Multiplication des Decimal-Flächen-Maaßes, oder der Länge mit der Breite.

§. 13.

Multiplicirt man die Länge der Fläche mit ihrer Breite, so muß das Produkt den Inhalt der Fläche bestimmen, wie oben die Berechnung der Quadrat-Fläche gezeigt hat; zum Beispiel

eine Fläche sei lang 4°
und breit 2°; so ist der
Inhalt dieser Fläche 8°□.

Denn hier liegen 2 Reihen Quadrat-Ruthen neben einander, und in jeder Reihe sind 4 Quadrat-Ruthen, sie enthalten also: $2 \times 4 = 8$.

Sollen Decimal-Ruthen, Schuh und Zoll der Länge und Breite durch einander multiplicirt werden, so setzt man jedesmal Ruthen unter Ruthen, Schuh unter Schuh u. s. f.; und wo bei dem Multiplicandum, oder Multiplicator, Schuh oder Zoll fehlen, so werden diese leeren Stellen durch Nullen ergänzt. Uebrigens verfährt man wie in der gewöhnlichen Multiplication.

Die lezte Ziffer des Produktes bekömmt das lezte Zeichen der zu multiplicirenden Maaße, und allen

Maaßen

Maaßen von den Linien bis zu den Ruthen werden von der rechten nach der linken Hand zu, zwei Ziffern zugetheilt; (§. 12.) z. B. eine Fläche ist:

2°,	0′,	2″	lang und
	4′	1″	breit.
2	0	2	
80	8		
82′,	|8	2″	

Hier liegen 41 Reihen, jede von zweihundert und zwei Quadratzollen, neben einander, die aber noch keine Quadrat-Ruthe ausmachen können; denn ihre ganze Summe macht wenig über 8000 Quadrat Zolle, oder 82 Quadrat-Schuhe; da eine volle Quadrat-Ruthe 10000 Quadrat-Zolle, oder 100 Quadrat Schuh haben muß.

Wenn man eine Fläche hat, die 2 Ruthen und 5 Schuh lang, und 2 Ruthen breit ist, so beträgt ihr Inhalt 5 Quadrat-Ruthen.

Denn	2° 5′	lang
	2° (0′)	breit (2 Ruthen = 20 Schuh.)
	5°,00′	Inhalt.

Hier liegen 20 Reihen Quadrat-Schuhe, jede zu 25 Quadrat-Schuhen, neben einander. Daher macht das Ganze eine Summe von 500 Quadrat-Schuhen. Und da 100 Quadrat-Schuh eine Quadrat-Ruthe machen; so machen 500 Quadrat-Schuh 5 Quadrat-Ruthen; oder, 25 Quadrat-Schuhe in einer Reihe sind der vierte Theil einer Quadrat-Ruthe: zwanzig sol-

solcher Reihen oder Viertels Quadratruthen; machen also 5 ganze Quadratruthen.

Eine aedere Fläche ist:

lang 24° 2′ 4″ und
breit 12° 0′ 4″

96 9 6

48 48
24 24

291°| 84′| 96″ Inhalt der Fläche.

Von Erhebung der Größen zu Quadraten und von Quadrat-Zahlen.

§. 14.

Jede Zahl, die man durch sich selbst multiplicirt, d. h. die man so vielmal nimmt, als sie selbst Einheiten hat, erhebt man zu einer Quadrat-Zahl; das heißt, sie ist nun so vielmal so groß, als sie selbst Einheiten hat, so daß diese Einheiten zusammen genommen, wenn sie ins Viereck gestellt werden, ein vollkommenes Quadrat ausmachen; das ist auch die Ursache, warum man die Benennung Quadrat Zahl aus der Meßkunst entlehnt hat.

Zum

Zum Beispiel 4×4

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Eine Größe überhaupt zum Quadrate erheben, soll also auch nichts anders heißen, als sie durch eine andere Größe, die ihr gleich ist, vervielfältigen oder multipliciren. Das Quadriren geschieht also durch zwei gleiche Faktoren, z. B. $a \times a$; 3×3. Die zuerst gegebene Größe heißt die Quadrat-Seite (Basis) oder Quadrat-Wurzel.

a Wurzel	4 W.
a	4
aa Quadr.	16 □.

Die Wurzel wird von den Mathematikern gewöhnlich also bezeichnet $\sqrt{}$.

Man nennt die Wurzel zuweilen auch die erste Potenz oder Dignität, und ihre Quadrat-Größe heißt die zweite Potenz, weil sie ein Produkt ist, das aus zween gleichen Faktoren entstehet. Ferner das Produkt von drei gleichen Faktoren heißt die dritte Potenz u. s. f.

Zum Beispiel:

$a^1 = a$, 1ste Potenz oder Wurzel
$a^2 = aa = a \times a$, 2te Potenz oder das Quadrat
$a^3 = aaa = a \times a \times a$, 3te Potenz u. s. w.

$4^1 =$

$4^1 = 4$ erste Potenz
$4^2 = 4 \times 4$, Quadrat, 2te Potenz
$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, 3te Potenz u. s. w.

Eine Wurzel, die aus zwei Theilen oder Größen besteht, deren Zeichen, z. B. Buchstaben oder Ziffern sind, heißt eine zweitheilige (oder **binomische**) Wurzel. Z. B. $a + b$. oder $a - b$.

Von dieser Art sind z. B. Zahlen, welche aus Zehnern und Einheiten, aus Hunderten und Zehnern, aus Hunderten und Einheiten u. s. w. zusammengesezt sind.

Z. B. $24 = 20 + 4$. $240 = 200 + 40$. $204 = 200 + 4$. Gewöhnlich versteht man darunter alle diejenigen Zahlen von 11. bis 99., welche mit 2 (geltenden) Ziffern geschrieben werden. Ueberhaupt aber jede Zusammensetzung von 2 einfachen Zahlen, sie mag positiv oder negativ seyn. Z. B. $6 + 4$ und $6 - 4$.

Beispiel positiver Zusammensetzung:

$$\begin{array}{l}
20 + 4 = 24 \\
20 + 4 = 24 \\
\hline
4 \times 4 = 16 \\
4 \times 20 = 80 \\
4 \times 20 = 80 \\
20 \times 20 = 400. \\
\hline
20 \times 20 + \underbrace{4 \times 20 + 4 \times 20} + 16 = 400 \\
\qquad + 2 \times 80 \text{ (oder } 160) + 16 = 576.
\end{array}$$

Beispiel negativer Zusammensetzung:

$$\begin{array}{r}
20 - 4 = 16 \\
20 - 4 = 16 \\
\hline
-4 \times -4 = +16 \\
20 \times -4 = \quad -80 \\
20 \times -4 = \quad -80 \\
20 \times 20 = +400 \\
\hline
20 - 4 \times 20 - 4 = 16 \times 16 = 400 + 16 - 160 = 256
\end{array}$$

Beispiel negativer Zusammensetzung:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & a & - & b \\
 & & a & - & b \\
\hline
 & - & ab & + & b^2 \\
a^2 & - & ab & & \\
\hline
a^2 & - & 2ab & + & b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
12 - 2 = 10 \\
12 - 2 = 10 \\
\hline
-2 \times -2 = 4 = 2^2 \\
12 \times -2 = -24 \\
12 \times -2 = -24 \\
12 \times 12 = 144 = 12^2 \\
\hline
12 - 2 \times 12 - 2 = 144 + 4 - 48. (^* = 10 \times 10 = 100.
\end{array}$$

Beispiel positiver Zusammensetzung:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & & a & + & b & \text{Wurzel.} \\
 & & a & + & b & \\
\hline
 & & ab & + & b^2 & \\
a^2 & + & ab & & & \\
\hline
a^2 & + & 2ab & + & b^2 & \square.
\end{array}$$

*) Die folgende Figur und ihre Erklärung lehret: daß, wenn der zweite Theil der Wurzel negativ ist, alsdann das negative doppelte Produkt der beiden Wurzeltheile um so viel zu groß ist, als das Quadrat des negativen Theils beträgt; folglich werden in diesem Beispiele 4 negative Theile von 48 negativen Theilen weggenommen, so daß also das Ganze noch um 4 Theile gewinnt. Darum erscheint das Quadrat des negativen Theils positiv, oder mit dem Zeichen +. Von 144 gehen also nicht 48, sondern nur 44 ab; folglich $144 - 48 + 4 = 100$.

Das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel zum Beispiel ab bestehet also:

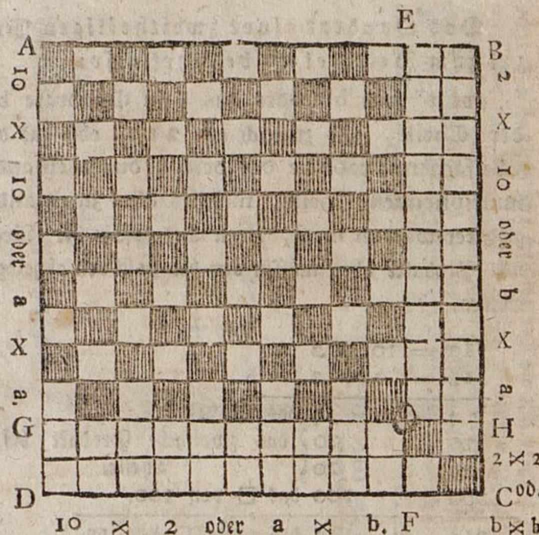
aus a^2 und b^2 oder aus dem Quadrate beider Theile, und zugleich aus 2 ab, oder aus dem zweifachen Produkte der beiden durch einander multiplicirten Theile, welches alles zu einander addiret werden muß, wenn alles positiv ist. Negative Produkte aber müssen von den positiven abgezogen werden.

$$12 = 10 + 2$$
$$12 = 10 + 2$$

4	4 das □ von 2.
20	20 } das zweifache Produkt beider
20	20 } Theile.
100	100 das □ von 100.
144 =	144 das ganze □ von 12.

Dieses Beispiel läßt sich auch leicht, so wie jedes andere, durch eine Figur vorstellen.

$$10 + 2 \times 10 + 2 = 12 \times 12 = 144.$$
$$a + b \times a + b = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$



so wäre also das Quadrat von 10 = 100
das Quadrat von 2 = 4
und das zweifache Produkt beider Wurzeltheile in einander 10 × 2 + 2 × 10 = 40

also das ganze □ von 12 = 144;

welches aus der Figur selbst sichtbar ist: denn sie enthält offenbar von der zweitheiligen Wurzel 12 das □ von 10 × 10 und 2 × 2 und das doppelte Produkt beider Theile in einander, in abgesonderten Flächen.

Dasselbe Viereck könnte auch ein Grundstück vorstellen, das zwar 12 Ruthen lang und 12 Ruthen breit wäre

wäre, aber nur 10 Ruthen von der Länge und 10 Ruthen von der Breite wären gutes Land; die übrigen 2 Ruthen der Länge und Breite hingegen, unbrauchbar, zu derselben Benutzung: alsdann wäre der brauchbare Theil AEOG = (12 — 2) × (12 — 2) = 10 × 10 = 100 Ruthen groß. (Siehe das obige Beispiel negativer Zusammensetzung.) Nemlich das ganze Stück beträge zwar 12 × 12 = 144 Ruthen; es giengen aber davon zweimal 2 × 12 = 48 weniger 4, also 44 von den 144 ab; denn bei den 2 × 12 + 2 × 12 oder EBCF + GDCH ist das Quadrat HOFC zweimal mitgenommen, und muß also einmal abgerechnet werden.

Dieser Lehrsatz wird auch in folgenden Beispielen seine Bestätigung finden.

$a + c\,\surd = \surd\ 102$	$=$	$100 + 2$	
$a + c$	102	$100 + 2$	
$ac + c^2$	$4 = 2 \times 2 = 2^2$	4	das □ von 2; od. v. den Einheit.
$a^2 + ac$	$200 = 2 \times 100$	200	das zweifache Produkt der Hunderte und der Einheit.
$a^2 + 2ac + c^2$ □.	$200 = 100 \times 2$	200	
	$10000 = 100 \times 100 = 100^2$		
		10000	das □ v. 100 od. der Hunderte.
	10404	10404	das ganze □ von 102.

$\surd\ 280 = 200 + 80$		
$280 \quad 200 + 80$		
22400	6400	das □ von 80.
56	16000	das 2fache Produkt der Hunderte und Zehner.
78400 □.	16000	
	40000	das □ von 200.
	87400	das ganze □ von 280.

Wurzeln von mehr als zwei Theilen lassen sich ebenfalls als zweitheilige Wurzeln ansehen und behandeln; (welches um der Folge willen zu merken ist, wenn die Wurzel eines Quadrats gesucht werden soll.)

$$\begin{array}{r}
a+b+c \\
a+b+c \\
\hline
(a+b+c\times c) = ac+bc+c^2 \\
(a+b+c\times b) = ab+b^2+bc \\
(a+b+c\times a) = a^2+ab+ac \\
\hline
(a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{l}
(a+b)+c \\
(a+b)+c \\
\hline
\end{array}$$

lässet man nun $(a+b)$ gelten für A (oder einen Theil): so ist $(a+b)+c = A+c$; folglich:

$$\begin{array}{r}
A+c \\
A+c \\
\hline
Ac+c^2 \\
A^2+Ac \\
\hline
\end{array}$$

giebt $A^2+2Ac+c^2$ als Quadrat.

D 4 Wenn die dreitheilige Wurzel auch negative Größen hat, so entstehet folgendes Quadrat, Produkt:

$$\begin{array}{r}
a+b-c \\
a+b-c \\
\hline
(a+b-c\times -c) = -ac-bc+c^2, \\
(a+b-c\times b) = ab+b^2-bc \\
(a+b-c\times a) = a^2+ab-ac \\
\hline
(a+b-c)^2 = a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2.
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \end{array} \quad
\begin{array}{r}
A-c \\
A-c \\
\hline
-Ac+c^2 \\
A^2-Ac \\
\hline
A^2-2Ac+c^2
\end{array}$$

Bei-

Beispiel in Zahlen.

$\sqrt{125} = 100 + 20 + 5$ auch $= 120 + 5$ (oder 12 Zehner und 5 Einheiten.)

$$
\begin{array}{r}
125 \\
125 \\
\hline
625 \\
250 \\
125 \\
\hline
15625\,\square.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
100 + 20 + 5 \\
100 + 20 + 5 \\
\hline
100 \times 100 = 10000 = a^2. \\
\left.\begin{array}{r} 100 \times 20 = 2000 \\ 20 \times 100 = 2000 \end{array}\right\} = 2ab. \\
20 \times 20 = 400 = b^2. \\
\left.\begin{array}{r} 100 \times 5 = 500 \\ 5 \times 100 = 500 \end{array}\right\} = 2ac. \\
\left.\begin{array}{r} 20 \times 5 = 100 \\ 5 \times 20 = 100 \end{array}\right\} = 2bc. \\
5 \times 5 = 25 = c^2. \\
\hline
15625\,\square.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
120 + 5 \\
120 + 5 \\
\hline
120 \times 120 = 14400 = A^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
\left.\begin{array}{r} 120 \times 5 = 600 \\ 5 \times 120 = 600 \end{array}\right\} = 2Ac = 2ac + 2bc. \\
5 \times 5 = 25 \\
\hline
15625\,\square.
\end{array}
$$

Mit negativer Größe also:

$$
\begin{array}{r}
100 + 20 - 5 = = 115 \\
100 + 20 - 5 = = 115 \\
\hline
100 \times 100 = 10000 = a^2. \\
\left.\begin{array}{r} 100 \times 20 = 2000 \\ 20 \times 100 = 2000 \end{array}\right\} = 2ab. \\
20 \times 20 = 400 = b^2. \\
\left.\begin{array}{r} 100 \times -5 = -500 \\ -5 \times 100 = -500 \end{array}\right\} = -2ac \\
\left.\begin{array}{r} 20 \times -5 = -100 \\ -5 \times 20 = -100 \end{array}\right\} = -2bc \\
-5 \times -5 = +25 = c^2.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
115 \\
115 \\
\hline
575 \\
115 \\
115 \\
\hline
13225\,\square.
\end{array}
$$

$$(100 + 20 - 5)^2 = 14425 - 1200 = 13225\,\square.$$

Ein=