Hunderte hat, sondern nur Einheiten und Tausende: so kann auch das Multiplicandum nicht zehnfach und hundertfach genommen werden; und das tausendfache Product steht um 3 Stellen weiter links, als das Produkt der Einheiten.

Beispiele der Multiplication des Decimal-Längenmaaßes.

Wenn eine Seite eines gleichseitigen Vierecks 5° hält; wie viel halten alle vier Seiten oder der ganze Umriß dieses Vierecks in Summa?

$$4 \times 5 = 20^\circ.$$

Wäre nun dieses Viereck z. B. ein mit Wänden oder Mauern eingeschlossener Garten, so hätte dessen Besitzer 20 Ruthen Wand oder Mauerwerk in der Länge zu unterhalten; wobei die Höhe und Dicke noch nicht in Anschlag gebracht ist.

Wenn ein Stük Feld $20^\circ\ 8'$ lang ist; wie viel beträgt die Länge von 10 eben so langen Stücken zusammen?

$$\begin{array}{lcl} 20^\circ + 8' & & 200^\circ \\ \underline{10 \quad = 10} & & \underline{\text{addirt } 8^\circ} \\ 200^\circ (+ 80' = 8^\circ) & = & 208^\circ. \end{array}$$

Wie viel betragen $10^\circ\ 8'\ 4''$ achtmal genommen?

10°

$$\left.\begin{array}{l} 10^\circ + 8' + 4'' = 10^\circ 8' 4'' \\ \underline{8} = \underline{8} = \underline{8} \qquad \underline{8} \\ 80^\circ + (64' = 6^\circ 4') + (32'' = 3' 2'')\ 86^\circ 7' 2'' \end{array}\right\} \text{nach gewöhnlicher Multiplications-Art.}$$

Diese einzelnen Produkte, nemlich

$$\begin{array}{l} 80^\circ \\ \ \ 6^\circ\ 4' \\ \qquad 3'\ 2'' \text{ addirt,} \\ \hline \end{array}$$

geben $86^\circ\ 7'\ 2''$ als Product des Ganzen.

Auch bei der Multiplication muß man besonders darauf Acht haben, ob die Faktoren aus positiven oder negativen Größen bestehen.

Ist das Multiplicandum und der Multiplicator zugleich positiv oder beide zugleich negativ (so, daß beiderlei Faktoren einerlei Zeichen haben, es sei + oder —:), so wird das Produkt in beiden Fällen positiv, oder bekommt das Zeichen + vor sich. Denn es ist auf jedem Fall Gewinn, ob einer an jedem der 6 Wochen Tage 4 gl. (also 6 × 4 gl. = 24 gl.) erwirbt, oder ob einer, der sonst gewöhnlich jeden Tag 4 gl. auf sein Vergnügen wendet, dieses 6 Tage lang unterläßt, also eine Ausgabe von 4 gl. sechsmal nicht hat, (oder — 6 × — 4 gl. = 24 gl.) weil er ja nun wirklich um 6 × 4 gl. = 24 gl. reicher ist.

Es ist also völlig einerlei, ob ein Besitz vervielfältiget wird, oder ob ein Mangel vielmal gehoben wird; denn aus dem leztern Verfahren entsteht auch ein eben so vielfacher Besitz.

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ \text{multipl. } d \\ \hline ad + bd + cd \end{array}$$

Man multiplicirt a durch d, so bekömmt man ad, ferner b durch d u. s. f., bis man das Produkt ad + bd + cd bekömmt. Denn

$$a \times d = ad.$$
$$b \times d = bd.$$
$$c \times d = cd.$$

Soll 4 mit + 2 multiplicirt oder 2 mal zusammengesezt (addirt) werden, so entsteht daraus das Produkt 8. Denn

$$\begin{array}{l} +4 \\ +4 \\ \hline \text{giebt } 8. \end{array}$$

$$a \times d + b \times d + c \times d = ad + bd + cd$$
$$4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 8 + 6 + 4 = 18.$$

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \\ bb+ab\quad+bc \\ cc\quad+ac+bc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4+3+2=9 \\ 6+4+3=13 \\ \hline 24+18+12 \\ 16+12+8 \\ 12+9+6 \\ \hline 52+39+26=117. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+c+d \\ b+d \\ \hline ab+bc+bd \\ ad+cd+dd \\ \hline ab+ad+bc+bd+cd+dd \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6+4+3=13 \\ 6+4+3=13 \\ \hline 36+24+18\quad\quad. \\ 16+24\quad\quad+12. \\ 9\quad\quad+18+12. \\ \hline 61+48+36+24=169 \end{array}$$

— a

$$\begin{array}{c} -a - b - c \\ \text{multiplic.} \; -d \\ \hline ad + bd + cd \end{array}$$

Multiplicirt man $-a$ durch $-d$, so zeigt dieses an, daß $-a$ mal ($\times$) $-d$ weggenommen (subtrahirt) werden soll; folglich bekömmt man zum Produkte nicht nur $+a$, sondern auch $+a \times d$ oder ad u. s. f.

Soll -4 mit -2 multiplicirt werden, so kann dieß nichts anders heißen, als -4 zweimal wegnehmen (subtrahiren), oder den Mangel 4 zweimal aufheben.

Ist aber der eine Faktor positiv und der andere negativ, oder (welches eben so viel ist,) haben beide Faktoren verschiedene Zeichen, so ist ihr Produkt allemal negativ, oder man setze jedesmal in solchem Falle das Zeichen $-$ vor das Produkt. Denn es ist z. B. allemal ein Verlust, wenn an jeder von 4 Mandeln Aepfel, die man kauft, 3 Stück fehlen; weil man alsdann 4 mal einen Verlust von 3 Aepfeln hat, oder 12 Stück weniger als man haben sollte: folglich ist $(4 \times -3) = (-12)$.

Eben so, wenn einer an jeder von 4 vollen Mandeln 3 Stück wirklich zu fordern hätte, die 4 Mandeln aber gingen gänzlich verlohren, so hätte dieser einen vierfachen Verlust von 3 Aepfeln, die sein Eigenthum sind. Er büßet also auch 12 Aepfel ein; folglich ist $(-4 \times 3) = (-12)$.

Es ist also gleich viel, ob man etwas Vorhandenes mehreremale wegnimmt, oder ob man einen Mangel so vielfach macht, als der eine Faktor besagt.

$$\begin{array}{rr} +a & -a \\ -b & +b \\ \hline -ab & -ab. \end{array}$$

$$-b \times +a = -ba.$$

Das negative b wird hier + a mal genommen, oder durch a vervielfältiget: also $-(b \times a)$.

$$+b \times -a = -ba.$$

Das positive b wird hier a mal weggenommen, also $-(b \times a)$.

$$\begin{array}{rcr} +\ 4 \text{ rth.} & \qquad & -\ 4 \text{ rth.} \\ -\ 4 & & +\ 4 \\ \hline -\ 16 \text{ rth.} & & -\ 16 \text{ rth.} \end{array}$$

Es ist hier einerlei, ob zum Beispiel der Besitz von 4 rth. viermal verlohren geht, oder ein viermaliger Mangel von 4 rth. entsteht; das heißt: wenn der Mangel von 4 rth. wirklich 4 mal sich einfindet, denn es entsteht daraus in jedem Fall ein Mangel von 16 rth. (oder — 16 rth.). Das + wird also so viel mal weniger, oder fehlt so vielmal, und das — wird so viel mal mehr, als der eine Faktor angiebt; es wird folglich jedes malweniger.

Man

Vermischte Beispiele:

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
\multicolumn{4}{l}{a + b + c} \\
\multicolumn{4}{l}{a - b - c} \\
\hline
aa & + ab & + ac & \\
 & - ab & & - bb - bc \\
 & & - ac & \qquad\; - bc - cc \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{aa \qquad\qquad - bb - 2bc - cc.}
\end{array}
$$

Man multiplicire $a + b + c$ durch a, so bekömmt man $aa + ab + ac$. Ferner $a + b + c$ durch $- b$. Hier wird der Multiplicandus a, b mal kleiner; eben so muß das ganze Multiplicandum $(a + b + c) \times - b$ so viel mal kleiner werden, als die negative Größe b besagt, oder ist $= (- ab - bb - bc)$. Eben so $a + b + c$ durch $(- c)$.

Addiret man nun dieses dreifache Produkt, so besteht das ganze Produkt in der Summe $aa - bb - 2bc - cc$. Denn weil bei der Addition die gleichnamigen positiven und negativen Größen (z. B. $+ ab$ und $- ab$ ꝛc.) einander aufheben, folglich ganz wegfallen; so bleiben blos die Produkte $aa - bb - 2bc - cc$ als Summe, oder als Produkt der ganzen Multiplication, übrig.

Ferner:

$$
\begin{array}{l}
a - b + c \\
a + b - c \\
\hline
aa - bb - cc \\
\begin{pmatrix} - ab \\ + ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + ac \\ - ac \end{pmatrix} \begin{matrix} + bc \\ + bc \end{matrix} \\
\hline
aa - bb + 2bc - cc.
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l}
10 - 6 + 2 = 6 \\
10 + 6 - 2 = 14. \\
\hline
100 + 60 - 20 \quad 84. \\
\\
- 60 - 36 + 12. \\
+ 20 + 12 - 4. \\
\hline
100 - 36 + 24 - 4. = 84.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a + b + c \\
a - b - c \\
\hline
aa + ab + ac \\
\quad - ab \qquad - bb - bc \\
\qquad - ac \qquad - bc - cc \\
\hline
aa - bb - 2\,bc - cc.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
10 + 6 + 2 = 18. \\
10 - 6 - 2 = 2 \\
\hline
100 - 36 - 4 = + 60 \\
60 + 20 - 12 = + 68 \\
- 60 - 20 - 12 = - 92 \\
\hline
100 - 36 - 24 - 4 = 36.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
ab + c - d \\
a - b - d \\
\hline
aab + ac - ad \\
- abb - bc + bd \\
- abd - cd + dd \\
\hline
aab - abb - abd + ac - ad - bc + bd - cd + dd.
\end{array}$$

Haben die Buchstaben Ziffern vor sich, so multiplicirt man die Ziffern besonders durch einander, und sezt sie vor das Produkt der Buchstaben.

Z. B

Z. B.: $3a \times 2b$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3\,a \\ 2\,b \\ \hline 6\,ab \end{array}$

$\begin{array}{c} 5\,ab \\ 4\,c \\ \hline 20\,abc. \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} 6\,b \\ 4\,a \\ \hline 24\,abcd \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} 3\,acd \\ 9\,bef \\ \hline 27\,abcdef. \end{array}$

Einerlei Buchstaben und Zahlen, die durch einander multiplicirt werden, pflegt man bei ihrer Multiplication durch einander, auch nicht immer alle ins Produkt zu schreiben, sondern nur einen davon und zwar mit einer kleinen Ziffer oben zur Rechten des Buchstabens, welche anzeigt, wie vielmal eine Größe mit sich selbst multiplicirt sey, oder wie viel mal diese Größe als Faktor gebraucht worden. Diese Ziffer nennt man den Exponenten dieses Buchstabens.

Z. B. $a \times a$ oder aa oder a^2

$b \times b$ oder bb oder b^2

Eben so bei Zahlen:

$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$

weil hier 16 aus zwei Vieren als Faktoren entstehet.

$$ab \times ab = ab\,ab = a^2\,b^2.$$

Auf gleiche Art ist:

$\left.\begin{array}{l} 4 \times 3 \\ 4 \times 3 \end{array}\right\}$ multiplicirt, oder (12×12)

eben so viel als $4 \times 3 \times 4 \times 3$

oder $= (4^2 \times 3^2 = (16 \times 9.)$

$$\begin{array}{l} a\ b\ c \\ \underline{a\ b\ c} \\ a^2 b^2 c^2 = a \times a \times b \times b \times c \times c. \end{array}$$

Haben die Faktoren schon Exponenten, so werden diese nur addiret, z. B.

$$a^2 \times a^3 = a^5$$

$$\begin{array}{rl} \text{denn } a^2 & = a \times a \\ a^3 & = a \times a \times a \\ \hline a^5 & = a \times a \times a \times a \times a. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} a^2 & b^2 & c & d^3 \\ a & b^2 & c & d \\ \hline a^3 & b^4 & c^2 & d^4 \end{array}$$

§. 11.

Gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, geben beide gleiche Produkte. Zum Beispiel Sechs Groschen Viermal genommen und Zwölf Sechser auch Viermal genommen, geben beide ein Produkt von 24 gl. oder 48 Sechsern.

$$\begin{array}{lcl} 6 \text{ Groschen} & = & 12 \text{ Sechser} \\ 4 & = & 4 \text{ multipl.} \\ \hline 24 \text{ Groschen} & = & 48 \text{ Sechser.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} A & = & B \\ a & = & b \text{ multipl.} \\ \hline Aa & = & Bb \end{array}$$