe durch eine mit der Grundfläche nicht parallele Ebne abgeschnitten ist, und die nöthigen Stücke gegeben sind.

Auflösung. Die zur Berechnung nöthigen Stücke sind der Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und die Höhen aller obern Eckpuncte. Man theilt dann das Prisma in lauter abgestutzte dreyeckige Prismen und berechnet den Inhalt eines jeden, indem man seine Grundfläche multiplicirt mit dem arithmetischen Mittel (Arithm. §. 149.) zwischen der Höhe seiner drey Eckpuncte über der Grundfläche.

Anmerkung. Eigentlich brauchten, wenn die Figur der Grundfläche gegeben ist, nur die Höhen dreyer Eckpuncte bekannt zu seyn, da durch diese die Höhe der durch sie gelegten Ebne über jedem andern Puncte der Grundfläche bestimmt ist, und sich berechnen läßt. Indeß liegen bey dieser Berechnung noch andere, hier nicht erläuterte Lehren zum Grunde.

522. 15te Aufgabe. Den Inhalt eines jeden Körpers, welcher von lauter ebnen Flächen eingeschlossen ist, zu bestimmen, wenn man alle nöthigen Linien messen kann.

Auflösung. Man muß suchen, den Körper so einzutheilen, daß man die Stücke als Prismen, Pyramiden oder abgekürzte Pyramiden berechnen kann. Wenn dieses auf keine bequemere Weise möglich ist: so läßt sich wenigstens jeder Körper der von Ebnen begränzt wird, in lauter dreyseitige Pyramiden eintheilen und so berechnen. Oft kann es auch vortheilhaft seyn, sich ein Stück an den Körper angefügt zu denken, wenn er dadurch eine mehr reguläre Gestalt erhält, und man muß dann den so vergrößerten Körper und das angefügte Stück jedes besonders berechnen.

Uebungs-Aufgaben. 1. Wie viel wiegt ein Cylinder von Eichenholz, dessen Länge = 5 Fuß 7 Zoll und Dicke oder Durchmesser = 2 Fuß 3 Zoll; wenn man das Gewicht des Cubikfußes Eichenholz zu 70 Pfund annimmt?

2. Der großen Pyramide von Memphis Grundfläche ist nach Pocock 693 ins Gevierte, ihre Höhe 481 Fuß, wie viel Cubikfuß enthält sie?

* 3. Wenn dieselbe Pyramide auf der halben Höhe horizontal abgeschnitten würde, wie groß bliebe der untere abgestumpfte Theil?

4. Eines Kegels Durchmesser an der Grundfläche ist 75 Fuß, seine Höhe ist eben so groß, wie groß sein Inhalt?

* 5. Die Festungswälle und Seedeiche sind gewöhnlich fünfseitige Prismen, deren Grundflächen vertical stehen. Hat nun ein solcher Wall, welcher durch ABC (Fig. 211.) im Grundrisse vorgestellt wird, bey B eine

Ecke und es soll der Inhalt des Körpers ABED berechnet werden, wo AD senkrecht auf die Längenrichtung ist, so hat man hier den Fall der 14ten Aufgabe. Es stelle FGHIKLMN diesen Körper vor, wo LM auf FGLK senkrecht und es sey die Höhe FO = 18 Fuß, die Breite der obern Fläche FG = 10 Fuß, KO = 72 Fuß, PL = 27 Fuß, die Länge KN = 250, LM = 200 Fuß, so läßt sich dieser Körper berechnen, wenn alle auf die Längenrichtung senkrechte Querschnitte gleich sind. Uebrigens bedeuten hier FO, GP die von F und G senkrecht auf die Fläche KLMN herabgezogenen Linien.

* 6. Man bauet im Oldenburgischen an der Weser zur Ablenkung des Stromes vom Ufer Buschwerke, die ohngefähr die Gestalt haben, wie ABCDEFGHIK (Fig. 212). Hier stellt nämlich CDKIHG den Boden des Flusses vor, ABEF die obere, etwas gegen den Horizont geneigte Fläche des Werkes, welche die Kappe heißt; die Seitenflächen ADKE und BCGF sind gleich stark gegen den Horizont geneigt. Bey ABCD schließt sich das Werk an das Ufer an und ABCD ist hier ein auf den Horizont senkrechter Querschnitt; ist nun EF der Endpunct der Kappe, und EFGK eine durch EF senkrecht gelegte Ebne, so ist, nach der Anlage des Werks, EK eben so gegen den Horizont geneigt, wie AD, und wenn AL, BM, EN, FO auf den Horizont senkrecht sind, so sind die Dreyecke ALD und ENK ähnlich, und ALD = BMC, ENK = FOG. Von der Spitze geht ein abgeflächter Ansatz voraus, den man bey der Berechnung von dem übrigen Körper absondern kann.

Es sey dieses Werkes horizontale Länge Bp = 250 Fuß, Breite der Kappe AB = 18 Fuß, Höhe am Ufer AL = 6 Fuß, die Neigung der Seitenflächen betragen $\frac{1}{2}$ Fuß auf 1 Fuß Höhe, so ist DL = MC = 3 Fuß; die Höhe an der Spitze sey EN = 40 Fuß, Abhang der Kappe pF = 8 Fuß. Aus diesen Stücken läßt sich der ganze Inhalt bestimmen, wobey man dann annimmt, daß der Boden des Flusses CDKG ganz eben sey; wäre dies nicht, so müßte man das ganze Werk in mehrere Theile zerlegt berechnen; ferner nimmt man den ganzen Körper als durch Ebnen begränzt an, obgleich insonderheit die Spitze gewöhnlich mehr abgerundet ausfällt.

* 523. In der ebnen Geometrie ließen sich statt aller geradlinigten Figuren gleich große Rechtecke und statt dieser eben so große Quadrate zeichnen; da es uns nun hier möglich ist statt eines jeden durch ebne Flächen begränzten Körpers ein rechtwinklichtes Parallelepipedum anzugeben: so kann man die Frage aufwerfen, ob sich nicht alle solche Körper auf die Gestalt des Würfels zurückführen ließen. Man nennt dieses, einen Körper cubiren, wenn man einen Würfel angiebt, der mit diesem Körper gleichen Inhalt hat.

*** 524. 16te Aufgabe. Es ist ein rechtwinklichtes Parallelepipedum gegeben; man soll die Seite eines eben so großen Würfels bestimmen.**

Erste Auflösung. Sind die Seitenlinien des Parallelepipedi in irgend einem Längenmaße abgemessen angegeben: so findet man daraus eine Zahl, welche den Cubik-Inhalt bestimmt, und die Cubikwurzel aus dieser Zahl giebt die Seite des gesuchten Würfels in eben jenem Längenmaße an.

Diese Auflösung ist eigentlich arithmetisch; geometrisch läßt die Aufgabe sich durch die bisherigen Lehren nicht vollkommen, sondern nur näherungsweise auflösen, auf folgende Art.

Zweyte Auflösung. Wenn das gegebene rechtwinklichte Parallelepipedum zur Grundfläche kein Quadrat hat, so zeichne man (§. 189.) ein der Grunfläche gleiches Quadrat und errichte darüber ein mit jenem Parallelepipedo gleich hohes Parallelepipedum: so sind diese an Inhalt gleich, aber der Aufgabe ist noch kein Genüge geschehen, wenn nicht zufällig die Höhe eben so groß, als die Seite der neuen quadratischen Grundfläche ist. Man suche also zwischen der Höhe und zwischen der Seite der Grundfläche die mittlere geometrische Proportionallinie (§. 294.), und bilde ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Höhe dieser Linie gleich ist, und in dessen rechtwinklichten Grundfläche eine Seite dieser Höhe, eine aber der Seite der Grundfläche des vorigen Parallelepipedi gleich ist. Dieses Parallelepipedum kommt der cubischen Form näher, als das vorige. Man suche nun wieder zwischen beyden Seiten der Grundfläche die mittlere geometrische Proportionallinie und mache sie zur Seite einer quadratischen Grundfläche über welche ein mit dem vorigen gleich hohes Parallelepipedum errichtet ist, so hat man abermals ein der cubischen Form noch näheres Parallelepipedum und so kann man die Annäherung zur cubischen Gestalt immer weiter treiben.

Wir wollen dieses an dem Beyspiele eines Parallelepipedi näher bestätigen, dessen Grundlinie die Seite = 1 hat und quadratisch ist, und dessen Höhe = 2. Nach den ebnen gegebenen Regeln findet man folgende gleich großen Parallelepipeden.

Erstes Parallelepipedum dessen	Länge	$= 1$,	Breite	$= 1$,	Höhe $= 2$,
Zweytes — — —	Länge	$= 1$,	Breite	$= \sqrt{2}$,	Höhe $= \sqrt{2}$,
Drittes — — —	Länge	$= 2^{\frac{1}{4}}$	Breite	$= 2^{\frac{1}{4}}$,	Höhe $= 2^{\frac{1}{2}}$,
Viertes — — —	Länge	$= 2^{\frac{1}{4}}$,	Breite	$= 2^{\frac{3}{8}}$,	Höhe $= 2^{\frac{3}{8}}$,
Fünftes — — —	Länge	$= 2^{\frac{5}{16}}$,	Breite	$= 2^{\frac{5}{16}}$,	Höhe $= 2^{\frac{3}{8}}$,
Sechstes — — —	Länge	$= 2^{\frac{5}{16}}$,	Breite	$= 2^{\frac{11}{32}}$,	Höhe $= 2^{\frac{11}{32}}$,
Siebtes — — —	Länge	$= 2^{\frac{21}{64}}$,	Breite	$= 2^{\frac{21}{64}}$,	Höhe $= 2^{\frac{11}{32}}$,
Achtes — — —	Länge	$= 2^{\frac{21}{64}}$,	Breite	$= 2^{\frac{43}{128}}$,	Höhe $= 2^{\frac{43}{128}}$,

u. s. w. Die Rechnung mit Logarithmen ergiebt für die Seiten des achten Parallelepipedi, Länge $= 1, 25538$, Breite $= 1, 262196$., Höhe $= 1, 262196$ und diese Linien, sind kaum mehr um $\frac{1}{2}$ Linie von der wahren Seitenlinie des zu bestimmenden Würfels verschieden, wenn die Längen-Einheit 1 Fuß ist, da nämlich aller dieser parallelepipedischen Körper Inhalt $= 2$ Cubikfuß, so ist des gesuchten Würfels Seite genauer $= \sqrt[3]{2} = 1, 25992$.

So läßt sich also dieses Problem durch geometrische Construction nach §. 294. näherungsweise lösen.

Anmerkung. Bey den Alten war dieses Problem, einen Würfel doppelt so groß als einen gegebenen zu bestimmen, unter dem Namen des Delischen Problems berühmt, und die griechischen Geometer gaben Methoden an, um durch die höhern Geometrie mit Hülfe anderer krummer Linien die Seite dieses Würfels zu bestimmen.

* 525. Um die Größe der **Oberfläche** solcher Körper, die von lauter Ebnen eingeschlossen sind, zu berechnen, bedarf es keiner besondern Regeln; indem man bloß nöthig hat, jede Seitenfläche nach den Regeln der ebnen Geometrie zu bestimmen. Die Berechnung der Oberfläche der geraden Cylinder und Kegel erfordert eine besondere Betrachtung.

*** 526. 67ster Lehrsatz. Die Größe aller Seitenflächen eines geraden Prisma's wird bestimmt durch das Product aus dem Umfange der Grundfläche in eine der parallelen Seitenlinien.**

Beweis. Die Seitenflächen des geraden Prisma's sind sämmtlich rechtwinklichte Parallelogramme, deren Höhe mit der Seitenlinie oder Höhe des Prisma's einerley ist, und welche zu Grundlinien jedes eine Seite der Grundfläche haben. Jede Seitenfläche wird also bestimmt durch das Product aus der Höhe in eine Seite der Grundfläche; also die ganze Oberfläche des Prisma's, wenn man die Grundflächen nicht mit dazu rechnet, durch die Summe dieser Producte oder durch das Product aus der Höhe in die Summe aller Seiten der Grundfläche.

*** 527. 68ster Lehrsatz. Der Inhalt der krummen Oberfläche des geraden Cylinders wird abgemessen durch das Product aus dem Umfange der Grundfläche in die Höhe des Cylinders.**

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Satze, daß die Oberfläche eines jeden in den Cylinder beschriebenen Prisma's kleiner, die Oberfläche eines jeden um den Cylinder beschriebenen Prisma's aber größer ist, als die Oberfläche des Cylinders.

Es sey nun (Fig. 200.) CA der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders, und ABEA sein Umfang: so behaupten wir, die krumme Cylinderfläche sey = H . ABEA, wenn H des Cylinders Höhe ist. Wäre dieses nicht, so müßte das Product H . ABEA der Fläche eines größern oder auch eines kleinern Cylinders gleich seyn, und wir nehmen daher zuerst an, H . ABEA sey der Fläche des Cylinders gleich, dessen Höhe = H und dessen Grundfläche = DIP kleiner als ABEA. In diesem Falle wäre es möglich, ein Polygon um diesen kleinern Kreis zu zeichnen, dessen Seiten den größern nicht berühren, (§. 330.) und folglich auch ein gerades Prisma um den kleinern Cylinder zu construiren, dessen Seitenflächen den größern Cylinder nicht berühren. Dieses Prisma's Oberfläche ist = H . GHIKLM und sie muß größer seyn, als die Oberfläche des kleinern Cylinders, das Product H . ABEA aber ist größer, als H . GHIKLM und es kann also der kleinere Cylinder nicht gleich H . ABEA seyn.

Eben so wenig kann eines eben so hohen Cylinders Oberfläche = H . ABEA seyn, wenn seine Grundfläche einen Umfang NORST größer als ABEA hat. Denn wäre dieses, so könnte man in dem größern geraden Cylinder ein gerades Prisma construiren, dessen Seitenflächen den kleinern Cylinder nicht berührten. Dieses Prisma's Umfang wäre also größer als ABEA, und folglich seine Oberfläche größer als H . ABEA; des Cylinders

Oberfläche aber, in welchem dieses Prisma gezeichnet ist, hat eine noch größere Oberfläche, die folglich nicht = H . ABEA seyn kann. Dieses Product kann also nicht der Oberfläche eines kleinern und auch nicht der Oberfläche eines größern Cylinders gleich seyn; sondern es ist genau der Oberfläche desjenigen gleich, dessen Grundfläche den Umfang ABEA hat, und dessen Höhe = H ist.

* 528. 70ster Lehrsatz. Die Summe aller Seitenflächen einer regulären Pyramide (§. 486.) wird abgemessen durch das Product aus dem Umfange der Grundfläche in die Hälfte der aus der Spitze auf irgend eine Seite der Grundfläche gefällte senkrechte Linie.

Beweis. Da die Oberfläche der regulären Pyramide aus lauter gleichen, gleichschenklichten Dreyecken besteht: so findet man die ganze Oberfläche der Pyramide, (nämlich mit Ausschluß der Grundfläche,) wenn man eine Seitenfläche mit der Anzahl der Seitenflächen oder der Seiten der Grundfläche multiplicirt. Jede Seitenfläche aber wird abgemessen durch das Product aus ihrer Grundlinie, welche eine Seite der Grundfläche ist, in der halben Höhe oder die Hälfte der aus der Spitze auf diese Seite gesetzten senkrechten Linie; und folglich da alle Seiten der Grundfläche gleich sind: so ist die Oberfläche gleich dem Producte aus dem ganzen Umfange der Grundfläche in die Hälfte jener Höhe einer Seitenfläche.

Ist nämlich der Grundfläche Seite = a, die Anzahl der Seiten = n, die Höhe einer Seitenfläche = b, so ist jede Seitenfläche = $\frac{1}{2}$ ab, der Umfang der Grundfläche = na und die ganze Oberfläche = $\frac{1}{2}$ nab.

* 529. 71ster Lehrsatz. Die krumme Oberfläche des geraden Kegels wird abgemessen durch das Product aus dem Umfange der Grundlinie in die halbe Seitenlinie.

Beweis. Es ist gewiß, daß die Oberfläche jeder in dem Kegel construirten Pyramide kleiner, die Oberfläche jeder um denselben construirten Pyramide aber größer ist, als die Oberfläche des Kegels. Wenn aber dieses wahr ist, so läßt sich der Beweis leicht führen. Setzt man nämlich die Seitenlinie des Kegels = h, den Umfang seiner Grundfläche (Fig. 213.) gleich dem Kreis-Umfange ABCDEA, und nimmt an $\frac{1}{2}$ h . ABCDE sey nicht gleich der Oberfläche des über der Grundfläche ABCDEA errichteten geraden Kegels, dessen Seitenlinie = h ist: so wird dieses Product gleich seyn müssen, der Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze mit der Spitze des vorigen zusammen fällt, und dessen Grundfläche denselben Mittelpunct hat, aber entweder größer oder kleiner als ABCDEA ist. Es sey also $\frac{1}{2}$ h . ABCDEA gleich der Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche FGHI ist und dessen Spitze mit der Spitze des über ABCDE stehenden geraden Kegels, dessen Seitenlinie = h, zusammen fällt. Man zeichne um den Kreis ABCDE ein reguläres Polygon KLMNO, dessen Seiten den Kreis FGHI nicht erreichen, und errichte über diesem Polygon als Grundfläche eine Pyramide, deren Spitze mit der unsers Kegels zusammen fällt. Die Höhe der Seitenflächen dieser Pyramide ist $= h$, weil sie mit der Berührungslinie der Pyramide und des Kegels einerley ist, und die Oberfläche der Pyramide ist daher $= \frac{1}{2} h$. KLMNO $> \frac{1}{2} h$. ABCDEA. Die Oberfläche dieser Pyramide ist aber gewiß kleiner, als die Oberfläche des geraden Kegels, dessen Spitze mit der Spitze der Pyramide zusammen fällt, und dessen Grundfläche FGHI ist; da nun schon der Pyramide Oberfläche größer als $\frac{1}{2} h$. ABCDE ist, so muß es die Oberfläche dieses letztern Kegels noch mehr seyn, und es erhellt aus §. 330. daß $\frac{1}{2} h$. ABC DEA nicht gleich seyn kann, der Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche FGHI $>$ ABCDE, und dessen Spitze mit der Spitze des über ABCDE errichteten geraden Kegels, dessen Seitenlinie $= h$ ist, zusammen fällt.

Aber eben jenes Product kann auch nicht gleich seyn der Oberfläche eines geraden Kegels von kleinerer Grundfläche $=$ PQR, wenn die Spitze dieses letztern wiederum mit der Spitze jenes zusammen fällt. Es sey Polygon ABCDE ein in den Kreis ABCDE so gezeichnetes Polygon, daß seine Seiten den Kreis PQR nicht berühren, und über dieser Grundfläche sey eine Pyramide errichtet, deren Spitze mit den Spitzen jener Kegel zusammen fällt. Da die Höhe der Seitenflächen dieser Pyramide kleiner als h ist (§. 379.); so ist ihre Oberfläche kleiner als $\frac{1}{2} h \times$ Kreis-Umfang ABCDE; eben diese Oberfläche aber ist größer, als die Oberfläche des über der Grundfläche PQR errichteten geraden Kegels, der mit der Pyramide einerley Spitze hat, und $\frac{1}{2} h$. ABCDE kann auch nicht der Oberfläche eines solchen kleinern Kegels gleich seyn. Dieses

Product ist also gleich der Oberfläche eines geraden Kegels von der Grundfläche ABCDE und der Seitenlinie $= h$.

* 530. 72ster Lehrsatz. Eines abgekürzten geraden Kegels AEFC Oberfläche ist gleich dem Producte aus der Seitenlinie AE in das Arithmetische Mittel zwischen dem Umfange beyder Grundflächen. (Fig. 209.)

Beweis. Des ganzen Kegels ADC Oberfläche ist $= \frac{1}{2}$ AD . Umfang AC, des abgeschnittenen Stückes EDF, Oberfläche $= \frac{1}{2}$ DE . Umf. EF; also des Stumpfes Oberfläche $= \frac{1}{2}$ AD . Umf. AC $- \frac{1}{2}$ DE . Umf. EF. Da nun AD : DE $=$ AC : EF, (nach §. 274.) und AD : DE $=$ Umf. AC : Umf. EF (nach §. 331.), so hat man $DE = \frac{AD \,.\, \text{Umf. } EF}{\text{Umf. } AC}$, also die Oberfläche des Stumpfes $= \frac{1}{2}$ AD . Umfang AC $-$ $\frac{\frac{1}{2} AD \,.\, (\text{Umf. } EF)^2}{\text{Umf. } AC} = \frac{\frac{1}{2} AD}{\text{Umf. } AC} \{(\text{Umf.} AC)^2 - (\text{Umf. } EF)^2\}$. Aber aus Arithm. §. 171. folgt, aus AD : DE $=$ Umf. AC : Umf. EF auch AD $-$ DE : AD $=$ Umf. AC $-$ Umf. EF : Umf. AC ; also $\frac{(\text{Umf. } AC)^2 - (\text{Umf. } EF)^2}{\text{Umf. } AC}$

$$= (\text{Umf. } AC + \text{Umf. } EF) \,.\, \frac{(AD - DE)}{AD}$$

und die Oberfläche des Stumpfes $= \frac{(AD - DE)}{2}$. (Umf. AC $+$ Umf. EF) $= \frac{1}{2}$ AE . (Umfang AC $+$ Umf. EF). Dieses Product aber ist das im Lehrsatze angegebene, da $\frac{1}{2}$ (Umf. AC + Umf. EF) das arithmetische Mittel zwischen den beyden Umfangslinien ist.

* 531. Die Oberfläche eines geraden Cylinders ist also gleich einem Parallelogramm, dessen Höhe der Höhe des Cylinders und dessen Grundlinie dem Umfange seiner Grundfläche gleich ist.

Des geraden Kegels Oberfläche ist gleich einem Dreyeck, dessen Höhe der Seitenlinie des Kegels und dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich ist.

Endlich ist die Oberfläche des abgestutzten geraden Kegels einem Trapeze gleich, dessen Höhe die Seitenlinie des Stumpfes ist, und dessen parallele Seiten dem Umfange beyder Grundflächen gleich sind.

Es ist also nun leicht die Oberflächen dieser Körper zu berechnen.

* Uebungs-Aufgabe. Die Oberfläche eines Cylinders und Kegels zu bestimmen, deren gleiche Grundflächen 5 Fuß Halbmesser haben und deren Höhen gleich, 10 Fuß sind.

Fünfter Abschnitt.

Von Körpern, welche einander ähnlich sind.

* 532. Erklärung. Körper, welche von ebnen Flächen eingeschlossen werden, sind einander ähnlich, wenn ihre ähnlich liegenden körperlichen Winkel ganz gleich sind, und die ähnlich liegenden Seitenlinien des einen alle unter einander eben das Verhältniß haben, wie die des andern.

Was hier ähnlich liegend heißt, wird man aus dem, was von ähnlichen ebnen Figuren gesagt ist, leicht übersehen. Sind nämlich (Fig. 214.) A und a gleiche körperliche Ecken, in welchen CAB = cab, BAE = bae, CAE — cae, so sind hier AB, ab ähnlich liegende Seitenlinien und es muß AB : ab = AC : ac = AE : ae = CD : cd u. s. w. seyn, auch die körperlichen Ecken B = b, C = c, D = d, E = e, wenn die Körper ABCDE, abcde ähnlich seyn sollen.

* 533. Man kann fragen, ob solche ähnliche Körper möglich sind und es ist daher nöthig, daß wir die Aehnlichkeit auf einfachere Bedingungen zurückführen; wir werden indeß nicht alle Fälle durchgehn, wo sich aus wenigen vorausgesetzten Bedingungen die Aehnlichkeit der Körper erweisen läßt.

* 534. 73ster Lehrsatz. Zwey dreyseitige Pyramiden sind einander ähnlich, wenn sie zwey Seitenflächen haben, die gegenseitig einander ähnlich sind ABC ∽ abc und BCD ∽ bcd und diese sind zugleich unter einerley Winkel gegen einander geneigt und auf ähnliche Weise an einander gefügt, so nämlich daß die gleichen Winkel der ähnlichen Figuren einerley Lage gegen die Seitenlinien BC, bc haben. (Fig. 215.)

Beweis. Da ABC = abc, ACB = acb, CBD = cbd, BCD = bcd seyn sollen, und die Ebne ABC gegen BCD unter eben dem Winkel geneigt ist, wie abc gegen bcd, so sind (§. 447.) die körperlichen Ecken bey B und b und bey C und c ganz gleich, also auch die Winkel ACD = acd, ABD = abd und jede der Seitenflächen in der einen Pyramide eben so wie in der andern gegen die Grundfläche geneigt. Da nun ferner, nach den Voraussetzungen des Lehrsatzes, AB : BC = ab : bc und AC : BC = ac : bc; auch BC : CD = bc : cd und BC : BD = bc : bd, so ist auch AC : CD = ac : cd, und AB : BD = ab : bd; also sind die Dreyecke ABD ∽ abd und ACD ∽ acd, daher die Winkel BDA = bda und CDA = cda, folglich (§. 446.) die körperlichen Ecken D, d gleich, und aus ähnlichen Gründen die körperlichen Ecken A, a gleich. Also sind in diesen dreyseitigen Pyramiden die ähnlich liegenden Ecken ganz gleich und alle ähnlich liegende Seitenlinien gleich proportionirt, auch alle ähnlich liegende Seitenflächen ähnliche Figuren.

* 535. Eine leichte Folgerung hieraus ist folgende: wenn man von einer dreyseitigen Pyramide ein Stück vermittelst einer Ebne abschneidet, welche der Grundfläche oder einer Seitenfläche parallel ist: so ist auch das abgeschnittene pyramidalische Stück, oder die Spitze der Pyramide, der ganzen Pyramide ähnlich. Diese Aehnlichkeit findet gleichfalls Statt, wenn man bey vielseitigen Pyramiden die Spitze durch eine der Grundfläche parallele Ebne abschneidet.

* 536. 74ster Lehrsatz. Zwey ähnliche von lauter Ebnen eingeschlossene Körper, lassen sich in gleich viel ähnliche und ähnlich liegende dreyseitige Pyramiden zerlegen. (Fig. 214.)

Beweis. Man lege durch drey Eckpuncte A, B, D die nicht in einerley Seitenflächen liegen, eine Ebne und so auch durch A, C, D: so schneidet man eine dreyseitige Pyramide DACB ab. Legt man ferner durch AFD eine Ebne, so ist BAFD eine zweyte dreyseitige Pyramide und EAFD, EACD sind noch zwey dreyseitige Pyramiden. Theilt man auf ähnliche Weise den Körper abcdef ein, und nimmt an, daß die körperlichen Winkel A = a, B = b, C = c, D = d u. s. w. und daß die ähnlich benannten Seitenlinien gleich proportionirt sind, so ist die Pyramide DACB der dacb ähnlich; denn zwey ihrer Seitenflächen sind gegenseitig ähnlich, ABC ∽ abc, BCD ∽ bcd und wegen der Gleichheit der körperlichen Winkel ist die Neigung der Ebnen ABC und DBC eben so groß, als der Ebnen abc und dbc. An die ähnlichen Seiten ABD, abd dieser Pyramiden schließen sich die Pyramiden FABD, fabd an, deren Aehnlichkeit daraus erhellt, weil ABD ∽ abd, (wegen der schon erwiesenen Aehnlichkeit der vorigen Pyramiden,) BFD ∽ bfd und diese Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind, da der Flächenwinkel FBDC = fbdc und ABDC = abdc, also auch FBDC — ABDC = fbdc — abdc. Und so erhellt auch die Aehnlichkeit der übrigen ähnlich liegenden Pyramiden.

Dieser Beweis ist nun zwar nur an einem Beyspiele geführt, und folglich nicht völlig allgemein; aber man übersieht doch, wie der Beweis in jedem andern Falle geführt werden müßte.

* 537. 75ster Lehrsatz. Wenn zwey Körper aus ähnlichen dreyseitigen Pyramiden

auf ähnliche Weise zusammen gesetzt sind: so sind diese Körper ähnlich.

Beweis. Wenn (Fig. 214.) die Pyramide DACB ∽ dacb, FADB ∽ fadb, EAFD ∽ eafd, EACD ∽ eacd, und diese Pyramiden sind auf ähnliche Weise zusammen gefügt: so sind folgende Flächenwinkel gleich CABD = cabd, FABD = fabd, daher auch die Summe beyder FABC = fabc, und aus ähnlichen Gründen EAFB = eafb, EACB = eacb; da nun auch die Gleichheit der ähnlich liegenden ebnen Winkel an A aus der Aehnlichkeit der einzelnen Pyramiden erhellt: so ist die körperliche Ecke A der Ecke a ganz gleich und so die übrigen ähnlich liegenden unter sich gleich. Daß aber alle ähnlich liegende Seitenlinien gleich proportionirt sind, erhellt aus der Aehnlichkeit der einzelnen Pyramiden, denn es ist AB : BD = ab : bd; und FD : BD = fd : bd, also auch AB : FD = ab : fd u. s. w.

* 538. Es läßt sich leicht erweisen, daß zwey gerade Prismen einander ähnlich sind, wenn sie ähnliche Grundflächen haben und ihre Höhen sich zu einander verhalten, wie ähnlich liegende Seiten der Grundflächen; denn alsdann sind die ähnlich liegenden körperlichen Ecken gleich, und die ähnlich liegenden Seitenlinien proportionirt. Hieraus aber folgt, daß zwey gerade Cylinder einander ähnlich sind, wenn ihre Höhen sich verhalten, wie die Peripherien der Grundflächen.

Eben so sind zwey reguläre Pyramiden (§. 486.) einander ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnlich sind, und ihre Höhen eben das Verhältniß zu einander haben, wie die ähnlich liegenden Seiten der Grundflächen. Daraus läßt sich dann weiter schließen, daß zwey gerade Kegel ähnlich sind, wenn ihren Höhen sich verhalten, wie die Durchmesser der Grundflächen.

* 539. 76ster Lehrsatz. Der körperliche Inhalt ähnlicher dreyseitiger Pyramiden ist dem Cubus ihrer ähnlich liegenden Seiten proportional.

Beweis. Da bey ähnlichen Pyramiden (Fig. 215.) ABCD, abcd die Grundflächen BCD, bcd ähnliche Figuren sind: so verhalten sie sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, $BCD : bcd = BC^2 : bc^2$. Legt man nun durch AC und ac Ebnen auf die Grundflächen senkrecht und zieht AE, ae senkrecht auf die Grundflächen: so sind die körperlichen Dreyecke an C und c gleich, welche von den Ebnen ACE, ECD, ACD und von den Ebnen ace, ecd, acd gebildet werden; denn sie haben die gleichen Seitenflächen ACD = acd und wenn man diese so an einander legt, daß ac auf AC, dc auf DC fällt, so legen sich auch wegen der gleichen Neigung dieser Ebnen gegen die Grundflächen die Ebnen ECD, ecd an einander. Weil nun durch einerley Linie CA, (wenn sie nicht senkrecht auf ECD ist,) nur eine einzige auf ECD senkrechte Ebne möglich ist: so müssen die Ebnen ACE, ace zusammen fallen und folglich die körperlichen Dreyecke in einander passen. Es ist also der Winkel ACE = ace und weil bey E, e rechte Winkel sind, so ist das Dreyeck ACE $\backsim$ ace, daher $AC : AE = ac : ae$ und $AE : ae = BC : bc$, weil $AC : ac = BC : bc$. Da nun der Inhalt der Pyramide $ABCD = \frac{1}{3} AE \,.\, BCD$ und der Inhalt von $abcd = \frac{1}{3} ae \,.\, bcd$: so ist $ABCD : abcd = AE \,.\, BCD : ae \,.\, bcd = BC^3 : bc^3$.

* 540. 77ster Lehrsatz. Der körperliche Inhalt jeder zwey von Ebnen Flächen begränzten ähnlichen Körper ist dem Cubus ihrer ähnlich liegenden Seiten proportional.

Beweis. Theilt man (Fig. 214.) die ähnlichen Körper ABCDEF, abcdef in die ähnlichen Pyramiden, wie §. 536. ein: so hat man (§. 539.) $DABC : dabc = AB^3 : ab^3$; $FABD : fabd = AB^3 : ab^3$; $EAFD : aefd = AE^3 : ae^3 = AB^3 : ab^3$, und $EACD : eacd = AB^3 : ab^3$; also (Arithm. §. 174.) $DABC + FABD + EAFD + EACD : dabc + fabd + eafd + eacd = AB^3 : ab^3$, das ist $ABCDEF : abcdef = AB^3 : ab^3$.

* 541. Daß auch der Inhalt ähnlicher Cylinder und ähnlicher Kegel dem Cubus des Durchmessers der Grundfläche proportional ist, läßt sich aus §. 538. leicht übersehen.

Das aber bedarf keines Beweises, daß die Oberflächen solcher ähnlicher Körper dem Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten proportional sind; denn der Begriff der Aehnlichkeit führt unmittelbar darauf, daß die ähnlich liegenden Seitenflächen ähnliche Figuren sind, und dann ist der eben angeführte Satz eine nothwendige fast von selbst aus §. 303. erhellende Folgerung.

Sechster Abschnitt.

Von der Kugel und den Linien und Kreisen an und auf der Kugel.

542. Erklärung. Die Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche die Eigenschaft hat, daß jeder Punct in derselben von einem bestimmten Puncte in der Kugel, welcher ihr Mittelpunct oder Centrum heißt, gleich entfernt ist.

Man kann sich die Entstehung der Kugel so vorstellen, daß man annimmt, ein Halbkreis werde um seinen Durchmesser gedreht, während dieser selbst unverrückt gehalten wird.

543. Erklärung. Jede vom Mittelpuncte der Kugel an ihre Oberfläche gezogene Linie, heißt ein Radius oder Halbmesser der Kugel; und wenn man einen Radius durch den Mittelpunct verlängert, bis er nochmals die Kugelfläche trifft, so ist das zwischen beyden Durchschnittspuncten mit der Kugelfläche enthaltene Stück der geraden Linie ein Durchmesser der Kugel.

Daß aber jede durch den Mittelpunct gezogene gerade Linie die Oberfläche der Kugel zweymal schneidet, und nicht öfter, übersieht man leicht, aus §. 542. in Vergl. mit §. 51.

544. Alle Halbmesser der Kugel sind gleich, und folglich auch alle Durchmesser, da diese doppelt so groß sind als die Halbmesser.

545. 78ster Lehrsatz. Wenn die Oberfläche der Kugel von einer Ebne geschnitten wird: so ist die Durchschnittslinie ein Kreis, und die vom Mittelpuncte der Kugel auf diese Ebne senkrecht gesetzte Linie geht durch den Mittelpunct des Kreises, welchen die Durchschnittslinie bildet.

Beweis. Es sey die Kugelfläche ABCD (Fig: 216.) von der Ebne CFDE geschnitten und GI die vom Mittelpuncte G der Kugel auf diese Ebne senkrecht gesetzte Linie, welche die Ebne in I schneidet. Zieht man nun nach verschiedenen Puncten D, H der Durchschnittslinie CFDE die geraden Linien GD, ID, GH, IH: so sind GH, GD Halbmesser der Kugel, also $GH = GD$. Da nun die Dreyecke GDI, GHI beyde bey I rechtwinklicht sind: so hat man $ID^2 = GD^2 - GI^2 = IH^2 = GH^2 - GI^2$, also $ID = IH$, und da derselbe Beweis für alle andere Puncte E, C u. s. w. gilt, daß $IE = IC = ID$: so ist die Durchschnittslinie ein Kreis, und sein Mittelpunct liegt in der durch den Mittelpunct der Kugel auf seine Ebne senkrecht gesetzten Linie.

546. Es erhellt hieraus von selbst, 1. wenn im Mittelpuncte I der Durchschnittslinie einer Ebne mit der Kugelfläche die Linie IG senkrecht ist, so geht diese durch der Kugel Mittelpunct; 2. wenn mehrere parallele Ebnen die Kugelfläche schneiden, so liegen die Mittelpuncte aller durch sie mit der Kugelfläche gebildeten Durchschnittslinien in einer geraden Linie, in welcher sich zugleich der Kugel Mittelpunct befindet.

547. 79ster Lehrsatz Wenn die Kugeloberfläche von zwey verschiedenen Ebnen CEDF, KLM geschnitten wird: so sind die Durchmesser der kreisförmigen Durchschnittslinien desto größer, je geringer die Entfernung der schneidenden Ebnen vom Mittelpuncte ist. (Fig. 216.)

Beweis. Zieht man vom Mittelpuncte G der Kugel die geraden Linien GN, GI nach den Mittelpuncten der kreisförmigen Durchschnitte und GK, GH nach ihren Peripherien: so liegen H, K in der Oberfläche der Kugel, und es ist daher $GH = GK$. Da nun $HI^2 = GH^2 - GI^2$ und $KN^2 = GK^2 - GN^2$: so ist offenbar $HI > KN$, wenn $GI < GN$, oder diejenigen Durchschnitte sind die größern, welche dem Mittelpuncte am nächsten sind.

548. **Erklärung.** Unter allen Kreisen, die sich auf der Kugel ziehen lassen, sind also diejenigen die größesten, deren Ebnen durch den Mittelpunct gehen, wie OPBQ, (Fig. 216.) und diese heißen daher **größte Kreise der Kugel.**

549. Man kann auch umgekehrt schließen, wenn ein Kreis auf der Kugelfläche ein größter Kreis ist: so geht seine Ebne durch der Kugel Mittelpunct. Ferner: alle größesten Kreise auf derselben Kugel haben mit der Kugel einerley Durchmesser, und sind folglich gleich groß; auch theilt jeder größte Kreis die Kugel in zwey völlig gleiche Hälften, die daher Halbkugeln heißen. Endlich unter den übrigen, also kleinern Kreisen sind diejenigen gleich groß, welche gleich weit vom Centro der Kugel entfernt sind.

550. **80ster Lehrsatz.** Wenn zwey auf der Kugelfläche gezogene Kreise ABCD, EBFD einander schneiden: (Fig. 217.) so schneiden sie sich in zwey Puncten B, D.

Beweis. Die Durchschnittspuncte müssen in den Ebnen beyder Kreise liegen, also in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie BD; aber diese kann die Kugelfläche nur in zwey Puncten schneiden, weil sonst der Kreis, welcher aus dem Durchschnitte der durch BD und den Mittelpunct der Kugel gelegten Ebne mit der Kugelfläche entsteht, die gerade Linie DB in mehr als zwey Puncten schneiden müßte.

551. Zwey größte Kreise schneiden einander allemal, weil ihre Ebnen durch der Kugel Mittelpunct gehen, und sie halbiren einander, weil ihre Durchschnittslinie beyder Kreise Durchmesser ist. Umgekehrt sind auch zwey Kreise auf der Kugelfläche, die einander gegenseitig halbiren, nothwendig größte Kreise; denn ihre Durchschnittslinie muß durch beyder Mittelpunct gehen und folglich ihre Mittelpuncte zusammen fallen. Wollte man nun annehmen, dieser gemeinschaftliche Mittelpunct beyder Kreise wäre nicht der Kugel Mittelpunct: so ließe sich vom Centro der Kugel nach jenem gemeinschaftlichen Mittelpuncte eine gerade Linie ziehen, die auf den Ebnen beyder Kreise senkrecht seyn müßte, (§. 545.) welches unmöglich ist. (§. 377.)

* 552. 31ster Lehrsatz. **Wenn die Oberflächen zweyer Kugeln einander schneiden: so liegt die Durchschnittslinie beyder Kugel-**

flächen abcd ganz in einer Ebne und ist ein Kreis. (Fig. 218.)

Beweis. Man lege durch die Mittelpuncte A, B beyder Kugeln eine Ebne: so schneidet diese beyde Kugelflächen, und die Durchschnitte sind Kreise aCDc und aEFc, auf deren gemeinschaftlichen Sehne ac die durch beyde Mittelpuncte gezogene Linie AB senkrecht steht (§. 227.). Nimmt man nun in die Durchschnittslinie beyder Kugelflächen irgend einen andern Punct e, und zieht die geraden Linien Ae und Be, und auch nach den Endpuncten der Sehne ac die Linien Aa, Ba: so sind AeB, AaB ganz gleiche Dreyecke, weil die Seiten des einen völlig den Seiten des andern gleich sind, und daher die Winkel eAB = aAB. Hieraus aber erhellt, daß die Dreyecke Aaf, Aef ganz gleich sind, wenn f der Durchschnittspunct der Linie AB mit der Sehne ac ist, (§. 73.); das Dreyeck = Afe hat also eben so wie das Afa bey f einen rechten Winkel, und AB steht aus gleichen Gründen auf jeder von f nach der Durchschnittslinie beyder Kugelflächen gezogenen geraden Linie senkrecht, und alle diese Linien liegen also in einer Ebne (§. 378.); und so wie af = ef, so sind alle von f an diese Durchschnittslinie gezogenen geraden Linien gleich. Die Durchschnittslinie ist also ein Kreis, auf dessen Ebne die zwischen den Mittelpuncten der Kugel gezogene gerade Linie senkrecht steht, und durch den Mittelpunct der Durchschnittslinie geht.

* 553. 82ster Lehrsatz. Es ist möglich durch jede vier Puncte E, B, D, G die nicht in einer Ebne liegen, und von denen

nicht drey in derselben geraden Linie liegen, eine Kugelfläche zu legen, und durch diese vier Puncte ist die Lage und Größe der ganzen Kugel bestimmt. (Fig. 217.)

Beweis. Da die gegebenen Puncte so angenommen sind, daß nicht drey in gerader Linie liegen, so kann man durch jede drey derselben einen Kreis legen (§. 225.). Es sey also durch E, D, B der Kreis EDFB und durch G, D, B der Kreis GDAB gezogen: so schneiden sich die Ebnen dieser Kreise in der geraden Linie DB. Man halbire die Sehne BD in H und ziehe in der Ebne des einen Kreises HC, in der Ebne des andern HF durch H senkrecht auf BD: so steht (§. 419.) die Ebne CHF oder ihre Erweiterung EHC auf beyden Ebnen EBFD, und CDAB senkrecht; und da (§. 224.) der Mittelpunct des Kreises CDAB in der Linie HC oder ihrer Verlängerung, und des Kreises EDFB Mittelpunct in HF liegt, so liegen die in diesen Mittelpuncte I, K senkrecht gegen die Ebnen der Kreise errichteten geraden Linien IL, KL beyde in der Ebne EHCF, und müssen sich also schneiden, weil die eine senkrecht auf HC, die andere senkrecht auf EH ist. Da nun (§. 545.) der Mittelpunct jeder durch den Kreis EBFD gehenden Kugelfläche auf der geraden Linie KL und der Mittelpunct jeder durch den Kreis ADCB gehenden Kugelfläche in der geraden Linie IL liegt: so ist L der einzige Punct, wo der Mittelpunct einer Kugelfläche, die durch jene beyden Kreise geht, liegen kann. Zugleich aber ist einleuchtend, daß eine durch ADCB gehende Kugelfläche, deren Mittelpunct L ist, auch durch EBFD gehen muß; denn die Entfernung aller Puncte im Umfange des Kreises ABCD von L ist $= LB = \sqrt{(LI^2 + BI^2)}$ und aller Puncte in des Kreises EBFD Umfange Entfernung von L ist ebenfalls gleich groß und $= LB$, also liegen beyde Kreise ganz in der Oberfläche, der Kugel.

554. 83ster Lehrsatz. Wenn (Fig. 217.) EBFD ein auf der Kugelfläche gezogener Kreis ist, und man verlängert die durch den Mittelpunct K desselben und den Mittelpunct L der Kugel gezogene gerade Linie, bis sie die Kugelfläche in M schneidet: so ist M von allen Puncten im Umfange des Kreises EBFD gleich entfernt.

Beweis. Zieht man nach irgend zwey Puncen E, D jenes Kreises die geraden Linien ME, MD: so ist $ME^2 = EK^2 + MK^2$ und $MD^2 = DK^2 + MK^2$, also $MD = ME$, weil $EK = DK$ und MK senkrecht auf des Kreises Ebne ist. (§. 545.)

555. Erkärung. Wenn der Punct M auf der Oberfläche der Kugel von jedem Puncte der auf der Kugelfläche gezogenen Kreislinie EBFD gleich entfernt ist: so heißt M der Pol dieses Kreises und die durch M und des Kreises Mittelpunct gezogene gerade Linie MN die Axe dieses Kreises. (Fig. 217.)

556. Erklärung. Kreislinien auf der Kugelfläche, deren Ebnen parallel sind, heißen Parallelkreise.

557. Aus §. 554. erhellt, daß die Axe des Kreises EBFD auf seiner Ebne senkrecht steht, und zugleich durch seinen und der Kugel Mittelpunct geht; auch, daß es für jeden Kreis zwey Pole M, N giebt, wo nämlich die Axe in die Kugelfläche einschneidet; ferner, daß alle Parallelkreise einerley Pole und einerley Axe haben.

558. 84ster Lehrsatz. Wenn durch eines Kreises ABCD (Fig. 219.) Pole P, Q, auf der Kugelfläche, ein Kreis APCQ gezogen wird, so ist 1. dieser Kreis ein größter Kreis; 2. er halbirt den Kreis ABCD; 3. die Bogen, welche zwischen dem einen Pole P und dem Kreise ABCD enthalten sind, sind gleich, PA = PC, QA = QC.

Beweis. 1. Dieser Kreis ist ein größter, weil seine Ebne durch der Kugel Mittelpunct geht, (§. 557.) 2. er halbirt den Kreis ABCD, weil seine Ebne durch des letztern Mittelpunct geht, und ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie folglich ein Durchmesser des Kreises ABCD ist. 3. Da die Sehnen PC = PA und QC = QA, so sind auch die ihnen zugehörigen Bogen gleich. (§. 230.)

559. 85ster Lehrsatz. Wenn durch die Pole P, Q der Parallelkreise ABCD, EFGH zwey größeste Kreise AEPC und BFPD gelegt sind (Fig. 219.): so enthalten die zwischen diesen Kreisen abgeschnittenen Bogen EF, AB der Parallelkreise eine gleiche Anzahl Grade, oder EF verhält sich zum Umfange EFGHE eben so, wie AB zum Umfange ABCDA.

Beweis. Da die Ebnen ABCD, EFGH beyde senkrecht stehen auf den Ebnen der größesten Kreise AEPG, BFPD (§. 419.): so ist sowohl ABCD, als EFGH die Ebne des Neigungswinkels dieser größten Kreise gegen einander (§. 425.), und FIE sowohl als BKA ist der Neigungswinkel der Ebnen AEPG, BFPD gegen einander; also EIF = AKB, und daher EF : EFGHE = AB : ABCDA. (§. 333.)

560. Die Längen der Bögen EF, AB, welche zwischen den durch die Pole dieser Parallelkreise gehenden Keisen AEPC, BFPH abgeschnitten werden, verhalten sich also zu einander, wie die ganzen Peripherien dieser Parallelkreise, und sind also desto kleiner, je näher die Parallelkreise den Polen liegen. (§. 547.)

Bedeuten P, Q die Pole der Erdkugel, so sind AEPG, PFBD Meridiane und E, A, so wie F, B Orte, die unter gleicher Länge liegen; der Längen-Unterschied von E und F ist also eben so groß, als der Längen-Unterschied von A und B, und es erhellt hieraus, daß zwey auf einerley Parallelkreise liegende Orte bey gleichem Längen-Unterschiede einander desto näher liegen, je näher sie dem Pole sind, und daß daher ein Grad der Länge in der Nähe des Poles weit weniger Meilen enthält, als am Aequator. Die Grade der Breite hingegen bleiben überall gleich, da sie auf den Meridianen, welche alle größeste Kreise sind, abgemessen werden. (*)

561. Erklärung. Eine Ebne berührt die Kugel, wenn sie zwar an die Oberfläche der Kugel antrifft, aber doch ganz außerhalb derselben liegt.

562. Eine solche berührende Ebne kann also nur an einer Stelle die Kugel berühren; denn berührte sie dieselbe an zwey von einander entfernten Puncten: so ließe sich zwischen diesen eine in jener Ebne liegende gerade Linie ziehen, die ganz außerhalb der Kugel läge; aber jede zwischen zwey Puncten der Kugelfläche gezogene gerade Linie liegt innerhalb der Kugel. (§. 218.)

(*) Daß die Breitengrade auf der sphäroidischen Erde ungleich ausfallen, gehört nicht hieher.

563. 86ster Lehrsatz. Wenn durch den Endpunct B des Halbmessers BC der Kugel (Fig. 220.) eine Ebne auf diesen Halbmesser senkrecht gesetzt wird, so berührt diese die Oberfläche der Kugel, und umgekehrt, wenn eine Ebne IBK die Oberfläche der Kugel in B berührt, so steht sie auf dem nach B gezogenen Halbmesser BC der Kugel senkrecht.

Beweis. Wenn BC auf der Ebne IBK senkrecht ist, so ist sie die kürzeste Linie, die sich von C an diese Ebne ziehen läßt (§. 379.); liegt also B in der Kugel Oberfläche, so liegt jeder andere Punct der Ebne außerhalb derselben. Nimmt man dagegen umgekehrt an, IBK sey eine die Kugel in B berührende Ebne, so muß der Halbmesser BC senkrecht auf derselben stehen, weil sonst die von C senkrecht auf diese Ebne gezogene Linie kürzer als BC wäre, und also ein Punct der Ebne innerhalb der Kugel liegen würde.

564. Alle gerade Linien also die man in der Ebne IBK, welche die Kugel in B berührt, durch diesen Berührungspunct zieht, sind Tangenten der Kugelfläche, und jede derselben, wie IB, ist eine Tangente desjenigen größten Kreises, dessen

Ebne durch BI und den nach B gezogenen Halbmesser CB der Kugel geht.

* 565. Erklärung. Wenn zwey größte Kreise HEFB, AEDB einander in dem Puncte B auf der Kugelfläche durchschneiden, so bilden sie zusammen einen sphärischen Winkel FBD.

* 566. Die Größe dieses sphärischen Winkels ist ganz einerley mit dem Winkel, welchen die im Durchschnittspuncte B an diese Kreise gezogenen Tangenten mit einander machen; denn es ist aus dem, was oben §. 253. von den Tangenten gelehrt worden, klar, daß jede Tangente eben die Richtung hat, welche die Kreislinie an derjenigen Stelle hat, wo sie von der Tagente berührt wird.

* 567. 87ster Lehrsatz. Der sphärische Winkel FBD, (Fig. 220.) welchen zwey größte Kreise mit einander bilden, ist gleich dem Neigungswinkel der Ebnen dieser Kreise gegen einander; und, wenn GM, LN die Axen jener Kreise sind, so ist der sphärische Winkel FBD gleich dem Winkel LCG, welchen diese Axen mit einander machen.

Beweis. Sind IB, KB Tangenten der beyden Kreise im Durchschnittspuncte B; so stehen sie auf der Durchschnittslinie beyder Kreis-Ebnen welche ein Durchmesser ist, senkrecht, und es liegt die eine in der Ebne des einen, die andere in der Ebne des andern Kreises, IBK ist also selbst der Neigungswinkel beyder Ebnen gegen einander. (§. 413.)

Zieht man ferner durch den Mittelpunct C der Kugel in den Ebnen der beyden Kreise CF und CD senkrecht auf die Durchschnittslinie BC, so ist FCD der Neigungswinkel beyder Ebnen gegen einander, und die Ebne FCD auf beyden Kreis-Ebnen senkrecht (§. 425.), diese Ebne geht also durch die Axen beyder Kreise, weil sie durch den Punct C geht, wo diese senkrecht errichtet sind, und da LCF = GCD = R, so ist LCG = FCD, gleich dem sphärischen Winkel FBD.

* 568. 17te Aufgabe. Die Größe eines auf der Kugel gezeichneten sphärischen Winkels FBD in Graden zu bestimmen, wenn auf derselben Kugel ein in seine 360 Grade getheilter größter Kreis gezeichnet ist. (Fig. 220.)

Auflösung. Man nehme von dem Durchschnittpuncte B an auf jedem der beyden Kreise die Bogen BF, BD jeden = 90° oder gleich dem Quadranten eines größten Kreises, und ziehe durch F, D einen größten Kreis: so enthält der Bogen FD eben so viele Grade als der sphärische Winkel FBD; und da man den Bogen FD nach dem auf der Kugel eingetheilten größten Kreise abmessen kann, so hat man auch die Größe des sphärischen Winkels.

Beweis. Da BF = BD = 90°, so sind die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte BCF = BCD = R, und es ist daher, weil BC die Durchschnittslinie beyder Kreis-Ebnen, FCD der Neigungswinkel, also FCD = dem sphärischen Winkel FBD. Der

Bogen FD eines durch F und D gelegten größten Kreises, enthält aber eben so viele Grade als der Winkel FCD und folglich so viele Grade als der sphärische Winkel FBD.

569. 18te Aufgabe. Eines gegebenen größten Kreises ABDE Pole G, M zu bestimmen. (Fig. 220.)

Auflösung. Man ziehe einen auf diesen Kreis senkrechten größten Kreis (§. 425.), nehme auf demselben GD = 90°, so ist G jenes Kreises Pol.

Beweis. Der Bogen GD, dessen Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammen fällt, hält eben so viele Grade als der Winkel am Mittelpuncte GCD, welcher daher ein rechter ist. Da nun auch die Ebne GCD senkrecht auf BCD, so steht (§. 421.) CG senkrecht auf der letztere Ebne und ist des Kreises BDE Axe, daher G, M seine Pole.

570. 19te Aufgabe. Einen größten Kreis auf der Kugel so zu ziehen, daß er durch der beyden größten Kreise BFE, BDE Pole L, G gehe. (Fig. 220.)

Auflösung. Man nehme von dem Durchschnittspuncte B der beyden Kreise die Bogen BF

$= BD = 90°$ und lege durch F, D und den Mittelpunct der Kugel einen größten Kreis: so ist dieser derjenige, welcher durch beyder Kreise Pole geht.

Beweis. Da $BF = BD = 90°$, so ist $BCF = BCD = R$ und die Ebne FCD auf die Ebnen beyder Kreise senkrecht, durch deren Mittelpunct sie geht; eben diese Ebne geht also auch durch die in den Mittelpuncten dieser Kreise senkrecht errichteten Axen (§. 419.) und folglich durch die Pole beyder Kreise.

* 571. **Erklärung.** Wenn auf der Kugelfläche drey größte Kreise ABDE, AGDM, HBFE gezeichnet sind (Fig. 220.): so bilden diese ein Dreyeck FBD, welches ein **sphärisches Dreyeck** heißt. Die Bogen FB, FD, BD sind die **Seiten** und die sphärischen Winkel B, F, D die **Winkel des sphärischen Dreyeckes.**

* 572. Da die Ebnen aller dieser Kreise durch der Kugel Mittelpunct gehen: so bilden sie an diesem Mittelpuncte C ein körperliches Dreyeck, dessen Seitenflächen BCD, FCD, BCF sind, und es läßt sich daher für jedes körperliche Dreyeck ein ihm entsprechendes sphärisches und so umgekehrt angeben, weil die Durchschnitte der Ebnen mit einer um den Mittelpunct C beschriebenen Kugelfläche von willkührlichem Halbmesser ein sphärisches Dreyeck bilden. Die Betrachtung der sphärischen und der körperlichen Dreyecke erläutert sich also gegenseitig.

* 573. Anmerkung. Man kann die Untersuchung über sphärische Dreyecke auch auf solche anwenden, deren Seiten größer als 180 Grad sind; wir aber werden hier nur von denjenigen sphärischen Dreyecken reden, in denen keine Seite größer als 180° ist. Einige von den folgenden Sätzen gelten bloß für solche Dreyecke, und z. B. nicht für das Dreyeck, welches durch die Bogen BAED, BF, FD gebildet wird, wo BAED > 180° ist. (Fig. 220.) In der Folge werden also unter sphärischen Dreyecken keine andere verstanden, als an denen jede Seite kleiner als 180° ist.

* 574. 88ster Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten größer als die dritte, FD + BD > FB. (Fig. 220.)

Beweis. Es sey FB die größte Seite des sphärischen Dreyecks: so ziehe man die Sehne FB, zeichne in der Ebne FCB, den Winkel OCB = DCB, und nehme CP = CO; dann sind die Dreyecke COB, CPB völlig gleich, weil CO = CP, BC beyden gemein und OCB = PCB, also OB = PB. Da nun, wenn man auch FP zieht, im ebnen Dreyecke FPB, FP + BP > BF, so ist, weil BO = BP, FP > OF. Die Dreyecke FCO, FCP haben also zwey gegenseitig gleiche Seiten FC = FC, CO = CP, aber die dritte ist im einen größer als im andern FP > FO, daher der Winkel FCB > FCO (§. 76.). Der Bogen FB enthält eben so viele Grade als der Winkel FCO + OCB, der Bogen FD so viele als FCD, BD so viele als BCD; da also FCO > FCD und BCO = BCD, so ist BF > BD + FD, weil dieses Bögen gleicher Kreise sind.

* 575. 89ster Lehrsatz. Wenn auf der Oberfläche der Kugel zwey Puncte A, B bestimmt sind, so ist der Bogen ADB eines durch sie gehenden größten Kreises die kürzeste Linie, welche sich auf der Kugelfläche zwischen diesen Puncten ziehen läßt. (Fig. 221.)

Beweis. Nimmt man an, eine andere auf der Kugelfläche gezogene Linie AEB sey kürzer als der Bogen ADB eines größten Kreises: so ziehe man durch einen willkührlichen Punct E jener Linie die Bogen AE, BE größter Kreise; dann ist (§. 574.) ADB $<$ AE + EB. Legt man nun durch A und einen andern zwischen A und E liegenden Punct F jener Linie einen größten Kreis und so auch durch E und F einen größten Kreis: so ist AE $<$ AF + EF und folglich ADB $<$ AF + FE + EB. Nimmt man mehrere Puncte G, H, I auf der Linie AEB an, und zieht zwischen A und G; zwischen G, F; zwischen F, H; zwischen H, E; zwischen E und I u. s. w. Bogen größter Kreise: so läßt sich aus dem Vorigen übersehen, daß die Summe aller dieser Bogen AG + GF + FH + HE + EI + IB größer als AB ist; und da man solcher Puncte so viele als man will annehmen und dadurch die Summe dieser Bogen der Linie AEB so nahe bringen kann, als man will; so ist ADB $<$ AEB und ADB die kürzeste Linie, die sich zwischen A und B auf der Kugelfläche ziehen läßt, weil der für AEB geführte Beweis für jede andere Linie gilt.

* 576. 90ster Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke beträgt die Summe aller

drey Seiten weniger als 360 Grade. (Fig. 220.)

Beweis. Man verlängere auf der Kugelfläche die zwey Seiten DF, DB bis sie sich in A abermals schneiden (§. 551.): so ist $AF + AB > BF$, aber $ABD = AGD = 180°$, (§. 551.) also $BF + FD + BD < AGD + ABD < 360°$. Aus eben dem Grunde ist auch im sphärischen Dreyecke ABF, die Summe $AB + BF + AF > 360°$.

* 577. Aus den vorigen Lehrsätzen erhellt zugleich, daß in einem körperlichen Dreyecke jede zwey Seitenflächen zusammen größer sind als die dritte, $FCD + BCD > FCB$, und daß die Summe aller dreyer kleiner als 360° oder als vier rechte Winkel ist.

* 578. 91ster Lehrsatz. In jeder vielseitigen körperlichen Ecke ist die Summe aller Seitenflächen kleiner als vier rechte Winkel. (Fig. 222.)

Beweis. Es sey an A eine fünfseitige Ecke, deren Seitenfläche BAC, CAD, DAE, EAF, FAB sind. Man erweitere die Seitenflächen CAD, FAE bis sie sich in AG schneiden, dann ist $DAE < DAG + EAG$ (§. 577.), und eben so, wenn die Ebnen BAF, CAD sich in AH durchschneiden, $BAC < HAC + HAB$; weil nun HAC, CAD, DAG in einer Ebne liegen und auch FAE, EAG, so wie HAB, BAF in einer Ebne, so bilden diese eine dreyseitige Ecke, deren Seitenflächen zusammen größer, als die Seitenflächen der fünfseitigen Ecke, nämlich HAG + GAF + FAH > BAC + CAD + DAE + EAF + FAB, und da die Summe der drey Seitenflächen des körperlichen Drey- eckes AHFG kleiner als 360 Grad ist: so ist die Summe der fünf Seiten der fünfseitigen und so jeder andern vielseitigen Ecke kleiner als 360 Grad.

* 579. 92ster Lehrsatz. Wenn man von den Eckpuncten B, F, D eines auf der Kugelfläche gezeichneten Dreyeckes BFD die Durchmesser der Kugel BE, FH, DA zieht, welche in E, H, A die Kugelfläche abermals schneiden: so bilden die größten Kreise, aus denen das Dreyeck BDF entstand, zwischen den Puncten E, H, A ein zweytes sphärisches Dreyeck EHA, dessen Seiten und Winkel eben so groß sind, als die Seiten und Winkel des Dreyeckes BFD und die in beyden Dreyecken gleichen Winkel stehen den gleichen Seiten gegenüber. (Fig. 220.)

Beweis. Den beyden sphärischen Dreyecken BFD, EHA entsprechen die körperlichen Dreyecke, deren Seitenflächeu BCF, FCD, BCD u. HCE, HCA, ECA sind. Betrachtet man diese, so sucht man, daß die Ebnen HCE, ACE eben so gegen einander geneigt sind, wie FCB, DCB, denn jene Ebnen fallen mit den Erweiterungen der letztern Ebnen zusammen und die Neigungswinkel jener und dieser Ebnen sind, so wie Scheitelwinkel einander entgegengesetzt (§. 417.); die sphärischen Winkel also, welche mit diesen Neigungswinkeln übereinstimmen, sind gleich, AEH = FBD. Aus eben den

Gründen sind auch folgende Winkel jener sphärischen Dreyecke gleich, AHE = DFB und HAE = FDB, die beyden sphärischen Dreyecke haben also alle Winkel übereinstimmend gleich. Für die Seiten finden folgende Vergleichungen Statt. Da AED = EDB = 180° (§. 551.), so ist AE = DB, und eben so, da HEF = EFB = 180°: so ist HE = FB, und so auch AH = DF; also ist auch jede Seite des einen Dreyeckes einer Seite des andern gleich, und zwar stehen die gleichen Seiten den gleichen Winkeln gegenüber.

* 580. Obgleich aber die einzelnen Stücke in diesen beyden Dreyecken gleich sind, so sind doch die Dreyecke selbst nicht so einander gleich, daß man sie auf einander passen könnte; denn die zugehörigen körperlichen Dreyecke passen nicht in einander, weil, wenn ACE auf DCB so gelegt wird, daß die einander entsprechenden Puncte, wo nämlich die gleichen Winkel anliegen, A auf D, E auf B kommen, dann das eine körperliche Dreyeck oberhalb, das andere unterhalb BCD zu liegen kommt. Diese sphärischen Dreyecke sind also nur symmetrisch und nicht völlig gleich. (vergl. §. 445. 471.)

* 581. **93ster Lehrsatz.** Wenn in zwey sphärischen Dreyecken ABC, abc auf einerley oder auf gleichen Kugeln zwey Seiten des einen, zweyen Seiten des andern gegenseitig gleich sind, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ist gleich, AB = ab, BC = bc, B = b: so ist auch in beyden die dritte Seite gleich und die Winkel

sind gleich, welche gleichen Seiten gegenüberstehn. (Fig. 223.)

Beweis. Man lege die gleichen Seiten BC, bc so auf einander, daß die Puncte B, b, wo die gleichen Winkel sich befinden, zusammen fallen. Kommt dann zugleich a mit A auf einerley Seite von BC zu liegen: so erhellt aus der Gleichheit der sphärischen Winkel B, b, daß die Bogen BA, ba auf einander fallen, und daß die Dreyecke ganz einander decken, weil BA = ba einander bedecken. Fällt hingegen a nach d zu, so läßt sich aus §. 579. übersehen, daß CBd auf das zu ABC symmetrische Dreyeck passen würde; und da dieses mit ABC gleiche Seiten und Winkel hat, so erhellt auch dann die Richtigkeit des Lehrsatzes.

* 582. 94ster Lehrsatz. Wenn zwey sphärische Dreyecke die auf einerley Kugel oder auf gleichen Kugeln gezeichnet sind: eine gleiche Seite haben BC = bc, (Fig. 223.) und die beyden anliegenden Winkel sind im einen so groß, als im andern B = b, C = c: so ist auch der dritte Winkel gleich, und die Seiten sind gleich, welche gleichen Winkeln gegenüberstehn.

Beweis. Man lege den Bogen bc so auf BC, daß b auf B, c auf C zu liegen komme; fällt dann das Dreyeck abc mit ABC auf einerley Seite von BC: so ist klar, daß der Winkel abc den ABC und der Winkel acb den ACB decken und der Durchschnittspunct a auf A fallen werde. Fielen aber ABC, abc auf verschiedene Seiten von

BC, so würde abc auf das zu ABC symmetrische Dreyeck passen; also auch dann A = a, AB = ab u. s. w. seyn.

* 583. 95ster Lehrsatz. Wenn in zwey sphärischen Dreyecken die drey Seiten im einen so groß sind als im andern: so sind auch die Winkel gleich, welche gleichen Seiten gegenüberstehn.

Beweis. Da dieser Lehrsatz (§. 446.) für die den sphärischen Dreyecken zugehörigen körperlichen Dreyecke bewiesen ist: so folgt von selbst seine Richtigkeit für die sphärischen Dreyecke.

* 584. 96ster Lehrsatz. In einem gleichwinklichten sphärischen Dreyecke ABC, wo BA = BC, ist 1. der aus der Spitze B nach der Mitte der dritten Seite gezogene Bogen BD auf diese Seite senkrecht, und 2. sind die Winkel gleich, welche den gleichen Schenkeln gegenüberstehn, BAC = BCA. (Fig. 224.)

Beweis. Wenn AD = DC genommen und AB = CB ist: so sind ADB, CDB Dreyecke deren drey Seiten zwey und zwey gleich sind; und es sind daher (§. 583.) auch die Winkel gleich, die den gleichen Seiten gegenüberstehn, also ADB = CDB = R, (§. 417.) und ABD = BCD.

* 585. Dieser Beweis läßt leicht übersehen, daß in einem gleichschenklichten sphärischen Dreyecke

der Bogen eines größten Kreises, welcher von B auf AC senkrecht gesetzt wird, auch derjenige ist, welcher den Winkel A und die Seite BC halbirt.

* 586. 97ster Lehrsatz. Wenn in einem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 224.) zwey Winkel gleich sind, A = C: so sind auch die Seiten gleich, welche diesen Winkeln gegenüberstehn.

Beweis. Man halbire AC in D und ziehe durch D einen auf AC senkrechten Bogen; dieser wird durch B gehen; denn gienge er nicht durch B, sondern läge so wie DE, so wären (§. 583.) die Dreyecke FDC, EDA gleich, weil AD = CD, D = D, A = C, und es müßte DF = DE seyn, welches unmöglich ist. Geht aber der senkrechte Bogen durch B, so erhellt aus §. 582, daß AB = CB.

* 587. Auch bey sphärischen Dreyecken ist also die Gleichheit aller drey Seiten mit der Gleichheit aller drey Winkel nothwendig verbunden, wie bey ebnen Dreyecken.

* 588. 98ster Lehrsatz. Wenn in einem sphärischen Dreyecke ein Winkel bestimmt ist, und zwey Seiten, deren eine jenem Winkel gegenübersteht: so ist dadurch das sphärische Dreyeck noch nicht völlig bestimmt. (Fig. 225.)

Beweis. Soll des sphärischen Dreyecks eine Seite = AB, der anliegende Winkel = BDA seyn und die diesem Winkel gegenüberstehende Seite = BD: so läßt sich, wenn BE senkrecht auf Ad ist, ein Bogen Bd = BD an AD oder ihre Verlängerung ziehen, wenn man DE = dE nimmt. (§. 584.) Man hat also zwey Dreyecke ABD, ABd, die ganz ungleich sind, doch aber zwey Seiten und einen Winkel, welcher der einen Seite gegenübersteht, gleich haben.

Anmerkung. Ist BAD ein rechter Winkel, so ist dies der Fall des 448. §. und dann ist das Dreyeck völlig bestimmt.

* 589. 99ster Lehrsatz. **Die Gestalt eines sphärischen Dreyeckes ist nicht völlig bestimmt, wenn zwey Winkel nebst einer Seite gegeben sind, und diese Seite dem einen gegebenen Winkel gegenüberstehen soll. (Fig. 226.**

Beweis. Sollen nämlich eines sphärischen Dreyecks zwey Winkel = CAB und = CBA seyn: so läßt sich zwar aus diesen Stücken und einer Seite = CB ein Dreyeck ACB zeichnen; aber da die ganze Ebne ACa unter einerley Winkel gegen ABa geneigt ist, so ist der Winkel Fab = CAB, und wenn man CD senkrecht auf AB oder deren Verlängerung zieht, BD = bD nimmt und Cb zieht, so ist auch im Dreyecke Cab, dessen eine Seite CFa ist, ein Winkel Cab oder Fab = CAB, der zweyte Cba = CBA, weil (§. 584.) CbB = CBb, und die Seite Cb = CB; es lassen sich also aus den gegebenen Stücken zwey ganz verschiedene Dreyecke ACB und aCb zeichnen, wo aFC = 180° — AC nur dann = AC seyn kann, wenn beyde Quadranten sind.

* 590. 100ster Lehrsatz. Wenn man auf den größten Kreisen, (Fig. 227.) welche das sphärische Dreyeck ABC bilden, die Bogen AD = AE = 90°; CF = CG = 90°; BH = BI = 90° nimmt, und durch die Puncte D und E, F und G, H und I größre Kreise legt; so sind 1. die Durchschnittspuncte dieser Kreise die Pole der Seiten des sphärischen Dreyecks ABC, und 2. bilden diese drey größten Kreise ein Dreyeck, dessen Seiten die Winkel des erstern und dessen Winkel die Seiten des erstern Dreyeckes zu 180° ergänzen, das heißt, es ist ACB + KL = 180°, LKM + BC = 180° u. s. w.

Beweis. 1. Da AE = ED = 90°, so ist A der Pol des durch E und D gelegten größten Kreises, weil AO auf dem Mittelpuncte der Kreisebne EOD senkrecht steht, also dieses Kreises Axe ist. Aus eben den Gründen ist B der Pol des Bogens KHI, C der Pol des Bogens KGL. Denkt man nun sich die Bogen CK und BK gezogen, so sind beyde = 90° oder Quadranten; denn jeder vom Pole C an den Bogen KL gezogene Bogen eines größten Kreises ist 90°, weil der durch CK und der durch LK gehende größte Kreis sich gegenseitig halbiren und der Pol C in der Mitte der einen Hälfte liegt (§. 558. 3.) und eben das von B gilt. Hieraus folgt, daß K der Pol des Bogens CB ist; denn die Ebnen der Kreise KC, KB gehen, da sie größte Kreise sind, durch den

Mittelpunct O der Kugel, und da $KOC = KOB = R$, so ist KO des Kreises BFC Axe und K sein Pol. Aus eben den Gründen ist L des Bogens AC und M des Bogens AB Pol.

2. Es ist aus §. 568. bekannt, daß der Bogen FG eben so viele Grade hält, als der sphärische Winkel GCF, da nun $KF = LG = 90°$: so hat man $180° = KL + FG = KL + ACB$, und aus eben dem Grunde $KM + ABC = 180°$, und $LM + BAC = 180°$; die Seiten des letztern Dreyeckes ergänzen also die Winkel des erstern zu 180°.

Aber weil auch $KF = KI = 90°$, so ist FI in Rücksicht der Anzahl von Graden $= FKI$. Da nun $CF = BI = 90°$, so ist $IB + FB + BC = 180° = IF + BC = FKI + BC$. Aus denselben Gründen ist $AC + KLM = 180° = AB + KLM$, und es ergänzen die Winkel des letztern Dreyeckes die Seiten des erstern zu 180°.

* 591. 101ster Lehrsatz. Jedes sphärischen Dreyeckes Winkel betragen zusammen genommen mehr als zwey rechte und weniger als sechs rechte Winkel. (Fig. 227.)

Beweis. Wenn man aus dem gegebenen Dreyecke ABC das Dreyeck KLM so herleitet, wie im vorigen §.: so ist $BAC = 2R - LM$, $ABC = 2R - KM$, $ACB = 2R - KL$, also $A + B + C$ $6R - LM - KM - KL$, und diese Summe allemal kleiner als sechs rechte Winkel.

Aus dem §. 576. aber ist auch bekannt, daß $LM + KM + KL < 4R$, also ist auch $A + B + C > 2R$.

* 592. **102ter Lehrsatz.** Wenn die drey Winkel A, B, C eines sphärischen Dreyeckes gegeben sind, so ist dadurch auch die Größe der Seiten des Dreyeckes, welches auf einer gegebenen Kugelfläche diese Winkel enthält, völlig bestimmt. (Fig. 227.)

Beweis. Man zeichne auf eben derselben Kugelfläche ein Dreyeck, dessen Seiten $KL = 180° - C$, $KM = 180° - B$, $LM = 180° - A$ sind: so sind die Winkel, welche in diesem Dreyecke jeder Seite gegenüberstehn, völlig bestimmt, (§. 583.) oder es ist unmöglich, daß sie bey mehrmaliger Zeichnung eines solchen Dreyeckes, das einemal so, das anderemal anders ausfallen könnten. Nimmt man aber dann $LD = LG = 90°$, $KF = KI = 90°$, $ME = MH = 90°$: so ergiebt sich aus den durch die Puncte D und G, F und I, E und H gezogenen größten Kreisen ein Dreyeck ABC, dessen Winkel den gegebenen A, B, C gleich sind, und die Seiten dieses Dreyeckes sind $AB = 180° - M$, $AC = 180° - L$, $BC = 180° - K$, also sind diese Seiten völlig bestimmt, weil die Winkel K, L, M des vorigen Dreyeckes es waren.

* 593. Anmerkung. Diese Lehrsätze machen die Grundlage der sphärischen Trigonometrie aus, einer Wissenschaft, welche lehrt, aus drey gegebenen Stücken des sphärischen Dreyeckes die übrigen Stücke zu bestimmen. Man bedient sich hierbey der Tafeln und der berechneten Hülfslinien, von denen wir in der ebnen Trigonometrie reden werden, und gebraucht die sphärische Trigonometrie besonders häufig in der Astronomie.

* 594. Erklärung. Reguläre Körper heißen diejenigen von ebnen Flächen begränzten Kör-

per, deren Seitenflächen lauter gleiche reguläre Polygone sind.

* 595. Die Untersuchung über diese Körper, in welchen Fällen es möglich sey, einen Raum rund um mit lauter gleichen regulären Polygonen zu begränzen, u. s. w., läßt sich hier nicht vollständig mittheilen, sondern wir werden nur einiges darüber anführen. Diese regulären Körper, deren überhaupt nur fünf möglich sind, haben alle die Eigenschaft, daß ihre sämmtlichen Ecken in einer Kugelfläche liegen, und daß sich auch eine Kugelfläche angeben läßt, welche alle Seitenflächen von innen berührt; aber es ist nicht ganz leicht, die Seitenlinie eines regulären Körpers, der in eine gegebene Kugel oder um dieselbe beschrieben sey, anzugeben, und da die Untersuchung keinen großen Nutzen hat, so werden wir dabey nicht verweilen.

* 596. **103ter Lehrsatz. Es giebt nicht mehr als fünf verschiedene reguläre Körper.**

Beweis. In jedem Eckpuncte eines regulären Körpers stoßen mehrere gleiche Polygone zusammen und bilden eine körperliche Ecke, deren Seitenflächen also alle gleich sind. Da nun alle Seitenflächen einer körperlichen Ecke zusammen immer weniger als vier rechte Winkel betragen, (§. 578.): so ist es nicht möglich daß z. B. fünf Quadrate eine fünfseitige Ecke bilden, denn die Summe dieser fünf Seitenflächen würde $= 5R$ seyn. Es sind demnach nur folgende fünf verschiedene Ecken, die aus regulären Polygonen gebildet werden, möglich: Gleichseitige Dreyecke können zu einer dreyseitigen, vierseitigen oder fünfseitigen Ecke verbunden werden; reguläre Vierecke und Fünfecke aber nur zu einer dreyseitigen Ecke. Bilden drey reguläre Dreyecke eine körperliche Ecke, so ist die Summe der Seitenflächen $= 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$; ist die aus diesen Dreyecken gebildete Ecke vierseitig, so ist die Summe der Seitenflächen $= 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$; ist sie fünfseitig, so wird diese Summe $= 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$; bey einer sechsseitigen Ecke würde sie $= 6 \cdot 60^\circ = 4\,R$ seyn und eine solche Ecke ist also nicht möglich.

Drey Quadrate bilden eine dreyseitige Ecke, deren Seiten zusammen 270° betragen, und die Seiten einer aus regulären Fünfecken gebildeten dreyseitigen Ecke betragen zusammen $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. Wollte man aber drey reguläre Sechsecke zu einer körperlichen Ecke verbinden: so enthielten die Seitenflächen zusammen $3 \cdot 120^\circ$, das ist $4R$, welches unmöglich ist.

Es sind also nicht mehr als drey von reglären Dreyecken, ein von regulären Vierecken und ein von regulären Fünfecken begränzter Körper möglich.

* 597. Hieraus läßt sich indeß noch nicht übersehen, ob wirklich diese Körper möglich sind, ob nämlich eine gewisse Anzahl solcher regulärer Figuren sich wirklich so an einander fügen lassen, daß sie den Körper ganz begränzen, sondern der Lehrsatz zeigt nur, daß es nicht mehrere reguläre Körper geben kann. Weitere Untersuchungen zeigen, daß es allerdings fünf solche Körper giebt: Das Tetraëdrum, welches von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen wird, deren je drey eine körperliche Ecke bilden, ist eine Pyramide, deren Grundfläche

und Seitenflächen gleiche Dreyecke sind; das Octoëdrum, wird von acht gleichseitigen Dreyecken begränzt, und man erhält dasselbe, wenn man oberhalb und unterhalb eines Quadrates Pyramiden errichtet, deren Seitenlinien den Seiten des Quadrates gleich sind, seine Ecken sind vierseitig; im Icosaëdrum sind die Ecken fünfseitig und die gleichen Seitenflächen sind zwanzig gleichseitige Dreyecke, (Fig. 228.); das Hexaëdrum oder der Würfel wird von sechs Quadraten, das Dodecaëdrum von zwölf gleichseitigen Fünfecken gebildet. (Fig. 229.)

Siebenter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Kugel und ihrer Oberfläche.

* 598. Bemerkung. Wenn man die Hälfte eines regulären Polygons von einer geraden Seitenzahl um die durch den Mittelpunct H des darin gezeichneten Kreises gezogene gerade Linie AG dreht, (Fig. 230.): so begränzt die durch das Polygon bey der Umdrehung beschriebene Fläche einen Körper, welcher einer mit dem Halbmesser AH beschriebenen Kugel desto näher kommt, je vielseitiger das Polygon angenommen wird. Wenn man den Durchmesser AG so zieht, daß er zwey Eckpuncte des Polygons verbindet, welches immer möglich ist, wenn die Anzahl der Seiten des ganzen Polygons eine gerade Zahl, nämlich 4, 6, oder 8 u. s. w. ist: so besteht dieser Körper aus zwey Kegeln, und einer größern oder kleinern Anzahl abgestutzter Kegel, deren beyde Grundflächen parallele Ebnen sind,

da, wenn man CB verlängert, bis sie die Linie GA in M schneidet, die Linie MC bey ihrer Umdrehung um MG einen Kegel beschreiben würde. Die Betrachtung eines solchen Körpers wird uns also zur Vorbereitung auf die Berechnung der Größe einer Kugel und ihrer Oberfläche dienen.

* 599. Erkärung. Wenn man sich vorstellt, daß eine ebne Figur wie ACEG um eine festgehaltene gerade Linie AG herumgedreht wird: so heißt diese die Axe des auf solche Weise beschriebenen Körpers.

* 600. Erklärung. Wenn man den Kreis-Ausschnitt (Fig. 235.) BCH oder ACH um eine durch den Mittelpunct des Kreises gehende Axe AG dreht: so heißt der durch die Umdrehung dieses Ausschnitts entstehende Körper ein kegelförmiger Kugel-Ausschnitt, und man kann diesen vollständig nennen, wenn er, wie bey der Umdrehung von AHC um AH geschieht, keine innere Höhlung hat, hingegen ausgehöhlt, wenn der Kreis-Ausschnitt BHC um eine solche Axe wie AH gedreht wird, wo der Raum um AH, welchen die Fläche BHA durchlaufen würde, wenn man auf sie Rücksicht nähme, leer bleibt, oder eine kegelförmige Höhlung bildet.

Wäre der Theil BH des Polygons um AH gedreht: so würde man den entstehenden Körper einen kegelförmigen Ausschnitt des polygonischen Körpers nennen können.

* 601. 104ter Lehrsatz. Wenn ein Dreyeck ABC (Fig. 231.) um seine eine

Seite BC als Axe gedreht wird: so ist sein Inhalt gleich dem Drittel eines Cylinders, dessen Höhe = BC und dessen Halbmesser = AD, wo nämlich AD die aus der Spitze A auf BC senkrecht gesetzte Linie ist.

Beweis. Jedem das Dreyeck ADC sich um DC dreht, beschreibt es einen geraden Kegel (§. 503.), dessen Größe gleich ist dem Drittel eines Cylinders von der Höhe DC, dessen Grundfläche den Halbmesser = DA hat (§. 506.). Eben so ist der durch ABD beschriebene gerade Kegel gleich dem Drittel eines Cylinders, dessen Höhe = BD und dessen Grundfläche den Halbmesser AD hat. Da nun die beyden Cylinder, mit denen wir die Stücke des Körpers verglichen, einerley Grundfläche, deren Halbmesser = AD ist, haben: so ist der ganze Körper dem Drittel eines Cylinders dieser Grundfläche gleich, wenn desselben Höhe = BD + DC = BC ist.

Fiele die Senkrechte AD, wie Fig. 232. außerhalb des Dreyecks: so hätte man den durch ABD entstandenen Kegel gleich dem Drittel des Cylinders vom Durchmesser AD und der Höhe BD; und den durch ACD entstandenen Kegel gleich dem Drittel eines Cylinders von gleicher Grundfläche und der Höhe CD; also den durch Umdrehung des Dreyeckes entstandenen Körper gleich dem Unterschiede beyder oder dem Drittel eines Cylinders von eben jenem Durchmesser und der Höhe = BD — CD = BC.

* 602. 105ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 233.) der gleichschenklichte Triangel ABC

um eine durch die Spitze A (wo nämlich die gleichen Schenkel einander schneiden) gehende Axe AD gedreht wird: so ist der Inhalt des dadurch beschriebenen Körpers gleich zwey Dritteln eines Cylinders, dessen Grundfläche den Halbmesser $=$ AE hat, und dessen Höhe $=$ FG ist, wenn nämlich AE die auf BC senkrechte Linie und FG das auf der Axe durch die gegen dieselben senkrechten Linien BF, CG abgeschnittene Stück ist.

Beweis. Erster Fall. Wenn die verlängerte Grundlinie BC des gleichschenklichten Dreyeckes die Axe AD schneidet. Es sey D der Durchschnittspunct, so beschreibt bey der Umdrehung das Dreyeck ABD einen Körper, dessen Inhalt gleich dem Drittel eines Cylinders von der Höhe $=$ AD, und dem Halbmesser $=$ BF, und das Dreyeck ACD einen Körper gleich dem Drittel eines Cylinders von der Höhe $=$ AD und dem Halbmesser $=$ CG. Der Unterschied beyder ist der Körper, dessen Inhalt wir suchen. Bezeichnen wir die Zahl 3, 14159 . . welche nach §. 332. das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser angiebt, durch π, so sind (§. 341.) die Grundflächen der beyden erwähnten gleich hohen Cylinder $= \pi . BF^2$ und $= \pi . CG^2$, also (§. 518.) der Inhalt beyder Cylinder $= \pi . AD . BF^2$, und $= \pi . AD . CG^2$, der Inhalt des durch das Dreyeck ABC erzeugten Körpers $= \frac{1}{3} \pi . AD . (CG^2 - BF^2) = \frac{1}{3} \pi . AD (CG + BF) (CG - BF)$. Zieht man nun BH mit DA parallel, so ist CH $=$ CG $-$ BF, und man hat (§. 284.) AD :

AE = BC : CH, weil die Dreyecke AED, CHD ähnlich sind, indem die Winkel B = D, wegen der Parallelität von BH, DA, ferner E = H = einem rechten Winkel; es ist also das Product AD . CH = AE . BC, oder da CH = CG — BF, AD . (CG — BF) = AE . BC, also unser Körper = $\frac{1}{3}\pi$. AE . BC . (CG + FB.) Da E zwischen B und C in der Mitte liegt, so ist, wenn man EI senkrecht auf die Axe zieht, 2 . EI = CG + BF, und da die Dreyecke EIA, BHC ähnlich sind, weil HCB + HBC = 90° und EAI + EDA = 90°, aber HBC = EDA, also HCB = EAI und bey H und I rechte Winkel: so ist BC : BH = AE : EI, oder BC . EI = BH . AE, das ist BC . (CG + BF) = 2 AE . GF, weil CG + BF = 2 . EI; der Inhalt unsers Körpers ist also = $\frac{2}{3}$. π . AE^2 . GF, gleich zwey Dritteln eines Cylinders von der Höhe = GF und dem Halbmesser = AE.

Zweyter Fall. Wann die Grundlinie BC der Axe DA parallel ist (Fig. 234.). Dann beschreibt das Rechteck AEBF einen Cylinder, und das Dreyeck ABF einen Kegel, dessen Inhalt ein Drittel jenes Cylinders ist; also ist der durch das Dreyeck ABE erzeugte Körper gleich zwey Dritteln eines Cylinders von der Höhe = AF und dem Halbmesser = AE. Da eben das für das Dreyeck AEC gilt, so erhellt auch hier die Richtigkeit des Lehrsatze.

* 603. 20ste Aufgabe. Der Ausschnitt BHD eines regulären Polygons wird um eine Axe HA gedreht, die durch des hineingezeichneten Kreises Mittelpunct geht;

man sucht den Inhalt des durch diese Umdrehung entstehenden Körpers. (Fig. 230.)

Auflösung. Man bestimme den Halbmesser HP des in das Polygon gezeichneten Kreises, und suche den Inhalt dieses Kreises. Man ziehe ferner aus den Endpuncten B und D des polygonischen Bogens BCD die Linien BN, DO senkrecht auf die Axe, und multiplicire den gefundenen Inhalt jenes Kreises mit zwey Dritteln der Höhe NO: so ist das Product der Inhalt des kegelförmigen Ausschnittes des polygonischen Körpers.

Beweis. Wenn man von allen Eckpuncten des Polygons B, C, D, gerade Linien an den Mittelpunct H zieht: so entstehen lauter gleiche, gleichschenklichte Dreyecke von den gleichen Höhen $=$ HP; der Inhalt des durch die Umdrehung eines jeden erzeugten Körpers ist gleich zwey Dritteln eines Cylinders vom Halbmesser $=$ HP und von der Höhe, welche durch die aus den Endpuncten der Seiten auf die Axe senkrechten Linien auf der Axe abgeschnitten wird. Es ist also der durch das Dreyeck CBH beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\,\pi\,.\,HP^2\,.\,NQ$, der durch das Dreyeck CDH erzeugte $= \frac{2}{3}\,\pi\,.\,HP^2\,.\,QO$ und daher der ganze zu bestimmende Körper $= \frac{2}{3}\,\pi\,.\,HP^2\,.\,NO$, wie die Auflösung ergab, wenn π hier die Bedeutung hat, wie im vorigen §.

* 604. Wenn also ABCDEFG die Hälfte eines Polygons von einer geraden Anzahl Seiten ist, so daß in A und G zwey Ecken in denselben Durchmesser fallen: so ist der Inhalt des ganzen durch die Umdrehung dieses Polygons entstandenen Körpers $= \frac{2}{3}\,\pi\,.\,HP^2\,.\,AG$.

* 605. 106ter Lehrsatz. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich zwey Dritteln eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Kreise, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

Beweis. Es sey ABCDEFG ein Halbkreis (Fig. 235.) durch dessen Umdrehung eine Kugel hervorgebracht wird, so behaupten wir, daß dieser Kugel Inhalt $= \frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, AG$ sey, wo nämlich des größten Kreises Inhalt $= \pi \,.\, AH^2$ und $\pi = 3,14159\,..$ ist. Wollte man nun annehmen, der Inhalt der Kugel werde nicht durch dieses Product ausgedrückt, so würde dies Product den Inhalt einer größern oder kleinern Kugel angeben.

Man nehme also an, $\frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, AG$ sey der Inhalt einer größern Kugel vom Halbmesser HI. Man zeichne um den Halbkreis ACEG ein Polygon abcdefg, dessen Seiten den mit dem Halbmesser HI um H gezeichneten Kreis nicht berühren: so bildet dieses Polygon bey der Umdrehung einen solchen Körper, wie wir im vorigen §. betrachtet haben und der Inhalt desselben ist $= \frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, ag$, welches Product größer ist als $\frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, AG$, weil $ag > AG$; dieser polygonische runde Körper ist also größer als $\frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, AG$ und gewiß kleiner als die mit dem Halbmesser HI beschriebene Kugel; und da sich allemal, wenn $HI > HA$ (§. 330.) ein solcher Körper innerhalb jener Kugel beschreiben läßt, so kann das Product $\frac{2}{3}\pi \,.\, AH^2 \,.\, AG$ nicht einer Kugel von größerm Halbmesser als AH gleich seyn.

Es kann aber auch keiner kleinern Kugel vom Halbmesser HM gleich seyn. Denn wenn man den Kreis MOQS mit dem Halbmesser HM $<$ AH um H zeichnet, und um denselben ein Polygon mNOPQRs, welches den Kreis ACEG nicht berührt, so würde der durch die Umdrehung dieses Polygons entstehende Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot HM^2 \cdot sm$ seyn, also gewiß kleiner als $\frac{2}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot AG$, weil so wohl HM $<$ AH, als auch ms $<$ AG. Dieser polygonisch runde Körper ist aber größer als die mit dem Halbmesser HM beschriebene Kugel, und folglich diese noch weit mehr kleiner, als $\frac{2}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot AG$. Dieses Product kann also keiner andern Kugel gleich seyn, als der mit dem Halbmesser AH beschriebenen, deren Durchmesser $=$ AG ist; aber $\pi \cdot AH^2 \cdot AG$ ist der Inhalt eines Cylinders, dessen Halbmesser dem Halbmesser der Kugel, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. (§. 341. 527.)

* 606. Aus völlig ähnlichen Schlüssen läßt sich herleiten, daß der durch die Umdrehung des Kreisausschnittes CHA entstehende kegelförmige Kugelausschnitt gleich ist zwey Dritteln eines Cylinders, dessen Grundfläche dem mit dem Halbmesser AH beschriebenen Kreise und dessen Höhe $=$ AT ist, wo nämlich AT durch die auf die Axe senkrechte Linie CT abgeschnitten wird.

607. 21ste Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser LM einer Kugel (Fig. 217.) ihren Inhalt zu finden.

Auflösung. Man suche den Inhalt eines Kreises vom Halbmesser LM (§. 343.) und multiplicire denselben mit zwey Dritteln des Durchmessers MN; das Product giebt den Inhalt der Kugel in eben solchem Cubikmaße an, als das Längenmaß ist, nach welchem der Durchmesser der Kugel angegeben worden.

Beyspiel. Ist einer Kugel Halbmesser = 10 Fuß: so ist der Inhalt ihres größten Kreises = 314,159 Quadratfuß und der Inhalt der Kugel = $\frac{2}{3}$. 20 . 314, 159 = 4188,8 Cubikfuß.

Beweis. Der vollständige Beweis ist in §. 605 enthalten. Für Anfänger mag es genug seyn, folgendes zu bemerken. Wenn (Fig: 236.) im Halbkreise AEB der Halbmesser EF senkrecht auf AB ist und durch die an A, B, C gezogenen Tangenten ein Rechteck ADCB, durch die Sehnen AE, EB aber ein gleichschenklichtes Dreyeck gebildet wird: so würde, wenn man diese Figur um die fest gehaltene Linie EF drehte, das Rechteck einen Cylinder, der Halbkreis eine Halbkugel, und das Dreyeck einen Kegel beschreiben. Die Halbkugel ist also größer, als ein über derselben Grundfläche stehender, gleich hoher gerader Kegel, und kleiner, als ein über derselben Grundfläche stehender gleich hoher gerader Cylinder. Daß die Halbkugel genau das Mittel zwischen dem Kegel und Cylinder hält, läßt sich zwar hieraus nicht übersehen; aber wenn man den Halbmesser EF bey G, H, I in lauter gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspuncte KL, MN, OP mit AB parallel zieht, und sich die Rechtecke POQR, MSTN, KULV um EF gedreht denkt: so beschreiben sie gerade Cylinder, die ganz innerhalb der Kugel liegen. Eben so beschreiben die Rechtecke XL, ZN, YT, WB Cylinder, deren Summe größer als die Kugel ist; und wenn man den Halbmesser in recht viele Theile eintheilt: so ist die Summe jener Cylinder immer weniger von der Summe dieser verschieden, und diese Summen kommen zwey Dritteln des durch das Rechteck ABCD entstandenen Cylinders immer näher, je kleiner die Höhen der einzelnen Cylinder und je mehrere folglich derselben sind, und je näher ihre Summe mit der Halbkugel übereinstimmt.

* 608. 22ste Aufgabe. Den Inhalt eines kegelförmigen Kugel-Ausschnittes, der durch den Kreisausschnitt AHC beschrieben wird, und eines Kugel-Ausschnitts, welchen der halbe Kreis-Abschnitt ACT beschreibt, zu bestimmen, wenn der Halbmesser AH und die Höhe AT des Bogens CT bekannt sind (Fig. 235.)

Auflösung. Um den kegelförmigen Ausschnitt zu bestimmen, multiplicire man den Inhalt eines Kreises vom Halbmesser AH mit zwey Dritteln der Höhe AT; um aber den Kugel-Abschnitt zu berechnen, der aus Umdrehung der Fläche ACT entsteht, ziehe man von jenem kegelförmigen Ausschnitte den Kegel ab, welchen das Dreyeck HCT beschreibt.

Anmerkung. Da der kegelförmige Ausschnitt, welchen ACH beschreibt $= \frac{2}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot AT$ und der Kegel, den CTH beschreibt $= \frac{1}{3}\pi \cdot CT^2 \cdot HT$ ist, auch $CT^2 = AH^2 - HT^2$, und $HT = AH - AT$, so läßt sich auch der Abschnitt ganz durch AH und AT ausdrücken.

* 609. 23ste Aufgabe. Aus dem gegebenen Inhalte der Kugel ihren Halbmesser zu finden.

Auflösung. Man dividire den gegebenen Inhalt mit $\frac{4}{3} \cdot 3,14159$, das ist mit $4,18879$. und ziehe aus dem Quotienten die Cubikwurzel; diese giebt den Halbmesser der Kugel in eben solchen Längenmaße an, als das Cubikmaß ist, in welchem der Inhalt angegeben worden.

Beweis. Wir haben §. 605. gesehen, daß eine Kugel vom Halbmesser $=$ AH und Durchmesser $=$ AG, den Inhalt $= \frac{2}{3} \cdot 3,14159 \cdot AH^2 \cdot AG$; das ist, weil $AG = 2 \cdot AH$, den Inhalt $= \frac{4}{3} \cdot 3,14159 \cdot AH^3$ hat Ist also dieser Inhalt gegeben $= a$, so ist $\frac{a}{4,18879} = AH^3$ und $\sqrt[3]{\frac{a}{4,18879}} = AH$.

Uebungs-Aufgaben. Wenn der Erde Umfang 5400 Meilen beträgt und sie eine genaue Kugel wäre; wie groß würde ihr Inhalt seyn?

* Wenn ein Cubikfuß Eisen 558 Pfund wiegt; wie viel Zolle Durchmesser hält eine 24pfündige Kugel.

* 610. 107ter Lehrsatz. Wenn der Ausschnitt BHDC eines regulären Polygons (Fig. 237.) sich um eine durch den Mittelpunct des gezeichneten Kreises gehende Axe dreht: so ist die Oberfläche, welche von den Polygon-Seiten BCD beschrieben wird, gleich der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders, dessen Grundfläche dem in das Polygon gezeichneten Kreise und dessen Höhe = EF ist, wenn die Linien BE, DF aus den Endpuncten des Polygon-Stückes auf die Axe senkrecht gezogenen sind.

Beweis. Die Seite BC beschreibt bey der Umdrehung einen abgestutzten Kegel, dessen Oberfläche, wenn ich wieder π für die Zahl 3,14159 setze, $= \pi \,.\, BC \,.\, (BE + CI)$ ist, weil der Umfang der beyden Grundflächen $= 2\pi \,.\, BE$ und $= 2\pi \,.\, CI$ ist (§. 530.). Zieht man nun aus dem Mittelpuncte H des in das Polygon gezeichneten Kreises die Linie HG senkrecht auf BC: so halbirt diese BC, und HG ist der Halbmesser dieses in dem Polygone beschriebenen Kreises. Wenn man nun GK auf die Axe senkrecht zieht, so ist $GK = \frac{1}{2}(BE + CI)$, und jene Oberfläche ist $= 2\pi \,.\, BC \,.\, GK$. Ist nun ferner BL mit der Axe parallel: so sind die Dreyecke BCL, HGK ähnlich, denn sie haben bey L und K rechte Winkel und es ist $GHK = BGK = 90^\circ - HGK = BCL$, also auch $CBL = HGK$. Folglich ist BC : BL

$=$ GH : GK, oder BC . GK $=$ BL . GH $=$ EI . GH. Die durch BC beschriebene Oberfläche ist also $= 2 . \pi .$ EI . GH und aus eben den Gründen die durch CD beschriebene Oberfläche $=$ 2π . IF . GH, also die von BCD beschriebene Oberfläche $= 2\pi$. EF . GH, das ist, so groß, als die Oberfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche den Umfang $= 2\pi$. GH oder den Halbmesser $=$ GH hat, und dessen Höhe $=$ EF ist.

* 611. Wenn also das halb-reguläre Polygon ABCDEFGH (Fig. 230.) sich um die durch den Mittelpunct H gehende Axe AG dreht: so ist die durch dasselbe entstandene Oberfläche $= 2\pi$. HP . AG, gleich dem Producte aus dem Umfange des darin beschriebenen Kreises in den größten, nämlich zwischen zwey entgegengesetzten Eckpuncten gezogenen, Durchmesser des Polygons.

* 612. Um diese Lehren auf die Kugel anzuwenden, müssen wir noch folgende sehr einleuchtende Grundsätze vorausschicken. 1. Wenn eine Kugel ganz innerhalb einer andern Kugel liegt, so ist die Oberfläche der erstern kleiner, als die der letztern. 2. Wenn um die kleinere Kugel, auf die hier mehrmals angegebene Art, ein runder polygonischer Körper beschrieben ist, dessen Seiten die größere Kugel nicht berühren: so ist die Oberfläche desselben kleiner, als die Oberfläche der größern Kugel. 3. Wenn in einem Kreise ein Polygon gezeichnet, und durch die Umdrehung des Kreises und Polygons um eine Axe eine Kugel, und in derselben ein runder polygonischer Körper entstanden:

so ist des letztern Oberfläche kleiner als die Oberfläche der Kugel. 4. Dagegen ist die Oberfläche der Kugel kleiner als die Oberfläche eines Körpers, der durch Umdrehung eines um den Kreis gezeichneten Polygons entsteht.

* 613. 108ter Lehrsatz. Die Oberfläche der Kugel ist gleich der krummen Oberfläche eines geraden Cylindes, der mit ihr gleichen Halbmesser hat, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

Beweis. Ist (Fig. 235.) AG der Kugel Durchmesser, AH ihr Halbmesser: so behaupten wir, daß ihre Oberfläche $= 2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ sey. Wir wollen annehmen, dies sey nicht der Fall: so würde das Product $2\pi \,.\, AH \,.\, AG$, (wo π die Bedeutung wie §. 605. hat,) gleich seyn, entweder einer Kugel-Oberfläche von größerm, oder kleinerm Halbmesser als AH.

Es sey also $HI > HA$, so nehmen wir an $2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ drücke die Größe der Oberfläche einer mit dem Halbmesser HI beschriebenen Kugel aus. Zeichnet man nun um den Kreis vom Halbmesser AH ein reguläres Polygon abcdefg, dessen Seiten den mit dem Halbmesser HI um H beschriebenen Kreis nicht berühren, so ist die Oberfläche des durch die Umdrehung um die Axe IK durch das Polygon aceg erzeugten Körpers kleiner als die Oberfläche der Kugel vom Halbmesser HI. Es ist aber die Oberfläche des polygonischen Körpers $= 2\pi \,.\, AH \,.\, ag$ größer als $2\pi \,.\, AH \,.\, AG$, und da die Kugelfläche vom Halbmesser HI noch größer ist: so kann die letztere nicht $= 2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ seyn, und folglich kann keiner Kugel Oberfläche $= 2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ seyn, wenn ihr Halbmesser $> AH$ und also ihr Durchmesser $> AG$ ist.

Nimmt man nun im Gegentheil an, einer Kugel vom Halbmesser $HM < HA$ Oberfläche sey dem Producte $2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ gleich: so wird sich um den mit dem Halbmesser HM um H beschriebenen Kreis ein Polygon zeichnen lassen, welches den Kreis ADG nicht berührt, und des aus der Umdrehung dieses Polygons entstehenden Körpers Oberfläche ist größer, als die Kugelfläche vom Halbmesser HM. Diese polygonische Oberfläche ist $= 2\pi \,.\, HM \,.\, ms < 2\pi \,.\, HA \,.\, AG$; und da die Kugelfläche vom Halbmesser HM noch kleiner ist: so kann weder sie, noch irgend eine Kugelfläche, deren Halbmesser kleiner als AH ist, gleich $2\pi \,.\, AH \,.\, AG$ seyn. Dieses Product drückt also die Oberfläche der Kugel vom Halbmesser AH aus, und diese ist eben so groß, als die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders vom Umfange $= 2\pi \,.\, AH$ und der Höhe $= AG$.

* 614. Da die Fläche eines größten Kreises der Kugel vom Halbmesser AH, gleich $\pi \,.\, AH^2$ ist (§. 341.), und die Oberfläche der Kugel $= 2\pi \,.\, AH \,.\, AG = 4\pi \,.\, AH^2$: so ist die **Oberfläche jeder Kugel viermal so groß, als die Fläche eines größten Kreises desselben.**

* 615. **24ste Aufgabe.** Aus dem Halbmesser einer Kugel ihre Oberfläche zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire das Quadrat ihres Halbmessers mit 4π, das ist mit 12,56637. Das Product giebt die Oberfläche der ganzen Kugel an.

* 616. Erklärung. Man nennt einen Kugel-Abschnitt denjenigen Theil der Kugel, wie ENF (Fig. 217.) welcher durch eine Ebne von der Kugel abgeschnitten wird. Eine Zone heißt derjenige Theil der Kugelfläche, welcher zwischen zwey parallelen Ebnen abgeschnitten wird.

* 617. Erklärung. Zieht man vom Mittelpuncte der Kugel einen Durchmesser der Kugel senkrecht auf die Ebne, welche den Abschnitt macht, oder auf die beyden parallelen Ebnen, welche die Zone begränzen: so heißt im ersten Falle das innerhalb des Kugel-Abschnitts liegende Stück dieses Durchmessers KN die Höhe des Abschnitts ENF (Fig. 217); im zweyten Falle heißt der senkrechte Abstand der beyden Ebnen, welche die Zone bilden, die Höhe der Zone.

* 618. 25ste Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel und der Höhe eines von derselben gemachten Abschnitts, oder einer auf derselben gezeichneten Zone, die Oberfläche des Abschnittes oder der Zone zu bestimmen.

Auflösung. 1. Man multiplicire das Product aus dem Halbmesser der Kugel in die Höhe des Abschnitts mit 2π: so hat man die Oberfläche des Abschnitts; 2. und um die Oberfläche der Zone zu finden, multiplilire man das Product aus der Kugel Halbmesser in die Höhe der Zone mit 2π.

Daß man so die Oberfläche richtig finde, läßt sich aus §. 610. durch ganz ähnliche Schlüsse herleiten, wie diejenigen waren, deren wir uns §. 613. für die Oberfläche der ganzen Kugel bedienten.

* 619. Unter den Vergleichungen, die man zwischen dem Inhalte und der Oberfläche von Kugeln und Cylindern anstellen kann, ist auch noch folgende merkwürdig: Wenn eine Kugel mit einem Cylinder einerley Durchmesser hat, und des Cylinders Höhe ist dem Durchmesser der Kugel gleich, so ist die Kugel ihrem Inhalte nach gleich zwey Dritteln des Cylinders, (§. 605.) und auch die Oberfläche der Kugel ist gleich zwey Dritteln der ganzen Oberfläche des Cylinders, wenn man nämlich die Grundflächen mit dazu rechnet. Ist nämlich der Kugel Durchmesser $= D$, so ist ihr größter Kreis $= \frac{1}{4}\pi D^2$, und (§. 614.) die Oberfläche der Kugel $= \pi D^2$; die krumme Oberfläche des Cylinders aber πD^2, (§. 527.) und die beyden Grundflächen zusammen $= \frac{1}{2}\pi D^2$; also die gesammte Oberfläche des Cylinders $= \frac{3}{2}\pi D^2$, und diese verhält sich zur Oberfläche der Kugel, wie der Inhalt des Cylinders zum Inhalt der Kugel.

Uebungs-Aufgaben. Wenn der Erde Halbmesser $= 859{,}43669$ Meilen angenommen wird, ihre Oberfläche in Quadratmeilen anzugeben.

Die Höhe der heißen Zone auf der Erde ist $= 0{,}796$ ihres Halbmessers: wie viel Quadratmeilen enthält sie?

* 620. 109ter Lehrsatz. Zwey Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte nach wie die Cubi ihrer Halbmesser; die Oberflächen zweyer Kugeln aber verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Beweis. In Fig. 218. sind der beyden Kugeln Halbmesser AG und BI, ihre Durchmesser $=$ GH und IK, also ihr Inhalt (§. 605.) $= \frac{2}{3}\pi \,.\, AG^2 \,.\, GH$ und $\frac{2}{3}\pi \,.\, BI^2 \,.\, IK$; da nun $GH = 2AG$ und $IK = 2 \,.\, BI$: so verhält sich die Größe der einen Kugel zur Größe der andern, wie $\frac{4}{3}\pi \,.\, AG^3$ zu $\frac{4}{3}\pi \,.\, BI^3$, das ist, wie die Cubi der Halbmesser. Die Oberfläche beyder Kugeln ist $= 2\pi \,.\, AG \,.\, GH$ und $2\pi \,.\, BI \,.\, IK$ oder $= 4\pi \,.\, AG^2$ und $4\pi \,.\, BI^2$; die Oberflächen verhalten sich also wie die Quadrate der Halbmesser.

Die ebne Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Von den trigonometrischen Hülfslinien.

* 1. Erklärung. Die Trigonometrie lehrt wenn von den Seiten und Winkeln eines Dreyeckes drey Stücke, die von einander unabhängig sind, in Zahlen gegeben worden, die drey übrigen Stücke, berechnen.

Anmerkung. Da die gegebenen Stücke von einander unabhängig seyn müssen: so dürfen es beym ebnen Dreyecke nicht die drey Winkel seyn.

* 2. Erklärung. Die ebne Trigonometrie beschäftigt sich mit der Auflösung der ebnen, geradlinigten Dreyecke, die sphärische Trigonometrie mit der Auflösung der sphärischen und körperlichen Dreyecke.

Nur die ebne Trigonometrie werden wir hier abhandeln.

* 3. Bemerkung. Der Vortheil der trigonometrischen Rechnung beruht hauptsächlich darauf,

daß man gewisse Hülfslinien oder Hülfszahlen in besonders dazu verfertigten Tafeln ausgerechnet findet, und sich dieser bey allen Rechnungen bedienen kann. Daher ist es nöthig, diese Hülfslinien näher kennen zu lernen; ihre Verbindung mit den Dreyecken wird sich in der Folge von selbst zeigen.

* 4. Bemerkung. Wenn man (Fig. 1.) um den Scheitel C eines Winkels ACB mit willkührlichem Halbmesser einen Kreis zieht: so enthält (Geom. §. 303.) der Bogen AB eben so viele Grade, als der Winkel ACB; oder AB verhält sich zum ganzen Kreisumfange wie der Winkel ACB zu vier rechten Winkeln, und man sagt daher wohl, der Bogen AB sey das Maß des Winkels ACB, und beyde stehen in einer bestimmten und nothwendigen Verbindung mit einander.

* 5. Erklärung. Wenn (Fig. 1.) um den Scheitel C eines Winkels ACB als Mittelpunct der Kreisbogen AB gezogen ist, und man zieht von dem Endpuncte des einen Schenkels die Linie BD auf den andern Schenkel senkrecht: so heißt das Verhältniß der Linie DB zu CB oder der Quotient $\frac{DB}{CB}$ der Sinus des Winkels ACB, und auch der Sinus des Bogens AB.

Man nennt auch wohl die Linie DB selbst den mit dem Halbmesser BC zusammen gehörigen Sinus.

* 6. Zieht man für denselben Winkel mit einem andern Halbmesser den Bogen ab, und vom Endpuncte des einen Schenkels, bd auf den andern

Schenkel senkrecht: so ist der Quotient $\frac{db}{cb} = \frac{DB}{CB}$ und folglich braucht man, wenn man unter dem Sinus diesen Quotienten versteht, gar nicht auf die Größe des Halbmessers zu sehen. Wollte man aber die Linie DB selbst als den Sinus oder als die Sinuslinie ansehen: so müßte man allemal den Halbmesser, zu welchem dieser Sinus gehört, mit bemerken. Wir werden unter dem Namen Sinus allemal jenen Quotienten verstehen.

* 7. Erklärung. Ist in dem Endpuncte A des einen Schenkels eines Winkels ACB (Fig. 2.) die Linie AE auf diesen Schenkel senkrecht errichtet: so schneidet der andere Schenkel CE ein Stück AE auf dieser senkrechten ab, und man nennt nun den Quotienten $\frac{AE}{CA}$ oder das Verhältniß des auf der senkrechten Linie abgeschnittenen Stückes AE zum Abstande derselben von C, die Tangente des Winkels ACB oder die Tangente des Bogens AB, welcher zwischen den Schenkeln dieses Winkels um den Scheitel als Mittelpunct beschrieben ist.

* 8. Erklärung. Wenn man die Figur (Fig. 2.) eben so zeichnet, wie im vorigen §.: so heißt der Quotient $\frac{CE}{CA}$ oder das Verhältniß des längern Schenkels CE zum kürzern AC, die Secante des Winkels ACB, oder die Secante des Bogens AB.

* 9. Jeder Winkel hat also eine bestimmte

Tangente und Secante, da der Quotient $\frac{AE}{CA}$ und auch $\frac{CE}{CA}$ beständig bleiben, man mag CA, wie man will, nehmen.

Man muß übrigens bemerken, daß die Namen Tangente und Secante hier etwas anders bedeuten, als in der Geometrie; auch, daß man wohl die Linie AE, die mit dem Halbmesser AC zusammengehörige Tangente, und mit eben der Einschänkung die Linie CE die Secante des Winkels ACB nennt.

* 10. Erklärung. Wenn (Fig. 3.) die Winkel ACB, BCF zusammen einen rechten oder 90 Grade betragen: so sagt man, der Winkel BCF ergänzt den Winkel ACB zu einem rechten Winkel. Betragen hingegen ACB, BCI zusammen zwey rechte: so sagt man, BIC ist des Winkels ACB Ergänzung zu zwey rechten Winkeln. Auch ergänzt der Bogen BF den Bogen AB zu 90 Graden u. s. w.

* 11. Erklärung. Wenn der Winkel BCF (Fig. 3.) den Winkel ACB zu 90 Graden ergänzt, und es ist BG von einem Puncte des einen Schenkels des Winkels BCF auf seinen andern Schenkel senkrecht gezogen: so ist $\frac{GB}{CB}$ des Winkels BCF Sinus, und dieser heißt zugleich der Cosinus des Winkels ACB, welcher BCF zu einem rechten Winkel ergänzt.

Ist FH auf dem Schenkel CF senkrecht errichtet und bis dahin verlängert, wo des Winkels BCF andrer Schenkel sie trifft: so ist $\frac{FH}{CF}$ des Winkels FCB Tangente und des Winkels ACB Cotangente; und $\frac{CH}{CF}$ des Winkels FCB Secante und des Winkels ACB Cosecante.

* 12. Umgekehrt ist $\frac{DB}{CB}$ des Winkels FCB Cosinus, $\frac{AE}{CA}$ desselben Winkels Cotangente, und $\frac{CE}{CA}$ seine Cosecante.

* 13. Wenn (Fig. 4.) mehrere Winkel ACB, ACE an dem gemeinschaftlichen Schenkel AC gezeichnet sind und in C einerley Scheitelpunct haben: so verhalten sich, wenn man CB = CE nimmt und aus B, E die Linien BD, EF senkrecht auf den gemeinschaftlichen Schenkel zieht, diese Linien DB, FE zu einander, wie die Sinus der Winkel ACB, ACE. Eben so verhalten sich, wenn in A die Linie AH senkrecht auf AC errichtet ist, die Stücke AG, AH, wie die Tangenten und die Linien CG, CH zu einander, wie die Secanten der Winkel ACB, ACE.

Auf ähnliche Weise, wenn CI auf AC senkrecht gezogen ist, so daß ACB + BCI = R und ACE + ECI = R: so verhalten sich die aus B, E auf CI senkrechten Linien, KB, LE, wie die Cosinus der Winkel ACB, ACE; und eben so IM, IN, wie die Contangenten CM, CN, wie die Cosecanten der Winkel ACB, ACE.

* 14. Erklärung. Endlich führt, wenn man die Figur (Fig. 3.) ganz so, wie §. 11. 12. zeichnet, nach den Quotient $\frac{AD}{CA}$ den Namen Quersinus, oder Sinus versus und $\frac{FG}{CA}$ den Namen Quercosinus, oder Cosinus versus.

* 15. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet eines Winkels ACB Sinus durch Sin. ACB, seinen Cosinus durch Cos. ACB, seine Tangente durch Tang. ACB, seine Cotangente durch Cotang. ACB und so durch Sec. ACB, Cosec. ACB, Sin. vers. ACB, Cos. vers. ACB, die Secante, Cosecante, den Quersinus und Quercosinus desselben Winkels.

* 16. Erklärung. Die bisher betrachteten Linien, aus deren Vergleichung mit einem zugehörigen Halbmesser die Quotienten entstehen, welche wir Sinus, Tangenten u. s. w. nennen, heißen überhaupt die trigonometrischen Linien, weil man sich ihrer zuerst zu trigonometrischen Rechnungen bedient hat. Die mit den Namen Sinus, Cosinus, Tangens u. s. w. belegten Quotienten nennen wir trigonometrische Functionen. Aus eben dem Grunde nennt man die Tafeln, in welchen die Sinus, Tangenten, Cosinus, Cotangenten u. s. w. für alle Winkel berechnet sind, trigonometrische Tafeln, obgleich man sich ihrer auch zu sehr vielen andern Rechnungen außer den trigonometrischen bedient.

* 17. Recapitulation. Wenn man also auf den Schenkeln eines Winkels ACB (Fig. 3.) die glei=

chen Entfernungen CA = CB und auch auf der gegen AC senkrechten Linie CF = CA nimmt: so stellt die vom Endpuncte B des einen Schenkels auf den andern Schenkel senkrecht gesetzte Linie DB den Sinus, die auf CF senkrechte GB den Cosinus vor; die aus dem Endpuncte des einen Schenkels senkrecht auf denselben errichtete und durch den andern Schenkel begränzte Linie AE stellt die Tangente, das auf dem andern Schenkel abgeschnittene Stück die Secante, und endlich die auf dem andern Schenkel des Ergänzungswinkels in F senkrecht errichtete und durch den verlängerten Schenkel CB begränzte Linie FH die Cotangente, und das auf diesem Schenkel abgeschnittene Stück CH die Cosecante vor. Betrachtet man aber, wie es in den Tafeln geschieht, die Sinus, Tangenten, Secanten u. s. w. als Zahlen, so ist (Fig. 3.) $\frac{DB}{CB} = \frac{DB}{CA} = \text{Sin. } ACB$; $\frac{GB}{CA} = \text{Cosin. } ACB = \text{Sin. } (90^\circ - ACB.)$; $\frac{AE}{CA} = \text{Tang. } ACB$; $\frac{FH}{CA} = \text{Cotang. } ACB$; $\frac{CE}{CA} = \text{Sec. } ACB$; $\frac{CH}{CF} = \frac{CH}{CA} = \text{Cosec. } ACB$.

* 18. **Bemerkung.** Wir haben bisher nur den leichtsten Fall, da ACB ein spitzer Winkel ist, betrachtet; es ist aber nothwendig die Sinus, Tangenten u. s. w. auch für stumpfe Winkel zu kennen. Nehmen wir nun (Fig. 5.) auf dem Schenkel CP des stumpfen Winkels ACP die willkührliche Entfernung CP, und ziehen gegen den andern Schenkel die Linie PD senkrecht: so trifft diese nicht den

Schenkel selbst, sondern seine Verlängerung; offenbar aber ist PD hier für den stumpfen Winkel eben das, war in Fig. 3. BD für den spitzen Winkel war; also ist $\frac{DP}{CP}$ Sinus des stumpfen Winkels ACP.

Schwieriger als die Bestimmung des Sinus ist bey stumpfen Winkeln die Bestimmung der Tangente; denn wenn man auf dem einen Schenkel des Winkels die Linie AR senkrecht errichtet: so wird diese Linie von dem andern Schenkel gar nicht geschnitten, wohl aber von seiner Verlängerung CS, und wir betrachten nun $\frac{AS}{CA}$ als Tang. ACP, und sehen hier AS als negativ an, weil ihre Richtung der AR entgegengesetzt ist.

* 19. Bemerkung. Ueberhaupt ist es nöthig, hier wo es nicht bloß auf die Größe, sondern auch auf die Richtung der Linien ankommt, eine gewisse Richtung als diejenige festzusetzen, welche für positiv gelten soll, und einen bestimmten Anfangspunct anzunehmen. Stellen wir uns (Fig. 4.) vor, daß der Schenkel CB um C gedreht wird, so daß der Winkel ACB wächst oder größer wird, während der Schenkel AC unveränderlich in seiner Lage bleibt: so wächst auch des Winkels Sinus und wir betrachten daher den Punct D, wo die senkrechte Linie den unveränderlichen Schenkel AC schneidet, als den Anfangspunct der Sinus, weil dieser Endpunct immer auf der bestimmten Linie AC bleibt, die Höhe des andern Endpunctes aber sich ändert und von B nach E u. s. w. fortrückt. Betrachten wir also den Sinus des spitzen Winkels als positiv, indem wir DB als positiv ansehen: so wird die vom

andern Schenkel auf diesen gefällte Senkrechte allemal positiv, wenn sie mit DB auf einerley Seite von AC oder ihrer Verlängerung liegt, negativ hingegen würde sie seyn, wenn sie auf die entgegengesetzte Seite fallen könnte.

Für den Ergänzungswinkel BCI des eben betrachteten ACB ist $\frac{KB}{CI}$ der Sinus, und wir nehmen daher aus eben den Gründen CI als die Linie an, in welcher der Anfangspunct des Sinus von BCI oder Cos. ACB liegt, und betrachten die Cosinus als negativ, wenn sie an die andere Seite von CI fallen.

Die Tangente eines Winkels ist allemal proportional dem Stücke, welches durch den einen Schenkel des Winkels abgeschnitten wird auf der Linie AH, welche auf dem andern Schenkel in dem bestimmten Puncte A senkrecht steht; und man übersieht leicht, daß hier A der Anfangspunct ist und die Tangenten allemal positiv sind, wenn das abgeschnittene Stück AH auf eben der Seite von A, wie bey spitzen Winkeln liegt.

Aus eben dem Grunde ist I der Anfangspunct der Cotangenten und diejenigen Cotangenten positiv, für welche IM auf derselben Seite, wie bey spitzen Winkeln liegt.

Für diese bisher betrachteten Linien lag der Anfangspunct immer auf dem als unveränderlich angenommenen Schankel des Winkels ACB oder seiner Ergänzung zu 90 Graden; bey der Secante und Cosecante aber liegt er im Mittelpuncte, und beyde sind positiv, wenn die sie abmessenden Linien CG, CM auf den Schenkeln des Winkels selbst liegen, negativ aber, wenn sie auf der Verlängerung dieses Schenkels über C hinaus liegen.

* 20. 1ster Lehrsatz. Wenn zwey Winkel ACB, BCG zusammen zwey rechte betragen: so sind die Sinus beyder Winkel völlig gleich, die Cosinus hingegen sind zwar an Größe gleich, aber der Cosinus des spitzen Winkels ist positiv, der des stumpfen negativ. (Fig. 6.)

Beweis. Zieht man, um auf den Schenkeln der Winkel gleiche Stücke abzuschneiden, den Kreis ADBG; nimmt an dem Schenkel CA den Winkel ACD = BCG, und zieht aus D und B Linien auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung senkrecht: so ist $\frac{ED}{CD}$ = Sin. ACD = Sin. BCG und $\frac{FB}{CB} = \frac{FB}{CD}$ = Sin. ACB, und es ist offenbar (Geom. §. 104.) FB = ED, also diese Sinus gleich und beyde positiv, weil die sie abmessenden Linien FB, ED an einerley Seite von AG liegen.

Zieht man vom Endpuncte B des einen Schenkels die Linie BI senkrecht auf CH, welche mit dem andern Schenkel einen rechten Winkel macht, so ist IB diejenige Linie, welche den Cosinus des Winkels ACB vorstellt und zugleich ist Cos. ACD = Cos. BCG = $\frac{ID}{CD}$; also da IB = ID, so sind die Cosinus der beyden Winkel, die einander zu zwey rechten ergänzen, gleich groß, aber für den stumpfen Winkel ist der Cosinus negativ, weil IB die entgegengesetzte Lage in Vergleichung gegen ID hat.

* 21. Betrachtet man den Cosinus eines Winkels als den Sinus desjenigen Winkels, welcher jenen zu 90 Grad ergänzt, das nämlich Cos. A = Sin. (90° — A): so findet man für den stumpfen Winkel eben das Resultat, wie vorhin. Für den stumpfen Winkel ist nämlich (Arithm. §. 87.) die Ergänzung negativ, weil hier A > 90°, das heißt, zu dem gegebenen Winkel kommt keine Ergänzung hinzu, sondern man muß etwas abziehen, um 90° zu erhalten; der Sinus eines negativen Winkels ist aber selbst negativ, wie wir in der Folge zeigen werden.

* 22. Aus den Bisherigen läßt sich Folgendes übersehen. Wenn der Winkel ACD (Fig. 6.) sehr klein ist, so ist auch sein Sinus sehr klein; wird der Winkel größer, so nimmt auch der Sinus zu, bis der Winkel = 90° wird. Für den rechten Winkel ist der Sinus, $\text{Sin. } 90° = \frac{CH}{CH} = 1$, weil hier die aus H senkrecht auf AC gesetzte Linie mit dem Schenkel HC einerley. Wird der Winkel größer als ein rechter, so nimmt sein Sinus ab und wird desto kleiner, je näher der stumpfe Winkel zweyen rechten kommt, so daß man übersieht, daß der Sinus = 0 wird, wenn der Winkel oder Bogen = 180° ist.

Der Cosinus eines Winkels ist am größten, wenn der Winkel am kleinsten ist, Cos. 0° = 1 = Sin. 90°; er nimmt ab, wenn der Winkel wächst und es ist Cos. $90° = 0$; wird der Winkel $> 90°$, so ist der Cosinus negativ und der negative Cosinus wächst bis der Winkel gleich zwey rechten wird, wo dann Cos. $180° = -1$.

* 23. 2ter Lehrsatz. Wenn die Summe zweyer Winkel $ACB + BCG = 2R$, so ist Tang. $ACB = -$ Tang. BCG, und Cotang. $ACB = -$ Cotang. BCG.

Beweis. Zeichnet man wieder $ACD = GCB$, so ist $\frac{AK}{CA} =$ Tang. $ACD = \times BCG$, und × Tang. $\frac{AL}{CA} =$ Tang. ACB, weil die Tangente des stumpfen Winkels durch das auf der Linie KA von dem verlängerten Schenkel BC abgeschnittene Stück AL bestimmt wird. Da nun $AL = AK$ eben dieser Linie der Lage nach entgegengesetzt ist, so hat man $\frac{AL}{CA} = - \frac{AK}{CE}$ und Tang. $ACB = -$ Tang. BCG.

Ferner ist des spitzen Winkels ACD Cotangente $= \frac{HM}{CH}$, des stumpfen Winkels ACB Cotangente $= \frac{HN}{HC} = - \frac{HM}{CH}$; denn die Cotangente eines Winkels wird bestimmt durch das auf HM von dem Schenkel CB abgeschnittene Stück HN, und daß $HN = HM$ erhellt aus der Gleichheit der Winkel $HCB = HCD = 90° - BCG$.

* 24. Für den Winkel = 0° ist auch die Tangente = 0, und sie wächst zugleich mit dem spitzen Winkel. Wird der Winkel = 90°, so ist sein andrer Schenkel CH parallel mit AK und beyde können sich gar nicht schneiden, die Tangente also, welche für Winkel, die wenig von 90° verschieden waren, schon sehr groß ward, wird nun völlig unendlich, das ist, es giebt auf der Linie AK gar keine Begränzung mehr, durch welche die Tangente des rechten Winkels abgeschnitten würde. Wird der Winkel stumpf, so fängt die Verlängerung CL des andern Schenkels an, in die nach der andern Seite verlängerte AK einzuschneiden; und so wie zu Winkeln, welche wenig kleiner als 90° waren, erstaunlich große positive Tangenten gehören, so gehören zu Winkeln, die wenig größer als 90° sind, erstaunlich große negative Tangenten; und dieser Uebergang aus dem Positiven ins Negative kann uns nach dieser Ueberlegung nicht befremdend erscheinen.

Zieht man die Linie HM auf HC senkrecht und also, da ACH = R, mit CA parallel: so erhellt, daß für den Winkel = 0 gar keine bestimmte Cotangente abgeschnitten wird, also diese unendlich ist. Nimmt der Winkel etwas zu, so nimmt die Cotangente, welche für sehr kleine Winkel erstaunlich groß ist, ab, und wird = 0, wenn der Winkel = 90° ist. Für stumpfe Winkel ist die Cotangente negativ und wächst mit dem zunehmenden Winkel, bis sie zuletzt für den Winkel oder Bogen von 180° an der negativen Seite unendlich oder unbegränzt wird.

* 25. 3ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 6.)

ACB + BCG = 180°: so ist Sec. ACB = − Sec. BCG aber Cosec. ACB = Cosec. BCG.

Beweis. Ist ACD = BCG, so ist Sec. ACD $= \frac{CK}{CA}$, = Sec. BCG; für den stumpfen Winkel ACB aber ist Sec. ACB $= \frac{CL}{CA} = - \frac{CK}{CA}$, weil wir CL als negativ ansehen, wenn es nicht auf dem Schenkel des Winkels selbst, sondern auf seiner Verlängerung abgeschnitten wird.

Aus den Vorigen erhellet auch, daß Cosec. ACD $= \frac{CM}{CA}$, und Cosec. ACB $= \frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CA}$ und beyde sind positiv, weil CN, CM beyde wirklich auf den Schenkeln der Winkel selbst liegen.

* 26. Des Winkels = 0 Secante ist = 1, weil dann CK in AC fällt, also Sec. 0° $= \frac{CA}{CA}$; wächst der Winkel so wächst auch die Secante bis sie für den Winkel = 90° unbegränzt oder unendlich wird. Für stumpfe Winkel, welche wenig größer als 90°, ist die Secante sehr groß und, aus den bey der Tangente erwähnten Gründen, negativ; sie nimmt dann bey wachsenden stumpfen Winkeln ab und Sec. 180° ist = ∸ 1. Ferner ist Cosec. 0° positiv und unendlich groß, weil keine Begränzung der Linie HM statt findet; die Cosecante

nimmt dann ab für wachsende spitze Winkel, und Cosec. 90° ist $= + 1$; dann aber fängt die Cosecante wieder an, mit dem Winkel zuzunehmen und bleibt positiv bis Cosec. 180° unendlich wird.

* 27. Willkührlicher Satz. Wenn eine Linie so, wie die Tangente des rechten Winkels unbegränzt ist: so drückt man dieses durch das Zeichen
∞ ∞ aus, und schreibt zum Beyspiel: Tang. $90^\circ = \infty$, welches gelesen wird, die Tangente von 90° ist unendlich.

* 28. Erklärung. Wir haben bisher immer nur Winkel betrachtet, welche kleiner als 2R sind; man kann aber auch $ACB + BCO$ als einen Winkel ansehen, welcher größer als 2R ist, und solche Winkel nennt man convexe oder erhabene, statt daß diejenigen, welche $< 2R$ sind, concav oder hohl heißen. Zu diesen Winkeln gehören also auch Bögen, die größer als 180° sind.

* 29. 4ter Lehrsatz. Für Winkel, welche größer als 180° und kleiner als 360° sind, erhält man Sin. $(180^\circ + A) = -$ Sin. A; Cos $(180^\circ + A) = -$ Cos. A; Tang. $(180 + A) =$ Tang. A; Cotang. $(180^\circ + A) =$ Cotang. A; Sec. $(180 + A) = -$ Sec. A; Cosec. $(180^\circ + A) = -$ Cosec. A.

Beweis. Es war Sin. $180^\circ = 0$ und für größere Winkel, wie $180^\circ + GCO$, wird FO negativ, also Sin. $(180^\circ + GCO)$ negativ, aber an Größe = Sin. GCO, weil für $ACD = GCO$

auch ED $=$ FO wird. Die negativen Sinus wachsen bis der Winkel $= 180° + 90° = 270°$ wird, dann ist Sin. $270° = -1$, und für größere Winkel nimmt der Sinus ab, bis Sin $360°$ $= 0$. Cos. $(180° + GCO)$ ist $= \frac{QO}{CO} = \frac{IB}{CB}$, wenn BCG $=$ GCO, also Cos. $(180° + GCO)$ $= -$ Cos. GCO. Der Cosinus ist also für Winkel zwischen $180°$ und $270°$ abnehmend und negativ; Cos. $270° = 0$; der Cosinus größerer Winkel Cos. $(180° + GCP) = -$ Cos. GCP $=$ $+$ Cos. $(180° - GCP)$ positiv $= \frac{QP}{CP}$ und endlich Cos. $360° = + 1$.

Nach §. 23. würde Tang. $180° = 0$, und wenn man den Schenkel OC des converen Winkels $180° + GCO$ verlängert, bis er die auf dem andern Schenkel senkrecht errichtete Linie in K trifft, so ist Tang. $(180° + GCO) = \frac{AK}{CA} =$ Tang. ACD $=$ Tang. GCO. Die Taugenten sind also positiv für Winkel die zwischen $180°$ und $270°$ liegen; Tang. $270°$ ist $= \infty$ und die Tangente größerer Winkel ist negativ, weil der Schenkel CL des Winkels $180° + GCP$ in AL und nicht in AK einschneidet.

Die Betrachtung der Durchschnitte des Schenkels converer Winkel mit MN ergiebt: Cotang. $180°$ $= \infty$ Cotang. $(180° + GCO) =$ Cotang. GCO, also positiv, wenn $180° + GCO < 270°$; Cotang. $270° = 0$; Cotang. $(180° + GCP) =$ Cotang. GCP, also negativ und wachsend, wenn GCP $>$ $90°$; endlich Cotang. $360° = \infty$.

Die Secante eines Winkels, welcher zwischen 180° und 270° liegt, ist negativ, weil der Schenkel CO nicht selbst in AK einschneidet; hingegen ist die Secante positiv für Winkel, die $>$ 270° und 360°, weil CP der Schenkel eines solchen Winkels in AK oder vielmehr in ihre Verlängerung einschneidet. Endlich ist die Cosecante aller Winkel zwischen 180° und 360° negativ, weil weder CO noch CP in MN einschneiden. Daß die Größe der Secanten und Cosecanten sich so verhalten, wie der Lehrsatz angiebt, läßt sich nun leicht übersehen.

* 30. Bemerkung. Da wir die Bogen AD, AH, AB als positiv ansehen: so müssen wir offenbar Bogen, wie AP als negativ betrachten, und es sind also die Schenkel eines negativen Winkels ACP ganz einerley mit den Schenkeln des convexen positiven Winkels, welcher $= 360° - ACP$ ist. Ist also ein solcher negativer Winkel $ACP = ACD$; so läßt sich leicht folgender Lehrsatz beweisen.

* 31. 5ter Lehrsatz. Für einen negativen Winkel $ACP = - ACD$: ist $\text{Sin.} - ACD = - \text{Sin. } ACD$; $\text{Cos.} - ACD = \text{Cos. } ACD$; $\text{Tang.} - ACD = - \text{Tang. } ACD$; $\text{Cotang.} - ACD = - \text{Cotang. } ACD$; $\text{Sec.} - ACD = \text{Sec. } ACD$; $\text{Cosec.} - ACD = - \text{Cosec. } ACD$.

Der Beweis ist leicht zu führen, und es erklärt sich nun auch was wir §. 21. bemerkten.

* 32. Bemerkung. Die bisherigen Lehren

zeigen, daß man die Sinus, Tangenten und Secanten nur für Winkel zu berechnen braucht, die kleiner als 90 Grade sind, und dieses ist der Grund, warum man in den wirklich berechneten Tafeln auch nur für solche Winkel diese trigonometrischen Functionen angeben findet, da eben die Sinus, Tangenten u. s. w. welche zu Winkeln unter 90 Graden gehören, auch, positiv oder negativ genommen, allen größern Winkeln zugehören.

Da man in den Tafeln nicht bloß die Sinus und Tangenten, sondern auch Cosinus und Cotangenten zu finden wünscht: so hat dies zu einer besondern Einrichtung Anlaß gegeben. Wir haben gesehen, daß eines jeden Winkels A Cosinus = Sin. (90° — A) ist; hat man also Sinus und Cosinus eines Winkels z. B. von 30 Graden, so hat man auch Cosinus und Sinus seiner Ergänzung zu 90 Graden, also hier des Winkels von 60 Grad. Man findet daher in fortgehender Reihe in den Tafeln nur die Sinus und Cosinus, die Tangenten und Cotangenten und auch wohl die Secanten und Cosecanten aller Winkel, welche kleiner als 45 Grade sind, und man würde nun auch ohne weitere Nachweisung z. B. den Sinus größerer Winkel finden, da Sin. 72° = Cos. 18° u. s. w. ist; um aber das Aufsuchen zu erleichtern findet man in den Tafeln unten und am hintern Rande jeder Seite die Anzahl von Graden und Minuten bemerkt, welchen die Zahl als Cosinus zugehört, die man für den Ergänzungswinkel als Sinus aufgeführt findet u. s. w.

* 33. In diesen Tafeln, welche man in den in der Arithmetik §. 230. angeführten Sammlun=

gen von Schulze, Vega und andern findet, sind die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten für alle Winkel von Minute zu Minute, angeführt und es ist nun leicht auch für Winkel, die Theile von Minuten enthalten sich auszuhelfen, indem man eben so verfährt, wie bey dem Logarithmen im 231 §, der Arithmetik. — Die Secanten und Cosecanten findet man nicht in allen Tafeln mit bemerkt, weil es, wie wir bald sehen werden, leicht ist, diese aus dem Cosinus und Sinus herzuleiten.

Dagegen enthalten alle diese Tafeln die Logarithmen der Sinus, Tangenten u. s. w. Da nämlich alle diese trigonometrischen Functionen Zahlen sind: so giebt es für sie Logarithmen, die man besonders zu berechnen nöthig gefunden hat, weil es zu schwierig seyn würde, Sinus und Tangenten, die durch eine ziemliche Reihe Ziffern in Decimalbrüchen ausgedrückt sind, in einander zu multipliciren und durch einander zu dividiren, und dieses vermeidet man, wenn man die Logarithmen dieser Zahlen anwendet.

Zweyter Abschnitt.

Von der Bestimmung der trigonometrischen Functionen aus einigen gegebenen Stücken.

* 34. Willkührlicher Satz. Wenn der Sinus oder die Tangente eines Winkels zu einer Potenz erhoben werden soll: so drücken wir dies so aus: $Sin.^2 A$ oder $Cos.^3 A$, welches die zweyte Potenz von Sin. A und die dritte Potenz von Cos. A bedeutet.

* 35. 6ter Lehrsatz. Für jeden Winkel $= A$ ist $\text{Sin.}^2 A + \text{Cos.}^2 A = 1$.

Beweis. Wenn der Winkel $ACD = A$ ist (Fig. 6.), so ist $\text{Sin. } A = \frac{ED}{CA}$; $\text{Cos } A = \frac{ID}{CA} = \frac{CE}{CA}$ also $\text{Sin.}^2 A + \text{Cos.}^2 A = \frac{DE^2 + CE^2}{CA^2}$; es ist aber (Geom. §. 177.) $CD^2 = ED^2 + CE^2 = CA^2$, weil CD, CA Halbmesser desselben Kreises sind; also $\text{Sin.}^2 A + \text{Cos.}^2 A = 1$.

* 36. Ist also eines Winkels A Sinus gegeben: so findet man seinen Cosinus, $\text{Cos. } A = \sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 A)}$ und so umgekehrt aus dem Cosinus den Sinus.

* 37. Nimmt man (Fig. 6.) den Winkel $ACP = ACD$, und zieht die Sehne DP, so steht diese auf AC senkrecht; und da $EP = ED$, so ist die Linie ED, welche den Sinus von AD oder ACD vorstellt, die Hälfte der Sehne PD des doppelten Bogens PD. Aus Geom. §. 321. erhellt, daß die Seite des in den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes dem Halbmesser des Kreises gleich ist, also die Sehne von 60° gleich dem Halbmesser. Stellt nun DCP den Winkel von 60 Graden vor: so ist für DCA = 30 Grad, $DE = \frac{1}{2} CD$, und $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2} CD}{CD} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; und hieraus findet man $\text{Cos. } 30^\circ = \sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 30^\circ)} = \sqrt{(1 - 0{,}25)} = \sqrt{0{,}75} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254$.

* 38. Aus einer andern Ueberlegung läßt sich der Sin. 45° bestimmen. Ist nämlich (Fig. 6.) ACD = 45°, so ist auch DCH = EDC = 45°, also ED = EC, und daher (Geom. §. 177.) $CD^2 = 2 \cdot ED^2$, oder $\frac{ED^2}{CD^2} = \frac{1}{2}$ und $\frac{ED}{CD}$

$$= \text{Sin. } 45° = \text{Cos. } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071068.$$

* 39. Auch der Sinus von 18 Grad läßt sich durch eine leichte geometrische Betrachtung bestimmen. Es sey (Fig. 7.) der Winkel ACB = 36 Grad, so sind die Winkel ABC = BAC = 72°, und wenn AD den Winkel BAC halbirt, so
x = 36° ist DAC = ACD = ~~60°~~, folglich AD = DC. Ferner ist ADB = DAC + ACD = 72° = ABD, und folglich die Dreyecke ADB ∽ CAB, da ACB = DAB = 36°, und ADB = CAB = 72°; man hat daher BD : BA = BA : BC, und weil AB = AD = DC, indem sowohl ABD, als DAC gleichschenklicht, so ist BD : DC = DC : BC, und der Halbmesser BC in D in stetiger Proportion getheilt, (Geom. §. 296.). Setze ich nun DC = x, so ist BD = BC − x, und die eben gefundene Proportion giebt: BC − x : x = x : BC, folglich $x^2 = BC^2 - BC \cdot x$, oder

$$x^2 + BC \cdot x = BC^2 \text{ und auch}$$
$$x^2 + BC \cdot x + \tfrac{1}{4} BC^2 = BC^2 + \tfrac{1}{4} BC^2 = \tfrac{5}{4} BC^2.$$

Die Größe, welche hier vor dem Gleichheitszeichen steht, ist das Quadrat von $x + \frac{1}{2} BC$; und man findet daher, wenn man aus den an beyden Seiten des Gleichheitszeichens stehenden Größen die Quadratwurzel zieht, $x + \frac{1}{2} BC = \sqrt{\frac{5}{4} BC^2} =$

$\frac{BC \cdot \sqrt{5}}{2}$ und $x = -\frac{1}{2} BC + \frac{BC \cdot \sqrt{5}}{2}$.

Da nun $AB = DC = x$ und $\frac{\frac{1}{2} AB}{BC} = \text{Sin.} 18°$,

so ist $\text{Sin.}\ 18° = \frac{\frac{1}{2} x}{BC} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} =$
$\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{2{,}23606802 - 1}{4} = \frac{1{,}23606802}{4}$
$= 0{,}3090170 = \text{Sin.}\ 18°$.

* 40. 7ter Lehrsatz. Für jeden Winkel $= A$ hat man $\text{Tang.}\ A = \frac{\text{Sin.}\ A}{\text{Cos.}\ A}$; $\text{Cotang.}\ A = \frac{\text{Cos.}\ A}{\text{Sin.}\ A}$; $\text{Sec.}\ A = \frac{1}{\text{Cos.}\ A}$; $\text{Cosec.}\ A = \frac{1}{\text{Sin.}\ A}$.

Beweis. Fig. 6. zeigt, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke $AK : CA = ED : CE$, oder $\frac{AK}{CA} = \frac{ED}{CE}$, das ist $\text{Tang.}\ ACD = \frac{ED}{CE} = \frac{\text{Sin.}\ ACD}{\text{Cos.}\ ACD}$, weil $\frac{ED}{CD} = \text{Sin.}\ ACD$ und $\frac{CE}{CD} = \frac{ID}{CD} = \text{Cos.}\ ACD$. In denselben Dreyecken ist auch $CK : CA = CD : CE$, oder $\frac{CK}{CA} = \text{Sec.}\ ACD = \frac{CD}{CE} = \frac{1}{\text{Cos.}\ ACD}$. Und eben so zeigt die Vergleichung der Dreyecke CHM, CID, daß $\frac{HM}{CH} = \frac{ID}{CI}$, oder $\text{Cotang. } ACD = \frac{\text{Cos. } ACD}{\text{Sin. } ACD}$ und daß $\frac{CM}{CH} = \frac{CD}{CI}$, das ist $\text{Cosec. } ACD = \frac{1}{\text{Sin. } ACD}$.

* 41. Da $\text{Cos. } A = \sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 A)}$, so ist auch $\text{Tang. } A = \frac{\text{Sin. } A}{\sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 A)}}$; $\text{Cotang. } A = \frac{\sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 A)}}{\text{Sin. } A}$ und es lassen sich also Tangente und Cotangente, und auch Secante und Cosecante aus dem gegebenen Sinus berechnen.

Da $\text{Sin. } 30^\circ = 0{,}5$, so ist

$$\text{Tang. } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735.$$

* 42. Aus der Gleichung $\text{Tang. } A = \frac{\text{Sin. } A}{\sqrt{(1 - \text{Sin.}^2 A)}}$, folgt auch $\text{Tang.}^2 A = \frac{\text{Sin.}^2 A}{1 - \text{Sin.}^2 A}$, und $\text{Tang.}^2 A - \text{Sin.}^2 A \,.\, \text{Tang.}^2 A = \text{Sin.}^2 A$, oder $\text{Tang.}^2 A = \text{Sin.}^2 A \,.\, (1 + \text{Tang.}^2 A)$, und also $\frac{\text{Tang.}^2 A}{1 + \text{Tang.}^2 A} = \text{Sin.}^2 A$, oder $\text{Sin. } A = \frac{\text{Tang. } A.}{\sqrt{(1 + \text{Tang.}^2 A)}}$, so daß also aus der gegebenen Tangente der Sinus bestimmt wird, und so lassen sich überhaupt, wenn

unter den sechs Größen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans eines Winkels eine gegeben ist, dieübrigen leicht bestimmen. Die Gleichungen, welche zu dieser Bestimmung dienen, lassen sich leicht aus den beyden letzten Lehrsätzen herleiten. Auch für den Sinus versus und Cosinus versus finden ähnliche Bestimmungen statt, die wir aber hier übergehen dürfen.

Anmerkung. Der letzte Lehrsatz zeigt uns auch, warum die Secante und Cosecante in den Tafeln allenfalls fehlen dürfen; da nämlich $\text{Sec. } A = \frac{1}{\text{Cosin. } A}$, so braucht man überall, wo mit der Secante multiplicirt werden soll, nur mit dem Cosinus zu dividiren, und etwas ähnliches gilt für die Cosecante.

* 43. Wenn man nach diesem Lehrsatze die Tangente des Winkels von 90° ausdrückt: so ist $\text{Tang. } 90° = \frac{1}{0}$, weil $\text{Cos. } 90° = 0$. Um diesen Ausdruck richtig zu verstehen, muß man überlegen, daß der Quotient $\frac{1}{x}$ immer größer wird, je kleiner man x annimmt, und daß folglich die Tangente erstaunlich groß wird, wenn der Winkel nahe an 90 Grad kommt; der Quotient $\frac{1}{x}$ wächst ohne Gränzen, wenn x immerfort abnimmt, und man betrachtet daher $\frac{1}{0}$ als unendlich, weil $\frac{1}{0}$ die Gränze ist, welche der Quotient $\frac{1}{x}$ erreichen kann, wenn x immerfort abnimmt.

* 44. 8ter Lehrsatz. Wenn (Fig. 8.) ein Winkel ACB gleich ist der Summe zweyer Winkel, ACB = ACD + DCB, so ist Sin. ACB = Sin. ACD . Cos. DCB. + Cos. ACD . Sin. DCB, oder überhaupt, Sin. (A + B) = Sin. A . Cos. B + Cos. A . Sin. B und ferner Cos. (A + B) = Cos. A . Cos. B — Sin. A. Sin. B.

Beweis. Man ziehe BF, DE senkrecht auf AC, und BG senkrecht auf CD: so ist $\frac{ED}{CD}$ = Sin. ACD; $\frac{CE}{CD}$ = Cos. ACD; $\frac{GB}{CD}$ = Sin. DCB; $\frac{CG}{CD}$ = Cos. DCB; und $\frac{FB}{CD}$ = Sin. ACB = Sin. (ACD + DCB) und $\frac{CF}{CD}$ = Cos. (ACD + DCB).

Ist nun auch GI auf AC senkrecht, und GH parallel mit AC gezogen: so ist das Dreyeck CGI ∽ CDE und daher CD : DE = CG : GI oder 1 : Sin. ACD = Cos. DCB : $\frac{GI}{CD}$ und $\frac{GI}{CD}$ = Sin. ACD . Cos. DCB, auch CD : CE = CG : CI, oder 1 : $\frac{CE}{CD} = \frac{CG}{CD} : \frac{CI}{CD}$, das ist 1 : Cos. ACD = Cos. DCB : $\frac{CI}{CD}$, daher $\frac{CI}{CD}$ = Cos. ACD . Cos. DCB.

Ferner ist das Dreyeck BGH $\backsim$ CDE, weil bey H und E rechte Winkel sind, und HGC $=$ GCE, also auch BGH $=$ CDE $= 90° -$ HGC $= 90° -$ GCE. Aus dieser Aehnlichkeit folgt CD : CE $=$ BG : BH, oder 1 : Cos. ACD $=$ Sin. DCB : $\frac{BH}{CD}$, also $\frac{BH}{CD} =$ Cos. ACD . Sin. DCB; und ferner CD : ED $=$ BG : HG, oder 1 : Sin. ACD $=$ Sin. DCB : $\frac{HG}{CD}$, also $\frac{HG}{CD} =$ Sin. ACD . Sin. DCB. Da nun $\frac{FB}{CD} = \frac{FH}{CD} + \frac{HB}{CD} = \frac{IG}{CD} + \frac{HB}{CD} =$ Sin. ACB, so ist Sin. (ACD + DCB) $=$ Sin. ACD . Cos. DCB + Cos. ACB . Sin. DCB; und ferner weil $\frac{CF}{CB} = \frac{CI}{CB} - \frac{HG}{CB} =$ Cos. ACB; Cos. (ACD + DCB) $=$ Cos. ACD . Cos. DCB $-$ Sin. ACD . Sin. DCB.

* 45. Dieser Lehrsatz ist noch richtig, wenn auch einer der Winkel ACD $> 90°$ ist. Diesen Fall stellt Fig. 9. vor und hier ist $\frac{ED}{CD} =$ Sin. ACD; $\frac{GB}{CD} =$ Sin. DCB; $\frac{FB}{CD} =$ Sin. ACB; ferner $- \frac{EC}{CD} =$ Cos. ACD; $\frac{CG}{CD} =$ Cos. DCB; und $\frac{-FC}{CD} =$ Cos. ACB. Aus der Aehnlichkeit

der Dreyecke DCE, GCI, BGK folgt hier $\frac{GI}{CD}$ $=$ Sin. ACD . Cos. DCB und $\frac{GK}{CD} = \frac{CE}{CD}$. $\frac{GB}{CD}$ oder $\frac{GK}{CD}$ $= -$ Sin. DCB . Cos. ACD, also $\frac{GI - GK}{CD}$ $=$ Sin. ACD . Cos. DCB $+$ Sin. DCB . Cos. ACD. Man muß hier bemerken, daß der Cosinus des stumpfen Winkels negativ ist, und deshalb Cos. ACD $= - \frac{EC}{CD}$ oder $+ \frac{EC}{CD} = -$ Cos. ACD. Wenn man hierauf achtet: so ergiebt sich die obige Rechnung aus den Lehren von entgegengesetzten Größen von selbst.

Für Cos. ACB findet man: $\frac{CI}{CD} = -$ Cos. ACD . Cos. DCB und $\frac{KB}{CD} = \frac{IF}{CD}$ $=$ Sin. ACB . Sin. DCB, also $\frac{CI + IF}{CD}$ $= -$ Cos. ACD . Cos. DCB $+$ Sin. ACD . Sin. DCB $= -$ (Cos. ACD . Cos. DCB $-$ Sin. ACD . Sin. DCB.)

* 46. Aus dem Satze: Sin. $(A + B) =$ Sin. A . Cos. B $+$ Cos. A . Sin. B folgt, wenn man $B = A$ annimmt, Sin. $2A = 2$. Sin. A . Cos. A; und aus Cos. $(A + B) =$ Cos. A . Cos. B $-$ Sin. A . Sin. B folgt Cos. $2A =$ Cos.^{2} A $-$ Sin.^{2} A. Ferner, wenn man $B = 2A$ setzt, Sin. $3A =$ Sin. A . Cos. 2A

$+ \text{Cos. } A \cdot \text{Sin. } 2A = \text{Sin. } A \cdot \text{Cos.}^2 A - \text{Sin.}^3 A + 2\text{Sin. } A \cdot \text{Cos.}^2 A = 3 \cdot \text{Sin. } A \cdot \text{Cos.}^2 A - \text{Sin.}^3 A$; und $\text{Cos. } 3A = \text{Cos.}^3 A - 3 \text{ Sin.}^2 A \cdot \text{Cos. } A$.

Beyspiel. Da $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2}$, und $\text{Cos. } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so ist $\text{Sin. } 90^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$

und $\text{Cos. } 90^\circ = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

* 47. 9ter Lehrsatz. Wenn A und B zwey Winkel bedeuten, so ist $\text{Sin. } (A - B) = \text{Sin } A \cdot \text{Cos. } B - \text{Cos. } A \cdot \text{Sin. } B$, und $\text{Cos. } (A - B) = \text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B$.

Beweis. Wenn (Fig. 10.) $ACB = A$, $ACD = B$, so ist $DCB = A - B$; zieht man nun DE, BF auf AC, und BG auf DC, auch FH auf BG und FI auf DC senkrecht, so ist $\frac{BH - GH}{CD} = \text{Sin. } (A - B)$. Weil nun die Dreyecke BHF, CED, CIF einander ähnlich sind, so ist $CD : CE = BF : BH$, das ist $1 : \text{Cos. } B = \text{Sin. } A : \frac{BH}{CD}$ und $\frac{BH}{CD} = \text{Sin. } A \cdot \text{Cos. } B$. Ferner $CD : DE = FC : FI$, also $\frac{FI}{CD} = \frac{HG}{CD} = \text{Sin. } B \cdot \text{Cos. } A$, folglich $\frac{BH - GH}{CD} = \text{Sin. } A \cdot \text{Cos. } B - \text{Cos. } A \cdot \text{Sin } B = \text{Sin. } (A - B.)$

Aus ähnlichen Gründen ist $CD : DE = BF : GI$, also $\frac{GI}{CD} = \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } B$ und $CD : EC = FC : IC$, also $\frac{IC}{CD} = \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } B$; aber $\frac{GI + IC}{CD} = \text{Cos. } (A - B) = \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } B + \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin } B$.

*48. 10ter Lehrsatz. Wenn A u. B zwey Winkel bedeuten, so ist $\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } A \,.\, \text{Tang. } B}$ u. $\text{Tang. } (A - B) = \frac{\text{Tang. } A - \text{Tang. } B}{1 + \text{Tang. } A \,.\, \text{Tang. } B}$.

Beweis. Wir fanden (§. 44.) $\text{Sin. } (A + B) = \text{Sin. } A \,.\, \text{Cos. } B + \text{Cos. } A \,.\, \text{Sin. } B$ und $\text{Cos. } (A + B) = \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } B - \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } B$, da nun (§. 40.) $\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Sin. } (A + B)}{\text{Cos. } (A + B)}$, so ist $\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Sin. } A \,.\, \text{Cos. } B + \text{Cos. } A \,.\, \text{Sin. } B}{\text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } B - \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } B}$, dividirt man hier im Zähler und Nenner mit $\text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } B$ und bemerkt daß $\frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } A} = \text{Taug. } A$; $\frac{\text{Sin. } B}{\text{Cos. } B} = \text{Tang. } B$, so wird $\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } A \,.\, \text{Tang. } B}$. Auf ganz ähnlichem

Wege findet man aus $\text{Tang.}(A-B) = \frac{\text{Sin.}(A-B)}{\text{Cos.}(A-B)}$
$= \frac{\text{Sin. A . Cos. B} - \text{Cos. A . Sin. B}}{\text{Cos. A . Cos. B} + \text{Sin. A . Sin. B}}$, Tang.
$(A-B) = \frac{\text{Tang. A} - \text{Tang. B}}{1 + \text{Tang. A . Tang. B}}$.

* 49. Ist $A = B$, so ist $\text{Tang. } 2A = \frac{2 \,.\, \text{Tang. A}}{1 - \text{Tang.}^2 \text{ A}}$. Wenn man also weiß, daß Tang. $45° = 1$, so ist $\text{Tang. } 90° = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0}$. Dieser Ausdruck zeigt nach den schon oben §. 43. gemachten Bemerkungen an, daß die Tangente unbegränzt wird.

* 50. Aus diesen Lehrsätzen lassen sich sehr viele andere ableiten, von denen wir hier nur einige wenige bemerken wollen.

Da $\text{Sin.}(A+B) = \text{Sin. A . Cos. B} + \text{Cos. A . Sin. B}$, und $\text{Sin.}(A-B) = \text{Sin. A . Cos. B} - \text{Cos. A . Sin. B}$, so ist $\text{Sin.}(A+B) + \text{Sin.}(A-B) = 2 \,.\, \text{Sin. A . Cos. B}$ und $\text{Sin.}(A+B) - \text{Sin.}(A-B) = 2 \,.\, \text{Cos. A . Sin. B}$. Ferner giebt $\text{Cos.}(A+B) = \text{Cos. A . Cos. B} - \text{Sin. A . Sin. B}$ und $\text{Cos.}(A-B) = \text{Cos. A . Cos. B} + \text{Sin. A . Sin. B}$, daß $\text{Cos.}(A+B) + \text{Cos.}(A-B) = 2 \,.\, \text{Cos. A . Cos. B}$ und $\text{Cos.}(A-B) - \text{Cos.}(A+B) = 2 \,.\, \text{Sin. A . Sin. B}$.

* 51. **11ter Lehrsatz.** **Wenn eines Winkels A Sinus und Cosinus gegeben sind, so findet man für die Hälfte dieses Winkels**

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos. } A}{2}\right)};\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{Cos. } A}{2}\right)};\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{Sin. } A}{1 + \text{Cos. } A}.$$

Beweis. Wir fanden §. 46. $\text{Cos. } 2A = \text{Cos.}^2 A - \text{Sin.}^2 A$, also auch $\text{Cos. } A = \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}A - \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}A$; da nun $\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}A$, so ist $\text{Cos. } A = 1 - 2 \,.\, \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}A$, oder $2 \,.\, \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \text{Cos. } A$; daher $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos. } A}{2}}$. Hätte man statt $\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}A$ gesetzt, so würde man $\text{Cos. } A = 2 \,.\, \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}A - 1$, also $\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{1 + \text{Cos. } A}{2}$, und $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos. } A}{2}}$ erhalten haben.

Aus den Werthen für den Sinus und Cosinus ergiebt sich für die Tangente, $\text{Tang. } \tfrac{1}{2}A =$

$$\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}A} = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos. } A}{1 + \text{Cos. } A}} = \frac{\sqrt{(1 - \text{Cos. } A)(1 + \text{Cos. } A)}}{(1 + \text{Cos. } A)^2} = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos.}^2 A}{(1 + \text{Cos. } A)^2}} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}^2 A}{(1 + \text{Cos. } A)^2}} = \frac{\text{Sin. } A.}{1 + \text{Cos. } A.}$$

* 52. Diese verschiedenen Ausdrücke können dienen, um aus einem bekannten Sinus den Sinus des halben Winkels, des Viertels u. s. w. herzuleiten; und so läßt es sich einsehen, wie es möglich ist, die Sinus aller Winkel von Minute zu Minute

zu berechnen. Bequemere Methoden giebt hiezu die Analysis an die Hand, welche wir aber hier, wo es ohnehin nicht unsere Absicht ist, zur Berechnung der trigonometrischen Tafeln Anleitung zu geben, übergehen können.

Aus den bisher mitgetheilten Ausdrücken oder Formeln lassen sich nun viel mehrere, ja fast unzählige herleiten, die zur Vereinfachung weitläuftiger Rechnungen sehr oft ihre Anwendung finden; hier aber mag es genug seyn, nur einige wenige anzuführen, von denen wir nachher Gebrauch machen werden.

* 54. 12ter Lehrsatz. Wenn A und B zwey Winkel bedeuten, so ist allemal $\text{Sin. } A + \text{Sin. } B = 2 \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(A+B) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}(A-B)$ und $\text{Sin. } A - \text{Sin. } B = 2 \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(A-B) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B)$.

Beweis. Aus dem vorigen Lehrsatze folgt, daß $2\text{Sin.}^2 \frac{1}{2}(A+B) = 1 - \text{Cos. }(A+B) = 1 - \text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B$, und $2\text{Cos.}^2 \frac{1}{2}(A-B) = 1 + \text{Cos. }(A-B) = 1 + \text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B$. Das Product aus beyden ist also $4\text{Sin.}^2 \frac{1}{2}(A+B) \cdot \text{Cos.}^2 \frac{1}{2}(A-B) = 1 + 2 \cdot \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B + \text{Sin.}^2 A \cdot \text{Sin.}^2 B - \text{Cos.}^2 A \cdot \text{Cos.}^2 B$, und weil $\text{Cos.}^2 A \cdot \text{Cos.}^2 B = \text{Cos.}^2 A - \text{Cos.}^2 A \cdot \text{Sin.}^2 B = 1 - \text{Sin.}^2 A - \text{Sin.}^2 B + \text{Sin.}^2 A \cdot \text{Sin.}^2 B$ ist, auch $4\text{Sin.}^2 \frac{1}{2}(A+B) \cdot \text{Cos.}^2 \frac{1}{2}(A-B) = 2 \cdot \text{Sin. } A \cdot \text{Sin } B + \text{Sin.}^2 A + \text{Sin.}^2 B$. Was hier hinter dem Gleichheitszeichen steht, ist das Quadrat vom $\text{Sin. } A + \text{Sin. } B$, und wenn man folglich an beyden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel auszieht, so ist $2 \,.\, \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A+B) \,.\, \text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A-B) = \text{Sin.}\ A + \text{Sin.}\ B$.

Eben so findet man $\text{Sin.}^2\ \frac{1}{2}(A-B) = \frac{1 - \text{Cos.}\ A \,.\, \text{Cos.}\ B - \text{Sin}\ A \,.\, \text{Sin}\ B}{2}$ und $\text{Cos.}^2\ \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1 + \text{Cos.}\ A \,.\, \text{Cos.}\ B - \text{Sin}\ A \,.\, \text{Sin.}\ B}{2}$, daher $4 \,.\, \text{Sin.}^2\ \frac{1}{2}(A-B) \,.\, \text{Cos.}^2\ \frac{1}{2}(A+B) = 1 - 2\text{Sin.}\ A \,.\, \text{Sin.}\ B - \text{Cos.}^2\ A \,.\, \text{Cos.}^2\ B + \text{Sin.}^2\ A \,.\, \text{Sin.}^2\ B \,. = \div 2\text{Sin.}\ A \,.\, \text{Sin.}\ B + \text{Sin.}^2\ A + \text{Sin.}^2\ B$, daher $2 \,.\, \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A-B) \,.\, \text{Cos:}\ \frac{1}{2}(A+B) = \text{Sin.}\ A - \text{Sin.}\ B$.

* 55. 13ter Lehrsatz. Bey jedem Werthe der Winkel A, B ist $\frac{\text{Sin.}\ A + \text{Sin.}\ B}{\text{Sin.}\ A - \text{Sin.}\ B} = \frac{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)}$.

Beweis. Aus den im vorigen §. für Sin. A + Sin. B und Sin. A — Sin. B gefundenen Werthen, folgt $\frac{\text{Sin.}\ A + \text{Sin.}\ B}{\text{Sin.}\ A - \text{Sin.}\ B} = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A+B) \,.\, \text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A-B) \,.\, \text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A+B)}$ und wenn man hier im Zähler und Nenner mit $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A+B)\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A-B)$ dividirt, so wird $\frac{\text{Sin.}\ A + \text{Sin.}\ B}{\text{Sin.}\ A - \text{Sin.}\ B} = \frac{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)}$. oder

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B)\ .\ (\text{Sin. } A - \text{Sin. } B.)}{\text{Sin. } A + \text{Sin. } B.}$$

Dritter Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreyecke.

Von rechtwinklichten Dreyecken.

* 56. 1ste Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 11.) ist außer dem rechten Winkel A, die Länge der Hypotenuse BC und ein Winkel C gegeben; man sucht die beyden Catheten.

Auflösung. Um die Cathete zu finden, welche dem gegebenen Winkel C gegenübersteht, multiplicire man die Hypotenuse mit Sin C, das Product giebt die Länge der Seite AB.

Will man die Cathete bestimmen, welche an dem Winkel C anliegt, so multiplicire man die Hypotenuse mit dem Cosinus des Winkels C, so erhält man die gesuchte Seite.

Beweis. Nach der Definition, welche wir vom Sinus gegeben haben, ist $\frac{AB}{CB} = \text{Sin. } C$, also $AB = CB\ .\ \text{Sin. } C$ und ferner, weil (Fig. 6.) $\frac{ID}{CD} = \frac{CE}{CD} = \text{Cos. } ACD$, so ist hier $\frac{CA}{CB} = \text{Cos. } C$ und $CA = CB\ .\ \text{Cos. } C$.

* 57. Da die trigonometrischen Functionen in Decimalbrüchen, gewöhnlich durch 7 Ziffern ausgedrückt sind, so würde die verlangte Multiplication etwas beschwerlich seyn, besonders wenn auch die Seite durch eine große Zahl ausgedrückt würde; man bedient sich deswegen zu diesen Rechnungen fast immer der Logarithmen, und muß sich daher erinnern, daß, um zwey Zahlen in einander zu multipliciren, die Logarithmen addirt werden, und daß man hingegen die Logarithmen von einander subtrahirt, wo die Zahlen durch einander sollen dividirt werden.

Beyspiel. Es sey BC = 15797 Fuß, und C = $31^\circ \cdot 7' \cdot 57''$, man sucht AB.

Um hier AB und AC mit Hülfe der Sinustafeln zu berechnen, muß man noch folgendes bemerken. Da die Sinus sämmtlich ächte Brüche oder < 1 sind: so müßten ihre Logarithmen negativ seyn, z. B. da Sin. $30^\circ = 0{,}5$ ist, Log. Sin. $30^\circ =$ Log. $5 - 1 = 0{,}69897 - 1$; aber man hat diese negative Kennziffer für die Anordnung der Tafeln unbequem gefunden und daher den Logarithmen die Kennziffer gegeben, welche sie haben würden, wenn man jede der trigonometrischen Zahlen mit 10000000000 multiplicirte; daher ist Log. Sin. $90^\circ = 10$, Log. Sin. $30^\circ = 9{,}69897$, und überhaupt die Kennziffer um 10 größer, als sie für die Zahl, welche den Sinus, Cosinus u. s. w. ausdrückt, eigentlich seyn sollte. Will man also die Logarithmen so gebrauchen, wie sie dem Werthe der Sinus und übrigen trigonometrischen Functionen entsprechen: so muß man allemal von dem Logarithmus der Tafeln 10 Ganze abrechnen, und z. B. Log. Sin. $0.^\circ$ $1'. = 0{,}4637261 - 4$ setzen, weil dieser Logarithme in den Tafeln = 6,4637261 ist. Wendet man dies auf unser Beyspiel an, so ist

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 15797 = & 4,1985746 \\ \text{Log. Sin. } 31^\circ.\ 7'.\ 57'' = & 0,7135064 - 1 \\ \hline & 3,9120810 \end{array}$$

welches der Logarithme von 8167,35 ist, also ist AB = 8167,35 Fuß.

Da die Tafeln nicht den zu 31°. 7'. 57'' gehörigen Logarithmen enthalten, sondern nur die zu 31°. 7'. und 31°. 8' gehörigen: so muß man jenen Logarithmen durch Einschalten finden. Um dieses zu erleichtern, steht in den Tafeln hinter jedem Logarithmen, unter der Ueberschrift $\frac{1}{6}$ D, das Sechstel der Differenz zweyer auf einander folgender Logarithmen, oder die Angabe, wie viel sich für 10 Sec. der Logarithme ändert, und man findet also leicht in unserm Exempel die Aenderung für 50'' und für 7''. Ob für diese hinzukommenden Secunden etwas addirt oder subtrahirt werden muß, sieht man an jedem Falle leicht; da nämlich Log. Sin. 31° 7' < Log. Sin. 31° 8', so muß man hier wegen der 57'' zu Log. Sin. 31° 7' etwas addiren; hingegen ist Log. Cos. 31°. 7'. > Log. Cos. 31° 8', also auch Log. Cos. 31° 7'. 57'' < Log. Gos. 31° 7'.

* 58. 2te Aufgabe. Im rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 11.) ist außer dem rechten Winkel A, auch der Winkel C und eine Cathete AC gegeben; man sucht die beyden andern Seiten.

Auflösung. Da mit dem Winkel C auch B = 90° — C gegeben ist, so ist es einerley, welche Cathete gegeben ist, um nun 1. die andere Cathete AB zu finden, multiplicire man AC mit der Tangente des an AC anliegenden Winkels; will man hingegen 2. die Hypotenuse bestimmen, so dividire man AC mit dem Cosinus des anliegenden Winkels. In beyden Fällen erhält man die gesuchte Linie.

Beweis. Da Tang. C $= \frac{AB}{AC}$, so ist AB $=$ AC . Tang. C; ferner folgt aus $\frac{CA}{CB} =$ Cosin. C, daß BC $= \frac{CA}{\text{Cos. C}}$ sey.

* 59. 3te Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyecke ABC sind die beyden Catheten gegeben; man sucht die Hypotenuse und die beyden an ihr anliegeden Winkel.

Auflösung. Um die Hypotenuse zu finden, könnte man (nach Geom. §. 177.) die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate beyder Catheten suchen; da aber dies öfters etwas mühsam ist, so bestimmt man besser zuerst die Winkel und daraus die Hypotenuse. Um einen Winkel C zu bestimmen dividirt man die diesem Winkel gegenüberstehende Seite mit der ihm anliegenden Cathete, und sucht die gefundene Zahl unter den Tangenten, dann ist der neben dieser Tangente stehende Winkel der gesuchte. Mit Hülfe dieses Winkels ist es leicht aus §. 58. die Hypotenuse zu bestimmen.

Beweis. Man hat $\frac{AB}{AC} =$ Tang. C, und dann BC $= \frac{AB}{\text{Sin. C}} = \frac{AC}{\text{Cos. C}}$.

Beyspiel. Es sey AC = 1577, AB = 909, so ist Log. 909 = 2,9585639.

Log. 1577 = 3,1978317.

Log. $\frac{909}{1577}$ = — 0,2392678 = 0,7607322 — I. wo der letzte Ausdruck hier brauchbarer ist, da man unter den Logarithmen der Tangenten sogleich 9,7605637 als Log. Tang. 29° 57′ findet, und den Unterschied für 10 Secunden = 0,0000487; weil nun unser Logarithmen jenen um 1685 übertrifft, so gehört er zu $\frac{16850}{487}$ = 34,6 Secunden und es ist C = 29.° 57′. 34″, 6.

* 60. 4te Aufgabe. Es ist im rechtwinklichten Dreyecke die Hypotenuse und eine Cathete gegeben; man sucht die übrigen Winkel und die dritte Seite des Dreyeckes.

Auflösung. 1. Um den Winkel zu bestimmen, welcher der gegebenen Cathete gegenübersteht, dividire man die Cathete mit der Hypotenuse, das Product ist der Sinus des gesuchten Winkels.

2. Will man den Winkel bestimmen, welcher der gegebenen Cathete anliegt: so dividirt man die Cathete mit der Hypotenuse, und erhält dann den Cosinus des Winkels, welcher an dieser Cathete anliegt.

3. Endlich findet man dann die andere Cathete nach den Regeln des 58 §.

Beweis. In Fig. 11. ist $\frac{AB}{BC}$ = Sin. C = Cos. B, und dann AC = AB . Tang. B.

Von schiefwinklichten Dreyecken.

* 61. 5te Aufgabe. In einem schiefwinklichten Dreyecke ABC, (Fig. 12.) sind

zwey Winkel nebst einer Seite gegeben; man sucht die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung. Man suche zuerst auch den dritten Winkel; multiplicire dann die gegebene Seite mit dem Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Seite gegenübersteht und dividire das Product mit dem Sinus desjenigen Winkels, welcher der gegebenen Seite entgegensteht.

Beweis. Ist AB die gegebene, AC die gesuchte Seite, so ziehe man aus A auf die dritte Seite die Linie AD senkrecht; dann ist nach den Begriffen vom Sinus $\frac{AD}{BA} = \text{Sin. } B$ und $\frac{DA}{CA} =$ Sin. C, also $DA = BA \,.\, \text{Sin. } B = CA \,.\, \text{Sin. } C$, und folglich $CA = \frac{BA \,.\, \text{Sin. } B}{\text{Sin. } C}$, welches die in der Auflösung angegebene Rechnungs-Regel ist. Wollte man BC bestimmen, so müßte man BE senkrecht auf AC ziehen und fände dann $BE = AB \,.\, \text{Sin. } BAE = AB \,.\, \text{Sin. } BAC = BC \,.\, \text{Sin. } C$, also $BC = \frac{AB \,.\, \text{Sin. } A}{\text{Sin. } C}$.

* 62. 6te Aufgabe. Es sind im Dreyecke ABC (Fig. 12.) zwey Seiten AB, AC gegeben, und ein Winkel C, welcher einer der gegebenen Seiten gegenübersteht; man sucht die übrigen Stücke.

Auflösung. 1. Man suche zuerst den Winkel B, welcher der andern gegebenen Seite gegenübersteht. Der Sinus dieses Winkels wird gefunden, wenn man den Sinus des gegebenen Winkels mit der diesem Winkel anliegenden Seite multiplicirt und das Product mit der ihm gegenüberstehenden Seite dividirt.

2. Alsdann findet man alle übrigen Stücke mit Hülfe der vorigen Aufgabe, da aus zwey bestimmten Winkeln auch der dritte bekannt ist.

Beweis. Aus dem vorigen §. erhellt, daß $CA \cdot \text{Sin. } C = BA \cdot \text{Sin. } B$, also $\text{Sin. } B = \frac{CA \cdot \text{Sin. } C}{BA}$.

* 63. 7te Aufgabe. Es sind im Dreyecke ABC zwey Seiten AB, BC gegeben, nebst dem eingeschlossenen Winkel B; man sucht die Größe der übrigen Winkel und die dritte Seite.

Auflösung. 1. Um zuerst die beyden übrigen Winkel zu finden, ziehe man den gegebenen Winkel B von $180°$ ab, um die Summe der beyden übrigen Winkel $A + C = 180° - B$ zu bestimmen.

2. Man addire die beyden Seite und subtrahire sie von einander.

3. Man multiplicire die Differenz beyder Seiten mit der Tangente von $\frac{1}{2}(A + C)$ oder mit der Tangente der halben Summe der gesuchten Winkel, das Product dividire man mit der Summe der gegebenen Seiten: so ist der Quotient die Tangente von $\frac{1}{2}(A - C)$, wenn A der größere

der gesuchten Winkel, oder BC die größere der gegebenen Seiten ist.

4. Hat man mit Hülfe dieser Tangente den Winkel $= \frac{1}{2}$ (A — C) bestimmt: so addire man diesen zu der in Nro. 1. gefundenen halben Summe beyder Winkel, was dann herauskommt, ist der größte der beyden gesuchten Winkel.

5. Ist dieser Winkel bestimmt, so findet man leicht auch die übrigen gesuchten Stücke.

Analytischer Beweis. Da die Seiten AB, BC, welche den gesuchten Winkeln gegenüberstehen, gegeben sind: so hat man nach §. 61. $BC = \frac{AB \,.\, \text{Sin. } A}{\text{Sin. } C}$, folglich $AB + BC = AB \times \frac{\text{Sin. } A + \text{Sin. } C}{\text{Sin. } C}$ und $BC - AB = AB \times \frac{\text{Sin. } A - \text{Sin. } C}{\text{Sin. } C}$. Multiplicirt man nun, wie die Auflösung angiebt, BC — AB mit Tang. $\frac{1}{2}$(A + C), und dividirt den Quotienten mit AB + BC, so erhält man $\frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}(A + C)\,(\text{Sin. } A - \text{Sin. } C)}{\text{Sin. } A + \text{Sin. } C}$ und aus §. 55. ist bekannt, daß dieser Ausdruck = Tang. $\frac{1}{2}$ (A — C) ist; also ist auch Tang. $\frac{1}{2}$(A — C) $= \frac{(BC - AB) \,.\, \text{Tang. } \frac{1}{2}(A + C)}{BC + AB}$. Hat man einmal den Winkel $\frac{1}{2}$ (A — C) gefunden, so ist offenbar $\frac{1}{2}(A - C) + \frac{1}{2}(A + C) = A$.

Geometrischer Beweis. Wenn (Fig. 13.) AB, BC die gegebenen Seiten sind: so ziehe man um B mit einem der kleinern Seite gleichen Halbmesser AB den Kreis ADEA, verlängere CB, bis sie in D den Kreis schneidet, ziehe AD, AE, und endlich EF parallel mit AD. Da hier BD = BE = AB, so ist CD = CB + AB und CE = BC — AB, auch ist, weil FE mit AD parallel, (Geom. §. 274.) CE : CD = FE : AD oder BC — AB : BC + AB = FE : AD, oder $\frac{BC - AB}{BC + AB} = \frac{FE}{AD}$. Es ist also zu beweisen, daß dieser Quotient auch $= \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A - C)}{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A + C)}$ sey. Da DAE ein Halbkreis, so ist (Geom. §. 265.) der Winkel DAE = 90°, und weil EF mit DA parallel, so ist auch AEF = 90°, und folglich AD = AE . Tang. AED und EF = AE . Tang. EAF, also $\frac{FE}{AD} = \frac{\text{Tang. EAF}}{\text{Tang. AED}}$, und es wäre ferner zu beweisen, daß $\frac{\text{Tang. AEF}}{\text{Tang. AED}} = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang. } \frac{1}{2}(A+C)}$ sey. Vergleicht man die in der Figur vorkommenden Winkel, so ist ABD als äußerer Winkel am Dreyeck, ABD = BAC + ACB = BAE + BEA; da nun das Dreyeck BEA die gleichen Schenkel BA, BE hat: so ist BAE = BEA, daher BAC + ACB = 2 . DEA, oder DEA = $\frac{1}{2}$ (A + C). Ferner EAC = BAC — BAE = BAC — $\frac{1}{2}$ (BAC + BCA) = $\frac{1}{2}$BAC — $\frac{1}{2}$BCA = $\frac{1}{2}$ (A — C) und also wirklich Tang. EAF = Tang. $\frac{1}{2}$ (A — C); und Tang. AED = Tang. $\frac{1}{2}$ (A + C).

* 64. Zweyte Auflösung der vorigen Aufgabe. 1. Man dividire die größere gegebene Seite mit der kleinern, suche den Quotienten in der

Tafel der Tangenten, und bemerke den Winkel, welcher zu dieser Tangente gehört, welchen ich φ nennen will.

2. Von diesem Winkel ziehe man 45 Grad ab, und multiplicire die Cotangente des halben gegebenen Winkels mit der Tangente von $(\varphi - 45^\circ)$: so ist das Product die Tangente des halben Unterschiedes der beyden gesuchten Winkel.

Ist also (Fig. 12.) BC, AB und B gegeben und $BC > AB$, so setzt man $\frac{BC}{AB} = \text{Tang. } \varphi$ und sucht in den Tafeln φ und Tang. $(\varphi - 45^\circ)$ auf; dann ist $\text{Tang. } \frac{1}{2}(A - C) = \text{Tang. } (\varphi - 45^\circ) \,.\, \text{Cotang. } \frac{1}{2} B$.

Beweis. Da (§. 48.) $\text{Tang. } (\varphi - 45^\circ) = \frac{\text{Tang } \varphi - \text{Tang. } 45^\circ}{1 + \text{Tang. } \varphi \,.\, \text{Tang. } 45^\circ}$ so hat man hier

$$\frac{\frac{BC}{AB} - 1}{1 + \frac{BC}{AB}} = \text{Tang. } (\varphi - 45^\circ),$$

weil $\text{Tang. } \varphi = \frac{BC}{AB}$ und $\text{Tang. } 45^\circ = 1$ ist; hieraus folgt, daß $\text{Tang. } (\varphi - 45^\circ) = \frac{BC - AB}{BC + AB}$ ist, und die letzte Gleichung giebt also $\text{Tang. } \frac{1}{2}(A - C) = \text{Cotang. } \frac{1}{2} B \times \frac{BC - AB}{BC + AB} = \text{Tang. } \frac{1}{2} (A + C) \times \frac{BC - AB}{BC + AB}$, denn da $B = 180^\circ$

$- A - C$ ist, so hat man $\frac{1}{2} B = 90^\circ - \frac{1}{2} (A + C)$, also Cotang. $\frac{1}{2} B =$ Tang. $\frac{1}{2} (A + C)$ und unsere letzte Auflösung kommt demnach auf die erste zurück. Die letztere ist dann vorzüglich brauchbar, wenn nicht die Seiten BC und AB selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind.

Beyspiel. Es sey $BC = 1507$, $AB = 802$, und $B = 13^\circ 8'$; so ergiebt sich nach der ersten Auflösung: $BC + AB = 2309$; $BC - AB = 705$; $180^\circ - B = 166^\circ 52' = A + C$, also $\frac{1}{2} (A + C) = 83^\circ. 26'$; ferner

Log. 705 = 2,8481891.
Log. Tang. 83°. 26′ = 0,9388703.
3,7870594.
Log 2309 = 3,3634239.
0,4236355 = Log. Tang. 69° 20′ 33″ also $\frac{1}{2} (A - C) = 69^\circ. 20'. 33.''$
$\frac{1}{2} (A + C) = 83^\circ\ 26'$
und $A = 152^\circ\ 46'. 33''$.
$C = 14^\circ\ 5'\ 27''$

Nach der zweyten Auflösung hat man
Log. 1507 = 3,1781133.
Log. 802 = 2,9041744.
0,2739389 = Log. Tang. φ,
also $\varphi = 61^\circ. 58'. 44''$ ÷; $\varphi - 45^\circ = 16^\circ 58'. 44''$.
Log. Tang. 16°. 58′. 44″ = 0,4847664 — 1.
Log. Cotang. 6° 34′ = 0.9388703.
0,4236367 = Log. Tang. 69°. 30′ 33″.

* 65. Man kann die dritte Seite auch auf folgende Weise bestimmen: Sind (Fig. 12) AB und BC nebst dem Winkel B gegeben, so ist die auf BC senkrechte Linie $AD = AB$. Sin. B und ferner $BD = AB$. Cos. B, also $DC = BC -$

AB Cos. B, aber $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AB^2 \, Sin.^2 \, B + BC^2 + AB^2 \, Cos.^2 \, B \, . - 2 \, . \, AB \, . \, BC \, . \, Cos. \, B = AB^2 + BC^2 - 2 \, . \, AB \, . \, BC \, . \, Cos. \, B$, weil $Sin.^2 \, B + Cos.^2 \, B = 1$ ist. Diese Auflösung stimmt mit dem 55sten Lehrsatze der ebnen Geometrie überein, da in der dortigen Figur $DC = BC \, . \, Cos. \, C$.

* 66. 8te Aufgabe. Alle drey Seiten eines Dreyecks sind gegeben; man sucht die Winkel. (Fig. 12.)

Erste Auflösung. Man suche die Quadrate der beyden Seiten, welche an dem gesuchten Winkel anliegen, und addire sie zu einander; von der Summe ziehe man das Quadrat derjenigen Seite ab, welche dem gesuchten Winkel gegenübersteht; endlich dividire man den Rest mit dem doppelten Producte aus den an dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten. Der Quotient, welchen man findet, ist der Cosinus des gesuchten Winkels.

Beweis. Aus dem vorigen §. erhellt, daß $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \, . \, BC \, . \, Cos. \, B$ sey, also $2 \, . \, AB \, . \, BC \, . \, Cos. \, B = AB^2 + BC^2 - AC^2$, und $Cos. B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \, . \, BC}$, wie die Auflösung angiebt.

Zweyte Auflösung. Die vorige Auflösung ist für die Rechnung mit Logarithmen nicht recht brauchbar, und deshalb die folgende angemessener.

1. Man addire zu der Seite, welche dem gesuchten Winkel gegenübersteht, die eine anliegende

Seite, und ziehe von der Summe die andere anliegende ab.

2. Man subtrahire jene erste anliegende Seite von der gegenüberstehenden, und addire die andere anliegende Seite.

3. Diese beyden Größen multiplicire man in einander, und dividire das Product mit dem vierfachen Producte aus den beyden an dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten.

4. Die Wurzel aus diesem Quotienten ist der Sinus des halben gesuchten Winkels.

Sucht man im Dreyeck HBC den Winkel A, so findet man hiernach

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(BC + AB - AC) \,.\, (BC + AC - AB)}{4AB \,.\, AC}}.$$

Beweis. Da (§. 51.) $\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos.} A)$, so ist $\text{Cosin.} A = 1 - 2\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} A$. Man findet daher aus der ersten Auflösung $1 - 2 \,.\, \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \,.\, AB \,.\, AC}$, oder $2\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \,.\, AB \,.\, AC} = \frac{BC^2 - (AC - AB)^2}{2 \,.\, AB \,.\, AC}$, oder $2 \,.\, \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(BC + AB - AC) \,.\, (BC + AC - AB)}{2AB \,.\, AC}$ woraus sich leicht die Formel der zweyten Auflösung herleiten läßt.

* 67. Diese acht Aufgaben enthalten alle Fälle die bey der Berechnung der Seiten und Win-

kel von Dreyecken vorkommen können. Unter diesen Aufgaben ist eine, nämlich die sechste, wo das Dreyeck durch die gegebenen Stücke nicht immer ganz bestimmt ist. Sind nämlich Fig. 14. AB, AC und C gegeben: so findet man Sin. B $= \frac{AC . Sin. C}{AB}$, und dieser Sinus kann zu zwey Winkeln, B und (180° — B) gehören, je nachdem das Dreyeck ABC und ADC dasjenige ist, auf welches sich die Auflösung bezieht. Hat man nämlich AB = AD, so ist Sin. B = Sin. ADC und die Auflösung paßt für beyde Dreyecke, daher man in willkührlich vorkommenden Fällen aus andern Umständen wissen muß, ob der Winkel bey B spitz oder stumpf sey.

Mit Hülfe dieser Aufgaben kann man sich alle andern gewöhnlich vorkmmenden Aufgaben, welche die Dreyecke betreffen, auflösen; wir wollen noch einige derselben anführen.

* 68. 9te Aufgabe. Den Inhalt eines Dreyeckes zu bestimmen, wenn zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

Auflösung und Beweis. Sind (Fig. 12.) die Seiten AB, BC und der Winkel B gegeben, so findet man die Höhe AD = AB . Sin. B und also den Inhalt = $\frac{1}{2}$ AB . BC . Sin. B. und es ist leicht diese Formel auch in Worten auszudrücken und darnach zu rechnen.

* 69. 10te Aufgabe. Es sind (Fig. 12.) die Winkel des Dreyeckes ABC gege-

ben und die Seite BC; man sucht den Inhalt.

Auflösung und Beweis. Man hat AB $= \frac{BC \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A}$ und die Höhe AD $= \frac{BC \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A}$, also den Inhalt $= \frac{\frac{1}{2} BC^2 \,.\, \text{Sin. } C \,.\, \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A}$.

* 70. 11te Aufgabe. Aus den drey Seiten eines Dreyeckes den Inhalt zu finden. (Fig. 12.)

Auflösung. 1. Man suche folgende vier Größen $(AB + BC + AC)$; $(AB + BC - AC)$; $(AB + AC - BC)$; und $(AC + BC - AB)$.

2. Diese multiplicire man in einander und ziehe daraus die Quadratwurzel; so ist das Viertel dieser Wurzel der gesuchte Inhalt.

Beweis. Der Inhalt des Dreyeckes ist nach §. 68. $= \frac{1}{2} \,.\, AB \,.\, BC \,.\, \text{Sin. } B$, wo aber Sin. B hier nicht als gegeben angenommen wird. In der ersten Auflösung der 8ten Aufgabe fanden wir $\text{Cos. } B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \,.\, BC}$, also Sin. B $=$

$$\sqrt{(1 - \text{Cos.}^2 B)} = \sqrt{[(1 + \text{Cos. } B)(1 - \text{Cos. } B)]},$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(AB^2 + BC^2 + 2AB \,.\, BC - AC^2)}{2 \,.\, AB \,.\, BC} \times \frac{(AC^2 - AB^2 - BC^2 + 2AB \,.\, BC)}{2AB \,.\, BC}\right]} \text{ oder}$$

$$\text{Sin. B} = \frac{\sqrt{\{[(AB+BC)^2 - AC^2] \times [AC^2 - (BC-AB)^2]\}}}{2 \,.\, AB \,.\, BC}$$ da nun $(AB+BC)^2 - AC^2 = (AB+BC+AC) \times (AB+BC-AC)$ und auch $[AC^2 - (BC-AB)^2] = (AC - BC + AB) \,.\, (AC + BC - AB)$ ist, so hat man

$$\text{Sin B} = \frac{\sqrt{[(AB+AC+BC) \,.\, (AB+BC-AC) \,.\, (AC+AB-BC) \,.\, (AC+BC-AB)]}}{2AB \,.\, BC},$$

also den Inhalt $= \frac{1}{2} AB \,.\, BC \,.\, \text{Sin. B} = \frac{1}{4}\sqrt{[(AB+AC+BC) \,.\, (AB+BC-AC) \,.\, (AB+AC-BC) \,.\, (AC+BC-AB)]}$.

* **Uebungs-Aufgaben.** 1. Es sey (Tab. IV. Fig. 143.) die Standlinie ce = 567 Fuß gemessen, und die Winkel Ace = 67° 15′; Aec = 54° 39′; AcD = 32° 9′ gefunden; man soll die Höhe AD bestimmen.

2. Um (Fig. 142.) die Entfernung AB zu bestimmen, hat man eine Standlinie DC = 4180 Fuß gemessen, und die Winkel BCA = 41° 58′; BCD = 87° 2′; ADC = 100° 40′; BDA = 21° 20′ bestimmt; die Entfernung AB anzugeben.

3. In dem Vierecke ABCD (Fig. 15.) ist AD = 990 Fuß; DC = 1715 Fuß; DB = 1579 Fuß und ADB = 67° 55′, BDC = 26°. 19′ gefunden; man sucht den Inhalt.

4. In demselben Vierecke sind keine Winkel gemessen, sondern AD = 990 Fuß, DC = 1715 Fuß, DB = 1579 Fuß, AB = 1516 Fuß, BC = 761½ Fuß; man sucht aus diesen Stücken den Inhalt.

5. Es ist die Lage der drey Puncte A, B, C Tab. VIII. Fig. 16. gegeben, indem AB = 2500 Fuß, AC = 7000 Fuß, BC = 9000 Fuß, auch sind von x aus die Winkel AXB = 27° 43′. 12″. und AXC = 109°. 15′. 36″ gemessen; man soll AX und die Lage dieser Linie gegen AB bestimmen.

Auflösung der Uebungs-Aufgaben in der Arithmetik.

§. 56. Die Beyspiele geben nach der Reihe folgende Resultate:

Additions-Exempel. { 58,7680143. 1,0331799494.

Subtractions-Exempel. { 0,137231. 0,034621. 4,971263.

Multiplications-Exempel. { 0,02661526l9938. 194736,78042056. 0,00000000412832.

Divisions-Exempel. { 1305,4569. 0,000001815. 0,234946. 0,0005649156.

* §. 97. 1stes Exemp. der erste erhält $366\frac{2}{3}$, der zweyte 1200, der dritte $183\frac{1}{3}$.

2tes Exemp. ist §. 98. aufgelößt.

* §. 99. 3tes Exemp. ist §. 100. aufgelößt.

4tes Exemp. $x = 214\frac{62}{67}$; $y = 210\frac{30}{67}$.

* §. 101. 6tes Exemp. $x = 14\frac{56}{121}$; $y = 3\frac{112}{121}$.

7tes Exemp. $x = 77$; $y = 61$; $z = -38$.

§. 129. Die Wurzeln sind 233949,13709.
213726,2062406.
6160014,611203.

$^*\sqrt{2} = 1{,}4142136.$
$\sqrt{2{,}5} = 1{,}5811388.$
$\sqrt{2{,}75} = 1{,}6583124.$
$\sqrt{12} = 3{,}4641016$ und $\sqrt{24} = 4{,}8989795.$

* §. 137. $\sqrt[3]{10} = 2{,}154435$; $\sqrt[3]{12} = 2{,}2894286$; $\sqrt[3]{13} = 2{,}351335$; $\sqrt[3]{25} = 2{,}924018$; $\sqrt[3]{100} = 4{,}641589.$

* §. 156. Die Progression 2 . 3,7 . 5,4 . 7,1 . 8,8 . u. s. w.
und 15 . $21\frac{3}{4}$. $28\frac{1}{2}$. $35\frac{1}{4}$. 42 . u. s. w.
Das dreyzigste Glied der ersten Progression = 51,3.
der zweyten = $210\frac{3}{4}$.
Die Progression, wo zwischen 15 und 25 dreyzig mittlere Proportionalzahlen bestimmt sind, ist
15 . $15\frac{10}{34}$. $15\frac{20}{31}$. $15\frac{30}{31}$. $16\frac{9}{31}$ u. s. w. $15\frac{10}{31}$

$7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + + + 35 = 315.$
$16 + 14\frac{21}{26} + 13\frac{16}{26} + 12\frac{11}{26} + + + \frac{1}{2} = 115\frac{1}{2}.$
$16 + 15\frac{11}{42} + 14\frac{22}{42} + 13\frac{33}{42} + + + \frac{1}{2} = 181\frac{1}{2}.$

§. 162. Man hat
$10 : 31{,}6227766 = 31{,}6227766 : 100;$
und $100 : 141{,}42136 = 141{,}42136 : 200;$

§. 181. Giebt 139 Rthlr. $16\frac{1}{2}$ Ggr.

§. 182. —— 565 Rthlr. 15 Ggr. $7\frac{1}{5}$ Pf.

§. 183. —— 4,0095 Meilen in 1 Sec.

§. 184. —— 6,442 Meilen in 1 Sec.

§. 187. —— 750 Arbeiter.

§. 188. —— 1901 Rthlr. 4 Ggr. 11 Pf. beynahe.

§. 189. findet man $2236\frac{2}{3}$ As.

§. 192. findet man 833 Rthlr. 18 Ggr. $4\frac{1}{2}$ Pf.

§. 193. findet man, das Capital muß zu 5 pro Cent ausgethan werden.

§. 194. findet man $11\frac{13}{16}$ Tage.

§. 195. Hier müßte statt der Zahl 1589,4 Meilen, stehen 1606,7 Meilen, und wenn man diesen durch Verwechslung entstandenen Fehler corrigirt, so erhält man 87,9991 Tage.

* §. 197. Gewinn des ersten $196\frac{38}{47}$, des zweyten $236\frac{8}{47}$, des dritten $492\frac{1}{47}$.

* §. 200. $x = 125$; $y = 175$; $z = 200$.

* §. 201. $x = 52\frac{1}{2}$ Meilen.

* §. 202. Der erste legt $20\frac{19}{34}$, der zweyte $29\frac{15}{34}$ Meilen zurück.

* §. 203. Uebungs-Aufgaben. Hier muß statt 1524 stehen 1,524; dann findet man Geschwindigkeit des Mars zur Geschwindigkeit der Erde, wie 0,81025 zu 1.

Zweyte Aufgabe. Giebt in den verschiedenen Fällen von der besten Waare.

$= 340$ mittlern $= 150$ schlechtesten $= 10$.
$353\frac{1}{3}$ — — $116\frac{2}{3}$ — — 30.
$366\frac{2}{3}$ — — $83\frac{1}{3}$ — — 50.
400 — — 0 — — 100.

Dritte Aufgabe. Die zu theilende Summe ist 2000 Rthlr. und der erste bekommt 125, der zweyte 375, der dritte 625, der vierte 875.

Vierte Aufgabe. Der Jupiter würde wieder in Opposition kommen, nach 398,87 Tagen = 1 Jahr 33,62 Tagen.

* §. 212. Die Auflösung §. 224.

* §. 213. Giebt 657,542 Rthlr.

* §. 214. Die Auflösung §. 235.

* §. 234. Erstes Exemp. 70810,6.'
Zweytes Ex. 17,1288 Sgr. d. Elle.

* §. 236. Man findet $\frac{104^{10}}{100^{10}} = 1,480243$, also $40 \cdot m \cdot (1,04^{10} - 1) = 0,04 \cdot 1,04^{10} \cdot 4000$ und $m = \frac{4 \cdot 1,480243}{0,480243.}$

$m = 12,329$ Promt.

* §. 237. Der Einsatz beträgt nach dem Anfange des 20sten Jahres $45\,(1 + 1,04^{0} + 1,04^{2} + + + 1,04^{19}) = 45 \cdot \frac{1,19112}{0,04.} = 1340,01$. und am Ende des 20ten Jahrs = 1393,614 Rthlr.; am Ende des 30sten Jahrs = 2062, 88.

Die jährlich ausgezahlte Summe nach Anfang des 31sten Jahrs = 1800, 9. also der Gewinn 262 Rthlr.

* §. 238. Das ausgelegte Geld ist am Ende des 5ten Jahres werth $= 1070, 58$.

Die Einnahme bis dahin $= 200\ (1 + 1{,}06 + + + 1{,}06^4) = 1127, 42$.

Gewinn am Ende des 5ten Jahrs $= 56, 84$.

Einnahme vom 6ten bis 10ten Jahr $= 200 \cdot$
$$\frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} = 1083, 25.$$

Auflösung der Uebungs-Aufgaben in der Geometrie.

§. 180. Nimmt man die beyden Catheten des rechtwinklichten Dreyeckes einer gegebenen Linie gleich: so ist das Quadrat der Hypotenuse doppelt so groß, als das Quadrat einer Cathete.

Macht man an einem zweyten rechtwinklichten Dreyecke die eine Cathete jener gegebenen Linie, die andere der eben gefundenen Hypotenuse gleich: so ist das Quadrat der neuen Hypotenuse das dreyfache des Quadrats jener gegebenen Linie.

Will man das fünffache Quadrat einer gegebenen Linie AB haben, so nimmt man eine Cathete $=$ AB, die andere $=$ 2AB: so ist das Quadrat der Hypotenuse das gesuchte.

Das doppelt so große Quadrat ist das zehnfache des Quadrats von AB. Man findet aber auch das zehnfache des Quadrats von AB, wenn eine Cathete = AB, die andere = 3AB genommen und das Quadrat der Hypotenuse gezeichnet wird.

Wenn man abermals diese zuletzt gefundene Hypotenuse zur Cathete eines neuen rechtwinklichten Dreyeckes nimmt, und die andere Cathete = AB macht: so ist daß Quadrat der neuen Hypotenuse das eilffache von ABq.

Um ein Quadrat zu zeichnen, welches — $\frac{3}{4}$ · ABq, nehme man die Hypotenuse = AB, die eine Cathete = $\frac{1}{2}$ AB: so ist jenes Quadrat dem Quadrate der andern Catheten gleich, und durch Verdoppelung desselben findet man ein Quadrat = $1\frac{1}{2}$ · ABq.

Hat man ein Quadrat = ABq + CDq gefunden: so findet man eines, welches = ABq + CDq + EFq, wenn man die eine Cathete des rechtwinklichten Dreyeckes = EF, die andere der Seite jenes zuerst gefundenen Quadrats gleich annimmt.

§. 201. 1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll = 20736 Quadratlinien, die beyden Rechtecke = 850 Quadratzoll das eine und $20\frac{5}{12}$ Quadratfuß das andere.

§. 213. Die Dreyecke sind — das erste = 1558 $\frac{1}{3}$ Quadratfuß, das zweyte = 12072,01 rheinl. Quadratzoll.

Des Trapezes Größe = $412\frac{39}{125}$ = 412,605 Quadratruthen = 15199200 Quadratzoll.

* Des Parallelogramms Höhe = 84,20 Ruthen zu 16 Fuß.

Des Dreyecks Höhe = 43,134 Ruthen.

Des Trapezes Höhe = 88,794 Ruthen.

* §. 215. Nro. 1. Man nimmt die gegebene Seite zur Cathete, die Diagonale zur Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks; dann ist die andere Cathete die gesuchte Seite des Rechtecks.

Nro. 2. An die Diagonale, welche gegeben ist, zeichne man an jedem Endpuncte einen Winkel $= \frac{1}{2}$ R: so entsteht ein rechtwinklichtes Dreyeck, welches die Hälfte des gesuchten Quadrates ist.

Nro. 3. Ist die Diagonale $= a$, so ist jede Seite $= \sqrt{\frac{1}{2}\, a^2}$, also der Inhalt $= \frac{1}{2}\, a^2$.

Nro. 4. Sind die Seiten des Rechtecks $= a$ und $= b$, so ist des Quadrats Seite $= \sqrt{ab}$.

Nro. 5. Sind der verschiedenen Dreyecke Grundlinien $= A, B, C, D$ und Höhen $= 2a, 2b, 2c, 2d$, so ist der Inhalt der Figur $= Aa + Bb + Cc + Dd$ und des gesuchten Quadrats Seite gleich der Wurzel aus dieser Summe.

§. 241. $15^\circ\ 7'\ 9'' = 0{,}1680216$ des Quadranten, $127^\circ\ 59'\ 58'' = 1{,}422216$ des Quadranten.

0,57892 des Quadranten $= 52^\circ.\ 6'.\ 10'',08.$'
0,6366197 des Quadranten $= 57^\circ\ 17',44'',7828.$

§. 337. Der Erd-Umfang

	= 123352248	paris. Fuß.
Auf der Erde ist 1 Grad =	342645	Fuß.
1 Min. =	5710,75	Fuß.
1 Sec. =	95,179	Fuß.
$115^\circ\ 7'$ =	3980394	Fuß.

20000 Fuß $= 3'.\ 30'',\ 1.$

§. 338. Der dem Durchmesser gleiche Bogen $= 114^\circ.\ 35'.\ 17'',\ 7.$ Der Erddurchmesser würde seyn, nach der Messung in Peru = 6503421 Toisen, nach der Messung in Lappland = 6578129 Toisen.

§. 343. Der Durchschnitt der Erde ist = 2320481 Quadratmeilen, nach §. 337. = 121083306750288o.

§. 512. 1 Cubikfuß = 1728 Cubikzoll = 2985984 Cubiklinien.

§. 517. Aufg. 1 — giebt 2955960 Cubikzoll.
2 — — 18,3444 Fuß.
3 — — die Seite des Quadrates = $\sqrt{83}$ = 9,1104336.
4. Des um das Sechseck beschriebenen Kreises Halbmesser ist = 2, des Sechsecks Inhalt = 6 . $\sqrt{3}$; also des Prisma's Inhalt = 102 . $\sqrt{3}$ = 176,67 Cubikf.
5. Des Würfels Seite = 215, 579 Zoll.

§. 518. Des Cylinders Inhalt = 35,65 Cubikf.

§. 522. 1 — Der Cylinder wiegt 1553,99 Pf.

2. Der Pyramide Inhalt = 76999933 Cubikf.

* 3. Der abgestumpften Pyramide Inhalt = 9624992 Cubikfuß.

4. Der Kegel = 110446,5 Cubikfuß.

* 5. Die Länge PM ist = 212,4 Fuß = GH, OQ = FI = 217 Fuß.

Es ist also OKFQNI = KFO . $\frac{1}{3}$ (2FI + KN) = 147744
OFGPQIHM = POFG . $\frac{1}{2}$ (FI + GH) = 38646
LPGMQG = PLG . $\frac{1}{3}$ (2GH + LM) = 50609,61

236999,6 Cubikfuß.

* 6. Man kann die Berechnung auf mancherley Weise anstellen. Um erstlich das Stück ABCD-EFGK zu berechnen, welches durch parallele und auf den Horizont senkrechte Ebnen ABCD, EFGK an beyden Enden begränzt wird, kann man folgendermaßen verfahren. Man ziehe DP, CQ mit AE, BF parallel, so ist ABCDEFQP ein schiefes Prisma, dessen Grundfläche ABCD $= 6 \cdot 21 = 126$ Quadratf. und Höhe Bp $= 250$ Fuß; also der Inhalt $= 31500$ Cubikf. Zieht man nun PR, QS vertical, so ist DPRCQS ein Prisma, dessen Grundfläche DPR $= \frac{1}{2}\, 250 \cdot$ PR $= \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 34 = 4250$ Quadratfuß und Höhe DC $= 24$ Fuß, Inhalt $= 102000$ Cubikfuß. Die noch übrigen Stücke DKPR und CGQS sind gleiche Pyramiden von der Höhe Bp $= 250$ Fuß und Grundfläche KRP $= 289$ Quadratfuß, weil KR $= \frac{1}{2}$ PR $= 17$ Fuß. Der Inhalt der Pyramide ist also $= 24083\frac{1}{3}$ Cubikfuß. Hiernach also des ganzen ersten Theils Inhalt $= 181666\frac{2}{3}$.

Man könnte auch die Theile ALDENK und BMCFOG als zwey abgekürzte Pyramiden vom Inhalt $= \frac{1}{3} \cdot 250\,(400 + 60 + 9) = 39083\frac{1}{3}$ Cubikfuß. Das mittlere Stück wird dann durch eine durch LM mit AE parallel gelegte Ebne in zwey Prismen getheilt, deren oberes $= 250 \cdot 6 \cdot 18 = 27000$ Cubikfuß, das untere $= 250 \cdot 17 \cdot 18 = 76500$ Cubikfuß.

Den andern Theil könnte man als ein schiefes Prisma betrachten, welches durch eine Ebne FGH, die der Grundfläche EKI nicht parallel ist, begränzt wird; es würde dann aber etwas schwierig seyn, die Höhen der Puncte F, G, H über der Ebene EIK zu bestimmen. Besser also ist es diesen Theil in drey Stücke zu zerlegen, das Prisma ENIFOH ist $= 40 \cdot 20 \cdot 18 = 14400$ Cubikfuß, und jede der beyden Pyramiden EKNI, FGOH ist $= \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 20 \cdot 20 = 5333\frac{1}{3}$ Cubikfuß, wenn man annimmt die horizontale Entfernung des Punctes I von N sey 40 Fuß. Wäre IN auf dem Boden des Flusses $= 40$ Fuß gemessen, so müßte man bedenken, daß dieser von L bis N sich $8 + 40 - 6 = 42$ Fuß senkt auf 250 Fuß horizontale Länge, also $LN = \sqrt{(250^2 + 42^2)} = 253\frac{1}{2}$ Fuß ist, und folglich die horizontale Entfernung des Punctes I von EN, $= \frac{250}{253,5} \cdot 40 = 39,45$ Fuß ist, wornach der Inhalt dann etwas geringer ausfällt. — — Gewöhnlich bedarf es zwar bey solchen Werken einer so äußerst strengen Berechnung des Inhalts nicht, da in der Ausführung doch nicht alles so genau zugehen kann, wie in der Zeichnung, indeß muß man doch bey der Rechnung sichere Regeln befolgen, um nicht die Fehler von allen Seiten zu häufen.

* §. 531. Des Cylinders Oberfläche $= 314,159$ Quadratfuß.

Des Kegels Seitenlinie $= \sqrt{(100 + 25)} = 11,18$ Fuß, und die Oberfläche $= 175,615$ Quadratfuß.

§. 609. Der Erde Durchmesser $= 1718,87339$ Meilen.

Des größten Kreises Inhalt $= 2320479,0765$ Quadratmeilen.

Der Kugel Inhalt $= 2659073157$ Cubikmeil.

* Der 24pfündigen Kugel Durchmesser $= 5,216$ Zoll.

* §. 619. Der Erde Oberfläche = 9281916 Quadratmeilen.

Der heißen Zone Oberfläche = 3694202 Quadratmeilen.

Uebungs-Aufgaben am Ende der Trigonometrie.

---

* 1. Man findet AD = 289,874 Fuß.

2. Hier ist BD = 17710 Fuß, AD = 5256 Fuß, BAD = 150 . 10 . 47, ABD = 8 . 29 . 13, AB = 12956.

3. Der Inhalt = 1324533 Quadratfuß.

4. Derselbe — 1324596. Das hier betrachtete Viereck ist mit dem in Nr. 3. einerley; der Unterschied der Angaben für den Inhalt entspringt nur daraus, daß die aus Nr. 3. berechneten Seiten nur in ganzen Fußen angegeben und die Brüche weggelassen sind.

5. Diese Aufgabe ist mit der am Schlusse der ebnen Geometrie einerley; der zu bestimmende Punct X liegt im Durchschnitt zweyer Kreislinien. Man findet hier CAB = 137° 22′ 4″. Zieht man nun den Durchmesser AD, so ist BAD ein bey B rechtwinklichtes Dreyeck, wo BDA = BXA = 27°. 43′. 12″ . und es wird AD = 5374, 6; wird ferner der Durchmesser AE gezogen, so findet man CAE = 19°. 15′. 36″. und AE = 7415. Da nun AXD = AXE = R, so ist EXD eine gerade Linie, und im Dreyeck ADE ist der Winkel DAE = 94° 20′ 52″. ferner ADE = 51°. 14′. 16″. also BAX = 101° 2′ 32″ und AX = 4190, 8 Fuß.

Druckfehler und Verbesserungen, die ich vor dem Gebrauch des Buchs zu berichtigen und einzutragen bitte.

Seite 3 Zeile 8 von oben lies: eine rundum. S. 8 Z. 8 v. ob. l. von den geraden Linien. S. 20 Z. 3 v. ob. l. zum Beyspiel, D und F. S. 21 Z. 3 von unten l. Durchmesser, statt Halbmesser. S. 22 Z. 8 v. u. l. eine Kreislinie oder ein Stück EFG derselben, deren. S. 27 Z. 13 v. ob. l. §. 51 st. Fig. 51. S. 30 Z. 7 v. ob. l. Halbmesser st. Durchmesser. S. 32 Z. 17 v. ob. l. von außen. 3. Die Summe der Halbmesser ist. S. 34 Z. 9 v. ob. l. um den einen. S. 35 Z. 14 v. ob. l. nach Mittelpunct setze ein Comma. S. 36 Z. 18 v. ob. l. ACB = DFE st. ACB = DEF. S. 44 Z. 15 v. ob. l. §. 73. st. §. 78. S. 47 Z. 14 v. ob. l. BC st. AC. S. 47 Z. 4 v. u. l. Winkel in beyden gleich ist, CEF = BEA. S. 49 Z. 11 v. ob. l. man den Seiten. S. 50 Z. 4 v. u. l. CD = CE. S. 53 Z. 7 v. ob. l. DEF st. DEE. S. 57 Z. 13, 14, 15 v. ob. muß allemal I st. g stehen. S. 57 Z. 3 v. u. nach anliegende, setze ein Comma. S. 58 Z. 1 von u. l. Linie. S. 60 Z. 17 v. ob. l. AF st. EF. S. 64 Z. 15 v. ob. l. Ef st. EF. S. 66 Z. 4 v. ob. l. Linien statt Linie. S. 72 Z. 3 v. ob. l. anliegenden st. umliegenden. S. 72 Z. 13 v. ob. l. Linien st. Linie. S. 73 Z. 5 v. u. l. bedienen st. bilden. S. 75 Z. 15 v. ob. l. Fig. 43. st. Fig. 48. S. 76 Z. 8 von oben l. dem Halbmesser AD =. S. 80 Z. 3 v. ob. l. sich der Linie CD nach der Seite. S. 81 Z. 16 v. ob. l. ACB = DBC. S. 87 Z. 4 v. ob. l. 2R — Z st. 2R — 2Z. S. 87 Z. 11 v. ob. l. eines st. einer. S. 88 Z. 29 v. ob. l. 3 . FG; für — st. 3FG für. S. 89 Z. 1 v. ob. l. $\frac{1}{2^n}$ st. $\frac{1}{2n}$. S. 89 Z. 3 v. ob. l. $2^n - 1$ st. $2n - 1$. S. 90 Z. 4 v. ob. l. Parallelität. S. 91 Z. 12 v. ob. l. FG = E. S. 91 Z. 18

v. ob. l. und um G. S. 91 Z. 2 v. u. l. dessen Seite = BC (Fig. 79.) S. 92 Z. 17 v. ob. l. KF st. KL. S. 94 Z. 21 v. ob. l. FEGB+ st. FEGC+. Seite 101 Z. 5 v. ob. l. Grundlinie st. Grundlinien. S. 101 Z. 7 v. ob. l. um st. nur. S. 102 Z. 3 v. u. l. Bq st. Bp. S. 103 Z. 5 v. ob. l. Schenkel. S. 103 Z. 17 v. ob. l. sind st. ist. S. 105 Z. 4 v. ob. l. und zwey Rechtecke st. und zwey. S. 106 Z. 7 v. u. l. Differenz der Seiten. S. 106 Z. 5 v. u. l. EFq st. FFq. S. 107 Z. 10 v. ob. l. = DC st. = AD. S. 110 Z. 12 v. ob. l. FI st. EI. S. 112 Z. 7 v. ob. l. des einen. S. 112 Z. 17 v. ob. l. Parallelogramme st. Parallelogrammen. S. 113 Z. 11 v. ob. l. EFGH st. FFGH. S. 119 Z. 3 v. ob. l. Längenmaße. S. 119 Z. 6 v. ob. l. Flächenmaße. S. 120 Z. 7 v. ob. l. welche die in aB. S. 120 Z. 14 v. ob. l. Fußen st. Füßen. Seite 125 Z. 21 v. ob. l. Dreyecke st. Dreyecken. S. 126 Z. 13 v. ob. l. CD . CE st. CD . CF. S. 129 Z. 4 v. ob. l. gegeben. S. 129 Z. 14 v. ob. l. Cathete. S. 131 Z. 5 v. ob. l. Linien und. S. 131 Z. 11 v. ob. l. eine Sehne. S. 133 Z. 3 v. u. l. schneiden st. scheiden. S. 134 Z. 1 v. ob. l. Linien. S. 134 Z. 5 v. ob. l. Durchschnitt. S. 135 Z. 8 v. ob. l. A, B, C st. ABC. S. 135 Z. 12 v. ob. l. geraden. S. 139 Z. 3 v. ob. l. AHC st. ABC. S. 139 Z. 4 v. ob. l. DIF st. DEF. S. 140 Z. 14 v. ob. l. Dreyecke. S. 141 Z. 5 v. ob. l. die kleinere st. die größere. S. 141 Z. 16 v. ob. l. entferntere. S. 142 Z. 14 v. ob. l. die Winkel. Seite 143 Z. 7 v. ob. l. Schenkeln. S. 144 Z. 4 von ob. l. = DIFGD. (Fig. 111.) S. 144 Z. 8 v. ob. l. AGC st. DGC. S. 145 Z. 5 v. ob. l. BIA st. GIA. Seite 145 Z. 6 v. ob. l. BAD st. GAD. S. 145 Z. 20 v. ob. l. in dem Bogen. S. 146 Z. 5 v. u. l. Centesimalgrad. S. 147 Z. 9 v. ob. l. Zeichen. S. 147 Z. 11 v. ob. l. Grade. S. 147 Z. 19 v. ob. l. allgemein st. allgemeine. S. 149 Z. 18 v. ob. l. den Kreis. S. 150 Zeile 1 v. unten l. Grade. S. 152 Z. 3 v. ob. l. einzelne

Grade = ab st. eizelne Grade = Fa = ab. S. 152 Z. 12 v. ob. l. Grad. S. 158 Z. 6 v. ob. l. Transporteur. S. 159 Z. 1 v. ob. l. von 60° st. an 60°. S. 163 Z. 12 v. ob. l. Abschnitte. S. 164 Z. 3 v. u. l. Kreisabschnitte. S. 164 Z. 1 u. 2 v. u. l. Abschnitt. S. 167 Z. 5 v. ob. l. daß sich. S. 167 Z. 7 v. ob. l. MAD + MBD st. MAB + ABD. S. 167 Z. 3 v. u. l. ABE + ADB st. ABF + ADB. S. 168 Z. 1 von ob. l. §. 138. st. 183. S. 168 Z. 16 v. ob. l. steht und. S. 170 Z. 2 v. u. l. Grundlinien. S. 172 Z. 4 v. ob. l. die mit DE parallel ist. S. 173 Z. 17 v. ob. l. parallel. S. 174 Z. 2 v. ob. l. daß also. S. 176 Z. 9 v. ob. l. ADE st. ADB. S. 179 Z. 5 v. ob. l. Stücken st. Winkeln. S. 179 Z. 4 v. u. l. 2AD . DC; und BD^2. S. 179 Z. 3 v. u. l. Höhen. S. 180 Z. 23 v. ob. l. Kreislinie in A. S. 182 Z. 5 v. u. l. in stetiger. S. 182 Z. 2 v. u. l. in stetiger. S. 183 Z. 5 v. ob. l. errichte. S. 184 Z. 6 v. ob. l. das Dreyeck. S. 185 Z. 13 v. ob. l. so ist der Winkel EAB. S. 185. Z. 19 v. ob. l. der Dreyecke EBD. Seite 188 Z. 7 v. u. l. Kleinheit der Theile. S. 189 Z. 3 v. u. l. Linie. Seite 189. 190. müssen wegen eines Versehens im Stiche der Figur folgende Aenderungen im Texte vorgenommen werden: S. 189 Z. 14, 15, 16. allemal ak st. gk und gk st. ak. Zeile 3 von unten l. von oben her gerechnet. S. 190 Z. 4 v. u. l. bis zur vierten von oben her. Zeile 2 von unten l. auf der vierten von oben her. Seite 191 Zeile 14 u. 15 v. ob. l. gk st. ak. Zeile 4 v. u. l. also ab = 4 . gk. S. 192 Z. 15 v. ob. l. Cd st. CB. S. 195 Z. 15 v. ob. l. noch den Winkel. S. 195 Z. 12 v. ob. l. cD. S. 196 Z. 7 v. ob. l. hier zugleich AcD, indem man an dem vertical gerichteten Winkelmesser die Linie 0°. 180° genau horizontal stellt und das Lineal nach cA richtet. S. 201 Z. 19 v. ob. l. Regeln. S. 201 Z. 4 v. u. l. Polygonen. S. 201 Z. 3 v. u. l. Ausmessung. S. 202 Z. 16 v. ob. l. In einen. S. 205 Z. 10 v. ob. l. gegebenes. S. 208 Z. 8 v. ob.

l. zeichnen (Fig. 148.) S. 209 Z. 14 v. ob. l. geschehene. S. 209. Z. 17 v. ob. l. Fig. 148. S. 209 Z. 18 v. ob. l. regulären Polygons. S. 210 letzte Zeile l. deren keine. S. 212 Z. 14 v. ob. l. des um jenen Kreis. S. 214 Z. 7 v. u. l. da jedes. S. 215 Z. 6 v. ob. l. Winkelpuncte. S. 215 Z. 21 v. ob. l. Polygon um den (ohne Comma.) S. 221 Z. 13 v. ob. l. dann ist der ganze. S. 222 Z. 5 v. ob. l. gleich ist. (Fig. 151.) S. 223 Z. 11 v. ob. l. HG = 0,8; st. HG 0,8: S. 223 Z. 20 v. ob. l. von den Endpuncten der Seiten. S. 225 Z. 4 v. u. l. welcher im. S. 227 Z. 15 v. ob. l. Linien messen kann. S. 228 Z. 6 v. u. l. Tangenten. S. 229 Z. 2 v. ob. l. Stück. S. 229 Z. 15 v. ob. l. tionalen. S. 231. Z. 4. v. ob. l. DFK; st. DFK, S. 231 Z. 4 v. ob. l. ML = DE, LN = AC. S. 231 Z. 17 v. ob. l. OP = AC. S. 232 Z. 9 v. ob. l. §. 351. S. 232 Z. 15 v. ob. l. dem übrigen. S. 234 Z. 6. v. ob. l. ADG : ABC = m : m + n. S. 234 Z. 10 v. ob. l. DA st. DE. S. 234 Z. 8 v. u. l. Eckpunct B. S. 238 Z. 1 v. ob. l. ABPQ : ABCD =. S. 245 Z. 3 v. ob. l. EG = EH; EF =. S. 245 Z. 15 v. ob. l. FEL st. FFL. S. 247. Z. 5 v. u. l. den Durchschnitt. S. 248 Z. 3 v. ob. l. denn st. dann. S. 251 Z. 14 v. ob. l. GIA st. GIH. S. 257 Z. 5 v. ob. l. die geraden Linien AC, BD. S. 257 Z. 6 v. ob. l. Linie CD, und st. Linie CD und. S. 259 Z. 17 v. ob. nach Ebnen setze ein Comma. S. 260 Z. 4 v. ob. l. entgegen ist. S. 265 Z. 7 v. u. l. und auch st. und folglich. S. 266 Z. 13 v. ob. l. welchen man. S. 269 Z. 15 v. ob. l. NABG st. NA, BG. S. 269 Z. 2 v. u. l. den Flächen =. S. 269 Z. 1 von unt. lies FABH st. FAHB. S. 273 Z. 15 v. ob. l. §. 420. S. 275 Z. 19 v. ob. l. Auch erhellt. S. 275 Z. 8 u. 4 v. u. l. §. 421. S. 175 Z. 1 v. u. l. §. 415. S. 276 Z. 16 v. ob. l. §. 418. S. 276 Z. 18 v. ob. l. §. 420. S. 277 Z. 11 v. ob. l. §. 418. S. 277 Z. 12 v. ob. l. §. 421. S. 281 Z. 17 v. ob. l. verlangten.

S. 281 Z. 6 v. u. l. den Durchschnitt. S. 282 Z. 1 u. 3 v. ob. l. R st. Q. S. 282 Z. 4 v. ob. l. RE statt QE. S. 282 Z. 8 v. ob. l. RDE st. QDE. S. 282 Z. 11 v. ob. l. PR st. PQ. S. 282 Z. 21 v. ob. l. Vertical-Risse st. Verhältnisse. S. 282 Z. 23 v. ob. l. R st. Q. S. 282 Z. 24 v. ob. l. senkrechten Linie EN. S. 283 Z. 1 v. ob. l. R st. Q. S. 287 Z. 11 v. ob. l. die Linie BC und in der. S. 289 Z. 5 v. u. l. §. 420. S. 289 Z. 5 v. u. l. Linie. S. 292 Z. 8 v. ob. l. heißt ein Cubus. S. 295 Z. 2 v. ob. l. fläche hat. (Fig. 190.) S. 297 Z. 9 v. ob. l. Ebnen. S. 300 Z. 19 v. ob. l. IQ st. IO. S. 303 Z. 3 u. 10 v. ob. l. zusammengesetztem. S. 304 Z. 4 v. u. l. aBdDa und cFhHE. S. 305 Z. 5 v. ob. l. Ee = Aa. S. 306 Z. 2 v. ob. l. einwärts st. seitwärts. S. 309 Z. 1 v. ob. l. Ebne. S. 310 Z. 5 v. ob. l. ein Polygon. S. 312 Z. 7 u. 15 v. ob. l. GHIL st. GHIP. S. 313 Z. 8 v. ob. l. Cylinder so annimmt. S. 315 Z. 1 v. ob. l. alle st. als. S. 320 letzte Z. l. ABCDOP = $\frac{1}{2}$ ABCSKL. S. 321 Z. 3 v. ob. l. EGIFHC. S. 324 Z. 5 v. ob. l. SKLM st. RKLM. S. 324 Z. 14 v. ob. l. v, w, x st. V, W, X. S. 324 Z. 15 v. ob. l. Svwx st. SVWX. S. 324 Z. 17 v. ob. l. vwx st. VWX. S. 325 Z. 22 v. ob. l. errichteten. S. 325 Z. 25, 26, 27 v. ob. l. ein über derselben Grundfläche errichtetes Prisma, dessen Höhe ein Drittel von der Höhe der Pyramide ist. S. 326 Z. 8 v. ob. l. wie die. S. 327 Z. 17 v. ob. l. von den. S. 328 Z. 7 v. ob. l. FG^2 st. FH^2. S. 328 Z. 22 v. ob. l. des oben fehlenden Stückes. S. 329 Z. 3 v. u. l. B st. C. S. 330 Z. 2 v. ob. l. ACF st. ACE. S. 330 Z. 4 v. ob. l. gleich hohe Dreyecke. S. 336 Z. 8 v. ob. l. Cubikfuß, Cubikzoll, Cubiklinie. S. 336 Z. 6 v. u. l. er st. es. S. 340 Z. 16 v. ob. l. $= a^2 (a - b)$. S. 340 Z. 18 v. ob. l. BZ st. Bt. S. 340 Z. 1 v. u. l. unbenannte st. unbekannte. S. 343 Z. 12 v. ob. l. unbenannte st. unbekannte. S. 353 Z. 14 v. ob. l. gefällten, senkrechten. S. 353 Z. 9 v. u. l. in die halbe. S. 358 Z. 5 v. ob. l. CAE = cae. Seite 362 Z. 5 v. ob. l. ihre. S. 362 Z. 9 v. ob. l. liegenden Seitenlinien. S. 363 Z. 8 u. 9 v. ob. l. von ebnen Flächen begränzter, ähnlicher. S. 369 Z. 9 v. ob. l. der Durchschnittslinie. Seite 370 Z. 8 v. ob. l. eine Kreislinie ziehen st. einen Kreis legen. S. 370 Z. 14 v. ob. l. §. 418. S. 370 Z. 4 v. u. l. die zugleich durch jene. S. 373 Z. 12 v. ob. l. §. 418. S. 376 Z. 5 v. ob. l. so bilden die Kreislinien. S. 377 Z. 6 v. ob. l. §. 424. S. 378 Z. 17 v. ob. l. letztern. S. 380 Z. 6 v. u. l. FCP > FCO. S. 380 Z. 3 v. u. l. FCO < FCD. S. 380 Z. 1. v. u. l. BF < BD + FD. S. 382 Z. 10 v. ob. l. AF < 360°. S. 383 Z. 9 v. u. l. so sieht st. so sucht. S. 386 Z. 14 v. ob. l. gleichschenklichten. S. 386. Z. 3 v. u. l. BAD st. ABD. S. 387 Z. 12 v. ob. l. §. 582. S. 387 letzte Z. l. BAD st. BDA. S. 389 Z. 7 v. ob. l. größte. S. 389 Z. 16 v. ob. l. AE = AD. S. 389 Z. 3 v. u. l. von B in Rücksicht auf IK gilt. S. 390 Z. 18 v. ob. l. AB + KML. S. 390 Z. 5 v. u. l. + C = 6R —. S. 393 Z. 20 v. ob. l. regulären. S. 395 Z. 13 v. ob. l. Fig. 230. S. 395 Z. 6 v. u. l. BAH st. BH. S. 396 Z. 6 v. ob. l. Indem. Seite 396 Z. 17 v. ob. l. Cylinders von dieser. S. 398 Z. 1 v. ob. l. CHB st. CHD. S. 401 Z. 19 v. ob. l. §. 518. S. 403 Z. 9 v. u. l. Kugel-Abschnitts. S. 405 Z. 6 v. ob. l. des hinein gezeichneten. S. 406 Z. 10 v. ob. l. das halbe reguläre. S. 416 Z. 2 v. u. l. die Cotangenten; CM. S. 423. Z. 10 v. ob. l. Tang. ACD = Tang. BCG. S. 423 Z. 5 v. u. l. tangente $= \frac{HN}{HC}$. S. 426 Z. 8 v. ob. l. ∞ st. ꝏ. S. 432 Z. 12 v. ob. l. ACD = 36°. Seite 438 Z. 13 v. ob. l. ACD . Sin. DCB. S. 438 Z. 3 v. u. l. Cos. A Cos. B — Sin. A Sin. B. S. 442 Z. 8 v. ob. l. Sin. $\frac{1}{2}$ A $= \sqrt{\frac{1 - \text{Cos. A}}{2}}$. Seite 453 Zeile 15 von oben lies

$\frac{\text{Tang. EAF}}{\text{Tang. AED}} = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2}(A - C)}{\text{Tang.} \frac{1}{2}(A + C)}$. S. 460 Z. 4 v. ob. muß der Bruch $\frac{1}{4}$ ausgestrichen werden. Seite 463 Z. 10 v. u. l. $15\frac{10}{31}$ st. $15\frac{10}{32}$.

Einige hier nicht bemerkte Buchstaben-Fehler wird jeder nach den im Buche sonst überall beobachteten grammatischen und orthographischen Regeln leicht selbst verbessern können.


Fig. 3
10
19
34