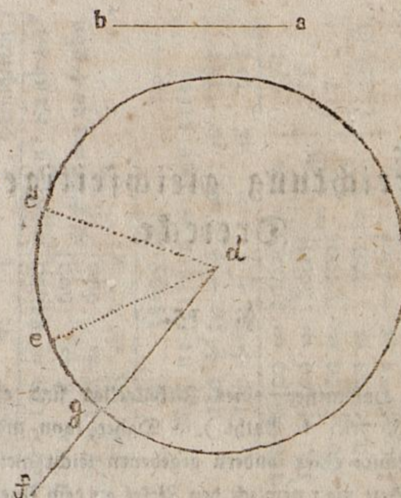
Errichtung gleichseitiger Dreiecke.

§. 15.

Alle Halbmesser eines Zirkelkreises sind einander gleich (§. 76. I. Abthl.). Daher kann man eine gerade Linie einer andern gegebenen leicht gleich machen. Sezt man nemlich den Zirkel an dem einen Ende a der gegebenen Linie a b ein, und thut ihn bis an das andere Ende b der Linie auf; oder mit andern Worten, nimmt man die Linie mit dem Zirkel auf, und zieht eine Kreislinie, oder auch nur einen Kreisbogen: so ist jede Linie vom Mittelpunkte aus, zur Peripherie gezogen; z. B. die Linien d c, d e als Radius oder Halbmesser der gegebenen Linie gleich.



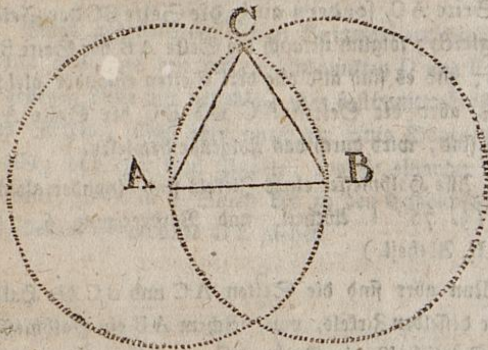
Von einer geraden Linie kann man auch einen gewissen Theil abschneiden, der einer gegebenen Linie gleich ist, wenn man den Zirkel nach der kleinern Linie aufthut, ihn an dem einen Ende der größern Linie einsezt und nun einen Zirkelbogen durch die Linie zieht. Z. B. der Theil dg von der Linie df ist der Linie ab gleich.

Aufgabe.

Wie errichtet man ein gleichseitiges Dreieck?

Auf einer gegebenen geraden Linie wird ein gleichseitiges Dreieck errichtet, wenn man diese Linie, z. B. AB, mit dem Zirkel aufnimmt, oder denselben so weit aufthut, als die Linie lang ist; darauf den Zirkel mit der-

derselben Eröffnung auf beiden Endpunkten der Linie in A und B einsezt, Kreislinien beschreibt, und endlich von den beiden Endpunkten der Linie bis zum Punkte C, wo sich beide Kreise durchschneiden, Linien zieht: so hat man das gleichseitige Dreieck ABC.



Beweis.

Daß das Dreieck ABC gleichseitig sei, oder daß die Seiten AC und BC gleich sind AB; (wobei man in der Folge auf die Entwickelung und Zusammensetzung der Begriffe, die von der Definition oder Erklärung des gleichseitigen Dreiecks ausgeht, Acht haben muß).

1) Jedes Dreieck, dessen drei Seiten einander gleich sind, ist ein gleichseitiges (§. 7.)

Nun aber sind an dem gegebenen Dreiecke ABC alle drei Seiten einander gleich; folglich ist das Dreieck ABC ein gleichseitiges. (Daß alle drei Seiten

ten in dem gegebenen Dreiecke ABC einander gleich sind, erhellet aus Folgendem:)

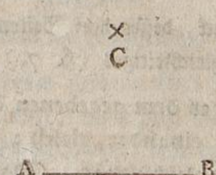
2) Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind einander selber gleich. (§. 63. I. Abth.)

Nun aber ist in dem Dreiecke ABC nicht nur die Seite AC, sondern auch die Seite BC der Seite AB gleich; folglich ist auch die Seite AB der Seite BC gleich; und es sind also alle drei Seiten einander gleich. (Daß aber die Seiten AC und BC der Seite AB gleich sind, wird durch das Folgende bewiesen.)

3) Alle Halbmesser eines Zirkels sind einander gleich. (§. 76. I. Abtheil. und Vorbereitung §. 15. II. Abtheil.)

Nun aber sind die Seiten AC und BC die Halbmesser desselben Zirkels, von welchem AB ein Halbmesser ist. Folglich ist die Seite AC = AB und die Seite BC = AB und also alle drei Seiten einander gleich.

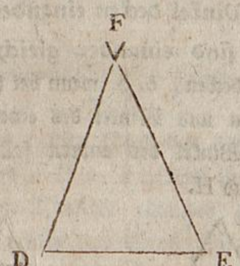
Anmerkung. Bei der Errichtung eines Dreiecks hat man nicht nöthig, die Kreisbogen auszuziehen; es ist schon genug, wenn man mit dem Halbmesser AB den Zirkel in die beiden Punkte A und B einsezt und Bogenschnitte macht, die einander in dem Punkte C durchkreuzen.



§. 16.

Aufgabe.

Einen gleichschenklichen Triangel errichtet man, wenn man aus den beiden Endpunkten D und E einer gegebenen Linie mit beliebiger oder bestimmter Eröffnung des Zirkels, über oder unter der Linie Bogenschnitte macht, und aus dem Punkte, wo sie einander durchkreuzen, z. B. in F Linien bis zu den Endpunkten der gegebenen Grundlinie DE ziehet.



Beweis.

1) Jedes Dreieck, das zwei gleiche Seiten hat, ist ein gleichschenkliches. (§ 7. II. Abthl.)

Nun sind in dem Dreiecke DEF zwei Seiten, DF und EF einander gleich; folglich ist das Dreieck DEF ein gleichschenkliches.

2)

2) Alle Halbmesser eines Zirkels sind einander gleich. (§. 76. I. Abthl. und §. 15. II. Abth.)

Die Seiten DF und FE sind Halbmesser eines Zirkels; denn sie sind mit einerlei Eröffnung des Zirkels gemacht; folglich sind sie einander gleich; und darum ist das Dreieck DEF ein gleichschenkliches.

§. 17.

Gleiche lange gerade Linien decken einander, oder sind einander gleich. (§. 59. I. Abthl.)

Gleiche Winkel decken einander. (§. 51. I.)

Dreiecke sind einander gleich, wenn sie sich wechselsweise decken, d. h. wenn bei dem Aufeinanderlegen, Seiten und Winkel des einen, genau in die Seiten und Winkel des andern fallen; wie bei den Dreiecken G und H.

Lehrsätze.

Zwei Dreiecke sind einander gleich oder dekken einander:

1) Wenn in beiden zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind, oder:

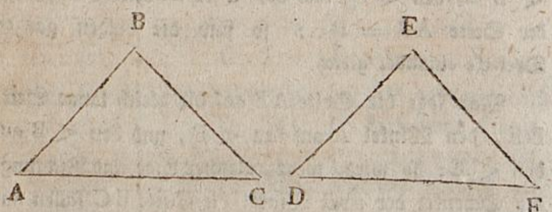
2)

2) Wenn in jedem zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite einander gleich sind; oder auch:

3) Wenn in beiden Dreiecken alle drei Seiten einander gleich sind.

Anmerkung. Einem gegebenen Dreiecke, ein anders völlig gleich zu machen, in Winkeln und Seiten: bedient man sich des Lineals, Zirkels und des Transporteurs.

Beweis von 1).



Wenn in den beiden Dreiecken ABC und DEF, AB = DE und BC = EF auch der < B = E; so sind die beiden Dreiecke einander gleich. Denn: legte man diese Linien und Winkel auf einander, nemlich AB auf DE, BC auf EF und B auf E: so würde der Punkt A auf den Punkt D und der Punkt C auf den Punkt F zu liegen kommen; weil die Gleichheit der Winkel B und E eine gleiche Richtung und Lage ihrer Schenkel verursacht; folglich würde der Punkt A von dem Punkte C eben so weit entfernt liegen, als der Punkt D vom Punkte F oder die beiden Linien AC und DF als das Maaß der Entfernung jener Punkte

(§. 34. I. Abtheil.) müssen einander völlig gleich seyn.

Diesem zu Folge muß auch die Linie AC die Linie DF decken.

Eben so die Winkel zu ihren beiden Seiten: nemlich der < A den < D und der < C den < F.

Beweis von 2).

Wenn in beiden Dreiecken ABC und DEF der < B = den < E, und der < A = den < D, auch die Seite AB = DE: so sind die beiden ganzen Dreiecke einander gleich.

Man lege die Seite AB auf die gleich lange Seite DE, den Winkel A auf den < D, und den < B auf den < E: so wird, wegen gleicher Lage und Richtung, der Schenkel der zwei Winkel die Seite BC fallen auf EF, die Seite AC auf die Seite DF, und zugleich der < C auf den Winkel F, der zwischen jenen beiden Seiten liegt.

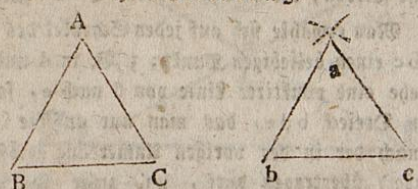
Da nun in beiden Dreiecken alle Seiten und Winkel einander decken: so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich.

Beweis von 3).

Wenn in den beiden Dreiecken ABC und DEF die Seite AB = DE, die Seite AC = DF, und die Seite BC = der Seite EF; so sind die ganzen Dreiecke einander gleich. Man lege AB auf DE, AC auf

auf DF, und BC auf EF: so fallen die Seiten nicht nur genau auf einander, sondern auch ihre Endpunkte und die zwischen ihnen liegenden Winkel, nämlich < H auf den < D; der < B auf den < E u. s. w.; folglich decken auch alle Seiten und Winkel einander, und die ganzen Dreiecke sind einander gleich.

1) Anmerkung.

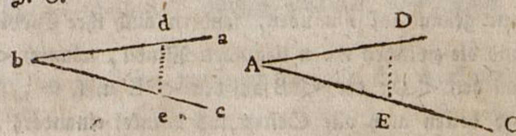


Einem vorgezeichnetem Dreiecke ABC ein anderes gleich zu machen, und zwar blos mit Zirkel und Lineal, zeichne man die Linie bc = BC; nun nehme man die Seite BA mit dem Zirkel aus dem Punkte B auf, und beschreibe über der Linie bc aus dem Punkte b einen Bogenschnitt; eben so nehme man die Seite CA aus dem Punkte C auf, und beschreibe mit dieser Eröffnung des Zirkels aus dem Punkte c einen Bogenschnitt, welcher den erstern im Punkte a durchkreuzt; nun ziehe man die geraden Linien ba und ca: so bekömmt man ein neues Dreieck abc, in welchem alle drei Seiten = den Seiten des Dreiecks ABC, und welches also dem Dreieck ABC selber gleich ist.

2) Anmerkung.

Einen gegebenen Winkel abzunehmen oder nachzuzeichnen mit Zirkel und Lineal:

z. B.



Auf der Linie AC soll an den Punkt A ein $<$ gesetzt werden, der dem gegebenen $<$ abc gleich ist.

Man erwähle sich auf jeden Schenkel des Winkels abc einen beliebigen Punkt; z. B. in d und e, und ziehe eine punktirte Linie von d nach e, so entsteht ein Dreieck bde, das man nur auf die Linie AC (nach der in der vorigen Anmerkung gelößten Aufgabe) übertragen darf, und zwar so: daß AE = be; AD = bd, und DE = de; so ist der $<$ A so groß als der $<$ b.

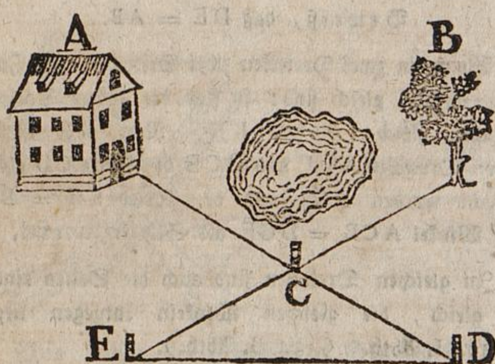
Die Lehrsätze dieses Paragraphs geben Auflößungen für folgende:

Praktische Aufgaben.

Die Weite zweier Oerter zu finden, welche man geradezu nicht messen kann.

Erster Fall.

Wenn man zwar nicht von einem Gegenstande zum andern, aber doch zu beiden von der Seite ohne Hinderniß kommen kann.



Wie weit ist das Haus A vom Baume B entfernt, zwischen denen ein Teich, Morast, oder Berg und dergl. liegt.

Man wähle in einiger Entfernung davon, ohngefähr in der Mitte zwischen beiden, einen Standpunkt; z. B. in C.

Nun messe man von C nach A, und trage diese Weite in gerader Linie zurück bis nach D, so, daß der Punkt oder Stab C, dem Auge gerade vor dem Punkte A lieget, und stecke in D einen Stab.

Eben so messe man von C nach B, und trage die gefundene Länge dieser Linie ebenfalls in gerader Linie so weit zurück, bis nach E, und stecke daselbst auch einen Stab.

Darauf messe man von D nach E; so giebt diese Länge die Entfernung des Hauses A von dem Baume B an.

Beweiß, daß DE = AB.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischen-Winkel gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. I.). Nun aber ist in beiden Dreiecken ACB und DCE die Seite CD gleich gemacht worden AC, und die Seite EC = BC. Der Winkel ACB = DCE als Scheitelwinkel.

In gleichen Dreiecken sind auch die Seiten einander gleich, die gleichen Winkeln entgegen liegen (§. 17. I. Abth. §. 34. I. Abth.).

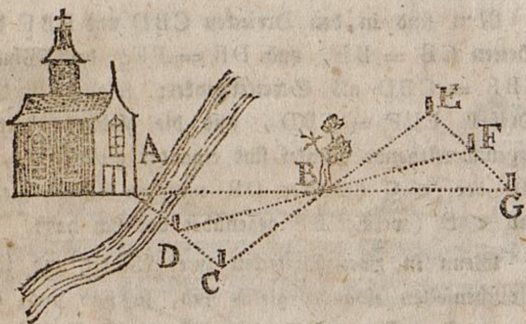
Nun aber sind die Dreiecke DCB und ACB einander gleich; folglich ist die Seite DE = AB; weil sie beide den gleichen Winkeln ACB und DCE gegenüber liegen.

Die Seite AB ist die gegebene Entfernung, die gemessen werden soll; also ist es auch gleichviel, wenn ich die Linie DE messe, weil diese der Linie AB gleich ist.

Zweiter Fall.

Wenn man nur zu den einem Gegenstande kommen kann, z. B. nur zum Baume B, aber nicht zum Hause A, weil sich ein Fluß zwischen beiden befindet.

Man



Man wähle einen beliebigen Standpunkt in C und stecke einen Stab ein; darauf gehe man nach A zu, so nahe als man kommen kann, und stecke den Stab D dergestalt ein, daß er mit A und C in gerader Linie steht.

Nun messe man von C nach dem Baume B, und trage dieselbe Entfernung gerade fort bis nach E.

Eben so messe man von D nach B, und trage dasselbe Maaß fort, bis nach F.

Endlich stecke man den Stab G dergestalt ein, daß er nicht nur mit E und F, sondern auch mit A und B in gerader Linie steht. Darauf messe man von G nach B: so findet man die Entfernung des Hauses A von dem Baume B.

Beweiß, daß GB = AB.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

 Nun

Nun sind in den Dreiecken CBD und EBF die Seiten CB = BE, und DB = BF; der Winkel EBF = CBD als Scheitelwinkel; folglich ist das Dreieck EBF = CBD, und die gleichen Seiten gegenüberstehende Winkel sind einander gleich. Es ist also der < C (welcher DB entgegen steht,) gleich den < E (welcher BF gegenüber vor sich hat).

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseiten einander gleich sind, so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. II Abth.).

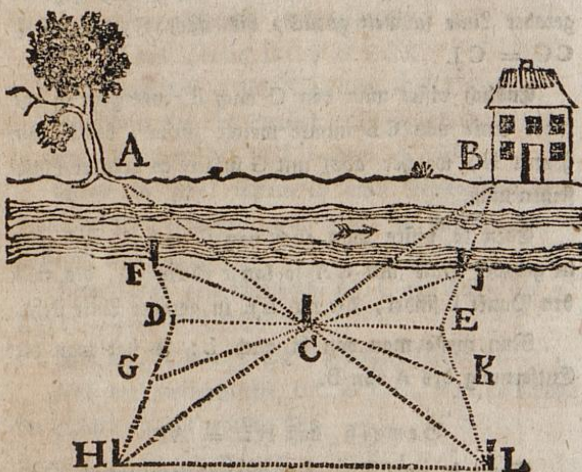
Nun ist in den Dreiecken ACB und BEG der Winkel C = E, und der < ABC = EBG, als Scheitelwinkel. Auch die Zwischenseite CB = BE; folglich ist das Dreieck BEG = ACB. In gleichen Dreiecken sind auch die gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleich. Da nun C = E, und die Seite AB dem Winkel C, und die Seite BG dem Winkel E gegenübersteht: so ist in den Dreiecken BEG und ACB die Seite GB = AB.

AB ist die Entfernung, welche gemessen werden soll; da nun BG ihr gleich ist: so ist es eben so gut, wenn BG gemessen wird.

Dritter Fall.

Wenn man zu beiden Gegenständen nicht kommen kann, wie mißt man da deren Entfernung?

Soll



Soll man messen, wie weit A von B entfernt sey, zu welchen beyden man nicht kommen kann: so sucht man einen Standpunkt in C, und stecke darauf noch zwei Stäbe in die Punkte D und E in gerader Linie mit C, doch so, daß CD = CE.

Darauf stecke man den Stab F so nahe als möglich nach A zu, aber so, daß er mit D und A in gleicher Linie steh.; eben so den Stab J in gleicher Linie mit E und B.

Hierauf messe man von F nach C und gehe eben so weit in gerader Linie zurück, bis nach K, so daß CK = CF.

Eben also messe man von C nach J, und gehe in gerader Linie so weit zurück, bis nach G, so, daß CG = CJ.

Endlich visirt man von C nach B, und geht in gerader Linie von CB immer weiter zurück, bis in den Punkt H, welcher auch mit G und D in gerader Linie stehen muß.

Eben so visire man auch von C nach A, und gehe in gerader Linie mit CA so lange rückwärts, bis man den Punkt L findet, der mit EK in gerader Linie steht.

Nun messe man von H nach L: so hat man die Entfernung des A von B.

Beweiß, daß HL = AB.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Nun ist in den Dreiecken DCF und ECK die Seite DC = EC und CF = CK gemacht worden.

Der Winkel DCF = dem < ECK, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck DCF = ECK.

Eben so ist in den Dreiecken ECJ und DCG die Seite EC = DC und CJ = CG.

Der Winkel ECJ = dem < DCG, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck ECJ = DCG.

In

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Seiten gegenüberstehender Winkel einander gleich.

Nun ist das Dreieck DCF = ECK.

Folglich ist der < FDC = dem < KEC.

Eben also war das Dreieck ECJ = DCG.

Folglich ist der < JEC = dem < GDC.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseiten einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich

Nun ist in den Dreiecken ADC und LEC der < ADC = dem < LEC.

Der < ACD = LCE, als Vertikalwinkel.

Und die Zwischenseite DC = CE, weil sie einander gleich gemacht worden sind.

Folglich ist das Dreieck ADC = LEC.

Ingleichen in den Dreiecken BEC und HDC ist der < BEC = HDC und der < BCE = dem < HCD, als Scheitelwinkel.

Und die Zwischenseite EC = CD.

Folglich ist das Dreieck BEC = HDC.

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Winkeln entgegenliegenden Seiten einander gleich.

Nun sind aber die Dreiecke ADC und LEC einander gleich:

Folglich ist die Seite AC = CL.

Eben so war das Dreieck BEC = HDC.

Folglich ist die Seite BC = HC.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Nun ist in dem Dreiecke ACB und LCH die Seite AC = CL, die Seite BC = CH und der Winkel ACB = LCH, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck ACB = LCH.

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Nun ist das Dreieck ACB = LCH.

Folglich ist die Seite HL = AB.

Da ich also die Seite AB nicht messen kann; so ist es eben so gut, wenn HL gemessen wird.

Anmerkung. Die Ausführung dieser jezt eben beschriebenen Messungen, erfordert ebene und durch nichts behinderte Plätze, um die Dreiecke abstecken zu können; und in dem Abstecken selbst die strengste Genauigkeit, wenn die Messung zuverlässig werden soll. Sie ist daher in vielen Fällen nicht anwendbar, und für solche Fälle werden in der Folge leichtere und sichere Meßarten vorkommen.

Aus den Lehrsätzen dieses Paragraphs lassen sich noch diese Folgerungen ziehen:

Wer ein Dreieck von bestimmter Größe errichten soll, dem müssen gegeben seyn: entweder

Zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel;

oder:

Zwei Winkel und ihre Zwischenseite;

oder:

Alle drei Seiten.

Zu diesem Dreiecke sind gegeben die Seite a b und a c nebst dem Winkel a, der sie beide verbindet.

a ———————— b

a ———————————————————— c

$\angle a = 90^\circ$.

Man zeichne die eine von den gegebenen Seiten a b oder a c, und setze die andere in den verlangten Winkel von 90° daran; dann ziehe man von dem Endpunkte der einen Linie bis zum Endpunkte der andern, eine gerade Linie, so ist das Dreieck fertig.

Zu dem Dreiecke d e f wird gegeben die Linie d e und die beiden Winkel d und e zu deren beiden Seiten.

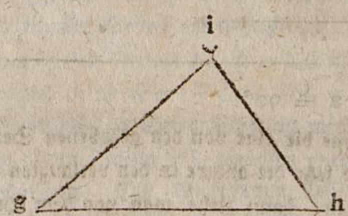
d ———————————————————— e.

$\angle d = 45^\circ$.

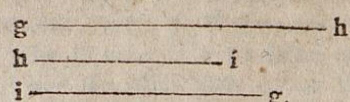
$\angle e = 45^\circ$.

Man

Man zeichne erstlich die gegebene Linie, dann setze man auf beiden Endpunkten derselben, die gegebenen Winkel an, deren Richtung durch Punkte angezeigt wird; nach dieser Richtung ziehe man von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie, die beiden andern Seiten bis dahin, wo sie zusammentreffen, und wo diese Linien oder Seiten einander berühren, da schließt sich das Dreieck.



Wenn zu dem Dreiecke g h i gegeben werden die Seiten g h, h i und i g.

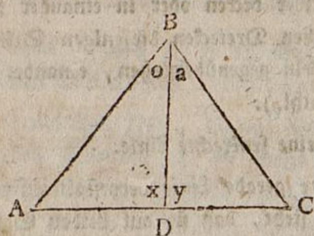


So zeichne man erstlich die Linie g h; dann fasse man mit dem Zirkel die Linie g i, setze ihn in g ein, und ziehe einen Bogenschnitt mit dem andern Schenkel; eben so fasse man auch die Linie h i setze den Zirkel in h ein und durchschneide den ersten Bogenschnitt. Darauf ziehe man von beiden Endpunkten der Linie g h Linien nach dem Punkte i, wo beide Bogenschnitte sich durchkreuzen, so ist das Dreieck fertig.

§. 18.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks, auf dessen Grundlinie also herabfällt, daß der Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile zerschnitten wird, theilt auch zugleich die Grundlinie und das ganze Dreieck in zwei gleiche Theile, und die Theilungslinie steht senkrecht auf der Grundlinie.



Hier ist zu beweisen:

1) Daß das Dreieck ABD = CBD.

Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn an denselben zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind (§. 17. I. Abth.).

Nun sind in den beiden Dreiecken ABD und CBD zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich; nemlich die Seite AB = BC, als die Seiten eines gleichschenklichen Dreiecks, und die Seite BD, als eine gemeinschaftliche, für beide Dreiecke;

auch

auch der $< o = a$ nach der Voraussetzung: darum beide Dreiecke, die durch diese Theilung entstanden sind, einander gleich; so ist auch das gleichschenkliche Dreieck ABC durch die Linie BD in zwei gleiche Theile getheilt worden.

2) Daß die Grundlinie in zwei gleiche Theile getheilt ist, oder $AD = DC$.

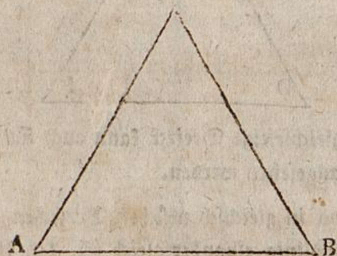
Sind die beiden Dreiecke ABD und CBD einander gleich, so ist auch die Seite $AD = DC$ (§. 59. I. Abth. §. 17. II. Abth.), weil sie bei dem Aufeinanderlegen der Dreiecke einander decken oder in einander fallen; oder weil in gleichen Dreiecken diejenigen Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, einander gleich sind (§. 17. I. Abthl.).

3) BD ist eine senkrechte Linie.

Wenn eine gerade Linie dergestalt auf einer andern geraden Linie steht, daß sie auf beiden Seiten gleiche Winkel hat; so ist diese Linie eine senkrechte (§. 53. I. Ab.). Nun sind aber die Winkel x und y, welche die Linie BD macht, einander gleich; weil sie gleichen Seiten gegenüber stehen (§. 17. II. Abth.); folglich ist die Linie BD eine senkrechte Linie.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist sehr fruchtbar, weil sich vieles in dem Folgenden darauf gründet.

§. 19.



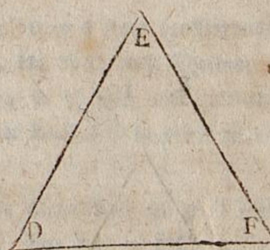
Die Winkel A und B an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks sind einander gleich.

Die Perpendikular-Linie, die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf die Basis herabgelassen wird, macht zwei gleiche Dreiecke (§. 18. II. Abthl.). Nun sind aber A und C Winkel, die einander decken (§. 17. II. Abthl.); folglich sind die Winkel an der Grundlinie in gleichschenklichen Dreiecken einander gleich.

§. 20.

Jedes gleichseitige Dreieck hat auch gleiche Winkel.

Jedes



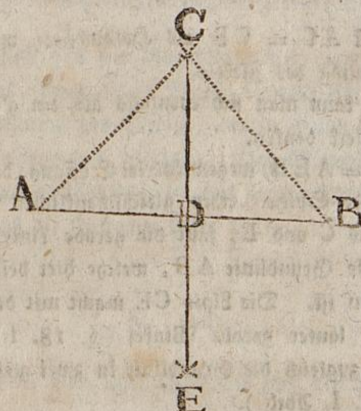
Jedes gleichseitige Dreieck kann auch für ein gleichschenkliches angesehen werden.

Nun sind in gleichschenklichen Dreiecken die Winkel an der Grundlinie einander gleich (§. 19. II. Abthl.); folglich sind auch in dem gleichseitigen Dreiecke DFE die Winkel D und F an der Grundlinie einander gleich.

Da aber in gleichseitigen Dreiecken eine Seite ist wie die andere, so kann auch jede andere Seite, EF oder ED, für die Grundlinie angenommen werden, und die Winkel des Dreiecks müssen einander gleich seyn; da sie alle an der Grundlinie stehen können.

§. 21.

Wie theilt man eine gerade Linie in zwei gleiche Theile?



Die gerade Linie, welche getheilt werden soll, sey AB.

Man setze den Zirkel mit einer Eröffnung, die größer ist, als die Hälfte der Linie AB, in dem Endpunkte A von der Linie AB ein, und mache über und unter der Linie einen Bogenschnitt.

Darauf setze man mit derselben Eröffnung den Zirkel auch in dem andern Endpunkte B der Linie AB ein, und durchschneide jene Bogenschnitte über und unter der Linie. Durch die Punkte C und E, die einander im Durchschneiden berühren, ziehe man eine gerade Linie, nämlich von C bis E.

Diese gerade Linie CE schneidet die gegebene Linie in zwei gleiche Theile.

Beweis:

Man ziehe noch die punktirten Hülfslinien AC und CB: so ist ACB ein gleichschenkliches Dreieck;

denn es ist AC = CB als Halbmesser, wegen gleicher Eröffnung des Zirkels.

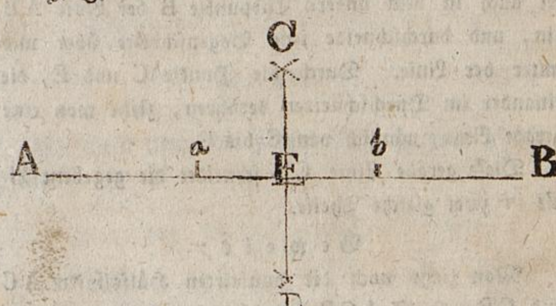
AEB kann man sich ebenfalls als ein gleichschenkliches Dreieck denken.

ACB = AEB, wegen einerlei Eröffnung des Zirkels.

Aus der Spitze beider gleichschenklicher Dreiecke, nämlich aus C und E, fällt die gerade Linie CD und ED auf die Grundlinie AB, welche hier beiden Dreiecken gemein ist. Die Linie CE macht mit der Grundlinie AB lauter gerade Winkel (§. 18. I. Abth), und theilt zugleich die Grundlinie in zwei gleiche Theile (§. 18. I. Abth.).

Nun ist die Grundlinie AB die gegebene Linie, welche getheilt werden soll; folglich ist sie durch die Linie CE in dem Punkte D in zwei gleiche Theile zerschnitten worden.

Anmerkung. Ist die Grundlinie, welche in zwei Theile getheilt werden soll, sehr lang, so kann man an beiden Enden derselben beliebige Theile abnehmen. Z. B.

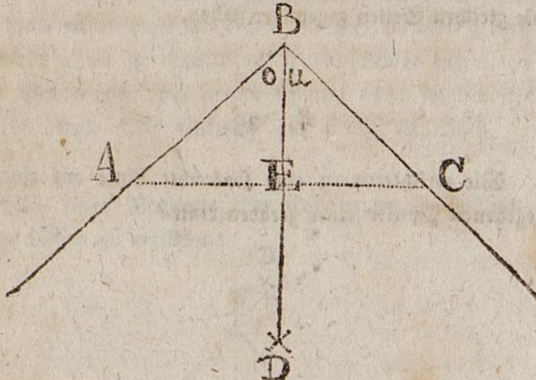


Hier

Hier sind von der Grundlinie AB, von den Endpunkten aus, zwei gleiche Theile Aa und Bb durch einerlei Eröffnung des Zirkels, der in A und B eingesezt wurde, abgenommen worden. Das Mittelstük ab ist hernach, wie gewöhnlich, in zwei gleiche Theile getheilt worden durch die senkrechte Linie CD.

§. 22.

Wie theilt man einen Winkel in zwei gleiche Theile?



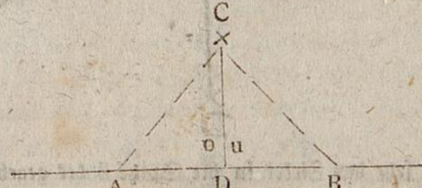
Man setze den Zirkel in die Spitze B des gegebenen Winkels ABC mit beliebiger Eröffnung, und mache beide Schenkel in den Punkten A und C durch Bogenschnitte einander gleich. In die Punkte, wo die Schenkel durchschnitten sind, setze man den Zirkel ein und mache mit gleicher Eröffnung Bogenschnitte im Punkte D der Spitze des Winkels B gegen über, die einander in D durchkreuzen.

Aus dem Durchkreuzungspunkte ziehe man nun eine feine gerade Linie nach der Spitze des Winkels; und diese Linie schneidet den gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile.

Man denke sich in dem Winkel ABC eine gerade Linie von A bis C; so hat man ein gleichschenkliches Dreieck, das nach §. 18 in zwei gleiche Theile getheilt worden ist; folglich ist der Winkel o = u, weil in zwei gleichen Dreiecken diejenigen Winkel einander gleich sind, die gleichen Seiten gegenüber stehen.

§. 23.

Wie errichtet man eine senkrechte Linie auf einem gegebenen Punkte einer geraden Linie?



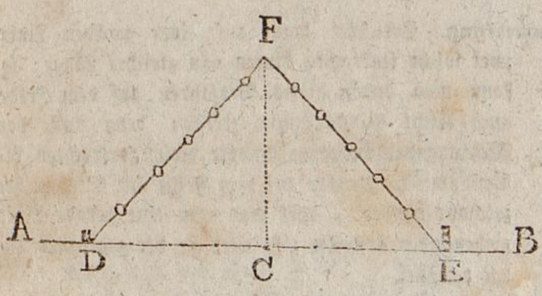
Man setze den Zirkel mit beliebiger Eröffnung in dem gegebenen Punkte D ein, und mache von beiden Seiten der Linie in A und B Bogenschnitte. In die Punkte A and B setze man ferner den Zirkel und mache mit beliebiger Eröffnung desselben über der Linie durchkreuzte Bogenschnitte in C. Aus C ziehe man eine gerade Linie nach dem gegebenen Puncte D, und diese Linie steht senkrecht auf A B.

Die beiden Dreiecke A C D und B C D sind einander gleich; denn A D ist B D gleich gemacht worden, und A C = B C: durch gleiche Eröffnung des Zirkels, und C D ist beiden gemein. (§. 17.)

Folglich ist auch der Winkel o = u; weil sie in gleichen Dreiecken gleichen Seiten gegenüber stehen.

Da nun diese beiden gleichen Winkel auf einer geraden Linie neben einander stehen, so sind sie auch gerade Winkel: denn sie machen als Nebenwinkel zusammen 180 Grade oder zwei gerade Winkel aus; folglich stehet die Linie C D senkrecht auf A B. (I. Abth. §. 53.).

Mit einer Meßkette oder Schnur im Felde senkrechte Linien zu errichten:



 Die

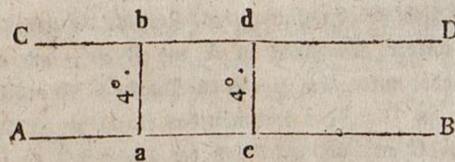
Die Linie sey AB, sollte man aus dem Punkte C eine senkrechte Linie errichten; so messe man aus dem Punkte C, zu beiden Seiten rechts und links auf der Linie AB eben so viel beliebige Ruthen oder Schuhe, bis D als wie bis E, und bezeichne diese Punkte mit Pfählen oder Stäben.

An den Punkt D dieser Linie halte man den Anfangspunkt der Meßkette, und an den Punkt E den Endpunkt derselben.

Hierauf faßt man den Mittelpunkt der Kette; welcher leicht durch das Abzählen der daran bezeichneten Ruthen zu finden ist, geht überwärts der Linie AB, z. B. bis in den Punkt F, wo die Schnur straff angezogen, den Punkt angiebt, aus welchem auf C eine senkrechte Linie durch Absteckestäbe u. s. f. errichtet werden kann.

Man wird leicht einsehen, daß auch die Hälfte der Schnur an die Punkte D und E gehalten, zu dieser Operation schon hinlänglich ist.

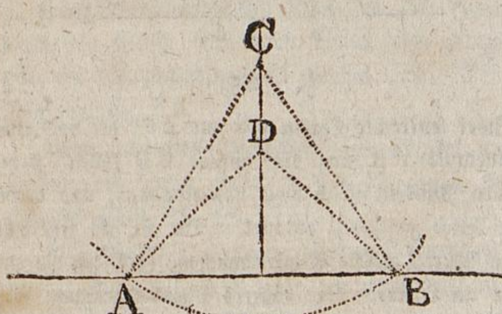
Anmerkung. Errichtet man auf einer geraden Linie zwei solche senkrechte Linien von gleicher Länge: so kann man durch dieses Verfahren auf dem Felde auch leicht Parallellinien ziehen; denn nach der Richtung der äußersten Punkte dieser senkrechten Linien (welche Punkte auf dem Felde mit Stäben bezeichnet werden), darf man nur eine gerade Linie ziehen oder abstecken; so wird sie der gegebenen Linie parallel.



Z. B. Es sei die gerade Linie AB, mit welcher in einer Entfernung von 4° eine Parallellinie gezogen werden soll; so errichte man die senkrechten Linien ab und cd auf der Linie AB jede = 4°; so ist ab parallel cd und CD parallel AB.

§. 24.

Wie errichtet man eine senkrechte Linie auf einer geraden Linie, und zwar aus einem Punkte, der außer der Linie gegeben ist?



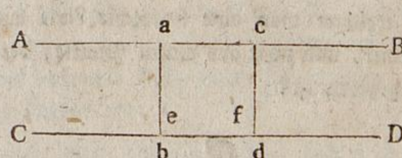
Man setze den Zirkel in dem gegebenen Punkte C, und mache auf der Linie in A und B Durchschnitte

 mit

mit beliebiger Eröffnung des Zirkels. Hierauf setze man wieder den Zirkel in A und B ein, und mache über oder unter dem gegebenen Punkte C Kreuzschnitte z. B. in D. Nun legt man das Lineal an die Punkte D und C an, und zieht nach der Linie AB zu. Alsdann steht die Linie AD senkrecht auf AB.

Beweis.

Hier ist gleichfalls ein gleichschenkliches Dreieck ADB oder ACB denkbar, durch deren beide Spitzen die Linie CD auf ihre gemeinschaftliche Grundlinie fällt, den Winkel der Spitze und die Grundlinie gleich theilt, auch auf der Grundlinie gleiche Winkel macht (§. 18); folglich ist die Linie senkrecht.



§. 25.

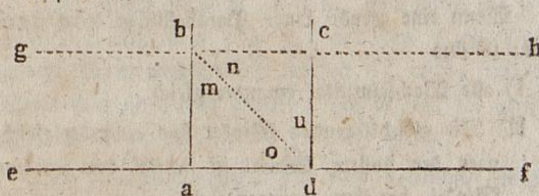
Zwei senkrechte Linien ab und cd, die von einer Parallellinie AB auf die andere CD fallen, stehen in allen Punkten gleich weit von einander, und laufen daher selbst einander parallel. Da sie als senkrechte Linien überall gleiche Winkel machen: so bilden sie entweder ein Quadrat oder anderes Parallelogramm; folglich sind auch die einander gegenüber stehenden Seiten, welche durch die Parallellinien abgeschnitten werden, einander gleich.

Ste-

Stehen die Linien a b und c d auf der Linie C D senkrecht: so muß sowohl der $<$ e, als der Winkel f gleich einem geraden Winkel seyn (§. 52 I. Abth.).

Folglich e + f = 2 geraden Winkeln = 180°. Sind aber die $<$ e + f = 180°: so müssen auch die Linien a b und c d Parallellinien seyn (§. 2. II.)

Wenn also zwei senkrechte Linien (a b und c d) auf einer geraden Linien (e f) stehen: so sind sie einander parallel.



Zur Erleichterung des Beweises ziehe man oben durch die beiden senkrechten Linien eine gerade Linie g h, die der Grundlinie e f parallel läuft. Ferner die Diagonallinie b d.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseite gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. II.).

Nun sind in den beiden Dreiecken b a d und d c b der $<$ m = u und n = o als Wechselwinkel, und die Zwischenseite ist beiden gemein; folglich sind die ganzen Dreiecke einander gleich oder b a d = d c b.

In gleichen Dreiecken sind auch die einander gegenüber stehenden Seiten einander gleich; folglich ist in den beiden gleichen Dreiecken bad und dcb die Seite bc = ad.

Parallellinien stehen überall gleich weit von einander. Nun sind aber die beiden Distanzen bc und ad zwischen den beiden senkrechten Linien ab und cd einander gleich; folglich sind die senkrechten Linien ab und cd parallel.

§. 26.

Wenn eine gerade Linie Parallellinien durchschneidet: so sind

I) alle Wechselwinkel einander gleich.

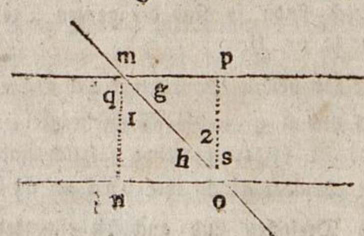
II) Die gleichliegenden Winkel sind einander gleich, oder der äußere Winkel ist gleich dem inneren Winkel, der ihm entgegen steht.

III) Die innern Winkel sind zusammen zwei geraden Winkeln gleich.

I.

Um zu beweisen, daß

$$g = h \text{ und } 1 = 2$$



Man

Man ziehe zwei Hülfslinien, nämlich aus den Punkten, wo die Queerlinie die Parallellinien durchschneidet, die senkrechten Linien m n und o p.

Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten einander gleich: so sind die Dreiecke einander selber gleich (§. 17.)

Nun aber sind die Seiten des Dreiecks m p o gleich den Seiten des andern Dreiecks, als Distanzen zweier Parallellinien.

Die Seite m p ist = n o, weil durch die senkrechten Linien m n und p o von den Parallellinien gleiche Theile abgeschnitten werden (§. 25), und die Seite m o ist beiden gemein; folglich sind die ganzen Dreiecke m p o und m n o einander gleich.

In gleichen Dreiecken sind auch diejenigen Winkel einander gleich, welche gleichen Seiten gegenüber stehen und bei dem Aufeinanderlegen in oder auf einander fallen.

Nun fällt aber (wenn man das eine Dreieck herumkehrt, und das eine auf das andere legt) die Seite m p auf die Seite n o, und die Seite p o auf die Seite m n und eben darum auch die Winkel g und h, 1 und 2 auf einander. Und weil diese wegen der Gleichheit der Seiten einander decken, so ist g = h und 1 = 2.

Nun sind aber g und h Wechselwinkel; foglich ist der Wechselwinkel g gleich dem Wechselwinkel h. Und fügt man zu den gleichen Winkeln 1 und 2 die beiden

den geraden Winkel q und s hinzu, so sind auch die Wechselwinkel $1 + q = 2 + s$.

Denn $1 = 2$ (Siehe oben)

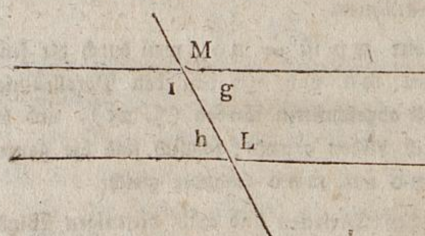
$q = s$ (als gerade Winkel)

$1 + q = 2 + s$.

Gleiches zu gleichem addirt ꝛc.

II.

Beweis, daß $M = L$.



Alle Scheitelwinkel sind einander gleich (II. Abth. §. 92); folglich $M = 1$ (weil sie Scheitelwinkel sind). Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, die sind einander selber gleich (I. §. 62.)

Nun ist $M = 1$ (als Scheitewinkel)

und $L = 1$ (als Wechselwinkel.)

Folglich ist auch der äußere Winkel M gleich dem gleichliegenden innern $< L$;

oder $M = L$

III.

Beweis

daß $G + L =$ zwei geraden Winkeln, oder 180°.

Alle

Alle Nebenwinkel sind in Summa zwei geraden Winkeln gleich (I. Abth. §. 87.); folglich ist auch der $<$ h + L = zwei geraden Winkeln = 180°.

Gleiches kann für gleiches gesezt (substituirt) oder mit gleichem verwechselt werden (I. §. 61.).

Nun ist G = H (als Wechselwinkel).

Folglich ist G + L = h + L.

Nun ist aber h + L = zwei geraden Winkeln.

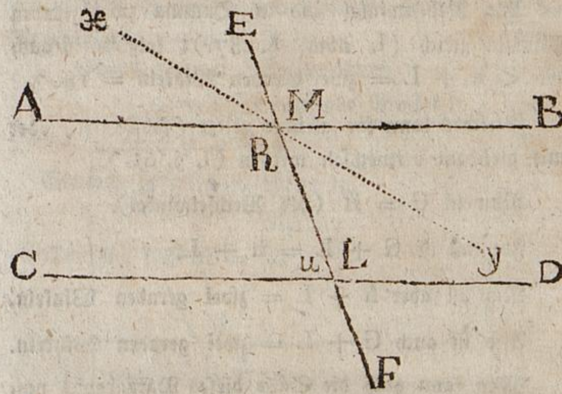
Also ist auch G + L = zwei geraden Winkeln.

Man kann auch die Sätze dieses Paragraphs umkehren und behaupten: wenn zwei gerade Linien, z. B. AB und CD, die von einer dritten durchschnitten werden, eine solche Lage gegeneinander haben, daß:

1) die Wechselwinkel o und u einander gleich sind; auch

2) der gleichliegende äußere Winkel M gleich ist dem innern Winkel L und

3) die beiden innern Winkel o und L zusammen 180 Grad haben: so laufen diese beiden Linien AB und CD einander parallel.



Wollte man nicht zugeben, daß (bei allen obigen Voraussetzungen) die Linie AB der Linie CD parallel liefe: so müßte doch irgend eine andere, es sey z. B. xy, unter gleichen drey Bedingungen mit CD parallel laufen. Allein daraus würde folgen, daß der Winkel FMy so groß wäre, als der Winkel u. Aber der Winkel FMy ist nur ein Theil von dem Winkel o oder FMB, welcher nach der Voraussetzung dem Wechselwinkel u gleich ist: und dann ist die Bedingung nicht mehr dieselbe.

Auch der äußere Winkel EMy ist dem innern Winkel L nicht gleich: denn sonst wäre auch der Winkel xMF (als Scheitelwinkel von EMy) $=$ L. Allein der Winkel xMF bestehet aus dem Winkel R $+$ xMA, und ist also offenbar größer, als der Winkel R, welcher als Wechselwinkel von L eben so gleich

gleich diesem seyn muß, als o = u, vermöge der Voraussetzung.

Da nun der äußere Winkel EMy dem innern Winkel L nicht gleich ist: so können auch die beiden innern Winkel yMF + L nicht zwei rechten Winkeln gleich seyn, oder 180 Grad in Summa haben. Denn die beiden Nebenwinkel yMF + EMy haben zwar als solche in Summa 180 Grad: man kann aber den Winkel L dem Winkel EMy nicht substituiren; weil der leztere größer ist, als L: folglich kann auch nicht yMF + L in Summa 180 Grad haben.

So viel nun EMy größer ist als L, um so viel ist der Nebenwinkel des erstern, (nemlich yMF) kleiner als L.

Folglich beträgt yMF + L weniger als 180 Grad.

Dagegen werden die beiden innern Winkel xMF + u auf der andern Seite größer als 180 Grad in Summa.

Folglich neigen sich die beiden Linien xy und CD, auf der Seite, wo die innern Winkel kleiner sind, zu einander, und fahren desto weiter auf der andern Seite, wo die größern Winkel liegen, von einander: also sind sie einander nicht parallel.

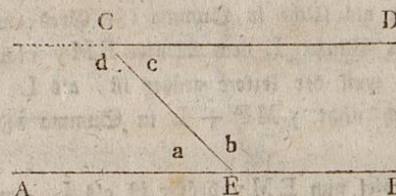
Da nun alles dies bey jeder andern Linie, außer AB, zutreffen würde; so ist AB allein der Linie CD parallel.

§. 27.

§. 27.

Aufgabe.

Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Linie parallel mit einer andern gegebenen Linie?



Soll durch den gegebenen Punkt C eine Linie parallel mit AB gezogen werden: so ziehe man aus dem Punkte C eine gerade Linie in beliebiger Richtung auf die Linie AB, zum Beispiel die Linie CE. Durch dieses Verfahren bekömmt man auf der Linie AB zwei Winkel a und b. Diese Winkel trägt man an den gegebenen Punkt C auf der Linie CE in entgegengesetzter Richtung ab (nach §. 17. 2te Anmerk.) so wird der Winkel c = a und d = b, und die Linien CD und AB sind einander parallel; weil die Linien AB und CD von einer dritten CE dergestalt durchschnitten werden: daß die Wechselwinkel a c und d b einander gleich sind.

Der Augenschein lehrt, daß man bei dieser Methode, Parallel-Linien zu ziehen, nur einen Wechsel-

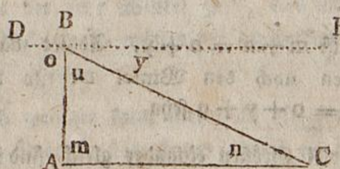
win-

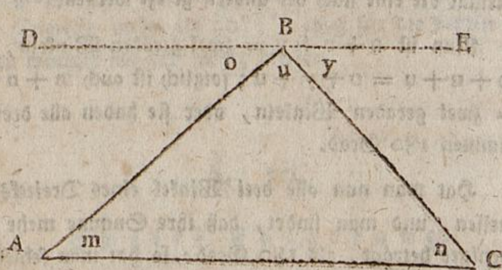
winkel, z. B. den < a in entgegengesezter Richtung auf die Linie CE zu tragen braucht.

§. 28.

Lehrsatz.

Alle Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammen oder in Summa zwei geraden Winkeln gleich.





Zur Führung des Beweißes ziehe man durch die Spitze der Dreiecke ABC die Hülfslinie DE mit der Grundlinie AC parallel, (wodurch, wie der Beweis lehren wird, alle drei Winkel des Dreiecks oben als Nebenwinkel zusammenkommen).

Alle Nebenwinkel sind gleich zwei geraden Winkeln (I. §. 73.).

Die Winkel $o+u+y$ sind also als Nebenwinkel gleich zwei geraden Winkeln. Weil AC und DE einander parallel laufen, so ist der $< y =$ dem $< n$ und $o = m$, als Wechselwinkel. Der Winkel u aber gehört eben sowohl zu den drei Winkeln des Dreiecks, als zu den drei Nebenwinkeln.

Gleiches zu gleichen addirt giebt gleiche Summen (I. §. 67.).

Folglich ist $m+n = o+y$. Addirt man zu beiden Summen noch den Winkel u: so muß auch $m+n+u = o+y+u$ seyn.

Wenn zwei Größen einander gleich sind: so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden.

Nun ist $o+u+y =$ zwei geraden Winkeln, und $m+n+u = o+y+u$; folglich ist auch $m+n+u$ = zwei geraden Winkeln, oder sie haben alle drei zusammen 180 Grad.

Hat man nun alle drei Winkel eines Dreiecks gemessen, und man findet, daß ihre Summe mehr oder weniger beträgt, als 180 Grad: so hat man fehlerhaft gemessen. Folglich kann dieser Lehrsatz zur Probe der Richtigkeit im Winkelmessen dienen.

Aus diesem fruchtbaren Lehrsatze ergeben sich noch vielerlei andere Folgesätze.

§. 29.

§. 29.

Erste Folgerung.

In keinem Dreiecke kann mehr als ein gerader Winkel seyn, weil die beiden andern Winkel zusammen auch einen geraden Winkel ausmachen, und gleichwohl alle drei Winkel nur zwei geraden Winkeln gleich sind; oder hält der eine Winkel 90°, das Maas eines geraden Winkels: so müssen sich die beiden übrigen Winkel in 90° theilen.

Noch weniger kann mehr als ein stumpfer Winkel in einem Dreiecke statt finden, weil ein stumpfer Winkel größer ist, als ein gerader; hält aber ein Winkel im Dreiecke mehr als 90°: so muß für die beiden andern weniger als 90° übrig bleiben.

§. 30.

Zweite Folgerung.

In einem rechtwinklichten Dreiecke sind die beiden spitzen Winkel zusammen einen geraden Winkel gleich, weil der dritte schon ein gerader ist, und für die beiden übrigen nur 90° oder die Summe eines geraden Winkels übrig bleibt.

In einem stumpfwinklichten Dreiecke sind daher die beiden spitzen Winkel zusammen kleiner, als ein gerader Winkel, weil der stumpfe Winkel mehr beträgt, als ein gerader, und also für die übrigen Winkel weniger übrig bleibt.

§. 31.

Dritte Folgerung.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks enthält 60 Grad, weil alle Winkel einander gleich sind, und also jeder den dritten Theil von der Summe zweier geraden Winkel von 180 Grad enthält.

Anmerkung. Aus diesem Grunde kann das geradwinklichte und stumpfwinklichte Dreieck nicht gleichseitig seyn, weil schon der eine Winkel mehr, als 60 Grad beträgt.

§. 32.

Vierte Folgerung.

Wenn man die Größe des einen Winkels vom Dreiecke weiß, so findet man die Summe der beiden andern, wenn man den bekannten Winkel von 180° abzieht.

Hat man daher in einem Dreiecke einen Winkel gemessen, so weiß man auch die Summe der beiden übrigen. Gesezt der eine Winkel mißt 50 Grad: so müs-

sen

sen die beiden übrigen zusammengenommen 130 Grad halten.

Weiß man die Summe von zwei Winkeln: so findet man den dritten auf eben diese Weise durch Subtraction.

§. 33.

Fünfte Folgerung.

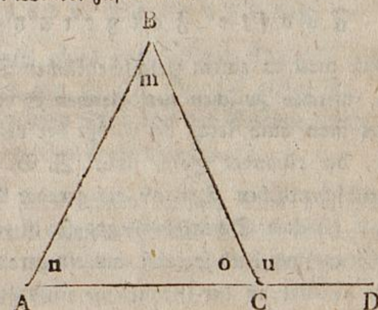
Weiß man in einem gleichschenklichen Dreiecke den Winkel, welcher zwischen den gleichen Schenkeln liegt: so findet man auch leicht die Größe der beiden übrigen Winkel, die einander gleich sind. Z. B. wenn in einem gleichschenklichen Dreiecke ein gerader Winkel zwischen den gleichen Schenkeln liegt: so ist jeder Winkel an der Grundlinie halb so groß, als ein gerader. Denn weil die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks (nach §. 20.) einander gleich sind, und beide hier zusammen den zweiten geraden Winkel ausmachen: so kömmt auch folglich auf jeden nur die Hälfte von einem geraden Winkel, oder 45 Grad.

Eben so leicht findet man den unbekannten Winkel zwischen den gleichen Schenkeln, wenn man nur einen von den beiden andern Winkeln weiß. Denn man darf nur den bekannten Winkel doppelt nehmen und dieses doppelt von 180 Grad abziehen; das übrige giebt den dritten Winkel.

§. 34.

Lehrsatz.

Wenn eine Seite eines Dreiecks verlängert wird: so ist der äußere Winkel so groß, als die beiden gegenüberliegenden Winkel zusammen.



Wenn an dem Dreiecke ABC die Seite AC bis in D verlängert wird: so ist der $< u = m + n$.

Alle Winkel eines Dreiecks sind $= 180° =$ zwei geraden Winkeln; folglich ist auch $m + n + o =$ zwei geraden Winkeln.

Alle Nebenwinkel sind in Summa gleich zwei geraden Winkeln; folglich $u + o =$ zwei geraden Wink.

Zwei Größen die einer dritten gleich, sind einander selber gleich.

Nun ist $m + n + o = 2$ geraden Winkeln.

Ingleichen $u + o = 2$ geraden Winkeln.

Also

Also ist auch $u + o = m + n + o$.

Gleiches von gleichen abgezogen, läßt gleiches übrig.

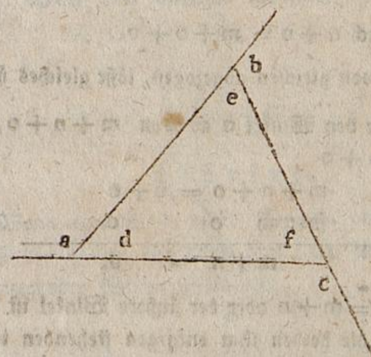
Man ziehe den Winkel o ab von $m + n + o$, ingleichen von $u + o$

$$\begin{array}{rcl} m + n + o & = & u + o \\ \text{subtrah} \quad o & & o \\ \hline m + n & = & u. \end{array}$$

So ist $u = m + n$ oder der äußere Winkel ist allein so groß, als die beiden ihm entgegen stehenden innern Winkel m und n zusammen. Und dieses trifft an allen Seiten des Dreiecks zu.

§. 35.

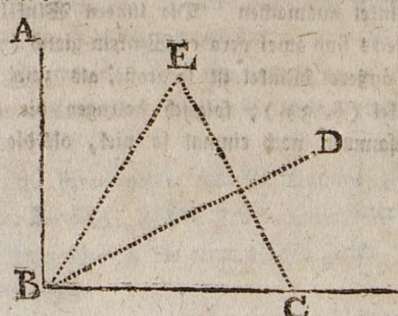
Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphs folgt, daß alle äußere Winkel eines Dreiecks zusammen vier gerade Winkel ausmachen. Die innern Winkel eines jeden Dreiecks sind zwei geraden Winkeln gleich (§. 28.) und jeder äußere Winkel ist so groß, als zwei innere Gegenwinkel (§. 33.); folglich betragen die äußern Winkel zusammen noch einmal so viel, als die innern Winkel.



$$
\begin{aligned}
\text{Der} \angle a &= e + f \quad (\S.\ 34.) \\
\text{;} \angle b &= d + f \\
\text{;} \angle c &= d + e \\
\hline
\text{Also}\ a + b + c &= 2d + 2e + 2f = def + def.
\end{aligned}
$$

§. 36.

Wie theilt man einen geraden Winkel in drei gleiche Theile?



Man

Man errichte auf dem einen Schenkel BC des geraden Winkels ABC ein gleichseitiges Dreieck BEC, und theile dessen Winkel in zwei gleiche Theile.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks enthält 60 Grad (§. 31.)

Also ist der Winkel EBC = 60 Grad: folglich schneidet er von dem geraden Winkel ABC der 90 Grad enthält, 60 Grad ab; und der Winkel ABE behält noch 30 Grad.

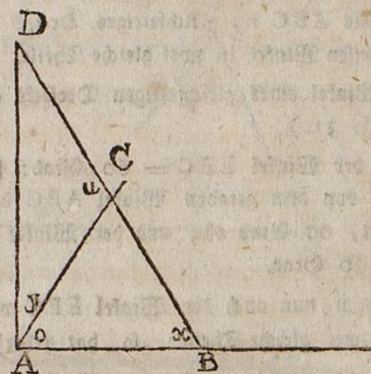
Theilt man nun auch den Winkel EBC von 60 Graden in zwei gleiche Theile: so hat jeder Theil 30 Grad.

Da nun jeder von den 3 Winkeln 30 Grad enthält; so ist der gerade Winkel in 3 gleiche Theile getheilt worden.

§. 37.

Auf dem Ende einer geraden Linie AB eine senkrechte Linie zu errichten.

Man errichte auf der gegebenen Linie AB ein gleichseitiges Dreieck A, verlängere die Seite BC nach D zu und zwar so, daß die Verlängerung CD = BC wird. Nun lasse man aus dem Punkte D auf den Endpunkt A der Linie AB eine gerade Linie herabfallen: so ist diese Linie AD die verlangte Perpendikular-Linie.



Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks hält 60 Grad (§. 31)

Das Dreieck ABC ist ein gleichseitiges, folglich enthalten die $< o + x$. $2 \times 60 = 120$ Grad. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist so groß, als die beiden ihm entgegen stehenden innern Winkel (§. 33.)

Der Winkel u ist ein äußerer Winkel; folglich ist er so groß als $o + x$, das heißt er enthält $120°$.

Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks sind einander gleich (§. 19.).

Das Dreieck ACD ist ein gleichschenkliches Dreieck, denn CD ist den Seiten des gleichseitigen Dreiecks ACB gleich gemacht worden; daher $CD = AC$; folglich ist der $< y = D$.

Alle Winkel eines Dreiecks sind zusammen zwei geraden Winkeln gleich $= 180°$ (§. 28.)

Und

Und wenn man einen Winkel des Dreiecks weiß: so findet man die Summe der beiden andern durch Subtraction des bekannten Winkels, von der Summe zweier geraden Winkel oder von 180 Grad. Wenn man nun den Winkel u oder 120 Grad von 180 Graden abzieht: so enthalten die Winkel $y + D = 60$ Grad.

Nun ist $y = 30$ Grad.

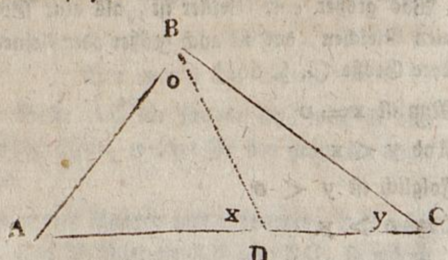
Jeder gerade Winkel hält 90° (I. §. 90.)

Die Winkel $y + o$ halten 90 Grad denn $o = 60^\circ$, und $y = 30^\circ$; folglich $y + o$ oder $60 + 30 = 90$.

Also machen die Winkel $y + o$ einen geraden Winkel aus, und die Linie AD steht auf AB (I. §. 54.) senkrecht in dem Punkte A.

§. 38.

I. In jedem Dreiecke ist der Winkel der größte, welcher der größten Seite gegen übersteht; und derjenige Winkel ist kleiner, der einer kleinern Seite gegenübersteht.



Man

Man ziehe zur Bequemlichkeit des Beweises die Hülfslinie AD; doch so, daß AD = AB. Denn weil AC sichtbar größer ist, als AB: so kann schon ein Theil von AC so groß sein, als AB.

Durch dieses Verfahren entsteht das gleichschenkliche, Dreieck ABD dessen Grundlinie BD sein soll.

Beweis:

Daß B der größte Winkel sei in dem Dreiecke ABC.

In jedem gleichschenklichen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

ABD ist ein gleichschenkliches Dreieck, weil AD gleich gemacht worden ist AB: folglich sind die Winkel an der Grundlinie x und o einander gleich.

Jeder äußere Winkel eines Dreiecks ist so groß als beide entgegenstehende innere Winkel: folglich auch größer als einer derselben.

Nun ist der Winkel x ein äußerer Winkel von dem Dreiecke BDC: folglich ist $x > y$.

Was größer oder kleiner ist, als eine Größe von zweien Gleichen, das ist auch größer oder kleiner als die andere Größe (I. §. 66.)

Nun ist $x = o$

Und $y < x$

Folglich ist $y < o$

Oder $o > y$.

Das

Das Ganze ist größer als sein Theil (I. §. 65.).

Nun ist der < o sichtbar nur ein Theil von dem Winkel B.

Da aber der Theil o schon größer ist, als y: so muß nothwendig der ganze Winkel B noch größer seyn als y.

Auf gleiche Weise, nemlich wenn man einen Theil der Linie AC gleich macht der Linie BC und wieder eine Hülfslinie ziehet, läßt sich beweißen, daß der Winkel A kleiner ist als der < B: folglich sind beide Winkel A und C für sich allein nicht so groß als C.

Da nun der Winkel B der größte Winkel ist, und die Seite AC, welcher er gegenüber steht, die längste ist: so folgt, daß derjenige Winkel in einem Dreiecke der größte sey, welcher der längsten Seite gegen übersteht.

II. In jedem Dreiecke ist diejenige Seite die längste, welche dem größten Winkel entgegen steht: und diejenigen Seiten sind kürzer, die kleinern Winkeln gegenüber liegen.

Man sehe zurück auf die Zeichnung No. I. dieses Paragraphs.

Beweis:

Daß die Seite AC die längste sey, weil sie dem Winkel gegenüber liegt, welcher für den größesten angenommen wird.

Wollte man dieß läugnen und behaupten, AC wäre nicht größer, zum Beispiel als AB oder BC, so wären

zwei

zwei Fälle möglich, nemlich AC müßte entweder noch kleiner oder zum wenigsten AB oder BC gleich seyn.

Wäre AC kleiner als AB oder BC, so müßte (nach dem ersten Lehrs. des §.) auch der Winkel B kleiner seyn als der Winkel C oder A, und wäre AC = AB, so müßte auch B = C seyn.

Oder wäre AC = BC: so wäre auch A = C.

Nun ist aber angenommen, daß die Seite AC den größten Winkel, nemlich B, gegenüber liegt, mithin die beiden andern Winkel A und C kleiner sind, als B: folglich kann B nicht kleiner seyn als A oder C, auch diesen nicht gleich.

Also können auch die Seiten AB und BC, welche den kleinern Winkeln C und A gegen überstehn, nicht eben so groß oder noch größer seyn als die Seite AC.

Daher bleibt nur der dritte noch mögliche Fall übrig, daß AB < AC.

Eben so auch BC < AC: folglich ist umgekehrt AC > AB und auch AC > B.

Aus diesen Lehrsätzen lassen sich mancherlei Folgerungen ziehen.

§. 39.

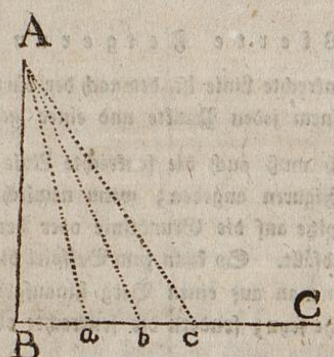
Erste Folgerung.

In einem geradwinklichen und stumpfwinklichen Dreiecke, ist diejenige Seite die größte, die dem geraden

raden und stumpfen Winkel gegenüber liegt: weil der gerade und stumpfe Winkel in solchen Dreiecken die größten Winkel sind.

§. 40.

Zweite Folgerung.



Die senkrechte Linie AB ist unter allen geraden Linien, die aus dem Punkte A auf die gerade Linie BC herabfallen, die kürzeste.

Denn alle andere gerade Linien Aa, Ab, Ac machen mit der Linie AB und AC, Dreiecke, an welchen die Linien Aa, Ab, Ac, dem geraden Winkel ABC gegenüberstehen, und also die größten Seiten in diesen Dreiecken sind: folglich ist unter allen diesen Linien AB, Aa, Ab u. s. f. nur die Linie AB senkrecht.

Dritte

Dritte Folgerung.

Aus dem Punkte A (Zeichnung der 2ten Folg.) läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die Linie BC ziehen: denn alle andere würden auf der einen oder andern Seite stehen müssen; und also länger werden. Nach der vorhergehenden Folgerung dieses Paragraphs kann aber nur die senkrechte Linie AB die kürzeste seyn.

Vierte Folgerung.

Die senkrechte Linie ist demnach der kürzeste Abstand zwischen einem jeden Punkte und einer geraden Linie.

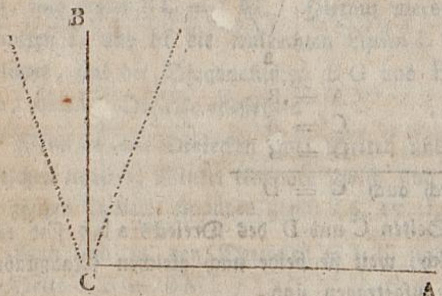
Folglich muß auch die senkrechte Linie die wahre Höhe der Figuren angeben; wenn nemlich diese Linie aus der Spitze auf die Grundlinie oder deren Verlängerung herabfällt. So kann zum Beispiel die Linie AB, nach welcher man auf einen Berg hinaufgeht ohnmöglich die Höhe seyn; sondern die senkrechte oder vertikale Linie BC.

In der zweiten Figur ist die Höhe GL und nicht GJ oder GKH.

1. Fig. 2. Fig.

§. 41.

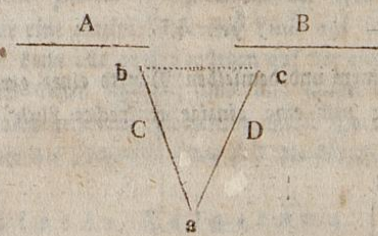
Auf einem und demselben Punkte einer geraden Linie, kann nur eine einzige senkrechte Linie errichtet werden.



Gesetzt auf der geraden Linie AC ließe sich im Punkte C mehr als eine senkrechte Linie errichten: so müßten sie entweder innerhalb oder außerhalb der erstern senkrechten Linie BC stehen. Dies ist aber unmöglich, denn sie würden sich rechts oder links neigen, folglich keinen geraden Winkel, sondern nur Theile von einem geraden Winkel ausmachen, oder sogar einen größern Winkel; folglich wären auch diese Linien nicht senkrecht.

§. 42.

Größen, die andern gleichen Größen gleich sind, die sind einander selber gleich. Z. B. Dinge, die nach zwei gleichen Formen gemacht werden oder nach gleichen Mustern.



$$A = B$$
$$C = A$$
$$D = B$$

Folglich auch $C = D$

Die Seiten C und D des Dreiecks a b c sind einander gleich, weil sie beide nach gleichen Maaßstäben A und B aufgetragen sind.

1 Rthlr. = 24 gl.
48 Sechser = 1 Rthlr.
288 Pfennige = 24 gl.

Folglich 48 Sechser = 288 Pfennige.

§. 43.

Lehrsatz.

Wenn

Wenn die Linie AB auf einer Parallellinie im Puncte A senkrecht steht: so steht eben diese Linie auch auf der andern Linie im Punkte B senkrecht.

Um diesen Satz zu beweisen, mache man folgende Zubereitung:

Man setze den Zirkel in B ein, thue ihn beliebig auf, und mache BL = BM. Hierauf werden in den Punkten L und M die senkrechten Linien LG, MH errichtet, und die Diagonallinien BG und BH gezogen, wodurch Dreiecke entstehen.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17 I.).

Nun sind in den Dreiecken GLB und HMB
die Seite LB = BM
die Seite GL = HM als Distanzen zweier Parallellinien, und der Winkel a = b als gerade Winkel, welche durch die mit Fleiß errichteten senkrechten Linien entstanden; folglich sind die Dreiecke GLB und HMB einander gleich.

Die beiden Dreiecke GLB und HMB, sind gleich den beiden andern Dreiecken BAG und BAH; nemlich BAG = GLB und BAH = HMB. Denn:
die Seite GA = LB und AH = BM (§. 25.)
die Seite AB = GL = HM als Distanzen zweier Parallellinien.

Die Seite GB ist beiden Dreiecken gemein; eben so die Seite HB der beiden andern Dreiecke. Größen, die gleichen Größen gleich, sind einander selber gleich (§. 42.)

Nun ist das Dreieck BAG = GLB
und BAH = HMB
Ferner das Dreieck GLB = HMB
Folglich ist auch das Dreieck BAG = BAH.

Gleiche Dreiecke haben auch gleiche gegenüber liegende Winkel (§ 17.).

Folglich ist der Winkel n = r und der < o = u.

Gleiches zu gleichen addirt, giebt gleiche Summen.

$$\begin{array}{lcccc} & n & = & r & \\ & o & = & u & \\ \hline \text{add.}\ n + o & & = & r + u & \end{array}$$

Also ist n + o = r + u.

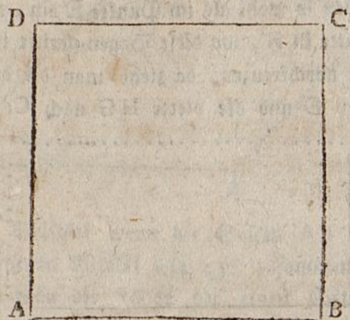
Die beiden Winkel n und o machen zusammen den ganzen Winkel ABL, und die beiden Winkel r und u machen zusammen den ganzen Winkel ABM aus: folglich sind auch die ganzen Winkel ABL und ABM einander gleich.

Gleiche Winkel auf einer geraden Linie neben einander, sind gerade Winkel, und die Linie zwischen beiden steht senkrecht (I. Abth. §. 53 und 54.).

§. 44.

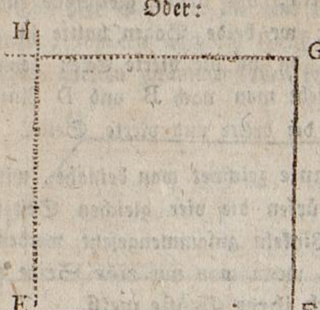
§. 44.

Zeichnung der Parallelogramme.



Um ein Quadrat ABCDA zu zeichnen, darf nur die Länge einer Seite z. B. AB gegeben seyn. Auf den beiden Endpunkten A und B dieser Seite, errichtet man eben so große senkrechte Linien AD und BC, und ziehet die vierte Linie DC von dem obern Endpunke D der einen senkrechten Linie, bis zum obern Endpukte C der andern Linie.

Oder:

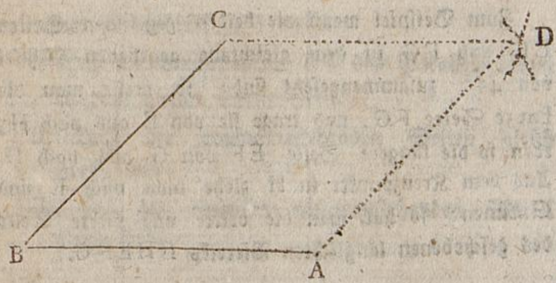


Auf die gegebene Seite EF setzt man die zweite G senkrecht, und eben so lang. Nun setze man den Zirkel in G eben so wohl als im Punkte E ein, und mache Bogenschnitte in H, wo diese Bogenschnitte im Punkte H einander durchkreuzen, da ziehe man die dritte Seite HE nach E und die vierte HG nach C.

Um ein länglichtes Viereck zu zeichnen, darf man nur zwei an einanderstoßende Seiten wissen, wie lang sie sind: diese setzt man in geraden Winkeln zusammen, z. B. die Seiten AD und AB.

Hierauf mißt man die kurze Seite AB, setzt den Zirkel in D ein, und macht einen Bogenschnitt in C; eben so mißt man die lange Seite AD, setzt den Zirkel in B ein, und mache gleichfalls einen Bogenschnitt in C: wo beide Bogenschnitte in C einander durchkreuzen, da ist die vierte Ecke; denn aus dem Punkte C zieht man nach B und D Linien, so bekömmt man die dritte und vierte Seite.

Eine Raute zeichnet man beinahe, wie ein Quadrat; nur dürfen die vier gleichen Seiten nicht in geraden Winkeln zusammengesetzt werden: es ist aber genug, wenn man nur eine Seite und einen Winkel nach ihrer Größe weiß.



Zum Beispiel wenn die Seiten AB und CD in dem gegebenen Winkel von 45° zusammengesetzt sind; so nehme man die Länge der einen Seite mit dem Zirkel ab; setze dann den Zirkel in A und C, und mache in D Kreuzschnitte.

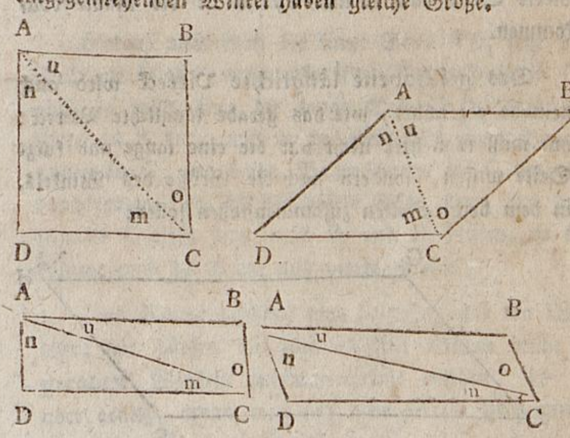
Aus dem Kreuzpunkte D, ziehe man die dritte und vierte Seite nach A und C, so ist die Raute vollkommen.

Das geschobene länglichte Viereck wird auch beinahe gezeichnet, wie das gerade länglichte Viereck; nur muß man hier nicht nur die eine lange und kurze Seite wissen, sondern auch die Größe des Winkels, in dem beide Seiten zusammenstoßen sollen.

Zum Beispiel wenn die beiden gegebenen Seiten EF und FG in dem gleichfalls gegebenen Winkel von 45° zusammengesetzt sind: so messe man die kurze Seite FG, und trage sie von E aus nach H; eben so die längere Seite EF von G aus nach H. Aus dem Kreuzpunkte in H ziehe man nach E und G Linien: so hat man die dritte und vierte Seite des geschobenen länglichten Vierecks GHEFG.

§. 45.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie, in zwei gleiche Theile getheilt, und die einander entgegenstehenden Seiten; ingleichen die einander entgegenstehenden Winkel haben gleiche Größe.



Hier ist dreierlei zu beweisen:

I. Daß die Diagonallinie AC das Parallelogramm in zwei gleiche Theile theilt.

II. Daß die gegenüberstehenden Seiten gleich groß, und

III. daß die einander entgegenstehenden Winkel gleich sind.

I.

Durch die Diagonallinie AC entstehen zwei Dreiecke aus einem jeden Parallelogramme; nemlich ACD und CAB.

Die Seiten AB und DC sind Parallellinien. Da nun durch zwei Parallellinien eine dritte durchläuft, so entstehen Wechselwinkel, die einander gleich sind. Hieraus ergiebt sich, daß in jedem Parallelogramme die beiden Dreiecke ACD und CAB einander gleich sind, denn sie haben beide die eine Seite AC gemein, und die Winkel an dieser Seite in beiden Dreiecken sind einander gleich, weil sie Wechselwinkel sind, nemlich $m = u$ und $n = o$.

Wenn aber in zwei Dreiecken, zwei Winkel und ihre Zwischenseite einander gleich sind, so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17.)

Diese beiden gleichen Dreiecke sind hier aus jedem Parallelogramme, durch die Diagonallinie entstanden; folglich hat die Diagonallinie AC die Parallelogramme in zwei gleiche Theile getheilt.

II.

Gleiche Drelecke haben auch gleiche Seiten.

Nun ist (No. I.) bewießen, daß die beiden Dreiecke ABD und CAB einander gleich sind; folglich ist auch die Seite AB = DC und AD = DC.

Dieses aber sind Seiten, die im Parellelogrammen einander gegenüberstehen; folglich sind die einander gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogrammes einander gleich.

III.

Gleiche Drelecke haben auch gleiche Winkel; folglich haben auch die beiden gleichen Drelecke ACD und CAB gleiche Winkel: und es ist schon bewießen (I.), daß der Winkel m = u und der < n = o.

Gleiches zu gleichen addirt, giebt gleiche Größen oder Summen (I. §. 65.)

Folglich ist m + n = u + o.

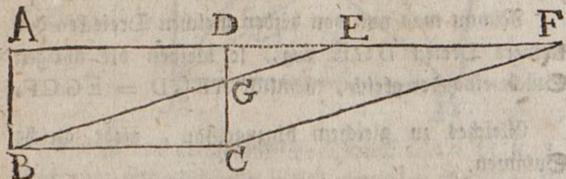
Nun machen die beiden Winkel m und u zusammen den Winkel A im Parallelogramme aus, oder m + u = A und die < u + o machen den Winkel C im Parallelogramme aus, oder u + o = C; folglich ist A = C.

Diese Winkel stehen aber einander gegenüber; folglich sind die einander entgegen stehenden Winkel im Parallelogramme einander gleich.

§. 46.

§. 46.

Parallelogramme (z. B. ABCD und EBCF), die auf einer Grundlinie (AC) und zwischen Parallellinien (AF und BC) stehen, sind einander gleich. —



Weil diese beiden Parallelogramme auf denselben Grundlinien und zwischen zwei Parallellinien BC und AF sich befinden, so entstehen dadurch sichtbar zwei Dreiecke ABE und DCF; diese beiden Dreiecke sind einander gleich, denn die Seite AB = DC und BE = CF; weil die einander entgegenstehenden Seiten vom Parallelogramme einander gleich sind: ferner die Seite AD = BC und EF = BC; aus demselben Grunde.

Zwei Größen, die einer dritten Größe gleich, sind einander selber gleich (I. § 63.).

Folglich ist auch AD = EF.

Und gleiches zu gleichem addirt, giebt gleiche Summe (I. §. 67.)

Addirt man also dieselbe Linie DE zu den beiden gleichen Linien AD und EF, so ist die Summe oder die Linie AE, der Linie DF vollig gleich.

Da

Da nun bewießen ist, daß alle drei Seiten in beiden Dreiecken einander gleich sind (§. 17.): so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Gleiches von gleichen abgezogen, giebt gleiche Reste (I. §. 70.).

Nimmt man nun von beiden gleichen Dreiecken das kleinere Dreieck DGE weg, so bleiben die übrigen Stücke einander gleich, nemlich ABGD = EGCF.

Gleiches zu gleichem hinzugethan, giebt gleiche Summen.

Addire ich also zu den beiden übrig gebliebenen Stücken das Dreieck BGC: so sind die Summen einander gleich, nemlich ABCD = EBCF.

Dieses sind aber die beiden Parallelogrammen, die auf einer Grundlinie und zwischen zwei Parallellinien stehen; folglich sind auch solche Parallelogramme einander gleich.

Folgerungen.

1. Auch diejenigen Dreiecke sind einander gleich, die einerlei oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen zwei Parallellinien stehen.

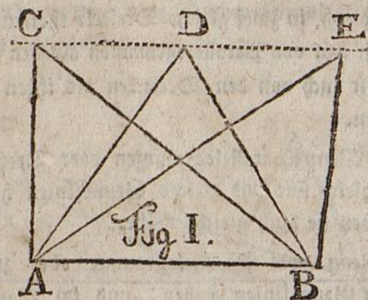


Fig I.

Also ist das geradwinkliche Dreieck CAB (Fig. 1.) gleich dem spitzwinklichen ABD und dem stumpfwinklichen ABE. Denn alle drei stehen auf einer Grundlinie AB, und ihre Höhe wird durch die Parallellinie CE begränzt.

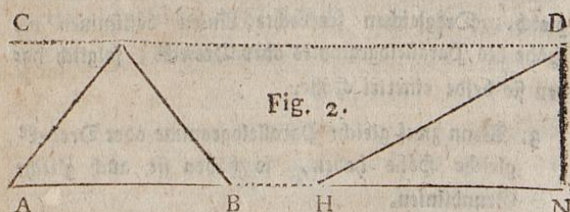


Fig. 2.

Eben so ist in den Dreiecken ACB und HDN die beide auf der geraden Linie AN stehen, (in Fig. 2.) die Grundlinie AB = der Grundlinie HN, und beiden Grundlinien läuft die Linie CD parallel, welche von der Höhe beider Dreiecke erreicht wird; folglich ist das Dreieck ABC = HND.

Beweis.

Jedes Parallelogramm läßt sich nach dem 45sten

Pa-

Paragraph in zwei gleiche Dreiecke theilen. Was nun nach §. 46. von Parallelogrammen als den Ganzen gilt; das gilt auch von den Dreiecken als ihren Hälften oder Theilen.

2. Wenn Parallelogrammen oder Dreiecke einander gleich sind und gleiche Grundlinien haben: so haben sie auch gleiche Höhe.

Wenn zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke gleiche Grundlinien haben, und im Ganzen einander gleich sind: so müssen sie zwischen zwei Parallellinien stehen. Parallellinien stehen aber überall gleich weit von einander; folglich sind die senkrechten Linien, die man von einer Spitze beider Parallelogramme oder beider Dreiecke zur Grundlinie herabfallen läßt, einander gleich. Dergleichen senkrechte Linien bestimmen die Höhe des Parallelogrammes oder Dreiecks; folglich haben sie beide einerlei Höhe.

3. Wenn zwei gleiche Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Höhe haben, so haben sie auch gleiche Grundlinien.

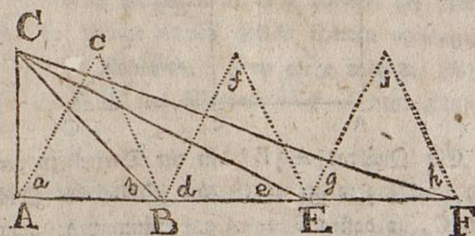
Wenn sie gleiche Höhe haben, liegen sie auch zwischen zwei Parallellinien.

Sie könnten aber unter solchen Umständen einander nicht gleich seyn, wenn sie nicht gleiche Grundlinien hätten.

Anmerkung. Zur ersten Folgerung dieses Paragraphs. Dieser Folgsatz läßt sich kürzer auch also ausdrücken:

Drei=

Dreiecke von einerlei oder gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

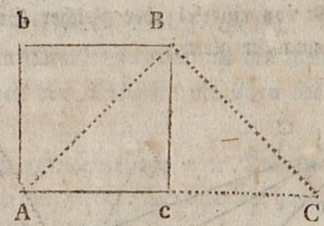


Das Dreieck ABC muß gleich sein, dem Dreieck abc; ferner das Dreieck AEC = dem Dreiecke def u. s. f. Eben so das Dreieck ABC = BCE = ECF u. s. w.; denn gleiche Dreiecke von gleichen Grundlinien müssen einerlei oder gleiche Höhe haben; man sehe den 2ten Folgsatz dieses Paragraphs.

§. 47.

Aufgaben.

Nach dem vorigen Lehrsatze lassen sich auch folgende Aufgaben lösen. Zum Beispiel ein Vieleck oder Polygon in ein Dreieck zu verwandeln. Diese Aufgabe wird man leichter lößen lernen, wenn man erst an einem Viereck den Versuch macht, dieses in ein Dreieck zu verwandeln.



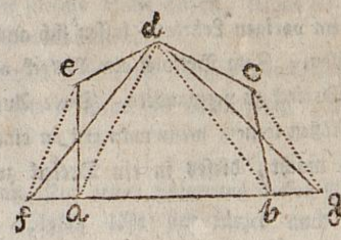
Ein Quadrat AbBc in ein Dreieck zu verwandeln, verlängere man die eine Seite des Quadrats nach C, so daß cC = Ac. Nun ziehe man aus dem Punkte B die Linien BA und BC: so ist das Dreieck ABC gleich dem Quadrate AbBc.

Das Dreieck ABC ist beiden Figuren gemein.

Da nun das Dreieck ABc = AbB (§. 45.): so bleibt nur noch zu beweisen übrig, daß das Dreieck cBC = ABc.

Diese Dreiecke sind aber einander gleich, weil sie beide gleiche Grundlinie und Höhe haben (man sehe die Anmerkung zur ersten Folgerung des vorigen Satzes im 46 §.)

Folglich ist das Dreieck ABC = dem Quadrat bBc



Ein

Ein Fünfeck a b c d e a in ein Dreieck zu verwandeln, ziehe man die Queer- oder Diagonallinie d a und d b; mit diesen gleichlaufend oder parallel die Linien e f und c g, welche die auf beiden Seiten verlängerte Grundlinie a b schneiden. Nun ziehe man die Linien d f und d g, so ist das Dreieck d f g = dem Fünfeck a b c d e.

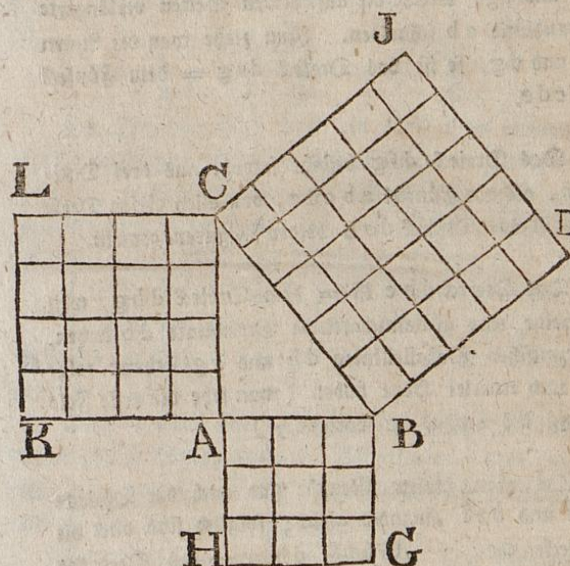
Das Dreieck d f g besteht sowohl aus drei Dreiecken, als das Fünfeck a b c d e, von allen diesen Dreiecken ist das Dreieck d a b beiden Figuren gemein.

Das Dreieck d b c ist = dem Dreieck d b g, weil sie beide eine gemeinschaftliche Grundlinie d b haben, und zwischen Parallellinien d b und c g stehen: folglich auch einerlei Höhe haben (man sehe die erste Folgerung des Satzes im vorigen §.)

Aus eben diesem Grunde sind auch die Dreiecke d a e und d a f einander gleich; folglich sind auch die Dreiecke d a f + d a b + d b g = den Dreiecken d e a + d a b + d b c oder das Dreieck d f g d = dem Fünfeck a b c d e a.

§. 48.

Lehrsatz.



Das Quadrat der Hypotenuse oder der schrägen Seite eines geradwinklichen Dreiecks, ist gleich dem Quadrate der Grundlinie und dem Quadrate der Höhe zusammengenommen.

An dem geradwinklichen Dreiecke ABC ist die
Grundlinie AB = 3′
die Höhe AC = 4′
die Hypotenuse BC = 5′

Folglich

Folglich hat das Quadrat der Grundlinie

$$\text{ABGH } 3' \times 3' = 9^{\square'}$$

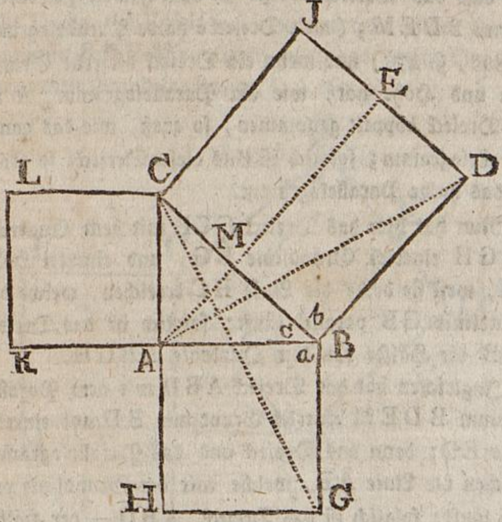
das □ des Kathet. $\text{AKLC } 4' \times 4' = 16^{\square'}$

addirt $25^{\square'} = 5' \times 5'$

oder dem □ der Hypothenuse.

Eben dies ergiebt sich, wenn man die hier angenommenen Größen (3. 4 und 5) zweifach, dreifach ꝛc. zehnfach ꝛc. nimmt. Z. B. $6^2 + 8^2 = 10^2$ oder $36 + 64 = 100$.

Daß nun das, was in dem angegebenen Falle schon der Augenschein lehret, auch in allen übrigen Fällen zutreffe, läßt sich auf folgende Art beweisen:



 Man

Man ziehe für das erste die Hülfslinie AE aus dem geraden Winkel A des geradwinklichen Dreiecks in das Quadrat der Hypotenuse, parallel mit der Seite BD; dadurch wird das Quadrat der Hypotenuse CBDJ in zwey längliche Rechtecke, nämlich CJEM und BMED, abgetheilt und es kommt nun darauf an, zu beweisen, daß das Rechteck BMED gerade so groß sey, als das Quadrat ABGH; und das Rechteck CJEM eben so groß, als das Quadrat ACLK. Um dieses darzuthun, ziehe man noch einige Hülfslinien, nämlich von A nach D, und von C nach G: so ergiebt sich dann, daß das Dreieck GCB = dem halben Quadrate von ABGH; und daß das Dreieck ABD = dem halben Parallelogramm BDEM; (weil Dreiecke halbe Parallelogramme sind, §. 47.) und wenn ein Dreieck dieselbe Grundlinie und Höhe hat, wie ein Parallelogramm: so ist das Dreieck doppelt genommen, so groß, wie das ganze Parallelogramm; folglich ist eins dieser Dreiecke so groß, als das halbe Parallelogramm.

Nun hat hier das Dreieck GCB mit dem Quadrate ABGH einerlei Grundlinie BG, und einerlei Höhe GH, weil sie beide die Linie HC erreichen, welche der Grundlinie GB parallel läuft; folglich ist das Dreieck GCB die Hälfte von dem Quadrate ABGH.

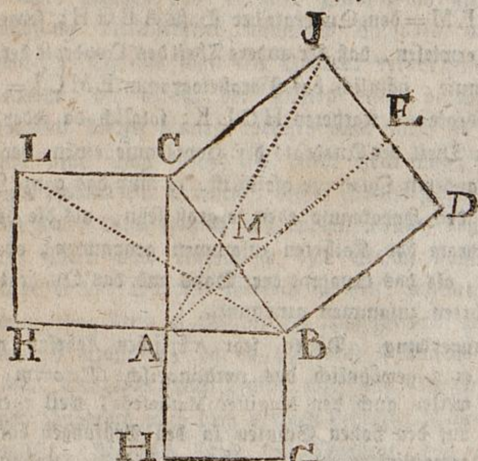
Ingleichen hat das Dreieck ABD mit dem Parallelogramm BDEM einerlei Grundlinie BD und einerlei Höhe ED; denn das Dreieck und das Parallelogramm erreichen die Linie AE, welche mit der Grundlinie parallel läuft; folglich ist das Dreieck ABD = der Hälfte des Parallelogramms BDEM.

Die

Die beiden Dreiecke CGB und ABD sind einander gleich; weil Dreiecke, die zwei gleiche Seiten und einen geraden Zwischenwinkel haben, einander völlig gleich sind.

Denn die Seite BG = der Seite AB und die Seite BC = BD; überdies der Winkel ABD = CBG; denn sie bestehen beide aus dem geraden Winkel a und b eines Quadrats und dem < c, der beiden Dreiecken gemein ist; folglich ist das Dreieck GCB = ABD.

Weil nun bewiesen ist, daß das eine Dreieck so groß ist, als das halbe Quadrat, und das andere Dreieck so groß, als das halbe Parallelogramm, und daß dieselben beiden Dreiecke einander gleich sind: so folgt, daß das halbe Quadrat ABGH = seyn muß dem halben Parallelogramm BDEM: mithin auch das ganze Quadrat dem ganzen Parallelogramm (I. §. 67.)



Auf eben diese Art läßt sich beweisen, daß das andere Parallelogramm CMEJ = dem Quadrat des Katheten ACLK: wenn man gleichfalls Hülfslinien zieht von A nach J und von K nach L, wodurch gleichfalls Dreiecke entstehen, die so groß sind, als die Hälfte der Parallelogramme, die mit den Dreiecken gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Diese Dreiecke sind ebenfalls aus denselben Gründen, wie vorher erwiesen, einander gleich; folglich ist das halbe Parallelogramm CMEJ = dem halben Quadrat ACLK; mithin auch das ganze Parallelogramm dem ganzen Quadrate. Nun besteht aber das Quadrat der Hypotenuse CBDJ aus den beiden Parallelogrammen BDEM und CMEJ.

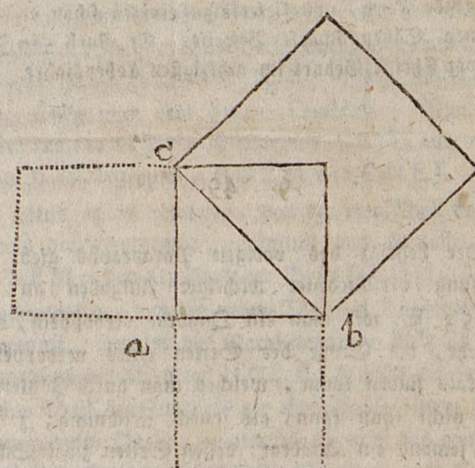
Und es ist erwiesen, daß der eine Theil des Quadrats der Hypotenuse, nämlich das Parallelogramm BDEM = dem Quadrate der Basis ABGH; ferner ist auch erwiesen, daß der andere Theil des Quadrats der Hypotenuse, nämlich das Parallelogramm EMCJ = dem Quadrate des Katheten HCLK; folglich da jeder einzelne Theil des Quadrats der Hypotenuse einem der beiden anderen Quadrate gleich ist: so muß das ganze Quadrat der Hypotenuse eben so groß seyn, als die beiden Quadrate der Katheten zusammen genommen; oder so groß, als das Quadrat der Basis und das Quadrat des Katheten zusammen genommen.

Anmerkung. Diesen sehr nüzlichen Lehrsatz nennt man gewöhnlich das pythagorische Theorem (zuweilen auch den Magister Matheseos, weil ehemals auf den hohen Schulen in den Prüfungen darüber examinirt wurde), von seinem Erfinder Pythagoras ei-

einem griechischen Philosophen, welcher beinahe sechs hundert Jahr vor Christi Geburt lebte. Dieser reißte in seiner frühen Jugend nach Aegypten, um daselbst die Geometrie zu erlernen, und kam in der Folge mit dem Studio dieser Wissenschaft so weit, daß wir ihm nicht nur mehrere Sätze derselben zu verdanken haben, sondern er brachte auch die schon vorhandenen Sätze in eine zusammenhängende Form, und lieferte zu einigen schon erfundenen Sätzen scharfe Beweise. Er starb 540 Jahr vor Christi Geburt im achtzigsten Lebensjahre.

§. 49.

Der Lehrsaz des vorigen Parapraphs giebt die Auflösung verschiedener wichtiger Aufgaben an die Hand; z. B. wie man ein Quadrat verdoppeln, oder vielmehr, die Größe der Seiten eines verdoppelten Quadrats finden könne, welches man durch Zählen so leicht nicht thun kann, als durch Zeichnung; z. B. wenn jemand ein Quadrat, dessen Seiten zwei Schuh groß sind, durch Zählen verdoppeln wollte, daß er zu jeder Seite noch einmal so viel Schuh nähme: so würde er das Quadrat vierfach machen, anstatt es zu verdoppeln; denn er bekäme ein Quadrat von 4 × 4 oder 16 Schuhen, da es doch nur 8 Schuh haben sollte. Hingegen durch Linien wird die Verdoppelung eines Quadrats nach dem vorigen Lehrsatze leichter und gewisser. Nämlich durch das Quadrat, das verdoppelt werden soll, zieht man eine Diagonale oder Queer-Linie und errichtet auf dieser ein neues Quadrat: oder man mißt nur die Queer- oder Diagonal-Linie, und macht davon ein Quadrat, dessen Seiten so groß sind, als die Queer-Linie des kleinern Quadrats. Dieses neue Quadrat ist alsdann doppelt so groß, als das kleinere.



Beweis:

Ein Quadrat verdoppeln, heißt ein Quadrat machen, das so groß ist, als die doppelt oder zweifach genommene Fläche desselben. Nun kann man an jede Seite eines Quadrats ein anderes Quadrat von derselben Größe ansetzen. Folglich kann man sich dergleichen auch an den beiden Sei-

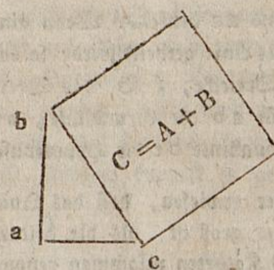
Seiten a b und a c denken. Wenn ein Quadrat durch eine Diagonal-Linie getheilt wird: so entstehen zwei geradwinkliche Dreiecke, z. B. das Dreieck c a b. In demselben stellt a b die Grundlinie, a c den Katheten und die Diagonallinie b c die Hypotenuse vor.

Es ist aber erwiesen, daß das Quadrat der Hypotenuse allein so groß ist, als die beiden Quadrate der Basis und des Katheten zusammen genommen. Folglich ist hier das Quadrat, das auf der Diagonallinie errichtet ist, gerade so groß, als zwei andere, die an den Seiten des kleinern Quadrats errichtet werden könnten.

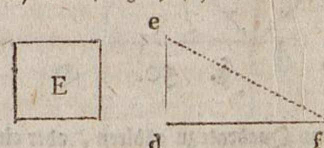
Folglich ist das Quadrat der Diagonallinie noch einmal so groß, als das gegebene kleinere Quadrat selber.

§. 50.

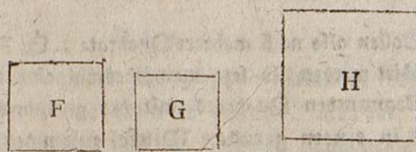
Verschiedene Quadrate zu addiren, oder ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als zwei, drei, vier oder mehrere gleiche oder ungleiche Quadrate.



Wenn nur zwei Quadrate z. B. A und B zu addiren sind, (sie mögen gleich oder ungleich seyn;) so mache man ein geradwinkliches Dreieck a b c, dessen Grundlinie a c so groß ist, als die Seite des einen Quadrats A, und der Kathete so groß, als die Seite des andern Quadrats B: die Hypotenuse ist alsdann die Seite des Quadrats C, das so groß seyn muß, als beide.



Soll zu jenen zweien, noch ein Quadrat z. B. E addirt werden, so errichte man abermals ein geradwinkliches Dreieck e d f, dessen Grundlinie d f so groß ist, als die Hypotenuse des vorigen Dreiecks a b c, oder die Seite des Quadrats C, und setze eine Seite von dem Quadrate E, das dazu addirt werden soll, als Kathete daran; hierauf ziehe man eine neue Hypotenuse: diese ist eine Seite des gesuchten Quadrats das so groß ist, als alle drei.



Soll ein Quadrat, z. B. J noch mehrere Quadrate außer jenen dreyen enthalten; als noch F, G und H: so fähret man auf gleiche Weise fort, wie beystehende Figur lehret.

Hier ist edf, das obige Dreieck.

— — — α, die Quadrat-Seite von F.

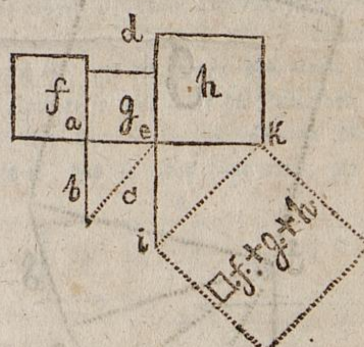
— — — β, die □ S. von G.

— — — δ, die □ S. von H.

□. J = A+B+E.
+F+G+H

Sollen

Sollen also noch mehrere Quadrate z. B. F G H, dazu addirt werden, so sezt man jedesmal eine Seite des hinzukommenden Quadrats mit der gefundenen Hypotenuse in einem geraden Winkel zusammen, so giebt auch jedesmal die neue Hypotenuse die Seite des verlangten Quadrats, welches für sich allein so groß ist, als alle gegebene kleinere in Summa. Nicht minder bequem zu addiren sind die Quadrate, wenn man sie in geraden Winkeln nahe an einander stellt, z. B. wie die Quadrate f. g. h.



Verlängert man die Seite a des Quadrats f. unterwärts der Grundlinie, so, daß b = a wird, so darf nur die Linie oder Hypotenuse c gezogen werden; so hat man eine Seite des Quadrats f + g. Diese Seite des gefundenen Quadrats setze man an das folgende Quadrat h, indem man die Seite d e um so viel unterwärts verlängert, und ziehe dann die Hypotenuse i k.

Be-

Beweis:

Aus dem 48sten Paragraph ist bekannt, daß das □ der Hypotenuse allein so groß ist, als das Quadrat der Grundlinie und des Katheten zusammengenommen Da nun hier die Seiten der Quadrate, welche addirt werden sollen, als Grundlinien und Katheten zusammengesetzt werden: so giebt die darauf gezogene Hypotenuse jedesmal die Seite eines Quadrats, das so groß ist, als die beiden Quadrate, deren Seiten man in einem geraden Winkel zusammengesetzt hat.

Eben dieses geschieht auch, wenn man zu einem doppelten oder dreyfachen Quadrate, (oder der Summe von zwei oder drei Quadraten) noch ein drittes oder viertes u. s. f. hinzusetzt oder addirt. Denn die Hypotenuse giebt jedesmal die Seite eines Quadrats, das gerade so groß ist, als die Summe von zwei oder drei andern gegebenen Quadraten.

§. 51.

Wie findet man die Differenz zweier Vierecke oder Quadrate? oder wie erfährt man, um wie viel ein Quadrat größer sey, als ein anderes gegebenes?

Zum Beispiel, man habe ein Quadrat A; dessen Seite 5′, und ein Quadrat B, dessen Seite 4′, betrage, wie groß wird die Seite desjenigen Quadrats seyn, das übrig bleibt, wenn man das Quadrat B vom Quadrat A wegnimmt?

Man

Man fasse 5′ oder eine Seite des größern Quadrats A mit dem Zirkel und ziehe mit dieser Eröffnung einen halben Kreis auf einer beliebigen geraden Linie CB.

Nun fasse man 4′, oder eine Seite des kleinern Quadrats B, setze den Zirkel ebenfalls in den vorhin genommenen Mittelpunkt A der geraden Linie CB ein, und schneide mit derselben ein Stück von der geraden Linie oder von dem Durchmesser in D ab. Auf dem Durchschneidungspunkte D errichtet man eine senkrechte Linie ED bis zur Peripherie des Halbkreises.

Endlich ziehe man von dem Mittelpunkte A aus bis zum Punkte E in der Peripherie eine gerade Linie: so entsteht dadurch ein geradwinkliches Dreieck EDA, dessen Grundlinie DA = einer Seite des kleinern Quadrats B. Die Hypotenuse EA = einer Seite des größern □ A, (weil die Seite des größern Quadrats in der Zeichnung des Halbkreises zum Radius angenommen

men wurde). Der Kathete ED aber ist gleich einer Seite des gesuchten Quadrats, welches die Differenz oder der Unterschied ist zwischen dem gegebenen größern und kleinern Quadrate: das heißt, welches übrig bleibt, wenn man das kleinere Quadrat von dem größern □ abzieht.

Beweis:

Da das Quadrat der Hypotenuse gleich ist den beiden Quadraten der Grundlinie und des Katheten zusammen genommen (§. 48) so folgt daraus, daß, wenn das Quadrat der Basis vom Quadrat der Hypotenuse abgezogen wird, das Quadrat des Katheten übrig bleibt, oder daß das Quadrat der Hypotenuse um so viel größer ist gegen das Quadrat der Basis als das □ des Katheten beträgt.

Eben so, wenn man das □ des Katheten abzieht, vom Quadrate der Hypotenuse, so bleibt das □ der Basis übrig; oder das □ der Basis ist die Differenz zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und zwischen dem Quadrate des Katheten.

Da nun hier zwei verschiedene Quadrate gegeben sind, deren Differenz gesucht werden soll, so wird dieses am füglichsten durch die vorhin gegebene Auflösung bewirkt; denn, indem man die Seite des größern Quadrats zum Radius macht, und damit einen halben Kreis zieht: so ist jede gerade Linie, die aus dem Mittelpunkte zur Peripherie gezogen wird, nicht nur ein Radius, sondern auch der Seite des größern Quadrats gleich.

Folglich

Folglich auch die Seite AE in dem geradwinklichen Dreiecke ADE.

Die Seite AD ist mit Fleiß der Seite des kleinern Quadrats gleich gemacht worden.

Durch die Errichtung der senkrechten Linie DE entsteht ein gerader Winkel, und diesem steht die Linie AE entgegen; folglich ist sie die Hypotenuse des Dreiecks. Da nun diese Hypotenuse gleich gemacht ist einer Seite des größern Quadrats, so ist folglich das Quadrat der Hypotenuse dem größern Quadrate selber gleich. Und da die Grundlinie AD einer Seite des kleinern Quadrats gleich gemacht worden ist: so ist folglich das Quadrat der Grundlinie dem kleinern Qnadrate selber gleich.

Da nun zum Quadrat der Basis noch das Quadrat des Katheten gehört, wenn es dem Quadrate der Hypotenuse gleich seyn soll: so fehlt also an dem Quadrate der Basis oder an dem gegebenen keinern Quadrate noch so viel, als das □ des Katheten beträgt, ehe es so groß würde, als das □ der Hypotenuse oder das gegebene größere Quadrat.

Folglich darf ich nur wissen, wie groß das □ des Katheten seyn müsse, und dieses zeigt mir die senkrechte Linie DE, welche eine Seite vom Quadrate des Katheten ist.

Indem ich also diese suche, finde ich zugleich die Differenz zwischen dem gegebenen kleinern, und größern Quadrate.

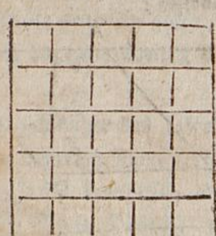
§. 52.

§. 52.

Nun wollen wir zur Ausmessung der Parallelogrammen übergehen.

Am leichtesten mißt man ein Quadrat; denn dieses hat lauter gleiche Seiten, und wenn man zwei seiner Seiten, die einander entgegenstehen, in gleiche Theile abtheilt, z. B. nach Ruthen, Schuhen oder Zollen, und aus den Theilungslinien Parallellinien zur entgegenstehenden Seite zieht: so entstehen daraus so viel gleiche kleine Quadrate oder Reihen von Quadrat-Ruthen-Schuhen-oder-Zollen, als jede Seite Theile hat.

Darum darf man nur zwei Seiten des Quadrats durch einander multipliciren, so giebt das Produkt die Summe aller □ Ruthen-Schuh- oder Zolle, welche die □ Fläche enthält. Z. B.

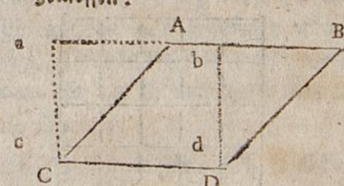


Wenn jede Seite dieses Quadrats 5' lang wäre, so würde seine Fläche 25 □' enthalten.

Ein länglichtes Viereck wird so berechnet, daß man die Grundlinie durch die Höhe multiplicirt, so findet man gleichfalls die ganze Fläche Z. B. wenn dieses länglichte Viereck zur Basis hat 8° und zur Höhe 6°, so enthält die Fläche eigentlich 6 Reihen gleicher Quadrate; und auf jeder Reihe sind der Quadrate achte, folglich beträgt die ganze Fläche 6 × 8 das ist 48 □°.

§. 53.

Wie werden Rhomben oder Rauten und die Rhomboiden gemessen?



Weil

Weil die Rauten und Rhomboiden schiefe Winkel haben, so kann man sie nicht geradezu, wie die Quadrate oder länglichten Vierecke messen, weil die schiefen Seitenlinien nicht die wahre Höhe angeben, folglich die Grundlinie nicht durch sie multiplicirt werden kann. Denn in §. 46. (man sehe die dortige Figur) ist bewießen, daß das schiefe Parallelogramm BCFEB völlig gleich ist dem geraden Parallelogramm ABCDA. Wenn nun die Grundlinie BC, 10′, die gerade Seite BA 6′, und die schiefe Seite 12′ betrüge: so würde das gerade Parallelogramm 6 ⋊ 10 = 60 □′ betragen. Multiplicirte man aber die Grundlinie BC durch die schiefe Linie BE: so hätte das schiefe Parallelogramm 12 ⋊ 10 = 120 □′; also noch einmal so viel als das gerade; welches doch offenbar unrichtig ist. Denn es hat nicht mehr und nicht weniger, als das gerade; daher ist es nicht genug, wenn an Grundstücken bloß die Länge und Breite gemessen wird, ohne sich um die gerade oder schiefe Lage der Seiten zu bekümmern.

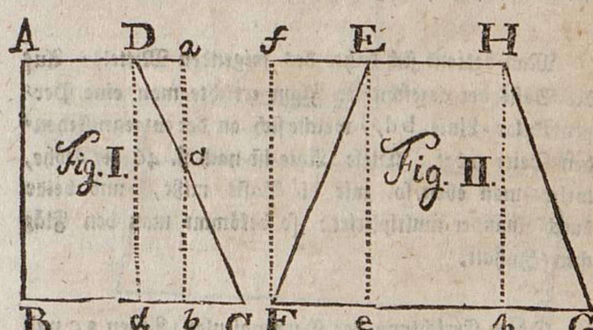
Man bedient sich daher des folgenden Mittels: Auf der Basis der gezeichneten Figur errichte man eine Perpendikular-Linie bd, welche sich an der entgegenstehenden Seite endet. Diese Linie ist nach §. 46 die Höhe, welche man eben so, wie die Basis mißt, und beide durch einander multiplicirt: so bekömmt man den Flächen-Inhalt.

k Durch Errichtung der Perpendicular-Linien ac und b d wird alſo der Rhombus A B D C A oder der Rhom- boide A B D C A in ein geradwinkliches Parallelogramm a b d c a verwandelt, welches mit den Rhombus oder Rhomboiden einerlei Grundlinie und Höhe hat, weil ſie beide zwiſchen Parallellinien liegen.

Im Grunde geſchieht bei dieſer Behandlung nichts weiter, als daß man durch die Perpendikular-Linie auf der einen Seite ein Stück von dem Parallelogramm abſchneidet und an der andern Seite wieder anſetzet; wodurch das Parallelogramm gerade oder rechtwinklich wird, ohne von ſeiner wahren Größe etwas zu verlieren.

§. 54.

Dies iſt auch auf Trapezen anwendbar, die zwei Parallel-Seiten haben und übrigens von viererlei Art ſeyn können.



In allen vier Fällen addirt man die Länge der beiden Parallelseiten der Figur z. B. AD und BC nimmt die Summe halb, und multiplicirt diese Hälfte durch die Höhe Dd oder den Perpendikular-Abstand beider Parallelseiten.

Gesezt, daß in Fig. I. die Seite AD 30′ hätte, und die Seite BC, 60, so wäre ihre Summe 30 + 60 = 90′, die Hälfte davon beträgt 45′, diese durch die Höhe Dd von 70′ multiplicirt, giebt 31□°, 50□′ als Inhalt des ganzen Trapez ABCD. Denn wenn die Linie dC = 30′ halb genommen wird db = bC = 15, und die eine Hälfte bC = Da oben an die Linie AD, angesezt, auch vom Punkte b zum Punkte a die senkrechte Linie ab gezogen wird: so besteht die obere Linie Aa aus AD + Da = 30 + 15 = 45 und die untere Linie Bc — bC wird = Bb = 60 — 15 = 45. So viel also der größern Parallellinie genommen wird, soviel wird der kleinern zugesezt; folglich werden beide einan-

der

der gleich, und zugleich wird dem Trapez ABCD das kleine Dreieck cbC = caD unten abgenommen und umgekehrt oben angesezt. Dadurch wird das Trapez ABCD in das Parallelogramm ABba verwandelt, welches jenem völlig gleich ist. Multiplicirt man nun Aa = Bb oder halb (AD + BC) durch die Höhe Dd = ab (oder 45′ durch 70′): so bekommt man den Inhalt des Parallelogramms ABba; folglich auch des Trapezes ABCD, welches jenem an Größe gleich ist. In dem Trapez CFGH (Fig. II.) ist hG = Fe. Sezt man nun hG = fE oben an EH an: so wird FG — hG = EH = fE oder FH = fH und ziehet man die senkrechte Linie Ff, so entstehet ein Dreieck FEf = HGh. Es ist also eben so viel, als hätte man das Dreieck HGh von dem Trapez EFGH abgenommen und umgekehrt an der andern Seite oben angesezt, so daß aus dem Trapez EFGH ein Parallelogramm fFhH entsteht, welches dem Trapez völlig gleich ist.

Gesezt also die kürzere Parallelseite EH hätte 40 die längere 90′, und fE sowohl als hG hätte 25′: so wäre EH + fE (oder 40 + 25) = FG — hG, (oder 90 — 25) das heißt: fH = Fh oder 65′ — 65, welches die Hälfte von 40′ + 90′ ist. Diese 65′ als angenommene Grundlinie durch die Höhe Ee = 70′ multiplicirt, giebt 65 × 70 oder 45□°, 50□′ als Inhalt des Parallelogramms fFhH, welches dem Trapez EFGH gleich ist.

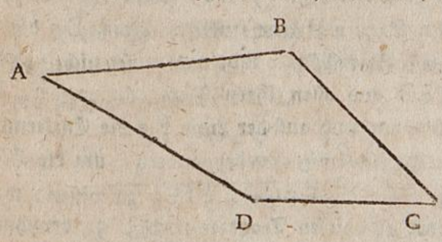
Trapeze von der dritten und vierten Art IKLM und NOPQ (Fig. III. und IIII.) werden, (sowohl im

D reieck

Dreieck KIk und LMl als im Dreieck NoO und QPq) eben so behandelt, wie das Trapez ABCD (Fig. I.)

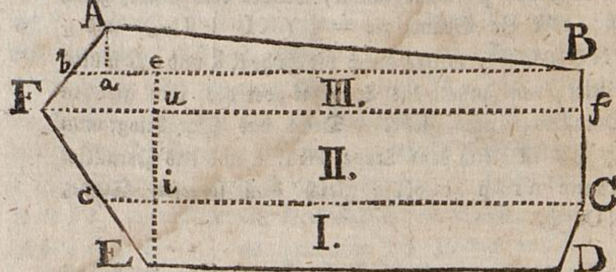
Auch hier findet man (durch Abnehmen von beiden Seiten der längern Parallelseite, und durch Ansetzen des Abgenommenen an beyde Seiten der kürzern Parallelseite) das Parallelogramm, welches dem Trapez gleich ist; oder die Grundlinie $= \frac{1}{2}$ (KL + IM) und $\frac{1}{2}$ (NQ + OP), welche durch die Höhe Kk und oO multiplicirt, den Inhalt des Trapezes oder des ihm gleichen Parallelogramms giebt. Denn das Parallelogramm iymx ist gleich dem Trapez IKLM und das Parallelogramm nrsp ist völlig gleich dem schiefen Trapez NOPQ.

Anmerkung. Unschicklich wäre es aber, wenn man vierseitige Flächen, die keine Parallelseiten haben, wie Paralleltrapezen behandeln wollte, z. B. in der Figur ABCDA kann man weder AB und DC, noch AD und BC zusammennehmen und halbiren.



§. 55.

Es läßt sich aber diese Berechnung der Paralleltrapezen zuweilen mit Vortheil bei dem Ausmessen und Berechnen unregelmäßiger Flächen und ganzer Fluren benutzen, wenn man diese schicklich durch Parallellinien in mehrere Trapeze vertheilen kann. Z. B. es wäre gegeben die Fläche ABCDEFA:



so ziehet man, mit einer von den längsten Seiten derselben ED, parallel so viel Linien, als sich aus den Seitenwinkeln C, F und B schicklich ausziehen lassen; nemlich die Linien Cc, Ff, Bb, dann errichtet man auf derselben Seite ED eine senkrechte Linie Ee bis an die entfernteste Parallellinie Bb, und misset nicht nur die Länge von ED und allen ihren Parallellinien Cc, Ff und Bb, sondern auch auf der Linie Ee die Entfernung einer jeden Parallellinie von der andern, um die Höhe der Trapeze CDEc, FcCF, BfFb zu wissen: worauf man jedes von diesen Trapezen nach §. 54 berechnen, und ihr Produkt in eine Summe bringen kann, welche Summe den Inhalt von der Fläche BbFEDCB oder dem größten Theile von ABCDEFA angiebt. (wie das übrigbleibende Dreieck ABb berechnet werde, wird im Folgenden angezeigt.)

Es sey in dem Trapez I. oder EDCc.

$$\left.\begin{array}{l} ED = 11^{\circ}, 5' \\ cC = 13^{\circ}, 6' \end{array}\right\} \text{add.}$$

ED + cC = 25 , 1' Diese Sum. halb genom. giebt

$\frac{1}{2}(ED + cC) = 12^{\circ}, 5', 5''$, oder die mittlere Grundlinie des Trapez. I.

Ferner sei die Höhe $Ei = 2^{\circ}$. Durch diese die Grundlinie, oder $12^{\circ}, 5'\ 5''$ multiplicirt, giebt $25\square^{\circ}, 10\square'$, als Inhalt des Trapez EDCc oder I.

$$\begin{array}{l} 12^{\circ}, 5', 5'' \\ \quad 2\ 00'' = 2^{\circ}. \\ \hline 25,^{\circ}\ 1\quad 0', 00''. \end{array}$$

In dem Trapez. II oder FfCc sei

$$\begin{array}{l} cC = 13^{\circ}, 6' \\ Ff = 15^{\circ}, 5'. \\ \hline cC + Ff = 29^{\circ}, 1', \end{array}$$

Halb $(cC + Ff) = 14^{\circ}, 5', 5''$ (mittlere Grundlinie des Trapez II.)

Diese Grundlinie durch die Höhe $iu = 2^{\circ}, 6'$ multiplicirt, giebt $37\square^{\circ}, 83\square'$ als Quadrat. Inhalt des Trapez II. oder FfCc.

$$\begin{array}{l} 14^{\circ}, 5', 5'' \\ \quad 2^{\circ}, 6', 0'' = 2^{\circ}, 6' \\ \hline 87, 3\ \ 00 \\ 291\ \ 0 \\ \hline 37^{\circ}, 83'\ 00''. \end{array}$$

In dem dritten Trapez BfFb sei.

$$\begin{array}{l} Ff = 15°,\ 5 \\ cB = 14°,\ 8 \\ \hline Ff + bB = 30°,\ 3'\ (3' = 30'') \\ \hline \text{Halb}\ (Ff + bB) = 15°,\ 1'\ 5''\ \text{mittl. Grundl. v. Trapez.} \\ \text{Die Höhe u e} = \quad 100'' = 1°\ \text{(multipl.)} \\ \hline 15,\ 1\ 5,00 = 15\square°,\ 15\square' \end{array}$$

Diese 15□°, 15□', sind der Quadrat Inhalt vom Trapez III. oder BfFb.

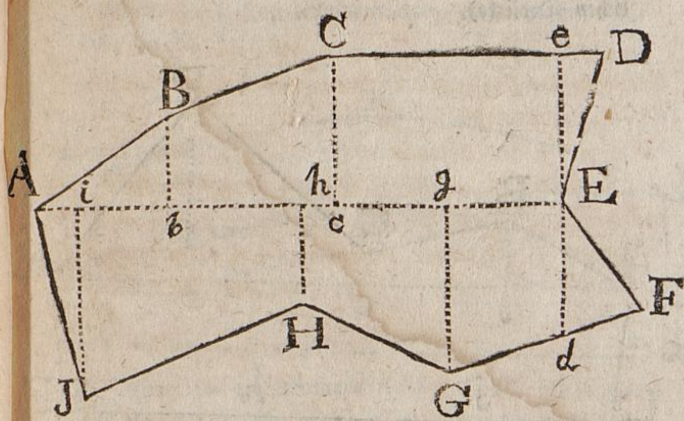
Nun addire man den Inhalt aller dreien Trapezen, um den Inhalt der ganzen Fläche BbFEDCB (welche aus den drey Trapezen besteht) zu finden.

$$\begin{array}{l} \text{I.} = 25\square°,\ 10\square' \\ \text{II.} = 37,\quad 83 \\ \text{III.} = 15,\quad 15. \\ \hline \text{Sum.} = 78\square°,\ 08' \end{array}$$

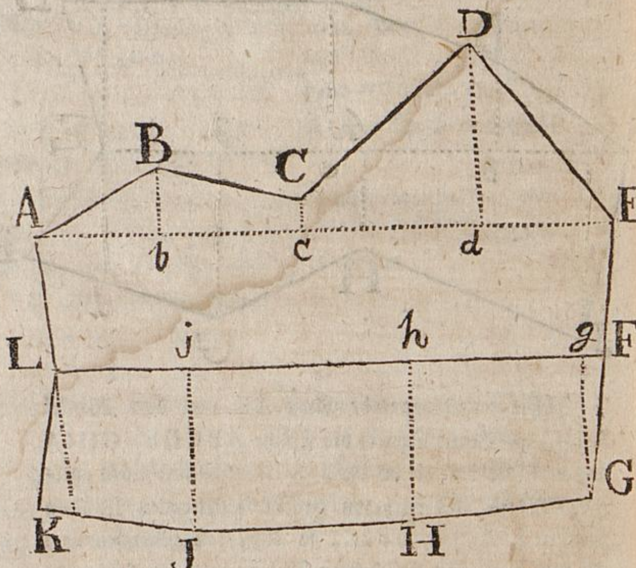
als Inhalt der ganzen Fläche BbFEDCB.

Einige andere Arten von Eintheilungen unregelmäßiger Flächenfiguren in Paralleltrapeze, machen die folgenden Figuren sichtbar.

Ziehet



Ziehet man die gerade Linie A E von dem Winkel A bis zum Winkel E durch die Fläche A B C D E F G H I A und errichtet auf dieser Linie A E rechts und links senkrechte Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkeln zustehen z. B. J i, B b ꝛc., so entstehen Paralleltrapezen zwischen diesen senkrechten Linien; weil alle senkrechte Linien einander parallel laufen. Die Distanz zwischen den senkrechten Linien z. B. i h, b c ꝛc. giebt die Höhe der Paralleltrapezen. Diese Paralleltrapezen allesammt behandelt man nach §. 54 und 55. und die übrigbleibenden Dreiecke wird die Folge behandeln und berechnen lehren: (und zwar sind die Dreiecke dieser und der zweiten Figur desto leichter zu berechnen, da sie bei der Eintheilung dieser beiden Flächen durch senkrechte Linien zu geradwinklichen Dreiecken geformt worden sind. Man vergleı, gleiche das Ende des 9ten Paragraphs vom rechtwinklichen Dreiecke).

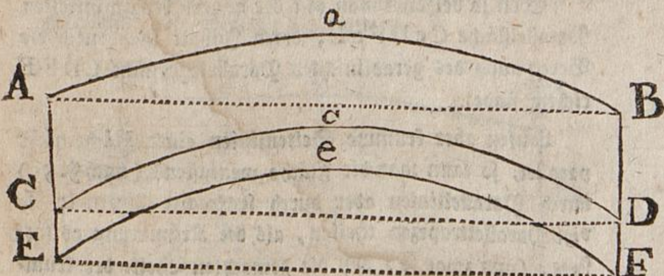


In dieser Figur geschieht dasselbige; nur daß mitten durch die Figur nach Maaßgabe der Seitenwinkel A, E und L zwei Parallellinien AE und LF gezogen werden, welche nicht nur selbst ein Paralleltrapez einschließen sondern auch (wie in der vorhergehenden Figur) die Perpendikularlinien tragen, wodurch die übrigen Paralleltrapezen gebildet werden.

§. 56.

Nunmehr ist es auch leicht einzusehen, wie solche Grund-

Grundstücke oder Flächen zu behandeln sind, die man zwischen zwei Parallelkrümmungen eingeschlossen findet. Z. B.



Wenn die Krümmungen A a B, C c D, E e F wirklich einander parallel laufen, (wie man das nicht selten an Grundstücken findet): so zieht man die Sehnen A B, C D, E F, jedoch einander auch parallel. So entstehen geradlinichte Parallelogramme A B D C und C D F E, welche den krummlinichten A a B D c C und C c D F e E gleich sind. Denn so groß der Abschnitt A a B A ist, der vom krummlinichten Parallelogramm A a B D c C durch die Sehne A B weggenommen wird; eben so groß ist der Abschnitt C c D E, welcher dagegen vermittelst der Sehne C D angesezt wird. So viel also das krummlaufende Stücke auf der einen Seite verliert, bekommt es auf der andern wieder: folglich ist das geradlinichte Parallelogramm innerhalb der Sehnen A B und C D eben so groß, als das krummmlinichte innerhalb seiner krummen Linien. Es ist also richtig verfahren, wenn man anstatt der krummlinichten Parallelfigur A a B D c C das geradlinichte Parallelogramm A B D C misset und berechnet.

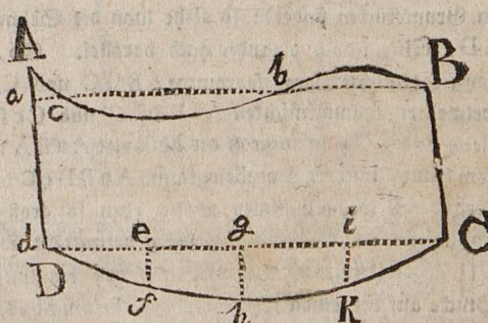
Wä-

Wäre z. B. die Sehne AB = CD = 17°
und die perpendik. Höhe AC = 3°

so wäre der Flächeninhalt = 51□°.

Eben so verfährt man mit der andern krummlinichten Parallelfläche CcDFeE; deren Inhalt man durch die Berechnung des geradlinichten Parallelogramms CDFE richtig findet.

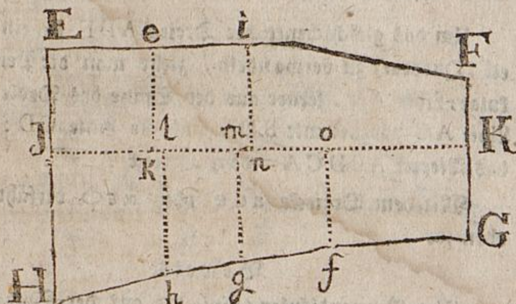
Laufen aber krumme Seitenlinien einer Fläche nicht parallel, so kann man die Fläche wenigstens (nach §. 55) durch Parallellinien oder durch senkrechte Linien in so viel Paralleltrapezen theilen, als die Krümmung es fordert, (und zwar so, daß die gemachten Theile der krummen Linie von einer geraden wenig abweichen und für gerade gelten können. Z. B.



Man ziehe in dieser Figur aB so durch die krumme Linie AcbB, daß sie auf der einen Seite zwischen c und b soviel ansezt als sie auf andern Seite zwischen b und B abnimmt, folglich für die krumme Linie gelten kann; (mit Ausnahme des kleinen Dreiecks

Aca

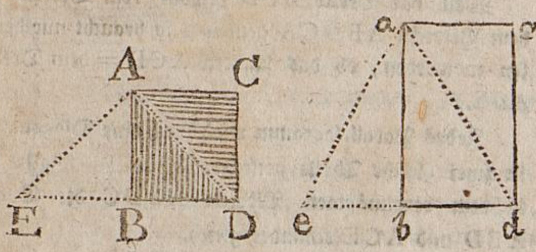
Aca, welches besonders berechnet wird. Mit aB ziehe man dC durch den Winkel C parallel, so bekommt man das Paralleltrapez aBCd, das übrige wird durch senkrechte Linien ef, gh, ik in kleinere Trapeze und geradwinklichte Dreiecke zerschnitten.



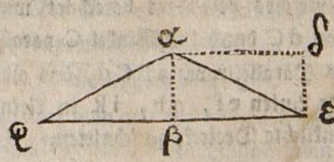
Die Behandlung dieser Fläche EFGH ist aus der Figur selbst und aus §. 55 leicht zu sehen.

§. 57.

Verwandlung der Dreiecke in gleiche große Parallelogramme.



Um



Um das gleichschenklichte Dreieck ADE in ein Viereck (Quadrat) zu verwandeln, ziehe man die Perpendikular-Linie AB, ferner aus der Spitze des Dreiecks die Linie AC parallel mit BD, und die Linie CD: so ist das Viereck ABDCA = dem Dreieck ADE.

Mit dem Dreiecke ade oder $\alpha\varepsilon\phi$ verfährt man eben so.

Beweis.

Eine Perpendikular-Linie die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf dessen Grundlinie herabfällt, theilt das ganze Dreieck in zwey gleiche Theile. §. 18. Nun steht die Linie AB auf der Spitze des gleichschenklichten Dreiecks ADE gezogen, senkrecht auf der Grundlinie ED; folglich sind auch die Dreiecke ABD und ABE einander gleich.

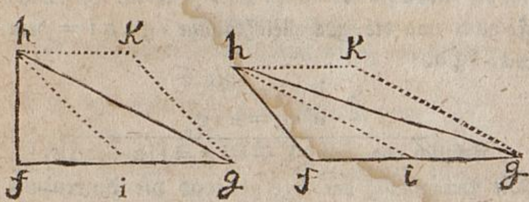
Weil das Dreick ABD sowohl dem Dreiecke als dem Vierecke ABDCA gemein, so braucht nur bewiesen zu werden, ob das Dreieck ACD = dem Dreiecke ABE.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie in zwei gleiche Theile getheilt. §. 45.; folglich sind in dem regelmäßigen Vierecke ABDC die Dreiecke ABD und ACE einander gleich.

Wenn

Wenn zwei Größen einander gleich sind: so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden. §. 62. I.

Da nun das Dreieck ABD sowohl gleich dem Dreiecke ABE als auch dem Dreiecke ACD: so muß auch das Viereck ABDC = dem Dreiecke ADE seyn.



Die Dreiecke fgh in Vierecke (Rhomboiden) zu verwandeln, theile man die Grundlinie fg (nach §. 21) in zwei gleiche Theile und ziehe aus der Spitze derselben die Linien hi. Mit der Linie ig parallel ziehe man die Linie hk, doch so, daß hk = ig. Endlich ziehe man noch die Linie kg: so hat man die Dreiecke in Parallelogramme verwandelt (igkhi), welche eben so groß sind.

Beweis.

Zwei Größen die einer dritten gleich: sind einander selber gleich (§. 63. I.)

Die Dreiecke fih sind gleich den Dreiecken hig, denn sie haben einerlei Höhen, und gleich Grundlinien, (§. 46. 1ste Folgerung) oder mit andern Worten: sie haben gleiche Grundlinien und stehen zwischen Parallellinien.

Eben so sind die Dreiecke h g k = dem Dreiecke h i g, weil jedes durch eine Queerlinie in zwei gleiche Theile getheilt wird. §. 45.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden. (§. 62. I.)

Folglich sind die Parallelogramme i g k h i = dem Dreiecke f g h.

$$\begin{array}{r} hgk = fih \\ hig = hig \\ \hline \end{array}$$

Folglich add. $hgk + hig = fih + hig.$

Die Berechnung der Dreiecke und die Anwendung derselben folgt im dritten Bändchen.