Benz.
1168

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1168

Meßkunst

für

Schulen

und

fürs gemeine Leben

oder

für alle diejenigen

welche noch wenig davon wissen.

Zur bessern und leichtern Erlernung derselben
mit den Anfangsgründen der Buchstabenrechnung,
und einigen Theilen der gemeinen Rechenkunst
begleitet.

Von

Johann Carl Lieber

Zweyte Abtheilung.

Mit sehr vielen Figuren.

Erfurt, 1804.

Bey Georg Adam Keyser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Benz. 1168

Vorrede.

Herzlichen Dank den würdigen Männern, die meinen ersten Versuch mit eben so schonender Güte, als treffender Einsicht beurtheilt haben. Ihre Erinnerungen werden mir als ehrwürdige Rathgeber bei der Fortsetzung meiner Arbeit vor Augen stehen und mich zu desto sorgfältigerem Fleiße ermuntern.

Ueber den eigenen Plan dieses Werkchens, der Arithmetik und Geometrie auf eine sonst nicht gewöhnliche Art verbindet, und die nothwendigsten Grundlehren und Vorschriften der ersten mit den Anweisungen der Geometrie verwebet, habe ich mich schon in der Vorrede zum ersten Bändchen erklärt, und wenn es auch nicht schon überhaupt einen Anfänger in literarischen und wissenschaftlichen Arbeiten rechtfertigen oder wenigstens entschuldigen könnte, bei dem besondern Wege, den er gehet, auf würdige

Vorgänger zurück weisen zu dürfen; so wird man es ihm doch nicht verargen, wenn er — ohne mit sorgloser Gleichgültigkeit, blos dem Alltäglichen zu folgen, und ohne ein besonderes Verdienst in nutzloser Abweichung vom Gewöhnlichen zu suchen — durch nützliche Gedanken und löbliches Beispiel eines sachkundigen Mannes auf einen neuen Weg aufmerksam gemacht, diesem nach sorgfältiger Beobachtung des Ziels, zu welchem er führet, mit Ueberlegung und festem Bewusstseyn der Absicht, die ihn leitet, bis zum Ende zu folgen bemühet ist. In dieser Rücksicht achte ich mich glücklich, den ehrwürdigen Verfasser des vierten und folgenden Theils von dem allgemeinen bekannten und geschäzten hallischen Elementarwerk, als Vorgänger in dieser besondern Methode der Verbindung zweier sonst getrennten mathematischen Wissenschaften nennen zu können, ohne ein gedankenloser oder sklavischer Nachahmer desselben heißen zu dürfen.

Noch füge ich, einer Aufforderung zu Folge, etliche Worte bei, über das neuerlich von einigen achtungswerthen Männern in Anregung gebrachte und mit Wärme empfoh-

pfohlene **Duodezimal-Zahlen** — oder wie sie es nennen — **Taun-Zahlensystem**, welches mehr Widerspruch, als Beifall, gefunden zu haben scheint; aber als bloßer Anzeiger und Beurtheiler dessen, was mir von diesem System aus einigen öffentlichen Blättern bekannt geworden ist — denn das Wernebürgische Werk selbst ist mir bis jezt noch nicht zu Gesichte gekommen — kann ich denen, die noch keine Kenntnisse davon haben, oder sich wenigstens keine ihnen genügende Vorstellung davon machen können, — so weit eine Vorrede dies gestattet — nur folgendes darüber sagen:

Die Menschen, durch ihre zehn Finger veranlaßt, sind seit uralten Zeiten gewohnt, immer vom Zehnfachen zum Zehnfachen fortzuzählen, woraus die **Dekadik** oder unser allgemein gebräuchliches **Dezimal-System** entstanden ist, welches nebst andern Zahlen-Systemen, (dergleichen die Leibnitzische **Dyatik** und die Weigelische **Tetraktik**, folglich auch die **Dodekadik** oder das Wernebürgische **Taunzahlensystem** sind,) wohl am schicklichsten in der Lehre von den Potenzen und Progressionen gewürdiget wer-

den möchte. So natürlich nun dieses System für den Menschen seyn mag, so hat es doch die unverkennbare Eigenheit, daß die **Dekade** oder **der Zehner** blos durch 2 und 5, und sonst durch keine andere Zahl ohne Bruch getheilt werden kann: daher es nicht leicht ist, Drittel, Sechstel ꝛc. eines Zehners genau zu bestimmen. Deswegen ist bei Münzen, Maaßen und Gewichten und bei andern Dingen, deren vielfältige Abtheilung im gemeinen Gebrauch nöthig wurde, das Decimal-System meistentheils übergangen und eine andere Grundzahl zur Eintheilung gewählt worden. Am häufigsten hat man die Zahl 12 dazu gebraucht, weil diese sich in Halbe, Drittel, Viertel und Sechstel, ohne Bruch und Rest theilen läßt. So gab man dem Jahre 12 Monate, dem Tage 12 Stunden und eben so viel der Nacht; dem Reichsthaler zweimal 12 Groschen, dem Groschen 12 Pfennige, dem gemeinen Werkschuh 12 Zoll. So zählt man auch vieles nach Dutzenden; vieles auch nach Schocken oder dem fünffachen Dutzend, in welchem die beiderseitigen Vortheile der Dezimal- und Duodezimal-Eintheilung vereiniget

niget sind. Daher mag es kommen, daß die Geometer den Sextanten der Zirkelperipherie in 60 Grad, (folglich die ganze Peripherie in sechsmal 60 oder 360 Grade, und jeden Grad in 60 Minuten ꝛc.) eingetheilet haben.

Der Nutzen der Duodezimal-Eintheilungen empfiehlt sich selbst, und es wird nicht leicht jemand den Wunsch mißbilligen, daß man alle im gemeinen Leben üblichen Eintheilungen auf die Zahl 12 gegründet haben möchte. Dagegen hat das Dezimal-System den unläugbaren Vortheil, daß nach demselben, alle Rechnungsarten, als das Addiren, Subtrahiren ꝛc. viel leichter von Statten gehen, weswegen nicht nur die Dezimalbrüche sehr beliebt sind, sondern auch die Geometer insbesondere bei den Ruthen, Schuhen, Zollen ꝛc. lieber das Zehntheilige Maaß, als das zwölftheilige brauchen.

Es könnten aber die beiderseitigen Vortheile wohl durch allgemeine Einführung und Anwendung eines Duodezimal-Zahlensystems vereinigt und zugleich erlangt werden: wenn man nemlich nicht blos von 10 zu 10, sondern immer von 12 zu 12, fortzählte; und

zugleich auch, wie bei der Dekadik, jeden neuen Fortschritt der Zwölfner durch ein Fortrücken in der Stellung der Ziffern andeutete; so daß, wie bisher die 1 auf der zweiten Stelle nach der linken Hand zu, die zehnfache Eins anzeiget, die 2 auf derselben Stelle die zehnfache Zwei ꝛc. auch in dem **Duodezimalsystem die zwölffache Eins durch 1 auf der zweiten Stelle ausgedrückt würde**, eben so die zwölffache Zwei, Drei ꝛc. Das ist, wie bei dem Dekaden- oder Zehner-System

10 = zehnmal 1. 100 = zehnmal Zehn.
20 = zehnmal 2. 200 = zehnmal Zwanzig.
30 = zehnmal 3. ꝛc. 300 = zehnmal Dreißig ꝛc.

und 1000 = 10 × 10 × 10.
2000 = 10 × 10 × 20.
3000 = 10 × 10 × 30. ꝛc. bedeuten: so würden, (wenn die bisher gewöhnlichen Ziffern auch in dem Duodezimal-System beybehalten und nach der gewohnten Analogie angewendet werden sollen, und wenn für die beiden diesem Systeme nach zugehörigen Grundzahlen zehen und eilf noch eigene Zeichen zugeordnet werden,) die links fortrückenden Ziffern folgenden Werth andeuten:

10 = zwölfmal Eins, (oder zwölf.)
20 = zwölfmal zwei, (oder vier u. zwanzig.)
30 = zwölfmal drei, (oder sechs u. dreißig.)
40 = zwölfmal vier, (oder acht u. vierzig.)
50 = zwölfmal fünf, (oder sechzig.)
60 = zwölfmal sechs, (oder zwei und siebenzig.)
70 = zwölfmal sieben, (od. vier u. achzig.)
80 = zwölfmal acht, (od. sechs u. neunzig.)
90 = zwölfmal neun, (oder einhundert und acht.)
ε0 = zwölfmal zehn, (oder einhundert und zwanzig.)
φ0 = zwölfmal eilf, (oder einhundert und zwei und dreißig.)

Eben so:

100 = zwölfmal zwölf = 144, (des Dezimalsystems.)
200 = zwölfmal vier und zwanzig = 288 — —
300 = zwölfmal sechs und dreißig = 432 — —
400 = zwölfmal acht und vierzig = 576 — —
500 = zwölfm. sechzig = 720 — —

600 = zwölfmal zwei u. siebenzig = 864 ꝛc.
(des Dezimalsystems.)

Und so auf der vierten Stelle:

1000 = 12 × 12 × 12 = 1728, (des Dezimalsystems)
2000 = 12 × 12 × 24 = 3456, — —
3000 = 12 × 12 × 36 = 5184 ꝛc. — —

Anstatt der Dezimalbrüche würden dann mit gleichem und noch größerm Vortheil Duodezimal-Brüche eingeführt werden, und vermöge deren wäre:

0,1 = $\frac{1}{12}$.
0,2 = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
0,3 = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
0,4 = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
0,5 = $\frac{5}{12}$.
0,6 = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. ꝛc.

0,01 = $\frac{1}{144}$.
0,02 = $\frac{2}{144} = \frac{1}{72}$.
0,03 = $\frac{3}{144} = \frac{1}{48}$.
0,04 = $\frac{4}{144} = \frac{1}{36}$.
0,05 = $\frac{5}{144}$.
0,06 = $\frac{6}{144} = \frac{1}{24}$ ꝛc.

Eben so:

0,001 = $\frac{1}{1728}$ ꝛc.

Und wer sieht nicht schon an diesen wenigen Beispielen, daß die Progression in dem Duodezimal- oder Zwölfner-System merklich stärker ist, als in dem Dezimal- oder Zehner-System? denn 100 nach dem erstern

erstern = 144 ist ja beinahe um die Hälfte mehr als 100 nach dem leztern und 1000 nach dem erstern = 1728 ist weit über die Hälfte mehr, als 1000 nach dem leztern.

Dagegen sind aber auch mehrere Schwierigkeiten, die nicht alle gleich leicht zu überwinden sind, unverkennbar. Die vornehmsten sind:

1. Wenn man auch für dieses mehr umfassende System die bisher gewöhnlichen Ziffern des Dezimalsystems um mehrerer Bequemlichkeit willen lieber beibehalten, als lauter eigene neue Zeichen ersinnen will: so wird gleichwohl noch die Einführung zweier neuer Ziffern nöthig, mit welchen zehen und eilf bezeichnet werden müßte; da 10 und 11 nach dem Decimalsystem zwölf und dreizehen des Dezimalsystems andeuten. Diesem Bedürfniß hat jedoch schon Hr. Werneburg einfach und gut abgeholfen, indem er zur Bezeichnung der Zehen eine umgewendete oder links gekehrte 3 (ε) und zur Bezeichnung der Eilf eine senkrecht durchstrichene Null (Φ) vorgeschlagen hat; welche neue Zeichen den Zifferlettern der Druckereyen leicht beigefügt werden könnten. Aber

2) um Verwirrung und Verwechselung mit dem Zehnersystem (welches aus leicht begreiflichen Ursachen immer dabei mit bestehen könnte) zu vermeiden; dürften die Benennungen der steigenden Potenzen des Zehnersystems, nämlich **Hundert**, **Tausend** ꝛc. **Millionen** ꝛc. wohl nicht schiklich auf die ähnlich steigenden Potenzen des Duodezimalsystems übergetragen werden; so wäre es zum Beispiel nicht rathsam, auch die zwölffachen **Zwölfner** (oder **Taun**, wie Hr. Werneburg sie nennt), als 100 (= 144) 200 (= 288) 300 = (432) ꝛc. durch die Benennungen **einhundert**, **zweihundert**, **dreihundert** ꝛc. auszudrücken, wie man schon bei den zehnfachen Zehnern thut. Es müßten also neue, aber eben so einfache, als der Natur des Duodezimalsystems angemessene Benennungen der steigenden Potenzen, eingeführt werden; um dieses neuere System schon durch den Ausdruck deutlich zu unterscheiden. Wiefern Hr. Werneburg auch für dieses Bedürfniß hinlänglich gesorgt habe, bleibt dem Urtheil derer überlassen, die sein Werk selbst gelesen und geprüfet haben.

Noch

Noch aber ist die größere Bedenklichkeit übrig, nämlich:

3) Da es schon ohnedies vielen Anfängern schwer wird, das Dezimal-System gehörig zu durchschauen und sich darinnen festzusetzen: so würde die Erlernung dieses neuen Systems aus mancherlei Ursachen noch mehrere Schwierigkeiten für sie haben, und weil doch wegen der schon vorhandenen Rechnungen und Schriften, in welchen das Dezimal-System herrscht, und die man weder alle vertilgen, noch umarbeiten wird, das Dezimal-Zahlensystem auch mit beibehalten und gelernt werden müßte; so würden mehrere, deren Beruf die Kenntniß beider Systeme forderte, mit doppelter Schwierigkeit zu kämpfen haben und mehr Zeit aufwenden müssen; obgleich übrigens die Rechnungsarten (nämlich das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren) in beiden Systemen einander analog bleiben.

Eine nicht geringere Schwierigkeit würde auch

4) Die Uebertragung des Zahlenwerthes aus dem einen Systeme in das andere, welche besonders im Anfange der Einführung, unvermeidlich und häufig erfordert würde, verursachen; wenigstens würde die gegenseitige Berechnung denen, die damit nicht vertraut wären, zumal wenn es durch Kopfrechnung und in Geschwindigkeit geschehen sollte, keine geringe Mühe machen und zu mancherlei Fehlern Anlaß geben.

Daher darf man sich wohl nicht wundern, wenn unser Zeitalter, und vielleicht auch einige folgende, zur Aufnahme dieses mühsamer scheinenden Systems wenig geneigt sind. Es folgt aber darum nicht, daß es niemals seine Freunde und Anhänger finden werde. Was wir jezt für entbehrlich ansehen, das kann vielleicht eine in der geistigen Bildung höher gestiegene Generation der Nachwelt, für ihre höheren Bedürfnisse sehr angemessen finden; wie sich jetzo die Mathematiker und Astronomen durch Hülfe der Logarithmen und algebraischen Gleichungen so manche große und weitläuftige Rechnung abkürzen und erleichtern, die vielleicht unsern

Urvätern für eine herkulische Arbeit gegolten hätte. Und wer ist Bürge dafür, daß nicht dereinst unsere Nation, die jezt die Bemühung ihres Mitbürgers mit kalter Gleichgültigkeit ansiehet, den von ihm mitgetheilten Gedanken, wenn er von einem Franzosen oder Engländer aufgefaßt, ausgeführt und als eigene Erfindung in ein glänzendes Licht gestellt seyn wird, als eine wichtige Entdekkung willig annehmen und hochachten werde? so wie auch schon der schottländische Baron John Nepper als Erfinder der Logarithmen gepriesen worden ist; obgleich der deutsche Justus Byrge, oder noch wahrscheinlicher der ebenfalls deutsche Melchior Stiefel, welcher schon in seiner 1545 gedrukten arithmetica integra deutlich von Logarithmen gesprochen und sie erklärt hat, gerechten Anspruch auf die Ehre und das Verdienst der Erfindung machen konnte.

Uebrigens überlasse ich es billigermaßen dem geehrten Publikum, und vorzüglich sachkundigen Männern, sowohl diese meine unbefangene Darstellung des Werneburgischen Taunzahlensystems, als auch meine

Ar-

Arbeit in diesem zweiten Bändchen, nach Gebühr zu würdigen; da ich den ernstlichen Wunsch hege, durch meine Bemühung wirklich nüzlich zu werden, und Anfängern das Erlernen und Fassen zweier wichtiger Wissenschaften zu erleichtern.

Buttstädt, den 16. März
1804.

Der Verfasser.

Inhalt.

Inhalt.

Seite:

Von Parallellinien ... 1
Parallellinien zu ziehen ... 6
Von den Figuren ... 12
Von den Dreiecken ... 17
Von den Vierecken ... 20
Vervielfältigung oder Multiplication der Größen 23
Beispiele der Multiplication des Decimallängenmaaßes ... 30
Vom Quadrat-Maaße ... 39
Multiplication des Decimal-Flächenmaaßes oder der Länge mit der Breite ... 44
Von Erhebung der Größen zu Quadraten und von Quadratzahlen ... 46

Er-

hinter den Titelbogen pag. XVI geheftet.

Errichtung gleichseitiger Dreyecke ; ; 57
Errichtung gleichschenklicher Dreiecke ; ; 61
Deckung der Dreiecke ; ; ; 62
Zeichnung gleichseitiger Dreiecke und Winkel 65
Die Weite zweyer Gegenstände zu messen ; 67
Die Weite zweyer Oerter zu finden, welche man geradezu nicht messen kann ; ; 68
Dreiecke von bestimmter Größe zu errichten ; 74
Theilung eines gleichschenklichen Dreiecks ; 77
Jedes gleichseitige Dreieck hat gleiche Winkel 79
Theilung einer geraden Linie in zwei Theile ; 81
Wie theilt man einen Winkel in zwei gleiche Theile 83
Wie errichtet man eine senkrechte Linie auf einem gegebenen Punct einer geraden Linie ; 84
Errichtung senkrechter Linien im Felde ; 85
Errichtung senkrechter- und Parallellinien ; 97
Summe der Winkel in einem Dreiecke ; 77
Folgesätze des 28sten Paragraphs ; ; 99
Von den äußern Winkeln der Dreiecke ; 102
Theilung eines geraden Winkels in drei Theile 105
Errichtung einer senkrechten Linie auf dem Ende einer geraden Linie ; ; ; 106
Der größte Winkel in jedem Dreiecke steht der größten oder längsten Seite gegen über ; 108
Folgerung der Lehrsätze I. u. II. des 38 Paragraphs 110

Senkrechte Linien zu errichten , , 113

Senkrechte Linien zwischen Parallellinien stehen auf beiden Linien senkrecht , , , 114

Länglichte Vierecke zu zeichnen , , 118

Eine Raute zu zeichnen , , , 119

Die Queer- oder Diagonallinie theilt das Parallelogramm in zwei gleiche Theile , , 120

Im Parallelogramm sind die einander entgegenstehenden Seiten und Winkel gleich groß 122

Dreiecke von einerlei Grundlinie und zwischen Parallellinien, sind einander gleich; oder Dreiecke von einerlei oder gleichen Grundlinien , 126

Vielecke in Dreiecke zu verwandeln , , 129

Von geradlinichten Dreiecken , , 130

Von geradlinichten Vierecken , , 133

Quadrate zu verdoppeln , , , 135

Quadrate zu addiren , , , 138

Wie findet man die Differenz oder den Unterschied zweier Winkel oder Quadrate , , 141

Ausmessung der Parallelogramme , , 145

Rauten und Rhomboiden zu messen , , 147

Berechnung der Trapeze von zwei Parallelseiten oder Verwandlung derselben in Parallelogramme 148

Aus-

Ausmessung und Berechnung unregelmäßiger Flächen
in schicklichen Fällen, durch Parallel-Trapeze 151
Messung krummlinichter Parallelflächen " " 156
Verwandlung der Dreiecke in Parallelogramme 159
Verwandlung der Dreiecke in Vierecke " 161

Von

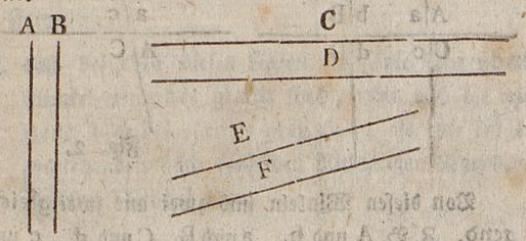
Diese zwey Blätter Inhalt werden ausgeschnitten

Von Parallellinien.

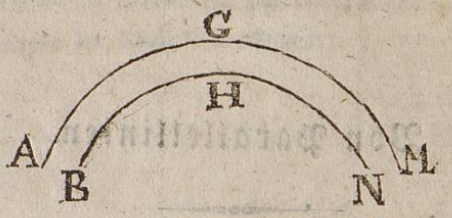
§. 1.

Parallellinien oder gleichlaufende Linien, sind solche, die in einerlei Ebene und Richtung neben einander hinlaufen, und in jedem Punkte gleich weit von einander entfernt bleiben: solche Linien können also niemals zusammentreffen, man mag sie auf beiden Seiten verlängern, so weit man nur will, oder kann.

So sind zum Beispiel die Linien AB. CD und EF parallel.



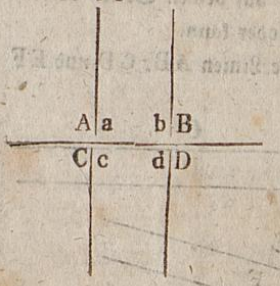
Eben so laufen auch Zirkellinien und Bogen, die aus einem und demselben Mittelpunkte gemacht sind, einander parallel um ihren Mittelpunkt, z. B. die Bogenlinien A G M und B H N



§. 2.

Wenn zwei gerade Parallellinien von einer dritten Linie durchkreuzt werden; so entstehen durch dieses Verfahren in diesen drei Linien acht Winkel, nemlich vier äußere Winkel A B C D und vier innere Winkel a b c d.

Fig. 1.



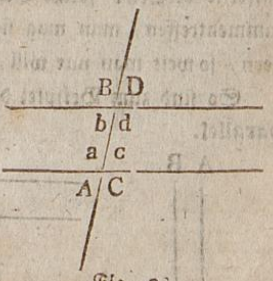


Fig. 2.

Von diesen Winkeln sind zwei und zwei gleichliegend. Z. B. A und b. a und B. C und d. c und D. Gleich-

Gleichliegend heißen diese Winkel darum, weil sie in der zweiten Parallellinie dieselbe Lage, wie in der ersten, und in der ersten Parallellinie, wie in der zweiten, gegen einander haben. Wollte man die erste Linie mit ihren Winkeln auf die zweite legen: so würden die sogenannten gleichliegenden Winkel auf einander fallen. Von diesen acht Winkeln sind wieder diejenigen, die einander entgegengesezt liegen, zwei und zwei zusammen Wechselwinkel: nemlich a und d. c und b sind innere Wechselwinkel; hingegen A und D. C und B äußere Wechselwinkel.

In der Folge werden diese Lehrsätze näher bestimmt und aus einander gesezt werden; nemlich:

I) Daß zwei Parallellinien von einer dritten durchkreuzt, sowohl innere als äußere gleiche Wechselwinkel haben, oder daß

a = d.
c = d.
A = D.
C = D.

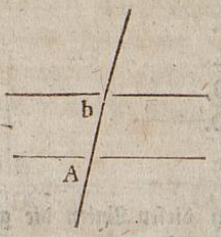
Ferner:

II. daß bei eben diesen Linien die gleichliegenden Winkel einander gleich sind, oder daß die innern Winkel eben so groß sind, als die entgegenstehenden nach denselben Richtungen liegenden, äußern Winkel oder

A = b.
C = d.
a = B.
c = D.

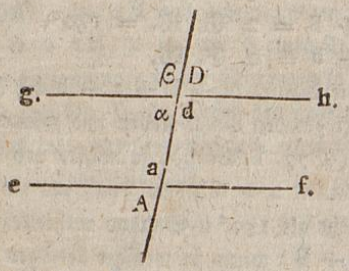
In der ersten Figur, wo die Durchkreuzungslinie die Parallellinien senkrecht schneidet, fällt die Richtigkeit dieser Lehrsätze ohne Beweis von selbst in die Augen, weil durch dieses Verfahren gerade oder sogenannte rechte Winkel entstehen, die einander alle gleich sind (§. 53. I. Abthl.).

Legte man aber in der zweiten Figur die erste Parallellinie mit ihren Winkeln in die zweite, so daß in beiden die Winkel zusammenfallen, so würden nicht nur die einander entgegenstehenden oder gleichliegenden Winkel, zum Beispiel A und b oder b und A,



einander decken und also einander gleich seyn (§. 51. I. Abthl.); sondern man würde auch dadurch die Wechselwinkel in Scheitelwinkel verwandeln, die als solche auch einander gleich sind (§. 93. I. Abthl.).

g.



Wird die Linie ef auf die Linie gh gelegt, und zwar so, daß in beiden die Winkel in einander fallen: so kömmt der ∟ A auf den ∟ α, und der ∟ a auf den ∟ ß zu liegen.

Folglich wird der ∟ A ein Scheitelwinkel von D und eben so der ∟ a ein Scheitelwinkel von d.

Ist aber der ∟ A = ∟ α, so muß er auch = ∟ D seyn (§. 62. I. Abth.). Eben so der ∟ a = ∟ d.

III. Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden: so machen die zwei innern Winkel zusammengenommen zwei gerade oder rechte Winkel, oder 180°, aus.

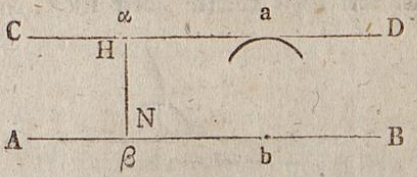
$A + B = 2.\ G.\ W. = 180°.$

$a + b = 2.\ G.\ W.$

Weil die Winkel $A + B + a + b$ als Nebenwinkel auf zwei geraden Linien stehen und zusammen 360° ausmachen (§. 73. I. Abthl.), so müssen nothwendig entweder die Winkel $a + b$ größer seyn, als die $\angle A + B$ wenn sie mehr als 180° in Summa enthielten, oder kleiner als $A + B$, wenn sie weniger betrügen als 180°.

Oder auch die Winkel $A + B$ müßten größer oder kleiner seyn, als die $\angle a + b$. Da nun aber die Größe der Winkel in der Neigung ihrer Schenkel besteht (§. 51. I. Abthl.); diese aber bei beiden innern Winkeln (außer dem Schenkel CD, welchen sie beide mit einander gemein haben) aus Parallellinien bestehen, die als solche auf beiden Seiten einerley Richtung gegen einander behalten, man mag sie verlängern, so weit man nur will: so müssen auch die $\angle a + b$ eben sowohl 180° haben, als die $\angle A + B$.

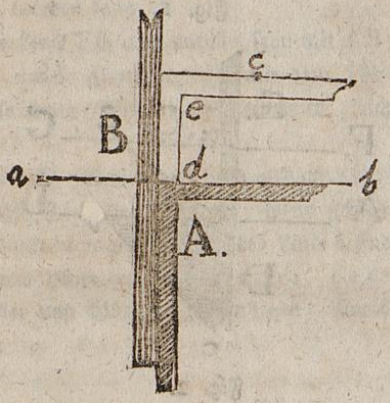
Parallellinien zu ziehen.



Die gegebene Linie sei AB; durch den Punkt α soll eine Linie mit der gegebenen parallel gezogen werden.

Vom Punkte α lasse man eine senkrechte Linie αβ auf die gegebene Linie AB fallen; und nun ziehe man mit

mit dem Halbmesser $\alpha\beta$ aus einem andern beliebigen Punkte der Linie AB, z. B. aus b einen Bogen in a; wodurch die Entfernung a b der Distanz $\alpha\beta$ gleich gemacht wird: an den Punkt α und den äußersten Punkt des Bogens a legt man die Schärfe eines Lineals an, und zieht die Parallellinie CD.



Um vermittelst eines Winkelhakens und Lineals für die Linie a b durch den beliebigen Punkt c eine Parallellinie zu ziehen, legt man die eine Kante des Winkelhakens A ganz genau an die gegebene Linie a b an; und an die andere Kante hält man ein Lineal B genau und fest. An diesem Lineal schiebt man das Winkelmaas hinauf, bis an den gegebenen Punkt c, wo die Parallellinie gezogen werden soll, und nunmehr nach dem Winkelmaaße gezogen werden kann.

Da die innern Winkel e + d als gerade in Summa

zwei geraden Winkeln gleich sind (§. 2. III.) so müssen die Linien parallel seyn.

Noch leichter sind auf diese Art vermittelst eines hölzernen Dreiecks Parallellinien zu ziehen.

Durch den Punkt C soll eine Linie parallel mit AB gezogen werden. Siehe Figur 1 und 2.

Fig. 1.

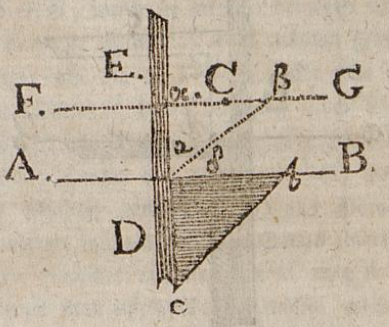
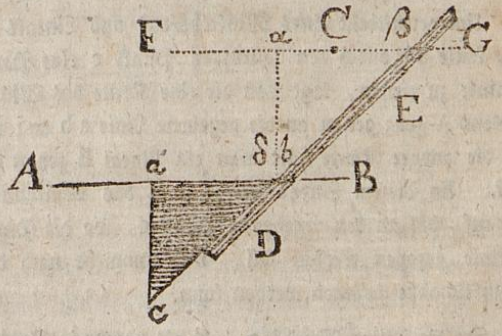


Fig. 2.



Man

Man legt das Dreieck a b c mit seiner einen Kante a b an die Linie A B an; die andere Kante a c oder b c des Dreiecks leget man am Lineal E D dicht an, und schiebt an dem in dieser Lage festgehaltenen Lineale das Dreiek so weit in die Höhe, bis es den Punkt C erreicht; wo alsdann, wie beim Winkelhaken, die Parallellinie gezogen werden kann.

Die Linie F G muß parallel seyn mit A B, weil der Winkel $\alpha\beta\delta$ gleichliegend mit dem Winkel a b c; und also beide Winkel selbst einander gleich sind (§. 2. II)

Anmerk. Das Lineal wird alsdann nur schief angelegt (Siehe die 2te Figur), wenn sich der gegebene Punkt nicht gerade über der Linie befindet.

Durch Hülfe der Parallellineale, die von verschiedener Art und Güte zu seyn pflegen, Parallellinien zu ziehen:

C

A. _____ B.

Das gewöhnliche Parallellineal, wie man es in den Reißzeugen findet (welches aber in vielen Fällen unbrauchbar ist), besteht aus zwei Linealen, die durch bewegliche messingene Bänderchen so zusammengefügt sind,

daß sie in gleichförmiger Bewegung zusammen und von einander geschoben werden können.

Sollte durch den Punkt C eine Linie mit AB parallel gezogen werden: so legt man das eine Lineal ab auf die Linie AB und thut das andere auf bis zum Punkte C, wo alsdann die Linie gezogen werden kann.

Anmerkung. Ein brauchbares Werkzeug zum Zeichnen gleichlaufender Linien, als dieß Parallellineal, giebt das Anschlagelineal oder die sogenannte Reißschiene ab; doch kann es nur bei den Zeichnungen auf's Reißbret *) angewendet werden. Das Anschlagelineal besteht aus einem Lineal ab, welches auf einem damit verbundenen Queerholz ee senkrecht steht. Auf diesem Queerholz ist ein eben so großes Queerholz cc

*) Für Anfänger sind Reißbreter von der Größe eines gewöhnlichen Papierbogens hinreichend. Gewöhnlich sind sie mit einem Rahmen versehen, in dessen Falzen, worauf das Papier genau gelegt und die von lezterm übrig bleibenden Ränder um die Kanten und Seitenflächen des Reißbrets zurükgebogen werden müssen, genau eingreifen muß. Auf der linken Seite wird das eingelegte Bret mit Queerriegeln festge-

c c beweglich, welches mit der Stellschraube k zusammengezogen und festgehalten werden kann.

Schlägt man das untere Queerholz an die Seitenfläche des Reißbrets an: so kann man in allen möglichen Richtungen Parallellinien ziehen, je nachdem die Schraube gestellt wird.

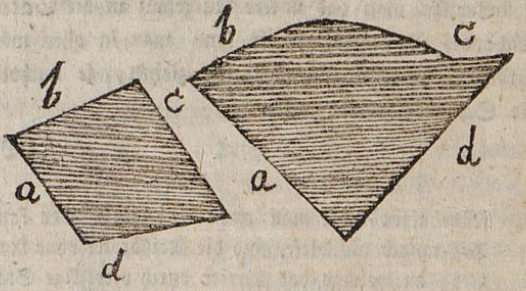
Von

festgehalten, die man aus- und einschieben kann. Besser noch als diese, sind die Reißbreter ohne Rahmen, an welchen das Papier durch viereckige Stäbchen, welche genau in die Mitte der vier Seitenflächen des Reißbrets eingepaßt sind, festgehalten wird. Die Reißbreter müssen von Lindenholz ohngefähr ein oder ein und einen halben Zoll dick, sehr glatt und eben gehobelt und überhaupt genau gearbeitet seyn; und müssen unter andern Haupteigenschaften auch besonders gerade Seiten und Winkel haben. Man kann sich auch nur ein viereckiges Bret zurichten lassen, von der Größe des darauf zu befestigenden Papierbogens, oder so, daß davon auf allen vier Seiten ein Zoll übergeschlagen werden kann, und klebt den Ueberschlag oder die Seitenenden des Papiers, mit einem Kleister von Stärke, in welchen etwas Hausenblase gekocht wird, an.

Wird das Zeichenpapier vor dem Aufspannen mit einem feuchten Schwamme gleichförmig überfahren, und dann behutsam auf das Bret gespannt: so wird das Papier, nachdem es wieder abgetroknet ist, genau aufliegen; zu diesem Verfahren gehört aber einige Uebung, wenn es gelingen soll.

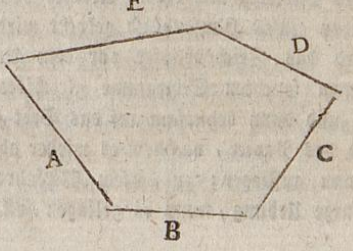
Von den Figuren.

§. 3.



Eine Figur ist ein Raum, welchen Linien einschließen, z. B. abcd; so fern man sich diese Linien als Gränzen des Raums deutlich mit vorstellt. Diese Gränzlinien der Figur heißen ihre Seiten: und der Raum zwischen den Linien heißt die Fläche der Figur. Hieraus folgt: daß der Raum an sich eine Fläche heißt; unter Figur aber nicht nur der Raum, sondern auch seine Gränzlinien mit verstanden werden.

Alle Seiten der Figur, so fern sie zusammen ein Ganzes ausmachen, indem sie um die Fläche herumlaufen, heißen der Umriß oder Umfang. (Perimeter)

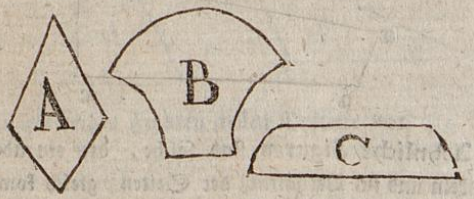


A

ABCDE ist der Umriß des Ganzen und bildet mit dem darinnen enthaltenen Raume eine Figur ab, der Raum aber selber, den dieser Umriß einschließt, heißt nur die Fläche dieser Figur.

Hieraus folgt, daß nur die Seiten oder Gränzlinien eine Figur ihrer wahren Gestalt nach bestimmen können. Wer mitten auf dem Meltmeere sich befindet, der sieht zwar die Fläche des Meeres, aber nicht dessen Figur; weil er den Umriß oder die Gränzlinien der Ufer nicht übersehen kann. Auf einer Land- oder See-Charte, wo man das Ganze übersehen kann, sieht man auch dessen Figur oder Gestalt aus dem Umrisse, oder den Gränzlinien.

Geradlinicht heißt eine Figur, die von geraden Linien umgränzt ist, wie Figur A: krummlinicht, wenn sie von krummen Linien eingeschlossen ist, wie Figur B: heißt sie aber vermischtlinicht, so sind auch ihre Gränzlinien zum Theil gerade und zum Theil krumme, wie Figur C.

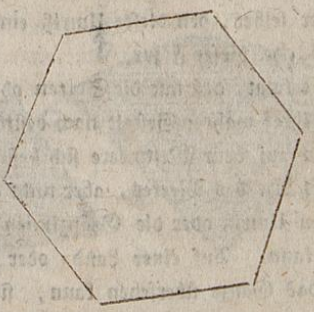


Unter den krummlinichten Figuren ist der Kreis der merkwürdigste.

Eine reguläre Figur ist, die lauter gleiche Seiten

und

und Winkel hat, z. B. das Sechseck der Bienenzellen,

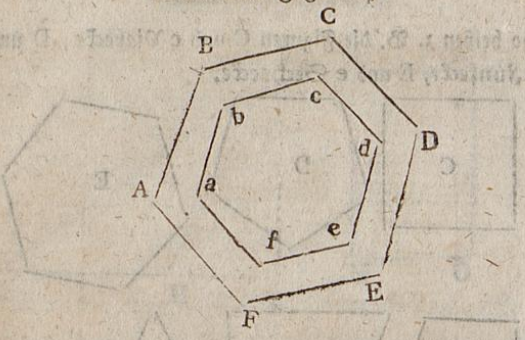


oder in der wenigstens die einander entgegenstehenden Winkel und Seiten einander gleich sind, z. B. das längliche Viereck eines gewöhnlichen Tisches oder einer Stubenthür.

Irreguläre Figuren haben ungleiche Seiten und ungleiche Winkel, z. B. die Figur a b c d.

Aehnliche Figuren sind solche, die einander in Winkeln und im Verhältniß der Seiten, gleich kommen, aber nicht einerlei Größe haben. Z. B. die beiden Figuren A B C D E F und a b c d e f.

zwei



§. 4.

Zwei gerade Linien bilden keine Figur, denn sie können wohl einen Winkel mit einander machen (§. 50 I. Abthl.), aber keinen Raum einschließen; daher ist eine Figur von drei Linien begränzt, die einfachste aller geradlinichten Figuren. Eine solche Figur heißt, nach der Anzahl der Linien, von welchen sie eingeschlossen ist, ein Dreieck oder Triangel.

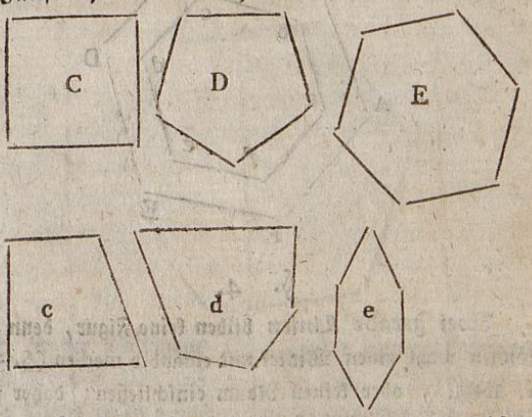
Diese beiden Figuren stellen Dreiecke vor.

§. 5.

Geradlinichte Figuren haben gewöhnlich ihren Namen von der Zahl ihrer Seiten oder Winkel bekommen.

So

So heißen z. B. die Figuren C und c Vierecke, D und d Fünfecke, E und e Sechsecke.



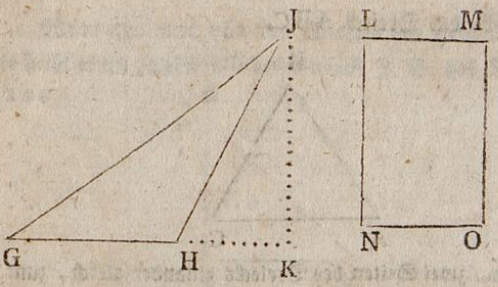
Unter diesen Figuren wird man leicht die regulären von den irregulären zu unterscheiden wissen.

§. 6.

Stellt man sich vor, daß die Figur auf einer ihrer Seiten ruhe. Z. B. folgendes Dreieck auf der Seite GH oder das Viereck auf der Seite NO, so heißt man diese Seite die Grundlinie (Basis) der Figur.

Die senkrechte Linie JK des Dreiecks, oder die senkrechte Linie LN oder MO des Vierecks, die auf der Grundlinie oder deren Verlängerung steht und den entferntesten Punkt der Figur erreicht, giebt die Höhe der Figur an.

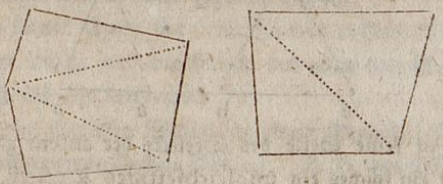
§. 7.



Von den Dreiecken.

§. 7.

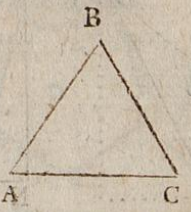
Alle mögliche geradlinichte Figuren können in Dreiecke eingetheilt werden.



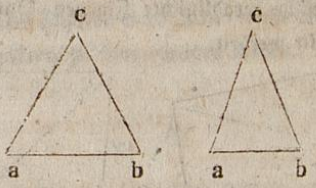
Da diese Eintheilung, wie wir in der Folge sehen werden, von großem Nutzen ist; so müssen wir diese Figur näher kennen lernen.

Sind alle drei Seiten des Dreiecks gleich, so heißt es ein gleichseitiges Dreieck; man nennt es auch ein reguläres (§. 2.)

Z. B. das Dreieck ABC.



Sind zwei Seiten des Dreiecks einander gleich, zum Beispiel wie an folgendem Dreieck die Seiten a c und b c, so heißt es ein gleichschenkliches Dreieck: und die dazwischen liegende dritte Seite a b wird die Grundlinie oder Basis genannt. Die beiden gleichen Schenkel sind entweder kleiner oder größer als die Grundlinie.



Ist keine Seite des Dreiecks der andern gleich, so heißt ein solches ein ungleichseitiges Dreieck. (Irregulares §. 2. oder Scalenum) Z. B. das Dreieck d e f.

Auch nach ihren Winkeln sind die Triangel verschieden:

Wenn

Wenn der eine von den Winkeln ein gerader ist, so heißt es ein geradwinkliches Dreieck. Z. B. das Dreieck b a c

An den geradwinklichen Dreiecken hat jede Seite ihren Namen.

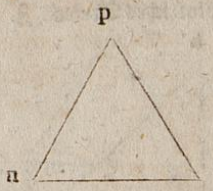
Die beiden Linien a c und a b, welche den geraden Winkel einschließen, heißen Katheten; und gemeiniglich wird der eine Kathete als Grundlinie oder Basis angenommen; weil in solchem Falle der andere Kathete a b die Höhe des Dreiecks zugleich angiebt.

Die dritte Seite b c, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, und die längste von allen drei Seiten ist, heißt die Hypotenuse.

Ist ein stumpfer Winkel an einem Dreiecke, so ist es ein stumpfwinkliches Dreieck. Z. B. das Dreieck k m l.

Hat aber der Triangel lauter spitzige Winkel, so ist

es ein spitzwinkliches Dreieck. Z. B. das Dreieck n o p.



Von den Vierecken.

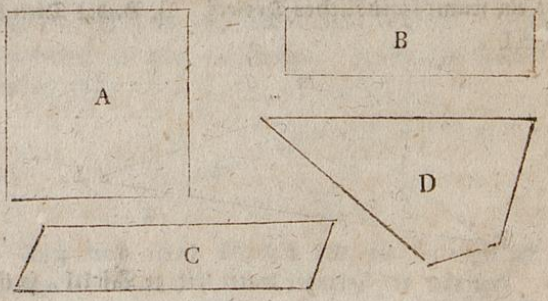
§. 8.

Nach dem Dreieck kommen die viereckigen oder vierseitigen Figuren.

Vierseitige Figuren sind entweder:

Parallelogramme, d. h. solche vierseitige Figuren, an welchen die beiden einander gegenüber stehenden Seiten völlig einander gleich sind und parallel laufen. Oder Trapezia, unregelmäßige Vierecke, wo keine Seite der andern parallel läuft oder gleich ist.

Die Figuren A, B und C sind Parallelogrammen, D ein Trapezium oder irreguläres Viereck.



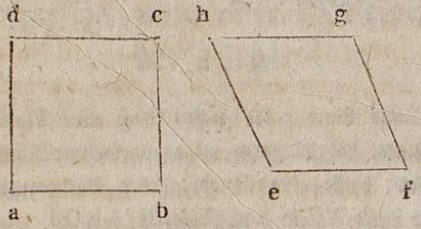
Die

Die Parallelogramme sind verschieden nach ihren Seiten und Winkeln, und dazu gehören

1) die gleichseitigen Vierecke, und diese sind entweder gerade Vierecke oder geschobene:

Die geraden Vierecke haben nicht nur gleiche Seiten, sondern auch gleiche Winkel, und heißen vorzüglich Quadrate. Z. B. a b c d.

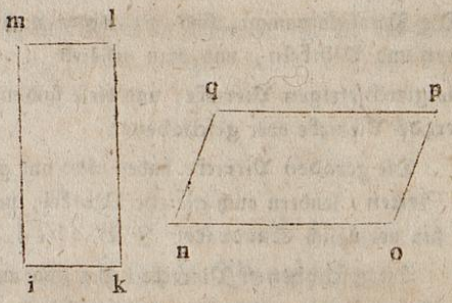
Die geschobenen Vierecke haben zwar auch vier gleiche Seiten, aber lauter schiefe Winkel, und diese Vierecke heißen Rauten oder Rhombi. Z. B. die Figur e f g h.



2) Die länglichten Vierecke, an denen nur zwei und zwei einander entgegenstehende Seiten einander gleich sind.

Sie sind auch entweder gerade, wenn sie nemlich gerade Winkel haben. Z. B. wie Figur i k l m.

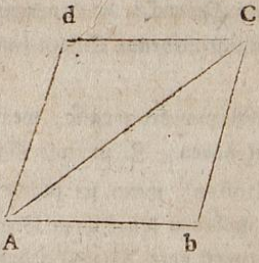
Oder geschoben, wenn sie schiefe Winkel haben; diese geschobenen länglichten Vierecke heißen längliche Rauten oder Rhomboiden (Rhomboides). Z. B. die Figur n o p q.



Anmerkung. Alle Figuren, die mehr als vier Seiten haben, heißen überhaupt Vielecke oder Polygone.

§. 9.

Diejenige Linie, die queer durch eine Figur von einem Winkel bis zu einem entgegengesetzten Winkel gezogen wird, heißt eine Queer- oder Diagonallinie. Z. B. die Linie A C in dem Vierecke A b C d.



Durch solche Queerlinien werden die Figuren in Dreiecke zertheilt. Es versteht sich aber von selbst, daß in

in Vielecken mehrere Diagonallinien gezogen werden müssen. Z. B.

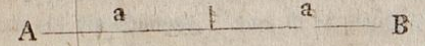
Ueberhaupt braucht man aber in jedem Vielecke drei Diagonallinien weniger, als die Figur Winkel hat.

Vervielfältigung oder Multiplication der Größen.

§. 10.

Eine Zahl (oder auch eine Größe überhaupt) vervielfältigen oder durch eine andere Zahl (oder Größe) multipliciren heißt: die erstere so oft zu sich selbst hinzusetzen, als die Einheit in der lezten Zahl und Größe enthalten ist.

a



Die Größe a zweimal genommen, oder durch zwei multiplicirt, oder auch mit andern Worten, zu sich selbst hinzugesezt (also addirt a + a) giebt 2 a, oder die Größe AB. Sezt man 4 Punkte dreimal unter einander,

der, so hat man 4 + 4 + 4, oder 3 mal 4 oder 12 Punkte.

1.) . . . . = 4.
2.) . . . . = 4.
3.) . . . . = 4.

Also die Zahl 4 dreimal genommen, oder durch 3 multiplicirt, giebt die neue Zahl 12.

4 mal 3 = 12.

Denn ich soll 4 so oft zu sich selbst hinzusezen, als die Einheit in 3 enthalten ist.

Die Größe oder Zahl, welche vermehrt oder mehreremal zu sich selbst hinzugesezt werden soll (z. B. die Größe a in obiger Figur und die Zahl 4 in vorigem Beispiel), heißt das Multiplicandum; die andere, welche anzeigt, wie viel mal jene genommen werden soll, der Multiplicator; beide nennt man Faktores *): und was herauskommt, nennt man das Product oder Factum, das Multiplum oder Vielfältig.

Multiplikandum. Multiplicator.

4 mal 3 = 12. Product.

Faktores.

Das Zeichen der Multiplication ist ein Andreaskreuz ⋈ oder ein Punkt.

*) In gewissen Rüksichten, die in der Folge erklärt werden, nennt man sie auch Ausmessungen (Dimensionen) und Wurzeln.

3 × 4 lies 3 mal 4
4 . 3 lies 4 mal 3
a × a lies a mal a
a . b lies a mal b

In der Buchstabenrechnung sezt man die Buchstaben auch ohne Zeichen nahe an einander, z. B. a b c ließt man a × b × c (bei den Ziffern aber geht dieses nicht an, 3 × 4 kann nicht ohne Zeichen 34 gesezt werden, weil dieses Verwirrung machen würde). Wenn man das bisher Gesagte gefaßt hat, so wird man leicht einsehen, daß die Multiplication im Grunde eine (wiederholte) Zusammensetzung oder Addition gleicher Größen sey. Z. B.

$a \times a = a + a = 2a$.

Die Zahl 4 dreimal genommen oder auch 3mal zu sich addirt, giebt in beiden Fällen 12.

$4 \times 3 = 12$
$4 + 4 + 4 = 12$.

So vielmal also eine Zahl genommen werden soll, so vielmal wiederholt man das Addiren derselben, oder so viele einzelne Posten von gleicher Größe muß man sich denken: und das Produkt muß der Summe dieser Posten völlig gleich seyn, oder eben so viele Einheiten enthalten als die Summe. Auch ist es gleichviel, welche von den beiden Zahlen, die man Faktoren nennt, so vielmal genommen wird, als die andere Zahl Einheiten in sich faßt: denn beide Fälle geben gleiches Produkt. Es ist zum Beispiel einerlei, ob man 4 dreimal nimmt,

oder 3 viermal: jedesmal kömmt 12 heraus; welches in folgender doppelten Stellung von 12 Punkten sichtbar ist

Besteht das Multiplicandum aus mehreren Ziffern, und der Multiplicator aus einer einzigen, so kann man sich das Verfahren des gewöhnlichen Multiplicirens folgendermaaßen erklären:

Es sei 4032 zu multipliciren
durch 4

so müssen erst die 4 Tausend viermal genommen werden, dann die 3 Zehner viermal, und endlich die 2 Einheiten viermal. Zuletzt müßte man die Posten alle zusammen nehmen und in eine Zahl bringen. Dieses würde aber in vielerlei Fällen zu weitläuftig und beschwerlich werden, daher braucht man folgende gewöhnliche Abkürzung: man multiplicirt von der rechten zur linken Hand jede Ziffer des Multiplicandums durch den Multiplicator. Das heißt: man nimmt erst die Einheiten vielfach; dann die Zehner; darauf die Hunderte; und so fort die Tausende, Zehntausende, Hunderttausende, Millionen u. s. w. nach der gewöhnlichen Ordnung des Decimalsystems, und rechnet die Zehner jedes einzelnen Products zum folgenden: nemlich die Zehner von den multiplicirten Einheiten zu den folgenden Zehnern; die zehnfachen Zehner als Hunderte zu den folgenden

Hun-

Hunderten; die zehnfachen Hunderte als Tausende zu den nächsten Tausenden; und so weiter.

Ist irgend ein Fach des Decimal-Systems im gegebenen Multiplicandus leer (welches durch eine Null angedeutet wird, die die Stelle ausfüllet), d. h. sind keine Einheiten, oder keine Zehner, oder Hunderte, oder Tausende ꝛc. vorhanden; so kann auch nichts der Art vielfach genommen werden.

Die Auseinandersetzung des obigen Beispiels wird die Sache näher erläutern.

4 Tausende 0 Hunderte 3 Zehner 2 Einheiten

4 mal

16 Tausende 1 Hundert 2 Zehner 8 Einheiten.

2 × 4 Einheiten = 7 Einheiten = 8.

3 × 4 Zehner = 12 Zehner = 1 Hundert

und 2 Zehner = 120

Hier geben die vierfach genommenen 3 Zehner zum Product 12 Zehner, d. i. 10 Zehner (oder 1 Hundert) und 2 Zehner.

Jene 10 Zehner oder das 1 Hundert würden zum Producte der vierfach genommenen Hunderte gerechnet; da aber der Multiplicandus in obigem Beispiele keine Hunderte hat, so kann nur jenes 1 Hundert in die Stelle der Hunderte des Products gesezt werden 4 × 4 Tausend = 16 Tausend = 16000.

Wollte man von der linken nach der rechten Hand zu multipliciren, oder den Anfang mit den Tausenden machen,

chen, so könnte man sich dieses Vortheils nicht bedienen, das Beispiel würde nun so stehen

4032
4 mal

16 Tausende =	16000.	Hunderte hat dieser Multiplicandus nicht; also können sie auch nicht 4 mal genommen werden. Es folgen daher sogleich die Zehner.
12 Zehner (oder 1 Hundert und 2 Zehner) =	120	
8 Einheiten =	8	
16 128.	16 128.	

Noch beschwerlicher würde die Multiplication dieses und ähnlicher Beispiele, wenn man die Tausende, (Hunderte), Zehner und Einheiten einzeln 4 mal aufschreiben, addiren, und endlich die Summen wieder addiren wollte.

4000 + 30 + 2
4000 + 30 + 2
4000 + 30 + 2
4000 + 30 + 2

16000. 120. 8.

16000
120
8

16 128

Besteht aber der Multiplicator und das Multiplicandum, oder beide Faktoren, aus mehrern Ziffern, so fängt man mit der ersten geltenden Ziffer des Multiplicators, zur rechten Hand an; rükt aber bei der Multiplication durch die zweite Ziffer das Produkt derselben um

eine

um eine Stelle weiter zur linken; und so auch bei den folgenden. Denn soll ich z. B. 452 durch 124 multipliciren, so heißt das nicht: ich soll 452, eins, zwei, und viermal, sondern ein Hundertmal, zwanzigmal und viermal nehmen.

4 5 2 multiplicirt
durch 1 2 4

1 8 0 8
9 0 4 (0)
4 5 2 (0) (0)

giebt 5 6 0 4 8. das ist:

452 × 4 = 1808 oder 1808 Einheiten = 1808 × 1
452 × 20 = 9040 oder 904 Zehner = 904 × 10
452 × 100 = 46200 oder 452 Hunderte = 452 × 100

Um der Bequemlichkeit willen läßt man die im obigen Beispiele eingeklammerten Nullen, welche den einzelnen Producten den Werth von 10 mal, 100 mal u. s. w. genommenen Größen im Zifferausdruck geben, beim gewöhnlichen Multipliciren weg. Aber eben um deswillen muß jedes Product um so viel Ziffern links weiter vorgerükt werden, als der Werth jedes Multiplicators Nullen enthält, wenn man ihn vollständig mit Ziffern schreibt. Man sehe auch folgendes Beispiel:

5421 durch
2002 multiplicirt

10842 = 5421 × 2 = 10842 × 1.
10842000 = 5421 × 2000 = 10842 × 1000.

10852842.

Da hier der Multiplicator keine Zehner und keine Hun-

Hunderte hat, sondern nur Einheiten und Tausende: so kann auch das Multiplicandum nicht zehnfach und hundertfach genommen werden; und das tausendfache Product steht um 3 Stellen weiter links, als das Produkt der Einheiten.

Beispiele der Multiplication des Decimal-Längenmaaßes.

Wenn eine Seite eines gleichseitigen Vierecks 5° hält; wie viel halten alle vier Seiten oder der ganze Umriß dieses Vierecks in Summa?

$$4 \times 5 = 20°.$$

Wäre nun dieses Viereck z. B. ein mit Wänden oder Mauern eingeschlossener Garten, so hätte dessen Besitzer 20 Ruthen Wand oder Mauerwerk in der Länge zu unterhalten; wobei die Höhe und Dicke noch nicht in Anschlag gebracht ist.

Wenn ein Stük Feld 20° 8′ lang ist; wie viel beträgt die Länge von 10 eben so langen Stücken zusammen?

20° + 8′	200°
10 : = 10	addirt 8°
200° (+ 80′ = 8°) = 208°.	

Wie viel betragen 10°, 8′ 4″ achtmal genommen?

10°

10°	+	8′	+		4″	=	10° 8′ 4″	nach gewöhnlicher Multiplicationsart.
8	=	8	=		8		8	
80°	+	(64′ = 6° 4′)	+	(32″ = 3′ 2″)			86° 7′ 2″	

Diese einzelnen Produkte, nemlich

80°
6° 4′
3′ 2″ addirt,

geben 86° 7′ 2″ als Product des Ganzen.

Auch bei der Multiplication muß man besonders darauf Acht haben, ob die Faktoren aus positiven oder negativen Größen bestehen.

Ist das Multiplicandum und der Multiplicator zugleich positiv oder beide zugleich negativ (so, daß beiderlei Faktoren einerlei Zeichen haben, es sei + oder —:), so wird das Produkt in beiden Fällen positiv, oder bekommt das Zeichen + vor sich. Denn es ist auf jedem Fall Gewinn, ob einer an jedem der 6 Wochen Tage 4 gl. (also 6 × 4 gl. = 24 gl.) erwirbt, oder ob einer, der sonst gewöhnlich jeden Tag 4 gl. auf sein Vergnügen wendet, dieses 6 Tage lang unterläßt, also eine Ausgabe von 4 gl. sechsmal nicht hat, (oder — 6 × — 4 gl. = 24 gl.) weil er ja nun wirklich um 6 × 4 gl. = 24 gl. reicher ist.

Es ist also völlig einerlei, ob ein Besitz vervielfältiget wird, oder ob ein Mangel vielmal gehoben wird; denn aus dem leztern Verfahren entsteht auch ein eben so vielfacher Besitz.

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ \text{multipl. } d \\ \hline ad+bd+cd \end{array}$$

Man multiplicirt a durch d, so bekömmt man ad, ferner b durch d u. s. f., bis man das Produkt ad + bd + cd bekömmt. Denn

$$a \times d = ad.$$
$$b \times d = bd.$$
$$c \times d = cd.$$

Soll 4 mit + 2 multiplicirt oder 2 mal zusammengesezt (addirt) werden, so entsteht daraus das Produkt 8. Denn

$$\begin{array}{r} +4 \\ +4 \\ \hline \text{giebt } 8. \end{array}$$

$$a \times d + b \times d + c \times d = ad + bd + cd$$
$$4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 8 + 6 + 4 = 18.$$

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \\ bb+ab+bc \\ cc+ac+bc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4+3+2=9 \\ 6+4+3=13 \\ \hline 24+18+12 \\ 16+12+8 \\ 12+9+6 \\ \hline 52+39+26=117. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+c+d \\ b+d \\ \hline ab+bc+bd \\ ad+cd+dd \\ \hline ab+ad+bc+bd+cd+dd \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6+4+3=13 \\ 6+4+3=13 \\ \hline 36+24+18 \\ 16+24+12 \\ 9+18+12 \\ \hline 61+48+36+24=169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -a-b-c \\ \text{multiplic.} \quad -d \\ \hline ad+bd+cd \end{array}$$

Multiplicirt man + a durch — d, so zeigt dieses an, daß — a mal (×) — d weggenommen (subtrahirt) werden soll; folglich bekömmt man zum Produkte nicht nur + a, sondern auch + a × d oder a d u. s. f.

Soll — 4 mit — 2 multiplicirt werden, so kann dieß nichts anders heißen, als — 4 zweimal wegnehmen (subtrahiren), oder den Mangel 4 zweimal aufheben.

Ist aber der eine Faktor positiv und der andere negativ, oder (welches eben so viel ist,) haben beide Faktoren verschiedene Zeichen, so ist ihr Produkt allemal negativ, oder man setze jedesmal in solchem Falle das Zeichen — vor das Produkt. Denn es ist z. B. allemal ein Verlust, wenn an jeder von 4 Mandeln Aepfel, die man kauft, 3 Stück fehlen; weil man alsdann 4 mal einen Verlust von 3 Aepfeln hat, oder 12 Stück weniger als man haben sollte: folglich ist (4 × — 3) = (— 12).

Eben so, wenn einer an jeder von 4 vollen Mandeln 3 Stück wirklich zu fordern hätte, die 4 Mandeln aber gingen gänzlich verlohren, so hätte dieser einen vierfachen Verlust von 3 Aepfeln, die sein Eigenthum sind. Er büßet also auch 12 Aepfel ein; folglich ist (— 4 × 3) = (— 12).

Es ist also gleich viel, ob man etwas Vorhandenes mehreremale wegnimmt, oder ob man einen Mangel so vielfach macht, als der eine Faktor besagt.

$$\begin{array}{r} +a \quad -a \\ -b \quad +b \\ \hline -ab \quad -ab. \end{array}$$

$$-b \times +a = -ba.$$

Das negative b wird hier + a mal genommen, oder durch a vervielfältiget: also $-(b \times a)$.

$$+b \times -a = -ba.$$

Das positive b wird hier a mal weggenommen, also $-(b \times a)$.

+ 4 rth.	— 4 rth.
— 4	+ 4
— 16 rth.	— 16 rth.

Es ist hier einerlei, ob zum Beispiel der Besitz von 4 rth. viermal verlohren geht, oder ein viermaliger Mangel von 4 rth. entsteht; das heißt: wenn der Mangel von 4 rth. wirklich 4 mal sich einfindet, denn es entsteht daraus in jedem Fall ein Mangel von 16 rth. (oder — 16 rth.). Das + wird also so viel mal weniger, oder fehlt so vielmal, und das — wird so viel mal mehr, als der eine Faktor angiebt; es wird folglich jedes malweniger.

Man

Vermischte Beispiele:

$$\begin{array}{l} a + b + c \\ a - b - c \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} aa & +ab & +ac & \\ & -ab & & -bb - bc \\ & & -ac & -bc - cc \end{array}$$

$$aa - bb - 2bc - cc.$$

Man multiplicire $a + b + c$ durch a, so bekömmt man $aa + ab + ac$. Ferner $a + b + c$ durch $- b$. Hier wird der Multiplicandus a, b mal kleiner; eben so muß das ganze Multiplicandum $(a + b + c)$ $\times - b$ so viel mal kleiner werden, als die negative Größe b besagt, oder ist $= (- ab - bb - bc)$. Eben so $a + b + c$ durch $(- c)$.

Addiret man nun dieses dreifache Produkt, so besteht das ganze Produkt in der Summe $aa - bb - 2bc - cc$. Denn weil bei der Addition die gleichnamigen positiven und negativen Größen (z. B. $+ ab$ und $- ab$ ꝛc.) einander aufheben, folglich ganz wegfallen; so bleiben blos die Produkte $aa - bb - 2bc - cc$ als Summe, oder als Produkt der ganzen Multiplication, übrig.

Ferner: $\begin{array}{l} a - b + c \\ a + b - c \end{array}$

$$aa - bb - cc$$

$$\begin{array}{l} (-ab)(+ac) + bc \\ (+ab)(-ac) + bc \end{array}$$

$$aa - bb + 2bc - cc.$$

$$\begin{array}{r} 10 - 6 + 2 = 6 \\ 10 + 6 - 2 = 14. \\ \hline 100 + 60 - 20 \quad 84. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -60 - 36 + 12. \\ +20 + 12 - 4. \\ \hline 100 - 36 + 24 - 4. = 84. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a - b - c \\ \hline aa + ab + ac \\ \quad - ab \quad\quad - bb - bc \\ \quad\quad - ac \quad\quad - bc - cc \\ \hline aa - bb - 2bc - cc. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 + 6 + 2 = 18. \\ 10 - 6 - 2 = 2 \\ \hline 100 - 36 - 4 = +60 \\ 60 + 20 - 12 = +68 \\ -60 - 20 - 12 = -92 \\ \hline 100 - 36 - 24 - 4 = 36. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ab + c - d \\ a - b - d \\ \hline aab + ac - ad \\ -abb - bc + bd \\ -abd - cd + dd \\ \hline aab - abb - abd + ac - ad - bc + bd - cd + dd. \end{array}$$

Haben die Buchstaben Ziffern vor sich, so multiplicirt man die Ziffern besonders durch einander, und sezt sie vor das Produkt der Buchstaben.

Z. B.: $3a \times 2b$

$$\begin{array}{r} 3a \\ 2b \\ \hline 6ab \end{array}$$

$5ab$	$6b$	$3acd$
$4c$	$4a$	$9bef$
$20abc$	$24abcd$	$27abcdef$

Einerlei Buchstaben und Zahlen, die durch einander multiplicirt werden, pflegt man bei ihrer Multiplication durch einander auch nicht immer alle ins Produkt zu schreiben, sondern nur einen davon und zwar mit einer kleinen Ziffer oben zur Rechten des Buchstabens, welche anzeigt, wie vielmal eine Größe mit sich selbst multiplicirt sey, oder wie viel mal diese Größe als Faktor gebraucht worden. Diese Ziffer nennt man den Exponenten dieses Buchstabens.

Z. B. $a \times a$ oder aa oder a^2

$b \times b$ oder bb oder b^2

Eben so bei Zahlen:

$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$

weil hier 16 aus zwei Vieren als Faktoren entstehet.

$$ab \times ab = abab = a^2b^2.$$

Auf gleiche Art ist:

4×3 } multiplicirt, oder (12×12)
4×3 }

eben so viel als $4 \times 3 \times 4 \times 3$

oder $= (4^2 \times 3^2 = (16 \times 9.)$

a b c
a b c

$a^2 b^2 c^2 = a \times a \times b \times b \times c \times c.$

Haben die Faktoren schon Exponenten, so werden diese nur addiret, z. B.

$$a^2 \times a^3 = a^5$$

denn $a^2 = a \times a$
$a^3 = a \times a \times a$

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a.$

$a^2 b^2 c d^3$
$a b^2 c d$

$a^3 b^4 c^2 d^4$

§. 11.

Gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, geben beide gleiche Produkte. Zum Beispiel Sechs Groschen Viermal genommen und Zwölf Sechser auch Viermal genommen, geben beide ein Produkt von 24 gl. oder 48 Sechsern.

6 Groschen = 12 Sechser
4 = 4 multipl.

24 Groschen = 48 Sechser.

$A = B$
$a = b$ multipl.

$Aa = Bb$

§.

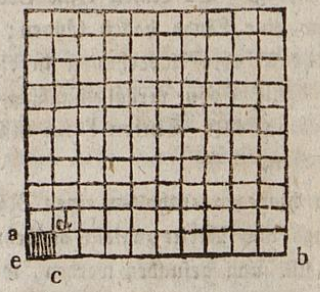
Vom Quadrat-Maaße.

§. 12.

Das Messen oder Ausmessen ausgedehnter Größen ist ein stetes Addiren derselben Größe, oder ein wirkliches multipliciren; denn das Maaß nach seinen bestimmten Theilen ist der eine Faktor; die Angabe wie viel mal dieses Maaß in gerader Richtung an einander gefügt werden muß, um einer gegebenen Ausdehnung gleich zu seyn, ist der andere Faktor; und die Summe der in der Ausdehnung enthaltenen Maaße oder Maaßtheile ist das Produkt oder das Resultat der Messung oder Ausmessung. Da Linien keine Breite und Dicke, sondern nur eine Länge haben können; so kann ihre Größe, das ist ihre Ausdehnung in die Länge, nur durch eine Linie (von verhältnißmäßiger Länge) bestimmt werden; oder Linien kann man nur durch Linien messen.

Flächen hingegen enthalten einen Raum, der sich in die Länge und Breite zugleich ausdehnet. Es muß also durch Messung gefunden werden, wie weit sie sich in die Länge, und wie weit sie sich in die Breite erstrecken; folglich muß das Maaß eine verhältnißmäßige Größe seyn, die selbst in die Länge und Breite ausgedehnt ist. Leget man nun diese Größe oder das Maaß so vielmal auf eine Fläche, als es darauf Raum findet,

(es sey das ganze Maaß, oder gewisse Theile desselben,) so mißt man die Fläche mit diesem Maaße. Es können also Flächen eigentlich nur durch (verhältnißmäßige) Flächen ausgemessen werden. Keine Fläche ist aber zu diesem Zweck und Gebrauch schicklicher, als das regelmäßige Viereck, nemlich das Quadrat, weil es den Flächenraum rein aufmisset; denn wegen seiner gleichen Seiten und gleichen Winkel, kann es oftmals so genau an einander gelegt werden, und die Grenzen der Quadrate passen so genau an einander, daß keine leeren Räume dazwischen entstehen, folglich kein Theil der Fläche ungemessen bleibt; wie z. B. die folgende Figur zeigt, auf welcher das kleine Quadrat eacd hundertmal genau auf und neben einander gelegt werden kann, ohne daß ein Theil der Fläche übrig bleibt.



Eine quadratförmige Fläche, welche eine Ruthe, (oder zehen oder zwölf Schuh) lang, und eine Ruthe, (oder zehen oder zwölf Schuh,) breit ist, heißt eine Quadratruthe. Die Quadratruthe hat also zehn mal zehn oder hundert (oder auch zwölf mal zwölf, das

ist

ist hundert und vier und vierzig) Theile, und jeder Theil heißt ein Quadratschuh. Jeder Quadratschuh ist auch eine Quadratfläche, die zehn (oder zwölf) Zoll lang, und eben so breit ist; folglich hat sie hundert (oder hundert und vier und vierzig) Quadratzoll. Die Größe des Quadratmaaßes richtet sich nach der Größe der Flächen welche, gemessen werden. So heißen Vierecke, die eine Meile lang und eine Meile breit sind, Quadrat Meilen; diese bestimmen die Größe ganzer Länder, selbst unserer Erde. Fragt man nach der Größe eines Ackers oder einer Wiese, so will man nicht die Länge oder Breite oder auch nur die Länge der Umfangslinien wissen, sondern die Größe des ganzen Raums oder den Inhalt der Fläche selbst.

Weil nun das Quadrat zum Ausmessen aller Flächen, auch der krummlinigten, gebraucht wird; so heißt das Ausmessen der Flächen selbst die Quadratur. Z. B. die Quadratur eines Zirkels finden, heißt genau bestimmen oder berechnen, wie viel Theile eine Zirkelfläche nach dem Quadratmaaße enthält.

Wenn die Quadrat-Figur zu Anfange dieses Paragraphs eine Decimal-Quadrat Ruthe vorstellen soll; so enthält jede Seite, z. B. a b zehen solche Quadratschuh, wie a c d e a; zehen solche Streiffen, deren jede aus zehen solchen kl eine Quadraten wie a c d e a zusammengesetzt ist, haben neben oder unter einander Raum; folglich muß die Quadrat-Decimal-Ruthe 10 × 10 oder 100 Quadrat-Schuh enthalten.

Stellt man sich unter derselben Figur einen Quadrat-Schuh vor, so kann man sich auf eben diese Weise erklären, daß ein Quadrat-Schuh 100 solche Quadrat-Zoll, wie a c d e a, in sich fassen muß.

Man sieht also leicht ein, daß eine Quadrat-Ruthe, nicht etwa zehn Quadrat-Schuh halten kann, weil die Längen-Ruthe nur 10 Schuh hält; sondern 100 Quadrat-Schuh, weil sie 10 Quadrat-Reihen, jede von 10 Quadrat-Schuhen, in sich fasset. Die 12schuhige Quadrat-Ruthe enthält 12 Reihen, jede von 12 Quadrat Schuhen, im Ganzen also 144 Quadrat-Schuh.

Hält im Quadrat-Maaße die
10schuhige Ruthe:

100′
100 00″
100 00 00‴

so hat die 12schuhige Ruthe:	und die 16schuhige Ruthe:
144′	256′
20736″	36864″
2985984‴	5308416‴

Eben die Bequemlichkeit, welche man bey der Verwandlung des Decimal-Längen-Maaßes hat, findet man also auch bei dem Decimal-Quadrat-Maaße. Man darf nemlich eine Quadrat-Ruthe, oder auch eine Anzahl von Quadrat-Ruthen nur durch 100 multipliciren, oder, welches dasselbe ist, der Ruthen-Zahl zwei Nullen anhängen, so hat man ihre Quadrat-Schuh. Hängt man an die Zahl der Quadrat-

drat-Schuh noch zwei Nullen, so hat man die Quadrat-Zolle u. s. f. Z. B.

1 Quadr. Ruthe = 100 Qdr. Schuh.
10 —— —— = 1000 Q. S.
12 —— —— = 1200 Q. S.

100 Quadr. Schuh = 10000 Qdr. Zoll.
1000 —— —— = 100000 Q. Z.
1200 —— —— = 120000 Q. Z.

u. s. w.

Eben so kann man auch eine Anzahl von Quadrat-Zollen in Quadrat-Schuh und Quadrat-Ruthen verwandeln, wenn man von der Rechten zur linken Hand zwei Ziffern für die Quadrat-Zolle, und zwei für die Schuhe abschneidet.

Z. B. 100 Quadrat-Zoll sind
1′,00″ oder 1 Quadratschuh
1,10″ sind
1′,10″ oder 1 Quadratschuh und 10 Quadrat-Zoll.

$248679'' = 24^{\circ}, 86', 79''$.

Um das Quadrat-Maaß von dem Längen-Maaße zu unterscheiden, wird der Bezeichnung des erstern ein Quadrat beigefügt. Z. B.

$20^{\circ}\square$. $20^{\square^{\circ}}$.

Multiplication des Decimal-Flächen-Maaßes, oder der Länge mit der Breite.

§. 13.

Multiplicirt man die Länge der Fläche mit ihrer Breite, so muß das Produkt den Inhalt der Fläche bestimmen, wie oben die Berechnung der Quadrat-Fläche gezeigt hat; zum Beispiel

eine Fläche sei lang 4°
und breit 2°; so ist der
Inhalt dieser Fläche 8°□.

Denn hier liegen 2 Reihen Quadrat-Ruthen neben einander, und in jeder Reihe sind 4 Quadrat-Ruthen, sie enthalten also: $2 \times 4 = 8$.

Sollen Decimal-Ruthen, Schuh und Zoll der Länge und Breite durch einander multiplicirt werden, so setzt man jedesmal Ruthen unter Ruthen, Schuh unter Schuh u. s. f.; und wo bei dem Multiplicandum, oder Multiplicator, Schuh oder Zoll fehlen, so werden diese leeren Stellen durch Nullen ergänzt. Uebrigens verfährt man wie in der gewöhnlichen Multiplication.

Die lezte Ziffer des Produktes bekömmt das lezte Zeichen der zu multiplicirenden Maaße, und allen

Maaßen

Maaßen von den Linien bis zu den Ruthen werden von der rechten nach der linken Hand zu, zwei Ziffern zugetheilt; (§. 12.) z. B. eine Fläche ist:

2°, 0′, 2″ lang und
4′ 1″ breit.

2	0	2
80	8	
82′,	8	2″

Hier liegen 41 Reihen, jede von zweihundert und zwei Quadratzollen, neben einander, die aber noch keine Quadrat-Ruthe ausmachen können; denn ihre ganze Summe macht wenig über 8000 Quadrat-Zolle, oder 82 Quadrat-Schuhe; da eine volle Quadrat-Ruthe 10000 Quadrat-Zolle, oder 100 Quadrat-Schuh haben muß.

Wenn man eine Fläche hat, die 2 Ruthen und 5 Schuh lang, und 2 Ruthen breit ist, so beträgt ihr Inhalt 5 Quadrat-Ruthen.

Denn 2° 5′ lang
2° (0′) breit (2 Ruthen = 20 Schuh)

5°, 00′ Inhalt.

Hier liegen 20 Reihen Quadrat-Schuhe, jede zu 25 Quadrat-Schuhen, neben einander. Daher macht das Ganze eine Summe von 500 Quadrat-Schuhen. Und da 100 Quadrat-Schuh eine Quadrat-Ruthe machen; so machen 500 Quadrat-Schuh 5 Quadrat-Ruthen; oder, 25 Quadrat-Schuhe in einer Reihe sind der vierte Theil einer Quadrat-Ruthe: zwanzig sol-

solcher Reihen oder Viertels-Quadratruthen, machen also 5 ganze Quadratruthen.

Eine andere Fläche ist:

lang 24° 2′ 4″ und
breit 12° 0′ 4″

96 96

48 48
2424

291°|84′| 96″ Inhalt der Fläche.

Von Erhebung der Größen zu Quadraten und von Quadrat-Zahlen.

§. 14.

Jede Zahl, die man durch sich selbst multiplicirt, d. h. die man so vielmal nimmt, als sie selbst Einheiten hat, erhebt man zu einer Quadrat-Zahl; das heißt, sie ist nun so vielmal so groß, als sie selbst Einheiten hat, so daß diese Einheiten zusammen genommen, wenn sie ins Viereck gestellt werden, ein vollkommenes Quadrat ausmachen; das ist auch die Ursache, warum man die Benennung Quadrat Zahl aus der Meßkunst entlehnt hat.

Zum

Zum Beispiel 4×4

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Eine Größe überhaupt zum Quadrate erheben, soll also auch nichts anders heißen, als sie durch eine andere Größe, die ihr gleich ist, vervielfältigen oder multipliciren. Das Quadriren geschieht also durch zwei gleiche Faktoren, z. B. $a \times a$; 3×3. Die zuerst gegebene Größe heißt die Quadrat-Seite (Basis) oder Quadrat-Wurzel.

a Wurzel	4 W.
a	4
aa Quadr.	16 □.

Die Wurzel wird von den Mathematikern gewöhnlich also bezeichnet $\surd$.

Man nennt die Wurzel zuweilen auch die erste Potenz oder Dignität, und ihre Quadrat-Größe heißt die zweite Potenz, weil sie ein Produkt ist, das aus zween gleichen Faktoren entstehet. Ferner das Produkt von drei gleichen Faktoren heißt die dritte Potenz u. s. f.

Zum Beispiel:

$a^1 = a$, 1ste Potenz oder Wurzel
$a^2 = aa = a \times a$, 2te Potenz oder das Quadrat
$a^3 = aaa = a \times a \times a$, 3te Potenz u. s. w.

$4^1 =$

$4^1 = 4$ erste Potenz
$4^2 = 4 \times 4$, Quadrat, 2te Potenz
$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, 3te Potenz u. s. w.

Eine Wurzel, die aus zwei Theilen oder Größen besteht, deren Zeichen, z. B. Buchstaben oder Ziffern sind, heißt eine zweitheilige (oder binomische) Wurzel. Z. B. a + b. oder a — b.

Von dieser Art sind z. B. Zahlen, welche aus Zehnern und Einheiten, aus Hunderten und Zehnern, aus Hunderten und Einheiten u. s. w. zusammengesezt sind.

Z. B. 24 = 20 + 4. 240 = 200 + 40. 204 = 200 + 4. Gewöhnlich versteht man darunter alle diejenigen Zahlen von 11. bis 99., welche mit 2 (geltenden) Ziffern geschrieben werden. Ueberhaupt aber jede Zusammensetzung von 2 einfachen Zahlen, sie mag positiv oder negativ seyn. Z. B. 6 + 4 und 6 — 4.

Beispiel positiver Zusammensetzung:

$$\begin{array}{l} 20 + 4 = 24 \\ 20 + 4 = 24 \\ \hline 4 \times 4 = 16 \\ 4 \times 20 = 80 \\ 4 \times 20 = 80 \\ 20 \times 20 = 400. \\ \hline 20 \times 20 + 4 \times 20 + 4 \times 20 + 16 = 400 \\ \quad + 2 \times 80 \text{ (oder } 160) + 16 = 576. \end{array}$$

Beispiel negativer Zusammensetzung:

$$\begin{array}{l} 20 - 4 = 16 \\ 20 - 4 = 16 \\ \hline -4 \times -4 = +16 \\ 20 \times -4 = -80 \\ 20 \times -4 = -80 \\ 20 \times 20 = +400 \\ \hline 20 - 4 \times 20 - 4 = 16 \times 16 = 400 + 16 - 160 = 256 \end{array}$$

Beispiel negativer Zusammensetzung:

$$\begin{array}{rrr} a & - & b \\ a & - & b \\ \hline - & ab & + b^2 \\ a^2 & - ab & \\ \hline a^2 & - 2ab & + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 12 & - & 2 & = 10 \\ 12 & - & 2 & = 10 \\ \hline - 2 \times & - 2 & = 4. & = 2^2 \\ 12 \times & - 2 & = & - 24 \\ 12 \times & - 2 & = & - 24 \\ 12 \times & 12 & = 144. & = 12^2 \end{array}$$

$12 - 2 \times 12 - 2 = 144 + 4 - 48.$ (*$= 10 \times 10 = 100.$

Beispiel positiver Zusammensetzung:

$$\begin{array}{rrr} a & + & b \quad \text{Wurzel.} \\ a & + & b \\ \hline & ab & + b^2 \\ a^2 & + ab & \\ \hline a^2 & + 2ab & + b^2 \ \square. \end{array}$$

*) Die folgende Figur und ihre Erklärung lehret: daß, wenn der zweite Theil der Wurzel negativ ist, alsdann das negative doppelte Produkt der beiden Wurzeltheile um so viel zu groß ist, als das Quadrat des negativen Theils beträgt; folglich werden in diesem Beispiele 4 negative Theile von 48 negativen Theilen weggenommen, so daß also das Ganze noch um 4 Theile gewinnt. Darum erscheint das Quadrat des negativen Theils positiv, oder mit dem Zeichen +. Von 144 gehen also nicht 48, sondern nur 44 ab; folglich $144 - 48 + 4 = 100.$

Das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel zum Beispiel ab bestehet also:

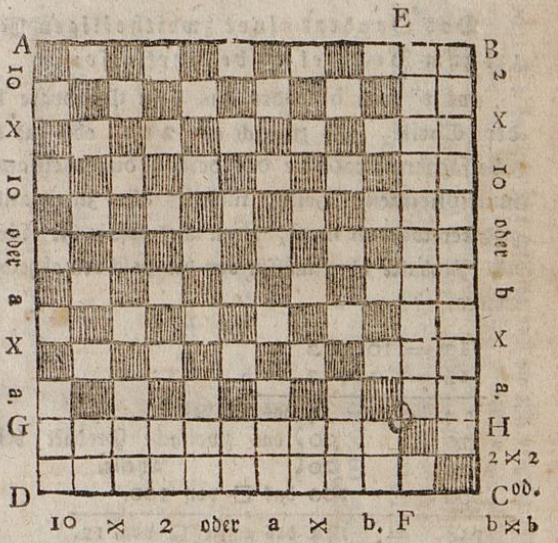
aus a^2 und b^2 oder aus dem Quadrate beider Theile, und zugleich aus 2 ab, oder aus dem zweifachen Produkte der beiden durch einander multiplicirten Theile, welches alles zu einander addiret werden muß, wenn alles positiv ist. Negative Produkte aber müssen von den positiven abgezogen werden.

12 = 10 + 2
12 = 10 + 2

4	4	das □ von 2.
20	20	das zweifache Produkt beider Theile.
20	20	
100	100	das □ von 100.
144	= 144	das ganze □ von 12.

Dieses Beispiel läßt sich auch leicht, so wie jedes andere, durch eine Figur vorstellen.

10 + 2 × 10 + 2 = 12 × 12 = 144.
a + b × a + b = a^2 + b^2 + 2 ab.



so wäre also das Quadrat von 10 = 100

das Quadrat von 2 = 4

und das zweifache Produkt beider Wurzeltheile in einander 10 X 2 + 2 X 10 = 40

also das ganze □ von 12 = 144;

welches aus der Figur selbst sichtbar ist: denn sie enthält offenbar von der zweitheiligen Wurzel 12 das □ von 10 X 10 und 2 X 2 und das doppelte Produkt beider Theile in einander, in abgesonderten Flächen.

Dasselbe Viereck könnte auch ein Grundstück vorstellen, das zwar 12 Ruthen lang und 12 Ruthen breit wäre

wäre, aber nur 10 Ruthen von der Länge und 10 Ruthen von der Breite wären gutes Land; die übrigen 2 Ruthen der Länge und Breite hingegen, unbrauchbar, zu derselben Benutzung: alsdann wäre der brauchbare Theil AEOG = (12 — 2) × (12 — 2) = 10 × 10 = 100 Ruthen groß. (Siehe das obige Beispiel negativer Zusammensetzung.) Nemlich das ganze Stück beträge zwar 12 × 12 = 144 Ruthen; es giengen aber davon zweimal 2 × 12 = 48 weniger 4, also 44 von den 144 ab; denn bei den 2 × 12 + 2 × 12 oder EBCF + GDCH ist das Quadrat HOFC zweimal mitgenommen, und muß also einmal abgerechnet werden.

Dieser Lehrsatz wird auch in folgenden Beispielen seine Bestätigung finden.

$$a + c \sqrt{} = \sqrt{102} \;=\; 100 + 2$$
$$a + c \qquad 102 \;=\; 100 + 2$$

$ac + c^2$

$a^2 + ac$

$a^2 + 2ac + c^2$ □.

$4 = 2 \times 2 = 2^2$ — 4 das □ von 2; od. v. den Einheit.

$200 = 2 \times 100$ — 200 }

$200 = 100 \times 2$ — 200 } das zweifache Produkt der Hunderte und der Einheit.

$10000 = 100 \times 100 = 100^2$ — 10000 das □ v. 100 od. der Hunderte.

10404 — 10404 das ganze □ von 102.

$\sqrt{280} = 200 + 80$

$280 \qquad 200 + 80$

22400 — 6400 das □ von 80.

56 — 16000 }

78400 □. — 16000 } das 2fache Produkt der Hunderte und Zehner.

40000 das □ von 200.

87400 das ganze □ von 280.

Wurzeln von mehr als zwei Theilen lassen sich ebenfalls als zweitheilige Wurzeln ansehen und behandeln; (welches um der Folge willen zu merken ist, wenn die Wurzel eines Quadrats gesucht werden soll.)

a

+

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline (a+b+c\times c) = ac+bc+c^2 \\ (a+b+c\times b) = ab+b^2+bc \\ (a+b+c\times a) = a^2+ab+ac \\ \hline (a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (a+b)+c \\ (a+b)+c \\ \hline \end{array}$$

lässet man nun $(a+b)$ gelten für A (oder einen Theil): so ist $(a+b)+c = A+c$; folglich:

$$\begin{array}{r} A+c \\ A+c \\ \hline Ac+c^2 \\ A^2+Ac \\ \hline \end{array}$$

giebt $A^2+2Ac+c^2$ als Quadrat.

Wenn die dreitheilige Wurzel auch negative Größen hat, so entstehet folgendes Quadrat-Produkt:

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ a+b-c \\ \hline (a+b-c\times -c) = -ac-bc+c^2, \\ (a+b-c\times b) = ab+b^2-bc \\ (a+b-c\times a) = a^2+ab-ac \\ \hline (a+b-c)^2 = a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A-c \\ A-c \\ \hline -Ac+c^2 \\ A^2-Ac \\ \hline A^2-2Ac+c^2 \end{array}$$

Beispiel in Zahlen.

$\sqrt{125} = 100 + 20 + 5$ auch $= 120 + 5$ (oder 12 Zehner und 5 Einheiten.)

$$\begin{array}{r}
125\\
125\\
\hline
625\\
250\\
125\\
\hline
15625\ \square.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
100 + 20 + 5\\
100 + 20 + 5\\
\hline
100 \times 100 = 10000 = a^2.\\
\left.\begin{array}{l}100 \times 20 = 2000\\ 20 \times 100 = 2000\end{array}\right\} = 2ab.\\
20 \times 20 = 400 = b^2.\\
\left.\begin{array}{l}100 \times 5 = 500\\ 5 \times 100 = 500\end{array}\right\} = 2ac.\\
\left.\begin{array}{l}20 \times 5 = 100\\ 5 \times 20 = 100\end{array}\right\} = 2bc.\\
5 \times 5 = 25 = c^2.\\
\hline
15625\ \square.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
120 + 5\\
120 + 5\\
\hline
120 \times 120 = 14400 = A^2 = a^2 + 2ab + b^2\\
\left.\begin{array}{l}120 \times 5 = 600\\ 5 \times 120 = 600\end{array}\right\} = 2Ac = 2ac + 2bc.\\
5 \times 5 = 25.\\
\hline
15625\ \square.
\end{array}$$

Mit negativer Größe also:

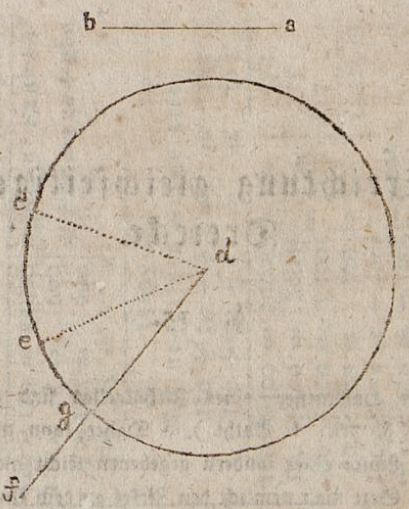
$$\begin{array}{l}
100 + 20 - 5 = = 115\\
100 + 20 - 5 = = 115\\
\hline
100 \times 100 = 10000 = a^2.\\
\left.\begin{array}{l}100 \times 20 = 2000\\ 20 \times 100 = 2000\end{array}\right\} = 2ab.\\
20 \times 20 = 400 = b^2.\\
\left.\begin{array}{l}100 \times -5 = -500\\ -5 \times 100 = -500\end{array}\right\} = -2ac\\
\left.\begin{array}{l}20 \times -5 = -100\\ -5 \times 20 = -100\end{array}\right\} = -2bc\\
-5 \times -5 = +25 = c^2.\\
\hline
(100 + 20 - 5)^2 = 14425 - 1200 = 13225\ \square.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
115\\
115\\
\hline
575\\
115\\
115\\
\hline
13225\ \square.
\end{array}$$

Ein=

Errichtung gleichseitiger Dreiecke.

§. 15.

Alle Halbmesser eines Zirkelkreises sind einander gleich (§. 76. I. Abthl.). Daher kann man eine gerade Linie einer andern gegebenen leicht gleich machen. Sezt man nemlich den Zirkel an dem einen Ende a der gegebenen Linie a b ein, und thut ihn bis an das andere Ende b der Linie auf; oder mit andern Worten, nimmt man die Linie mit dem Zirkel auf, und zieht eine Kreislinie, oder auch nur einen Kreisbogen: so ist jede Linie vom Mittelpunkte aus, zur Peripherie gezogen; z. B. die Linien d c, d e als Radius oder Halbmesser der gegebenen Linie gleich.



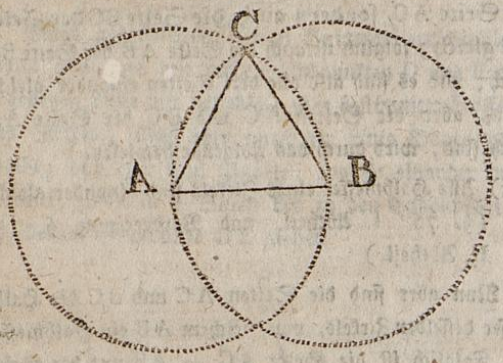
Von einer geraden Linie kann man auch einen gewissen Theil abschneiden, der einer gegebenen Linie gleich ist, wenn man den Zirkel nach der kleinern Linie aufthut, ihn an dem einen Ende der größern Linie einsezt und nun einen Zirkelbogen durch die Linie zieht. Z. B. der Theil d g von der Linie d f ist der Linie a b gleich.

Aufgabe.

Wie errichtet man ein gleichseitiges Dreieck?

Auf einer gegebenen geraden Linie wird ein gleichseitiges Dreieck errichtet, wenn man diese Linie, z. B. AB, mit dem Zirkel aufnimmt, oder denselben so weit aufthut, als die Linie lang ist; darauf den Zirkel mit der;

derselben Eröffnung auf beiden Endpunkten der Linie in A und B einsezt, Kreislinien beschreibt, und endlich von den beiden Endpunkten der Linie bis zum Punkte C, wo sich beide Kreise durchschneiden, Linien zieht: so hat man das gleichseitige Dreieck ABC.



Beweis.

Daß das Dreieck ABC gleichseitig sei, oder daß die Seiten AC und BC gleich sind AB; (wobei man in der Folge auf die Entwickelung und Zusammensetzung der Begriffe, die von der Definition oder Erklärung des gleichseitigen Dreiecks ausgeht, Acht haben muß).

1) Jedes Dreieck, dessen drei Seiten einander gleich sind, ist ein gleichseitiges (§. 7.)

Nun aber sind an dem gegebenen Dreiecke ABC alle drei Seiten einander gleich; folglich ist das Dreieck ABC ein gleichseitiges. (Daß alle drei Seiten

ten in dem gegebenen Dreiecke ABC einander gleich sind, erhellet aus Folgendem:)

2) Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind einander selber gleich. (§. 63. I. Abth.)

Nun aber ist in dem Dreiecke ABC nicht nur die Seite AC, sondern auch die Seite BC der Seite AB gleich; folglich ist auch die Seite AB der Seite BC gleich; und es sind also alle drei Seiten einander gleich. (Daß aber die Seiten AC und BC der Seite AB gleich sind, wird durch das Folgende bewiesen.)

3) Alle Halbmesser eines Zirkels sind einander gleich. (§. 76. I. Abtheil. und Vorbereitung §. 15. II. Abtheil.)

Nun aber sind die Seiten AC und BC die Halbmesser desselben Zirkels, von welchem AB ein Halbmesser ist. Folglich ist die Seite AC = AB und die Seite BC = AB und also alle drei Seiten einander gleich.

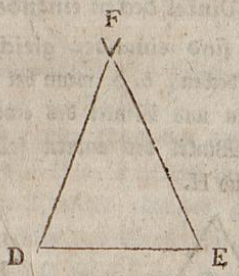
Anmerkung. Bei der Errichtung eines Dreiecks hat man nicht nöthig, die Kreisbogen auszuziehen; es ist schon genug, wenn man mit dem Halbmesser AB den Zirkel in die beiden Punkte A und B einsezt und Bogenschnitte macht, die einander in dem Punkte C durchkreuzen.

§. 16.

§. 16.

Aufgabe.

Einen gleichschenklichen Triangel errichtet man, wenn man aus den beiden Endpunkten D und E einer gegebenen Linie mit beliebiger oder bestimmter Eröffnung des Zirkels, über oder unter der Linie Bogenschnitte macht, und aus dem Punkte, wo sie einander durchkreuzen, z. B. in F Linien bis zu den Endpunkten der gegebenen Grundlinie DE ziehet.



Beweis.

1) Jedes Dreieck, das zwei gleiche Seiten hat, ist ein gleichschenkliches. (§ 7. II. Abthl.)

Nun sind in dem Dreiecke DEF zwei Seiten, DF und EF einander gleich; folglich ist das Dreieck DEF ein gleichschenkliches.

2)

2) Alle Halbmesser eines Zirkels sind einander gleich. (§. 76. I. Abthl. und §. 15. II. Abth.)

Die Seiten DF und FE sind Halbmesser eines Zirkels; denn sie sind mit einerlei Eröffnung des Zirkels gemacht; folglich sind sie einander gleich; und darum ist das Dreieck DEF ein gleichschenkliches.

§. 17.

Gleiche lange gerade Linien decken einander, oder sind einander gleich. (§. 59. I. Abthl.)

Gleiche Winkel decken einander. (§. 51. I.)

Dreiecke sind einander gleich, wenn sie sich wechselsweise decken, d. h. wenn bei dem Aufeinanderlegen, Seiten und Winkel des einen, genau in die Seiten und Winkel des andern fallen; wie bei den Dreiecken G und H.

Lehrsätze.

Zwei Dreiecke sind einander gleich oder decken einander:

1) Wenn in beiden zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind, oder:

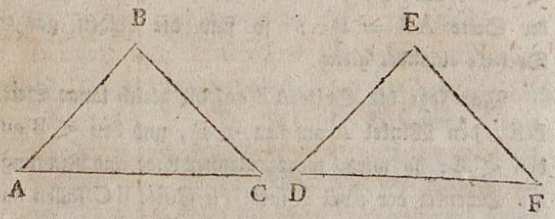
2)

2) Wenn in jedem zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite einander gleich sind; oder auch:

3) Wenn in beiden Dreiecken alle drei Seiten einander gleich sind.

Anmerkung. Einem gegebenen Dreiecke, ein anders völlig gleich zu machen, in Winkeln und Seiten: bedient man sich des Lineals, Zirkels und des Transporteurs.

Beweis von 1).



Wenn in den beiden Dreiecken ABC und DEF, AB = DE und BC = EF auch der < B = E; so sind die beiden Dreiecke einander gleich. Denn: legte man diese Linien und Winkel auf einander, nemlich AB auf DE, BC auf EF und B auf E: so würde der Punkt A auf den Punkt D und der Punkt C auf den Punkt F zu liegen kommen; weil die Gleichheit der Winkel B und E eine gleiche Richtung und Lage ihrer Schenkel verursacht; folglich würde der Punkt A von dem Punkte C eben so weit entfernt liegen, als der Punkt D vom Punkte F oder die beiden Linien AC und DF als das Maaß der Entfernung jener Punkte

(S.

(§. 34. I. Abtheil.) müssen einander völlig gleich seyn.

Diesem zu Folge muß auch die Linie AC die Linie DF decken.

Eben so die Winkel zu ihren beiden Seiten: nemlich der < A den < D und der < C den < F.

Beweis von 2).

Wenn in beiden Dreiecken ABC und DEF der < B = den < E, und der < A = den < D, auch die Seite AB = DE: so sind die beiden ganzen Dreiecke einander gleich.

Man lege die Seite AB auf die gleich lange Seite DE, den Winkel A auf den < D, und den < B auf den < E: so wird, wegen gleicher Lage und Richtung, der Schenkel der zwei Winkel die Seite BC fallen auf EF, die Seite AC auf die Seite DF, und zugleich der < C auf den Winkel F, der zwischen jenen beiden Seiten liegt.

Da nun in beiden Dreiecken alle Seiten und Winkel einander decken: so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich.

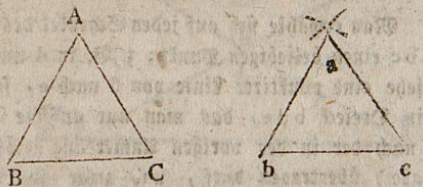
Beweis von 3).

Wenn in den beiden Dreiecken ABC und DEF die Seite AB = DE, die Seite AC = DF, und die Seite BC = der Seite EF; so sind die ganzen Dreiecke einander gleich. Man lege AB auf DE, AC

auf

auf DF, und BC auf EF: so fallen die Seiten nicht nur genau auf einander, sondern auch ihre Endpunkte und die zwischen ihnen liegenden Winkel, nämlich < H auf den < D; der < B auf den < E u. s. w.; folglich decken auch alle Seiten und Winkel einander, und die ganzen Dreiecke sind einander gleich.

1) Anmerkung.

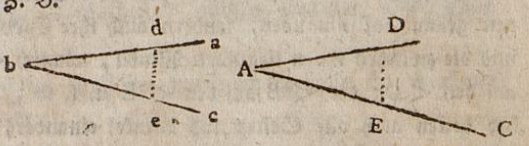


Einem vorgezeichnetem Dreiecke ABC ein anderes gleich zu machen, und zwar blos mit Zirkel und Lineal, zeichne man die Linie bc = BC; nun nehme man die Seite BA mit dem Zirkel aus dem Punkte B auf, und beschreibe über der Linie bc aus dem Punkte b einen Bogenschnitt; eben so nehme man die Seite CA aus dem Punkte C auf, und beschreibe mit dieser Eröffnung des Zirkels aus dem Punkte c einen Bogenschnitt, welcher den erstern im Punkte a durchkreuzt; nun ziehe man die geraden Linien ba und ca: so bekömmt man ein neues Dreieck abc, in welchem alle drei Seiten = den Seiten des Dreiecks ABC, und welches also dem Dreieck ABC selber gleich ist.

2) Anmerkung.

Einen gegebenen Winkel abzunehmen oder nachzuzeichnen mit Zirkel und Lineal:

Z. B.



Auf der Linie AC soll an den Punkt A ein < gesetzt werden, der dem gegebenen < abc gleich ist.

Man erwähle sich auf jeden Schenkel des Winkels abc einen beliebigen Punkt; z. B. in d und e, und ziehe eine punktirte Linie von d nach e, so entsteht ein Dreieck bde, das man nur auf die Linie AC (nach der in der vorigen Anmerkung gelößten Aufgabe) übertragen darf, und zwar so: daß AE = be; AD = bd, und DE = de; so ist der < A so groß als der < b.

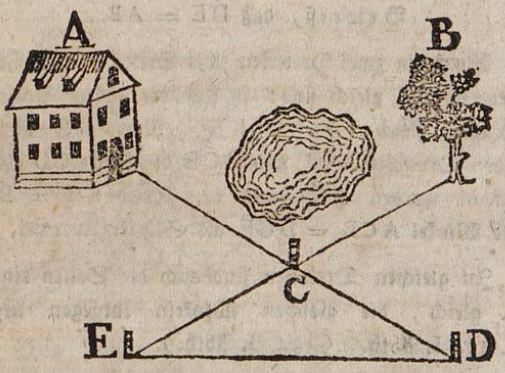
Die Lehrsätze dieses Paragraphs geben Auflößungen für folgende:

Praktische Aufgaben.

Die Weite zweier Oerter zu finden, welche man geradezu nicht messen kann.

Erster Fall.

Wenn man zwar nicht von einem Gegenstande zum andern, aber doch zu beiden von der Seite ohne Hinderniß kommen kann.



Wie weit ist das Haus A vom Baume B entfernt, zwischen denen ein Teich, Morast, oder Berg und dergl. liegt.

Man wähle in einiger Entfernung davon, ohngefähr in der Mitte zwischen beiden, einen Standpunkt; z. B. in C.

Nun messe man von C nach A, und trage diese Weite in gerader Linie zurück bis nach D, so, daß der Punkt oder Stab C, dem Auge gerade vor dem Punkte A lieget, und stecke in D einen Stab.

Eben so messe man von C nach B, und trage die gefundene Länge dieser Linie ebenfalls in gerader Linie so weit zurück, bis nach E, und stecke daselbst auch einen Stab.

Darauf messe man von D nach E; so giebt diese Länge die Entfernung des Hauses A von dem Baume B an.

Beweiß, daß DE = AB.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischen-Winkel gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. I.). Nun aber ist in beiden Dreiecken ACB und DCE die Seite CD gleich gemacht worden AC, und die Seite EC = BC. Der Winkel ACB = DCE als Scheitelwinkel.

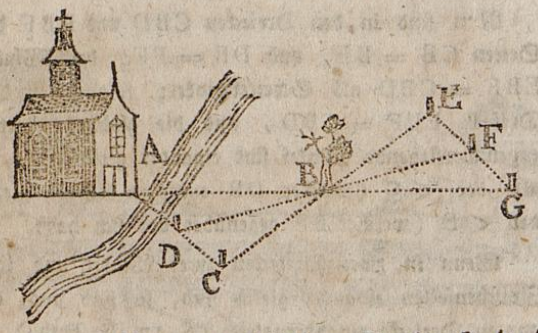
In gleichen Dreiecken sind auch die Seiten einander gleich, die gleichen Winkeln entgegen liegen (§. 17. I. Abth. §. 34. I. Abth.).

Nun aber sind die Dreiecke DCB und ACB einander gleich; folglich ist die Seite DE = AB; weil sie beide den gleichen Winkeln ACB und DCE gegenüber liegen.

Die Seite AB ist die gegebene Entfernung, die gemessen werden soll; also ist es auch gleichviel, wenn ich die Linie DE messe, weil diese der Linie AB gleich ist.

Zweiter Fall.

Wenn man nur zu den einem Gegenstande kommen kann, z. B. nur zum Baume B, aber nicht zum Hause A, weil sich ein Fluß zwischen beiden befindet.



Man wähle einen beliebigen Standpunkt in C und stecke einen Stab ein; darauf gehe man nach A zu, so nahe als man kommen kann, und stecke den Stab D dergestalt ein, daß er mit A und C in gerader Linie steht.

Nun messe man von C nach dem Baume B, und trage dieselbe Entfernung gerade fort bis nach E.

Eben so messe man von D nach B, und trage dasselbe Maaß fort, bis nach F.

Endlich stecke man den Stab G dergestalt ein, daß er nicht nur mit E und F, sondern auch mit A und B in gerader Linie steht. Darauf messe man von G nach B: so findet man die Entfernung des Hauses A von dem Baume B.

Beweiß, daß GB = AB.

Wenn in zwei Drecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind, so sind die ganzen Drecke einander gleich.

Nun sind in den Dreiecken CBD und EBF die Seiten CB = BE, und DB = BF; der Winkel EBF = CBD als Scheitelwinkel; folglich ist das Dreieck EBF = CBD, und die gleichen Seiten gegenüberstehende Winkel sind einander gleich. Es ist also der < C (welcher DB entgegen steht,) gleich den < E (welcher BF gegenüber vor sich hat).

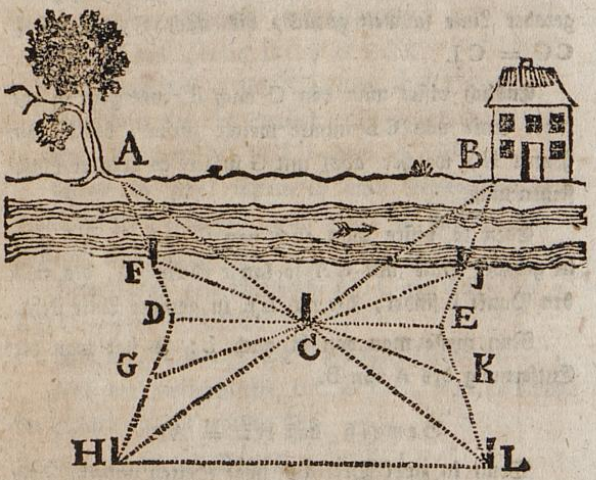
Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseiten einander gleich sind, so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. II Abth.).

Nun ist in den Dreiecken ACB und BEG der Winkel C = E, und der < ABC = EBG, als Scheitelwinkel. Auch die Zwischenseite CB = BE; folglich ist das Dreieck BEG = ACB. In gleichen Dreiecken sind auch die gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleich. Da nun C = E, und die Seite AB dem Winkel C, und die Seite BG dem Winkel E gegenüberstehet: so ist in den Dreiecken BEG und ACB die Seite GB = AB.

AB ist die Entfernung, welche gemessen werden soll; da nun BG ihr gleich ist: so ist es eben so gut, wenn BG gemessen wird.

Dritter Fall.

Wenn man zu beiden Gegenständen nicht kommen kann, wie mißt man da deren Entfernung?



Soll man messen, wie weit A von B entfernt sey, zu welchen beyden man nicht kommen kann: so sucht man einen Standpunkt in C, und stecke darauf noch zwei Stäbe in die Punkte D und E in gerader Linie mit C, doch so, daß CD = CE.

Darauf stecke man den Stab F so nahe als möglich nach A zu, aber so, daß er mit D und A in gleicher Linie stehe; eben so den Stab J in gleicher Linie mit E und B.

Hierauf messe man von F nach C und gehe eben so weit in gerader Linie zurück, bis nach K, so daß CK = CF.

Eben also messe man von C nach J, und gehe in gerader Linie so weit zurück, bis nach G, so, daß CG = CJ.

Endlich visirt man von C nach B, und geht in gerader Linie von CB immer weiter zurück, bis in den Punkt H, welcher auch mit G und D in gerader Linie stehen muß.

Eben so visire man auch von C nach A, und gehe in gerader Linie mit CA so lange rückwärts, bis man den Punkt L findet, der mit EK in gerader Linie steht.

Nun messe man von H nach L: so hat man die Entfernung des A von B.

Beweiß, daß HL = AB.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Nun ist in den Dreiecken DCF und ECK die Seite DC = EC und CF = CK gemacht worden.

Der Winkel DCF = dem < ECK, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck DCF = ECK.

Eben so ist in den Dreiecken ECJ und DCG die Seite EC = DC und CJ = CG.

Der Winkel ECJ = dem < DCG, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck ECJ = DCG.

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Seiten gegenüberstehender Winkel einander gleich.

Nun ist das Dreieck DCF = ECK.

Folglich ist der < FDC = dem < KEC.

Eben also war das Dreieck ECJ = DCG.

Folglich ist der < JEC = dem < GDC.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseiten einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich

Nun ist in den Dreiecken ADC und LEC der < ADC = dem < LEC.

Der < ACD = LCE, als Vertikalwinkel.

Und die Zwischenseite DC = CE, weil sie einander gleich gemacht worden sind.

Folglich ist das Dreieck ADC = LEC.

Ingleichen in den Dreiecken BEC und HDC ist der < BEC = HDC und der < BCE = dem < HCD, als Scheitelwinkel.

Und die Zwischenseite EC = CD.

Folglich ist das Dreieck BEC = HDC.

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Winkeln entgegenliegenden Seiten einander gleich.

Nun sind aber die Dreiecke ADC und LEC einander gleich:

Folglich ist die Seite AC = CL.

Eben so war das Dreieck BEC = HDC.

Folglich ist die Seite BC = HC.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Nun ist in dem Dreiecke ACB und LCH die Seite AC = CL, die Seite BC = CH und der Winkel ACB = LCH, als Scheitelwinkel.

Folglich ist das Dreieck ACB = LCH.

In gleichen Dreiecken sind die gleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Nun ist das Dreieck ACB = LCH.

Folglich ist die Seite HL = AB.

Da ich also die Seite AB nicht messen kann; so ist es eben so gut, wenn HL gemessen wird.

Anmerkung. Die Ausführung dieser jezt eben beschriebenen Messungen, erfordert ebene und durch nichts behinderte Plätze, um die Dreiecke abstecken zu können; und in dem Abstecken selbst die strengste Genauigkeit, wenn die Messung zuverlässig werden soll. Sie ist daher in vielen Fällen nicht anwendbar, und für solche Fälle werden in der Folge leichtere und sichere Meßarten vorkommen.

Aus den Lehrsätzen dieses Paragraphs lassen sich noch diese Folgerungen ziehen:

Wer ein Dreieck von bestimmter Größe errichten soll, dem müssen gegeben seyn: entweder

Zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel;

oder:

Zwei Winkel und ihre Zwischenseite;

oder:

Alle drei Seiten.

Zu diesem Dreiecke sind gegeben die Seite a b und a c nebst dem Winkel a, der sie beide verbindet.

a ——— b

a ——————————— c

< a = 90°.

Man zeichne die eine von den gegebenen Seiten a b oder a c, und setze die andere in den verlangten Winkel von 90° daran; dann ziehe man von dem Endpunkte der einen Linie bis zum Endpunkte der andern, eine gerade Linie, so ist das Dreieck fertig.

Zu dem Dreiecke d e f wird gegeben die Linie d e und die beiden Winkel d und e zu deren beiden Seiten.

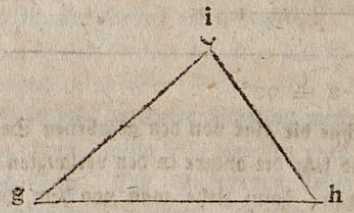
d ——————————— e.

< d = 45°.

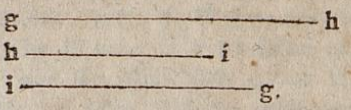
< e = 45°.

Man

Man zeichne erstlich die gegebene Linie, dann setze man auf beiden Endpunkten derselben, die gegebenen Winkel an, deren Richtung durch Punkte angezeigt wird; nach dieser Richtung ziehe man von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie, die beiden andern Seiten bis dahin, wo sie zusammentreffen, und wo diese Linien oder Seiten einander berühren, da schließt sich das Dreieck.



Wenn zu dem Dreiecke g h i gegeben werden die Seiten g h, h i und i g.



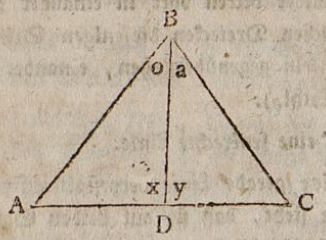
So zeichne man erstlich die Linie g h; dann fasse man mit dem Zirkel die Linie g i, setze ihn in g ein, und ziehe einen Bogenschnitt mit dem andern Schenkel; eben so fasse man auch die Linie h i, setze den Zirkel in h ein und durchschneite den ersten Bogenschnitt. Darauf ziehe man von beiden Endpunkten der Linie g h Linien nach dem Punkte i, wo beide Bogenschnitte sich durchkreuzen, so ist das Dreieck fertig.

§. 18.

§. 18.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks, auf dessen Grundlinie also herabfällt, daß der Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile zerschnitten wird, theilt auch zugleich die Grundlinie und das ganze Dreieck in zwei gleiche Theile, und die Theilungslinie steht senkrecht auf der Grundlinie.



Hier ist zu beweisen:

1) Daß das Dreieck ABD = CBD.

Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn an denselben zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind (§. 17. I. Abth.).

Nun sind in den beiden Dreiecken ABD und CBD zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel einander gleich; nemlich die Seite AB = BC, als die Seiten eines gleichschenklichen Dreiecks, und die Seite BD, als eine gemeinschaftliche, für beide Dreiecke;

auch

auch der $< o = a$ nach der Voraussetzung: darum beide Dreiecke, die durch diese Theilung entstanden sind, einander gleich; so ist auch das gleichschenkliche Dreieck ABC durch die Linie BD in zwei gleiche Theile getheilt worden.

2) Daß die Grundlinie in zwei gleiche Theile getheilt ist, oder $AD = DC$.

Sind die beiden Dreiecke ABD und CBD einander gleich, so ist auch die Seite $AD = DC$ (§. 59. I. Abth. §. 17. II. Abth.), weil sie bei dem Aufeinanderlegen der Dreiecke einander decken oder in einander fallen; oder weil in gleichen Dreiecken diejenigen Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, einander gleich sind (§. 17. I. Abthl.).

3) BD ist eine senkrechte Linie.

Wenn eine gerade Linie dergestalt auf einer andern geraden Linie steht, daß sie auf beiden Seiten gleiche Winkel hat; so ist diese Linie eine senkrechte (§. 53. I. Ab.). Nun sind aber die Winkel x und y, welche die Linie BD macht, einander gleich; weil sie gleichen Seiten gegenüber stehen (§. 17. II. Abth.); folglich ist die Linie BD eine senkrechte Linie.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist sehr fruchtbar, weil sich vieles in dem Folgenden darauf gründet.

§. 19.

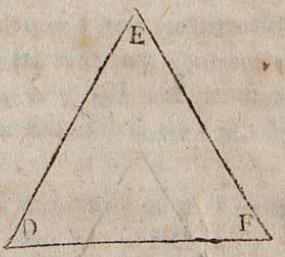
§. 19.

Die Winkel A und B an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks sind einander gleich.

Die Perpendikular-Linie, die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf die Basis herabgelassen wird, macht zwei gleiche Dreiecke (§. 18. II. Abthl.). Nun sind aber A und C Winkel, die einander decken (§. 17. II. Abthl.); folglich sind die Winkel an der Grundlinie in gleichschenklichen Dreiecken einander gleich.

§. 20.

Jedes gleichseitige Dreieck hat auch gleiche Winkel.



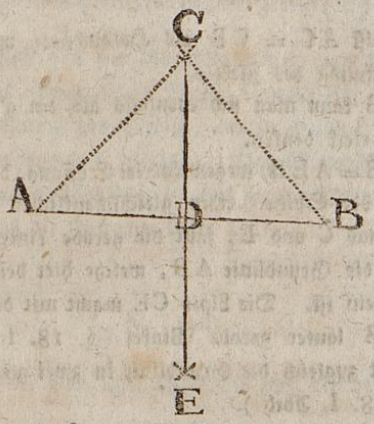
Jedes gleichseitige Dreieck kann auch für ein gleichschenkliches angesehen werden.

Nun sind in gleichschenklichen Dreiecken die Winkel an der Grundlinie einander gleich (§. 19. II. Abthl.); folglich sind auch in dem gleichseitigen Dreiecke DFE die Winkel D und F an der Grundlinie einander gleich.

Da aber in gleichseitigen Dreiecken eine Seite ist wie die andere, so kann auch jede andere Seite, EF oder ED, für die Grundlinie angenommen werden, und die Winkel des Dreiecks müssen einander gleich seyn; da sie alle an der Grundlinie stehen können.

§. 21.

Wie theilt man eine gerade Linie in zwei gleiche Theile?



Die gerade Linie, welche getheilt werden soll, sey AB.

Man setze den Zirkel mit einer Eröffnung, die größer ist, als die Hälfte der Linie AB, in dem Endpunkte A von der Linie AB ein, und mache über und unter der Linie einen Bogenschnitt.

Darauf setze man mit derselben Eröffnung den Zirkel auch in dem andern Endpunkte B der Linie AB ein, und durchschneide jene Bogenschnitte über und unter der Linie. Durch die Punkte C und E, die einander im Durchschneiden berühren, ziehe man eine gerade Linie, nämlich von C bis E.

Diese gerade Linie CE schneidet die gegebene Linie in zwei gleiche Theile.

Beweis:

Man ziehe noch die punktirten Hülfslinien AC und CB: so ist ACB ein gleichschenkliches Dreieck;

 denn

denn es ist AC = CB als Halbmesser, wegen gleicher Eröffnung des Zirkels.

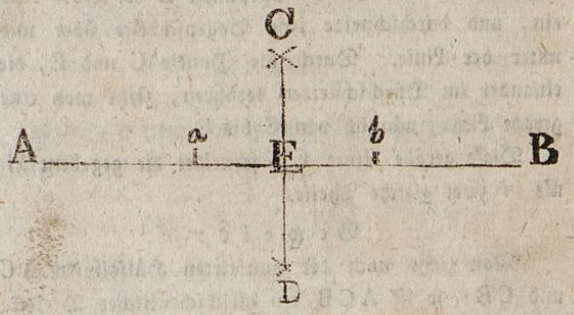
AEB kann man sich ebenfalls als ein gleichschenkliches Dreieck denken.

ACB = AEB, wegen einerlei Eröffnung des Zirkels.

Aus der Spitze beider gleichschenklicher Dreiecke, nämlich aus C und E, fällt die gerade Linie CD und ED auf die Grundlinie AB, welche hier beiden Dreiecken gemein ist. Die Linie CE macht mit der Grundlinie AB lauter gerade Winkel (§. 18. I. Abth.), und theilt zugleich die Grundlinie in zwei gleiche Theile (§. 18. I. Abth.).

Nun ist die Grundlinie AB die gegebene Linie, welche getheilt werden soll; folglich ist sie durch die Linie CE in dem Punkte D in zwei gleiche Theile zerschnitten worden.

Anmerkung. Ist die Grundlinie, welche in zwei Theile getheilt werden soll, sehr lang, so kann man an beiden Enden derselben beliebige Theile abnehmen. Z. B.

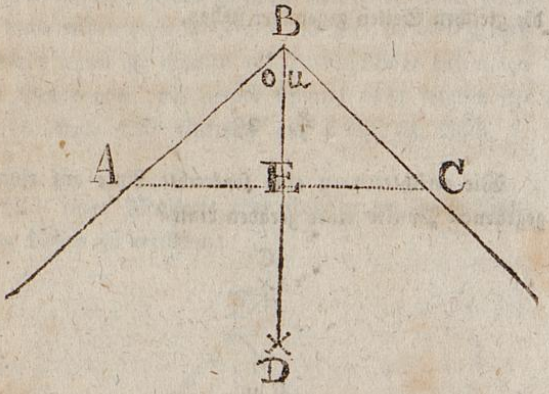


Hier

Hier sind von der Grundlinie AB, von den Endpunkten aus, zwei gleiche Theile Aa und Bb durch einerlei Eröffnung des Zirkels, der in A und B eingesezt wurde, abgenommen worden. Das Mittelstük ab ist hernach, wie gewöhnlich, in zwei gleiche Theile getheilt worden durch die senkrechte Linie CD.

§. 22.

Wie theilt man einen Winkel in zwei gleiche Theile?



Man setze den Zirkel in die Spitze B des gegebenen Winkels ABC mit beliebiger Eröffnung, und mache beide Schenkel in den Punkten A und C durch Bogenschnitte einander gleich. In die Punkte, wo die Schenkel durchschnitten sind, setze man den Zirkel ein und mache mit gleicher Eröffnung Bogenschnitte im Punkte D

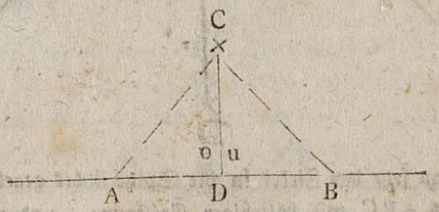
der Spitze des Winkels B gegen über, die einander in D durchkreuzen.

Aus dem Durchkreuzungspunkte ziehe man nun eine feine gerade Linie nach der Spitze des Winkels; und diese Linie schneidet den gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile.

Man denke sich in dem Winkel ABC eine gerade Linie von A bis C; so hat man ein gleichschenkliches Dreieck, das nach §. 18 in zwei gleiche Theile getheilt worden ist; folglich ist der Winkel o = u, weil in zwei gleichen Dreiecken diejenigen Winkel einander gleich sind, die gleichen Seiten gegenüber stehen.

§. 23.

Wie errichtet man eine senkrechte Linie auf einem gegebenen Punkte einer geraden Linie?



Man setze den Zirkel mit beliebiger Eröffnung in dem gegebenen Punkte D ein, und mache von beiden Seiten der Linie in A und B Bogenschnitte. In die Punkte A und B setze man ferner den Zirkel und mache mit beliebi-

ge

r

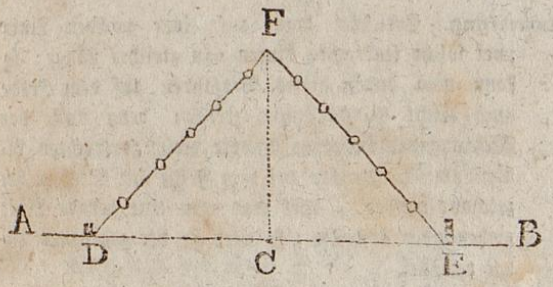
ger Eröffnung desselben über der Linie durchkreuzte Bogenschnitte in C. Aus C ziehe man eine gerade Linie nach dem gegebenen Puncte D, und diese Linie steht senkrecht auf AB.

Die beiden Dreiecke ACD und BCD sind einander gleich; denn AD ist BD gleich gemacht worden, und AC = BC: durch gleiche Eröffnung des Zirkels, und CD ist beiden gemein. (§. 17.)

Folglich ist auch der Winkel o = u; weil sie in gleichen Dreiecken gleichen Seiten gegenüber stehen.

Da nun diese beiden gleichen Winkel auf einer geraden Linie neben einander stehen, so sind sie auch gerade Winkel: denn sie machen als Nebenwinkel zusammen 180 Grade oder zwei gerade Winkel aus; folglich stehet die Linie CD senkrecht auf AB. (I. Abth. §. 53.).

Mit einer Meßkette oder Schnur im Felde senkrechte Linien zu errichten:



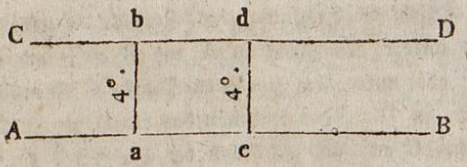
Die Linie sey AB, sollte man aus dem Punkte C eine senkrechte Linie errichten; so messe man aus dem Punkte C, zu beiden Seiten rechts und links auf der Linie AB eben so viel beliebige Ruthen oder Schuhe, bis D als wie bis E, und bezeichne diese Punkte mit Pfählen oder Stäben.

An den Punkt D dieser Linie halte man den Anfangspunkt der Meßkette, und an den Punkt E den Endpunkt derselben.

Hierauf faßt man den Mittelpunkt der Kette; welcher leicht durch das Abzählen der daran bezeichneten Ruthen zu finden ist, geht überwärts der Linie AB, z. B. bis in den Punkt F, wo die Schnur straff angezogen, den Punkt angiebt, aus welchem auf C eine senkrechte Linie durch Absteckestäbe u. s. f. errichtet werden kann.

Man wird leicht einsehen, daß auch die Hälfte der Schnur an die Punkte D und E gehalten, zu dieser Operation schon hinlänglich ist.

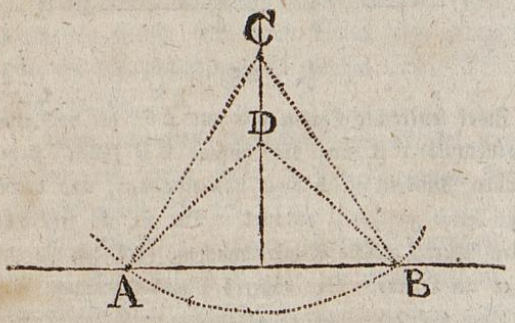
Anmerkung. Errichtet man auf einer geraden Linie zwei solche senkrechte Linien von gleicher Länge: so kann man durch dieses Verfahren auf dem Felde auch leicht Parallellinien ziehen; denn nach der Richtung der äußersten Punkte dieser senkrechten Linien (welche Punkte auf dem Felde mit Stäben bezeichnet werden), darf man nur eine gerade Linie ziehen oder abstecken; so wird sie der gegebenen Linie parallel.



Z. B. Es sei die gerade Linie AB, mit welcher in einer Entfernung von 4° eine Parallellinie gezogen werden soll; so errichte man die senkrechten Linien ab und cd auf der Linie AB jede = 4°; so ist ab parallel cd und CD parallel AB.

§. 24.

Wie errichtet man eine senkrechte Linie auf einer geraden Linie, und zwar aus einem Punkte, der außer der Linie gegeben ist?

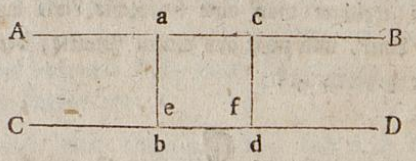


Man setze den Zirkel in dem gegebenen Punkte C, und mache auf der Linie in A und B Durchschnitte

mit beliebiger Eröffnung des Zirkels. Hierauf setze man wieder den Zirkel in A und B ein, und mache über oder unter dem gegebenen Punkte C Kreuzschnitte z. B. in D. Nun legt man das Lineal an die Punkte D und C an, und zieht nach der Linie AB zu. Alsdann steht die Linie AD senkrecht auf AB.

Beweis.

Hier ist gleichfalls ein gleichschenkliches Dreieck ADB oder ACB denkbar, durch deren beide Spitzen die Linie CD auf ihre gemeinschaftliche Grundlinie fällt, den Winkel der Spitze und die Grundlinie gleich theilt, auch auf der Grundlinie gleiche Winkel macht (§. 18); folglich ist die Linie senkrecht.



§. 25.

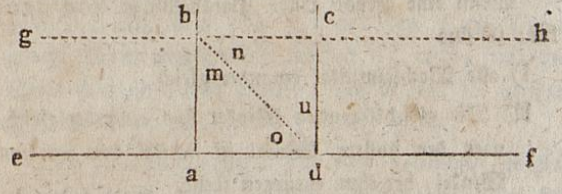
Zwei senkrechte Linien ab und cd, die von einer Parallellinie AB auf die andere CD fallen, stehen in allen Punkten gleich weit von einander, und laufen daher selbst einander parallel. Da sie als senkrechte Linien überall gleiche Winkel machen: so bilden sie entweder ein Quadrat oder anderes Parallelogramm; folglich sind auch die einander gegenüber stehenden Seiten, welche durch die Parallellinien abgeschnitten werden, einander gleich.

Ste-

Stehen die Linien a b und c d auf der Linie C D senkrecht: so muß sowohl der < e, als der Winkel f gleich einem geraden Winkel seyn (§. 52 I. Abth.).

Folglich e + f = 2 geraden Winkeln = 180°. Sind aber die < e + f = 180°: so müssen auch die Linien a b und c d Parallellinien seyn (§. 2. II.)

Wenn also zwei senkrechte Linien (a b und c d) auf einer geraden Linien (e f) stehen: so sind sie einander parallel.



Zur Erleichterung des Beweises ziehe man oben durch die beiden senkrechten Linien eine gerade Linie g h, die der Grundlinie e f parallel läuft. Ferner die Diagonallinie b d.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und ihre Zwischenseite gleich sind: so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17. II.).

Nun sind in den beiden Dreiecken b a d und d c b der < m = u und n = o als Wechselwinkel, und die Zwischenseite ist beiden gemein; folglich sind die ganzen Dreiecke einander gleich oder b a d = d c b.

In gleichen Dreiecken sind auch die einander ge-

genüber stehenden Seiten einander gleich; folglich ist in den beiden gleichen Dreiecken b a d und d c b die Seite b c = a d.

Parallellinien stehen überall gleich weit von einander. Nun sind aber die beiden Distanzen b c und a d zwischen den beiden senkrechten Linien a b und c d einander gleich; folglich sind die senkrechten Linien a b und c d parallel.

§. 26.

Wenn eine gerade Linie Parallellinien durchschneidet: so sind

I) alle Wechselwinkel einander gleich.

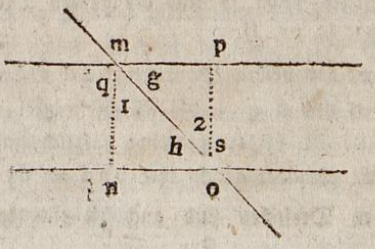
II) Die gleichliegenden Winkel sind einander gleich, oder der äußere Winkel ist gleich dem inneren Winkel, der ihm entgegen steht.

III) Die innern Winkel sind zusammen zwei geraden Winkeln gleich.

I.

Um zu beweisen, daß

g = h und 1 = 2



Man

Man ziehe zwei Hülfslinien, nämlich aus den Punkten, wo die Querlinie die Parallellinien durchschneidet, die senkrechten Linien m n und o p.

Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten einander gleich: so sind die Dreiecke einander selber gleich (§. 17.)

Nun aber sind die Seiten des Dreiecks m p o gleich den Seiten des andern Dreiecks, als Distanzen zweier Parallellinien.

Die Seite m p ist = n o, weil durch die senkrechten Linien m n und p o von den Parallellinien gleiche Theile abgeschnitten werden (§. 25), und die Seite m o ist beiden gemein; folglich sind die ganzen Dreiecke m p o und m n o einander gleich.

In gleichen Dreiecken sind auch diejenigen Winkel einander gleich, welche gleichen Seiten gegenüber stehen und bei dem Aufeinanderlegen in oder auf einander fallen.

Nun fällt aber (wenn man das eine Dreieck herumkehrt, und das eine auf das andere legt) die Seite m p auf die Seite n o, und die Seite p o auf die Seite m n und eben darum auch die Winkel g und h, 1 und 2 auf einander. Und weil diese wegen der Gleichheit der Seiten einander decken, so ist g = h und 1 = 2.

Nun sind aber g und h Wechselwinkel; folglich ist der Wechselwinkel g gleich dem Wechselwinkel h. Und fügt man zu den gleichen Winkeln 1 und 2 die beiden

den geraden Winkel q und s hinzu, so sind auch die Wechselwinkel $1 + q = 2 + s$.

Denn $1 = 2$ (Siehe oben)

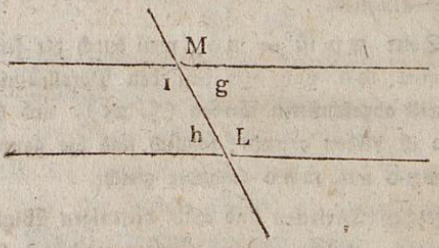
$q = s$ (als gerade Winkel)

$1 + q = 2 + s$.

Gleiches zu gleichem addirt ꝛc.

II.

Beweis, daß $M = L$.



Alle Scheitelwinkel sind einander gleich (II. Abth. §. 92); folglich $M = 1$ (weil sie Scheitelwinkel sind). Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, die sind einander selber gleich (I. §. 62.)

Nun ist $M = 1$ (als Scheitelwinkel)

und $L = 1$ (als Wechselwinkel.)

Folglich ist auch der äußere Winkel M gleich dem gleichliegenden innern $\angle$ L;

oder $M = L$

III.

Beweis

daß $G + L =$ zwei geraden Winkeln, oder 180°.

Alle

Alle Nebenwinkel sind in Summa zwei geraden Winkeln gleich (I. Abth. §. 87.); folglich ist auch der $< h + L =$ zwei geraden Winkeln $= 180°$.

Gleiches kann für gleiches gesezt (substituirt) oder mit gleichem verwechselt werden (I. §. 61.).

Nun ist $G = H$ (als Wechselwinkel).

Folglich ist $G + L = h + L$.

Nun ist aber $h + L =$ zwei geraden Winkeln.

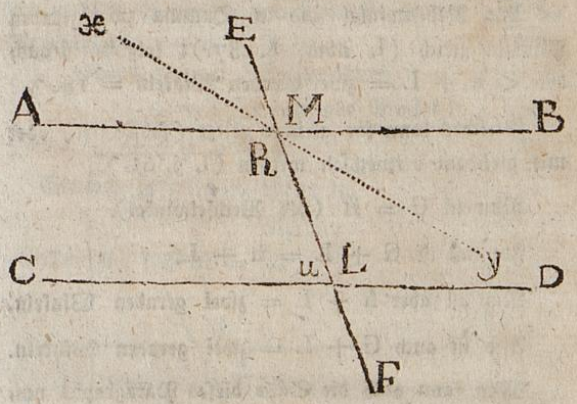
Also ist auch $G + L =$ zwei geraden Winkeln.

Man kann auch die Sätze dieses Paragraphs umkehren und behaupten: wenn zwei gerade Linien, z. B. AB und CD, die von einer dritten durchschnitten werden, eine solche Lage gegeneinander haben, daß:

1) die Wechselwinkel o und u einander gleich sind; auch

2) der gleichliegende äußere Winkel M gleich ist dem innern Winkel L und

3) die beiden innern Winkel o und L zusammen 180 Grad haben: so laufen diese beiden Linien AB und CD einander parallel.



Wollte man nicht zugeben, daß (bei allen obigen Voraussetzungen) die Linie AB der Linie CD parallel liefe: so müßte doch irgend eine andere, es sey z. B. xy, unter gleichen drey Bedingungen mit CD parallel laufen. Allein daraus würde folgen, daß der Winkel FMy so groß wäre, als der Winkel u. Aber der Winkel FMy ist nur ein Theil von dem Winkel o oder FMB, welcher nach der Voraussetzung dem Wechselwinkel u gleich ist: und dann ist die Bedingung nicht mehr dieselbe.

Auch der äußere Winkel EMy ist dem innern Winkel L nicht gleich: denn sonst wäre auch der Winkel xMF (als Scheitelwinkel von EMy) = L. Allein der Winkel xMF bestehet aus dem Winkel R + xMA, und ist also offenbar größer, als der Winkel R, welcher als Wechselwinkel von L eben so

gleich

gleich diesem seyn muß, als o = u, vermöge der Voraussetzung.

Da nun der äußere Winkel EMy dem innern Winkel L nicht gleich ist: so können auch die beiden innern Winkel yMF + L nicht zwei rechten Winkeln gleich seyn, oder 180 Grad in Summa haben. Denn die beiden Nebenwinkel yMF + EMy haben zwar als solche in Summa 180 Grad: man kann aber den Winkel L dem Winkel EMy nicht substituiren; weil der leztere größer ist, als L: folglich kann auch nicht yMF + L in Summa 180 Grad haben.

So viel nun EMy größer ist als L, um so viel ist der Nebenwinkel des erstern, (nemlich yMF) kleiner als L.

Folglich beträgt yMF + L weniger als 180 Grad.

Dagegen werden die beiden innern Winkel xMF + u auf der andern Seite größer als 180 Grad in Summa.

Folglich neigen sich die beiden Linien xy und CD, auf der Seite, wo die innern Winkel kleiner sind, zu einander, und fahren desto weiter auf der andern Seite, wo die größern Winkel liegen, von einander: also sind sie einander nicht parallel.

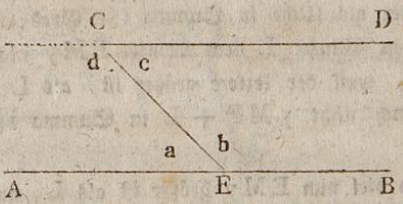
Da nun alles dies bey jeder andern Linie, außer AB, zutreffen würde; so ist AB allein der Linie CD parallel.

§. 27.

§. 27.

Aufgabe.

Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Linie parallel mit einer andern gegebenen Linie?



Soll durch den gegebenen Punkt C eine Linie parallel mit AB gezogen werden: so ziehe man aus dem Punkte C eine gerade Linie in beliebiger Richtung auf die Linie AB, zum Beispiel die Linie CE. Durch dieses Verfahren bekömmt man auf der Linie AB zwei Winkel a und b. Diese Winkel trägt man an den gegebenen Punkt C auf der Linie CE in entgegengesetzter Richtung ab (nach §. 17. 2te Anmerk.) so wird der Winkel c = a und d = b, und die Linien CD und AB sind einander parallel; weil die Linien AB und CD von einer dritten CE dergestalt durchschnitten werden: daß die Wechselwinkel a c und d b einander gleich sind.

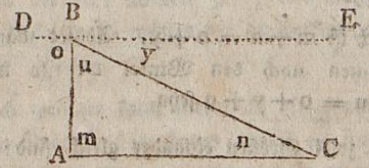
Der Augenschein lehrt, daß man bei dieser Methode, Parallel-Linien zu ziehen, nur einen Wechselwin-

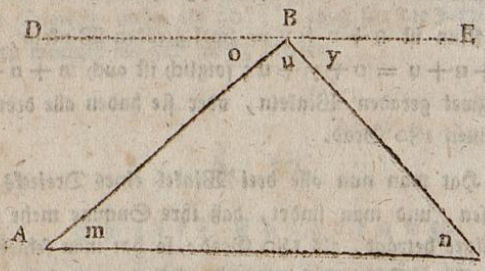
winkel, z. B. den < a in entgegengesezter Richtung auf die Linie CE zu tragen braucht.

§. 28.

Lehrsatz.

Alle Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammen oder in Summa zwei geraden Winkeln gleich.





Zur Führung des Beweißes ziehe man durch die Spitze der Dreiecke ABC die Hülfslinie DE mit der Grundlinie AC parallel, (wodurch, wie der Beweis lehren wird, alle drei Winkel des Dreiecks oben als Nebenwinkel zusammenkommen).

Alle Nebenwinkel sind gleich zwei geraden Winkeln (I. §. 73.).

Die Winkel o + u + y sind also als Nebenwinkel gleich zwei geraden Winkeln. Weil AC und DE einander parallel laufen, so ist der < y = dem < n und o = m, als Wechselwinkel. Der Winkel u aber gehört eben sowohl zu den drei Winkeln des Dreiecks, als zu den drei Nebenwinkeln.

Gleiches zu gleichen addirt giebt gleiche Summen (I. §. 67.).

Folglich ist m + n = o + y. Addirt man zu beiden Summen noch den Winkel u: so muß auch m + n + u = o + y + u seyn.

Wenn zwei Größen einander gleich sind: so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden.

Nun ist o + u + y = zwei geraden Winkeln, und m + n + u = o + y + u; folglich ist auch m + n + u = zwei geraden Winkeln, oder sie haben alle drei zusammen 180 Grad.

Hat man nun alle drei Winkel eines Dreiecks gemessen, und man findet, daß ihre Summe mehr oder weniger beträgt, als 180 Grad: so hat man fehlerhaft gemessen. Folglich kann dieser Lehrsatz zur Probe der Richtigkeit im Winkelmessen dienen.

Aus diesem fruchtbaren Lehrsatze ergeben sich noch vielerlei andere Folgesätze.

§. 29.

§. 29.

Erste Folgerung.

In keinem Dreiecke kann mehr als ein gerader Winkel seyn, weil die beiden andern Winkel zusammen auch einen geraden Winkel ausmachen, und gleichwohl alle drei Winkel nur zwei geraden Winkeln gleich sind; oder hält der eine Winkel 90°, das Maas eines geraden Winkels: so müssen sich die beiden übrigen Winkel in 90° theilen.

Noch weniger kann mehr als ein stumpfer Winkel in einem Dreiecke statt finden, weil ein stumpfer Winkel größer ist, als ein gerader; hält aber ein Winkel im Dreiecke mehr als 90°: so muß für die beiden andern weniger als 90° übrig bleiben.

§. 30.

Zweite Folgerung.

In einem rechtwinklichten Dreiecke sind die beiden spitzen Winkel zusammen einen geraden Winkel gleich, weil der dritte schon ein gerader ist, und für die beiden übrigen nur 90° oder die Summe eines geraden Winkels übrig bleibt.

In einem stumpfwinklichten Dreiecke sind daher die beiden spitzen Winkel zusammen kleiner, als ein gerader Winkel, weil der stumpfe Winkel mehr beträgt, als ein gerader, und also für die übrigen Winkel weniger übrig bleibt.

§. 31.

Dritte Folgerung.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks enthält 60 Grad, weil alle Winkel einander gleich sind, und also jeder den dritten Theil von der Summe zweier geraden Winkel von 180 Grad enthält.

Anmerkung. Aus diesem Grunde kann das geradwinklichte und stumpfwinklichte Dreieck nicht gleichseitig seyn, weil schon der eine Winkel mehr, als 60 Grad beträgt.

§. 32.

Vierte Folgerung.

Wenn man die Größe des einen Winkels vom Dreiecke weiß, so findet man die Summe der beiden andern, wenn man den bekannten Winkel von 180° abzieht.

Hat man daher in einem Dreiecke einen Winkel gemessen, so weiß man auch die Summe der beiden übrigen. Gesezt der eine Winkel mißt 50 Grad: so müs-

sen

sen die beiden übrigen zusammengenommen 130 Grad halten.

Weiß man die Summe von zwei Winkeln: so findet man den dritten auf eben diese Weise durch Subtraction.

§. 33.

Fünfte Folgerung.

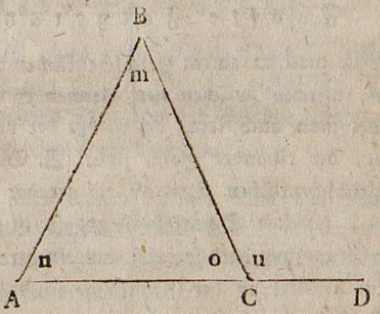
Weiß man in einem gleichschenklichen Dreiecke den Winkel, welcher zwischen den gleichen Schenkeln liegt: so findet man auch leicht die Größe der beiden übrigen Winkel, die einander gleich sind. Z. B. wenn in einem gleichschenklichen Dreiecke ein gerader Winkel zwischen den gleichen Schenkeln liegt: so ist jeder Winkel an der Grundlinie halb so groß, als ein gerader. Denn weil die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks (nach §. 20.) einander gleich sind, und beide hier zusammen den zweiten geraden Winkel ausmachen: so kömmt auch folglich auf jeden nur die Hälfte von einem geraden Winkel, oder 45 Grad.

Eben so leicht findet man den unbekannten Winkel zwischen den gleichen Schenkeln, wenn man nur einen von den beiden andern Winkeln weiß. Denn man darf nur den bekannten Winkel doppelt nehmen und dieses doppelt von 180 Grad abziehen; das übrige giebt den dritten Winkel.

§. 34.

Lehrsatz.

Wenn eine Seite eines Dreiecks verlängert wird: so ist der äußere Winkel so groß, als die beiden gegenüberliegenden Winkel zusammen.



Wenn an dem Dreiecke A B C die Seite A C bis in D verlängert wird: so ist der $< u = m + n$.

Alle Winkel eines Dreiecks sind $= 180° =$ zwei geraden Winkeln; folglich ist auch $m + n + o =$ zwei geraden Winkeln.

Alle Nebenwinkel sind in Summa gleich zwei geraden Winkeln; folglich $u + o =$ zwei geraden Wink.

Zwei Größen die einer dritten gleich, sind einander selber gleich.

Nun ist $m + n + o = 2$ geraden Winkeln.

Ingleichen $u + o = 2$ geraden Winkeln.

Also

Also ist auch $u + o = m + n + o$.

Gleiches von gleichen abgezogen, läßt gleiches übrig.

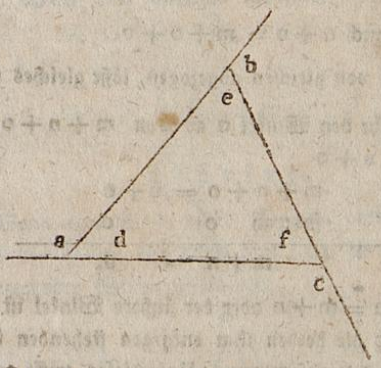
Man ziehe den Winkel o ab von $m + n + o$, ingleichen von $u + o$

$$\begin{array}{rl} & m + n + o = u + o \\ \text{subtrah} & \quad o \qquad\quad o \\ \hline & m + n \;=\; u. \end{array}$$

So ist $u = m + n$ oder der äußere Winkel ist allein so groß, als die beiden ihm entgegen stehenden innern Winkel m und n zusammen. Und dieses trifft an allen Seiten des Dreiecks zu.

§. 35.

Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphs folgt, daß alle äußere Winkel eines Dreiecks zusammen vier gerade Winkel ausmachen. Die innern Winkel eines jeden Dreiecks sind zwei geraden Winkeln gleich (§. 28.) und jeder äußere Winkel ist so groß, als zwei innere Gegenwinkel (§. 33.); folglich betragen die äußern Winkel zusammen noch einmal so viel, als die innern Winkel.

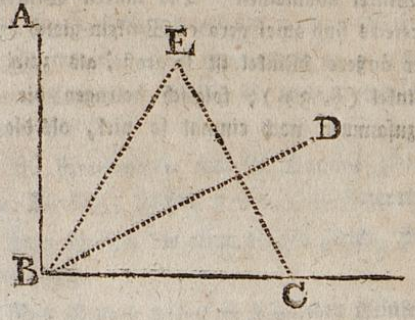


Der $\sphericalangle a = e + f$ (§. 34.)
" $\sphericalangle b = d + f$
" $\sphericalangle c = d + e$

Also $a + b + c = 2d + 2e + 2f = def + def.$

§. 36.

Wie theilt man einen geraden Winkel in drei gleiche Theile?



Man

Man errichte auf dem einen Schenkel BC des geraden Winkels ABC ein gleichseitiges Dreieck BEC, und theile dessen Winkel in zwei gleiche Theile.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks enthält 60 Grad (§. 31.)

Also ist der Winkel EBC = 60 Grad: folglich schneidet er von dem geraden Winkel ABC der 90 Grad enthält, 60 Grad ab; und der Winkel ABE behält noch 30 Grad.

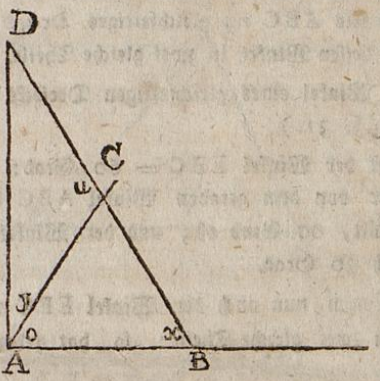
Theilt man nun auch den Winkel EBC von 60 Graden in zwei gleiche Theile: so hat jeder Theil 30 Grad.

Da nun jeder von den 3 Winkeln 30 Grad enthält; so ist der gerade Winkel in 3 gleiche Theile getheilt worden.

§. 37.

Auf dem Ende einer geraden Linie AB eine senkrechte Linie zu errichten.

Man errichte auf der gegebenen Linie AB ein gleichseitiges Dreieck A, verlängere die Seite BC nach D zu und zwar so, daß die Verlängerung CD = BC wird. Nun lasse man aus dem Punkte D auf den Endpunkt A der Linie AB eine gerade Linie herabfallen: so ist diese Linie AD die verlangte Perpendikular-Linie.



Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks hält 60 Grad (§. 31.)

Das Dreieck ABC ist ein gleichseitiges, folglich enthalten die $< o + x$. $2 \times 60 = 120$ Grad. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist so groß, als die beiden ihm entgegen stehenden innern Winkel (§. 33.)

Der Winkel u ist ein äußerer Winkel; folglich ist er so groß als $o + x$, das heißt er enthält 120°.

Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks sind einander gleich (§. 19.).

Das Dreieck ACD ist ein gleichschenkliches Dreieck, denn CD ist den Seiten des gleichseitigen Dreiecks ACB gleich gemacht worden; daher $CD = AC$; folglich ist der $< y = D$.

Alle Winkel eines Dreiecks sind zusammen zwei geraden Winkeln gleich = 180° (§. 28.)

Und

Und wenn man einen Winkel des Dreiecks weiß: so findet man die Summe der beiden andern durch Subtraction des bekannten Winkels, von der Summe zweier geraden Winkel oder von 180 Grad. Wenn man nun den Winkel u oder 120 Grad von 180 Graden abzieht: so enthalten die Winkel y + D = 60 Grad.

Nun ist y = 30 Grad.

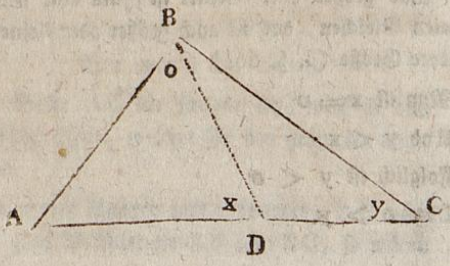
Jeder gerade Winkel hält 90° (I. §. 90.)

Die Winkel y + o halten 90 Grad denn o = 60°, und y = 30°; folglich y + o oder 60 + 30 = 90.

Also machen die Winkel y + o einen geraden Winkel aus, und die Linie AD steht auf AB (I. §. 54.) senkrecht in dem Punkte A.

§. 38.

I. In jedem Dreiecke ist der Winkel der größte, welcher der größten Seite gegen übersteht; und derjenige Winkel ist kleiner, der einer kleinern Seite gegenübersteht.



Man

Man ziehe zur Bequemlichkeit des Beweises die Hülfslinie AD; doch so, daß AD = AB. Denn weil AC sichtbar größer ist, als AB: so kann schon ein Theil von AC so groß sein, als AB.

Durch dieses Verfahren entsteht das gleichschenklichte, Dreieck ABD dessen Grundlinie BD sein soll.

Beweis:

Daß B der größte Winkel sei in dem Dreiecke ABC.

In jedem gleichschenklichen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

ABD ist ein gleichschenkliches Dreieck, weil AD gleich gemacht worden ist AB: folglich sind die Winkel an der Grundlinie x und o einander gleich.

Jeder äußere Winkel eines Dreiecks ist so groß als beide entgegenstehende innere Winkel: folglich auch größer als einer derselben.

Nun ist der Winkel x ein äußerer Winkel von dem Dreiecke BDC: folglich ist $x > y$.

Was größer oder kleiner ist, als eine Größe von zweien Gleichen, das ist auch größer oder kleiner als die andere Größe (I. §. 66.)

Nun ist $x = o$

Und $y < x$

Folglich ist $y < o$

Oder $o > y$.

Das Ganze ist größer als sein Theil (I. §. 65.).

Nun ist der < o sichtbar nur ein Theil von dem Winkel B.

Da aber der Theil o schon größer ist, als y: so muß nothwendig der ganze Winkel B noch größer seyn als y.

Auf gleiche Weise, nemlich wenn man einen Theil der Linie AC gleich macht der Linie BC und wieder eine Hülfslinie ziehet, läßt sich beweißen, daß der Winkel A kleiner ist als der < B: folglich sind beide Winkel A und C für sich allein nicht so groß als C.

Da nun der Winkel B der größte Winkel ist, und die Seite AC, welcher er gegenüber steht, die längste ist: so folgt, daß derjenige Winkel in einem Dreiecke der größte sey, welcher der längsten Seite gegen übersteht.

II. In jedem Dreiecke ist diejenige Seite die längste, welche dem größten Winkel entgegen steht: und diejenigen Seiten sind kürzer, die kleinern Winkeln gegenüber liegen.

Man sehe zurück auf die Zeichnung No. I. dieses Paragraphs.

Beweis:

Daß die Seite AC die längste sey, weil sie dem Winkel gegenüber liegt, welcher für den größesten angenommen wird.

Wollte man dieß läugnen und behaupten, AC wäre nicht größer, zum Beispiel als AB oder BC, so wären

zwei

zwei Fälle möglich, nemlich AC müßte entweder noch kleiner oder zum wenigsten AB oder BC gleich seyn.

Wäre AC kleiner als AB oder BC, so müßte (nach dem ersten Lehrs. des §.) auch der Winkel B kleiner seyn als der Winkel C oder A, und wäre AC = AB, so müßte auch B = C seyn.

Oder wäre AC = BC: so wäre auch A = C.

Nun ist aber angenommen, daß die Seite AC den größten Winkel, nemlich B, gegenüber liegt, mithin die beiden andern Winkel A und C kleiner sind, als B: folglich kann B nicht kleiner seyn als A oder C, auch diesen nicht gleich.

Also können auch die Seiten AB und BC, welche den kleinern Winkeln C und A gegen überstehn, nicht eben so groß oder noch größer seyn als die Seite AC.

Daher bleibt nur der dritte noch mögliche Fall übrig, daß AB < AC.

Eben so auch BC < AC: folglich ist umgekehrt AC > AB und auch AC > B.

Aus diesen Lehrsätzen lassen sich mancherlei Folgerungen ziehen.

§. 39.

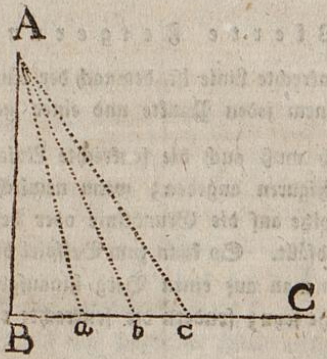
Erste Folgerung.

In einem geradwinklichen und stumpfwinklichen Dreiecke, ist diejenige Seite die größte, die dem geraden

raden und stumpfen Winkel gegenüber liegt: weil der gerade und stumpfe Winkel in solchen Dreiecken die größten Winkel sind.

§. 40.

Zweite Folgerung.



Die senkrechte Linie AB ist unter allen geraden Linien, die aus dem Punkte A auf die gerade Linie BC herabfallen, die kürzeste.

Denn alle andere gerade Linien Aa, Ab, Ac machen mit der Linie AB und AC, Dreiecke, an welchen die Linien Aa, Ab, Ac, dem geraden Winkel ABC gegenüberstehen, und also die größten Seiten in diesen Dreiecken sind: folglich ist unter allen diesen Linien AB, Aa, Ab u. s. f. nur die Linie AB senkrecht.

Dritte

Dritte Folgerung.

Aus dem Punkte A (Zeichnung der 2ten Folg.) läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die Linie BC ziehen: denn alle andere würden auf der einen oder andern Seite stehen müssen; und also länger werden. Nach der vorhergehenden Folgerung dieses Paragraphs kann aber nur die senkrechte Linie AB die kürzeste seyn.

Vierte Folgerung.

Die senkrechte Linie ist demnach der kürzeste Abstand zwischen einem jeden Punkte und einer geraden Linie.

Folglich muß auch die senkrechte Linie die wahre Höhe der Figuren angeben; wenn nemlich diese Linie aus der Spitze auf die Grundlinie oder deren Verlängerung herabfällt. So kann zum Beispiel die Linie AB, nach welcher man auf einen Berg hinaufgeht ohnmöglich die Höhe seyn; sondern die senkrechte oder vertikale Linie BC.

In der zweiten Figur ist die Höhe GL und nicht GJ oder GKH.

1. Fig. 2. Fig.

§. 41.

§. 41.

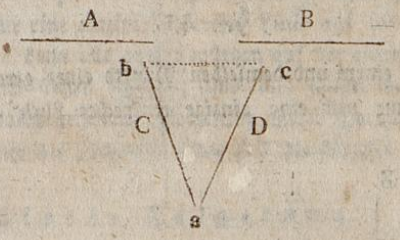
Auf einem und demselben Punkte einer geraden Linie, kann nur eine einzige senkrechte Linie errichtet werden.

Gesetzt auf der geraden Linie AC ließe sich im Punkte C mehr als eine senkrechte Linie errichten: so müßten sie entweder innerhalb oder außerhalb der erstern senkrechten Linie BC stehen. Dies ist aber unmöglich, denn sie würden sich rechts oder links neigen, folglich keinen geraden Winkel, sondern nur Theile von einem geraden Winkel ausmachen, oder sogar einen größern Winkel; folglich wären auch diese Linien nicht senkrecht.

§. 42.

Größen, die andern gleichen Größen gleich sind, die sind einander selber gleich. Z. B. Dinge, die nach

zwei gleichen Formen gemacht werden oder nach gleichen Mustern.



A = B
C = A
D = B

Folglich auch C = D

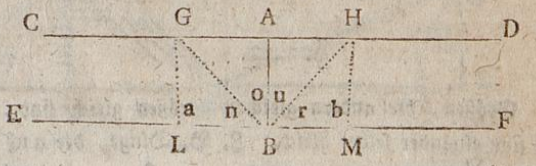
Die Seiten C und D des Dreiecks a b c sind einander gleich, weil sie beide nach gleichen Maaßstäben A und B aufgetragen sind.

1 Rthlr. = 24 gl.
48 Sechser = 1 Rthlr.
288 Pfennige = 24 gl.

Folglich 48 Sechser = 288 Pfennige.

§. 43.

Lehrsatz.



Wenn

Wenn die Linie AB auf einer Parallellinie im Puncte A senkrecht steht: so steht eben diese Linie auch auf der andern Linie im Punkte B senkrecht.

Um diesen Satz zu beweisen, mache man folgende Zubereitung:

Man setze den Zirkel in B ein, thue ihn beliebig auf, und mache BL = BM. Hierauf werden in den Punkten L und M die senkrechten Linien LG. MH errichtet, und die Diagonallinien BG und BH gezogen, wodurch Dreiecke entstehen.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel einander gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17 I.).

Nun sind in den Dreiecken GLB und HMB
die Seite LB = BM
die Seite GL = HM als Distanzen zweier Parallellinien, und der Winkel a = b als gerade Winkel, welche durch die mit Fleiß errichteten senkrechten Linien entstanden; folglich sind die Dreiecke GLB und HMB einander gleich.

Die beiden Dreiecke GLB und HMB, sind gleich den beiden andern Dreiecken BAG und BAH; nemlich BAG = GLB und BAH = HMB. Denn:
die Seite GA = LB und AH = BM (§. 25.)
die Seite AB = GL = HM als Distanzen zweier Parallellinien.

Die Seite GB ist beiden Dreiecken gemein; eben so die Seite HB der beiden andern Dreiecke. Grö-

ßen, die gleichen Größen gleich, sind einander selber gleich (§. 42.)

Nun ist das Dreieck BAG = GLB
und BAH = HMB
Ferner das Dreieck GLB = HMB
Folglich ist auch das Dreieck BAG = BAH.

Gleiche Dreiecke haben auch gleiche gegenüber liegende Winkel (§ 17.).

Folglich ist der Winkel n = r und der < o = u.

Gleiches zu gleichen addirt, giebt gleiche Summen.

n = r
o = u
add. n + o = r + u

Also ist n + o = r + u.

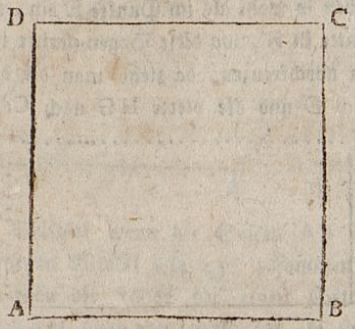
Die beiden Winkel n und o machen zusammen den ganzen Winkel ABL, und die beiden Winkel r und u machen zusammen den ganzen Winkel ABM aus: folglich sind auch die ganzen Winkel ABL und ABM einander gleich.

Gleiche Winkel auf einer geraden Linie neben einander, sind gerade Winkel, und die Linie zwischen beiden steht senkrecht (I. Abth. §. 53 und 54.).

§. 44.

§. 44.

Zeichnung der Parallelogramme.



Um ein Quadrat ABCDA zu zeichnen, darf nur die Länge einer Seite z. B. AB gegeben seyn. Auf den beiden Endpunkten A und B dieser Seite, errichtet man eben so große senkrechte Linien AD und BC, und ziehet die vierte Linie DC von dem obern Endpunkte D der einen senkrechten Linie, bis zum obern Endpukte C der andern Linie.

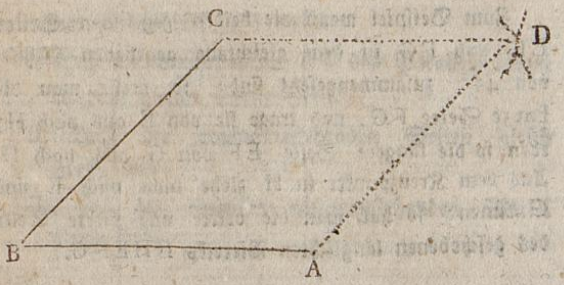
Oder:

Auf die gegebene Seite EF setzt man die zweite G senkrecht, und eben so lang. Nun setze man den Zirkel in G eben so wohl als im Punkte E ein, und mache Bogenschnitte in H, wo diese Bogenschnitte im Punkte H einander durchkreuzen, da ziehe man die dritte Seite HE nach E und die vierte HG nach C.

Um ein länglichtes Viereck zu zeichnen, darf man nur zwei an einanderstoßende Seiten wissen, wie lang sie sind: diese setzt man in geraden Winkeln zusammen, z. B. die Seiten AD und AB.

Hierauf mißt man die kurze Seite AB, setzt den Zirkel in D ein, und macht einen Bogenschnitt in C; eben so mißt man die lange Seite AD, setzt den Zirkel in B ein, und mache gleichfalls einen Bogenschnitt in C: wo beide Bogenschnitte in C einander durchkreuzen, da ist die vierte Ecke; denn aus dem Punkte C zieht man nach B und D Linien, so bekömmt man die dritte und vierte Seite.

Eine Raute zeichnet man beinahe, wie ein Quadrat; nur dürfen die vier gleichen Seiten nicht in geraden Winkeln zusammengesetzt werden: es ist aber genug, wenn man nur eine Seite und einen Winkel nach ihrer Größe weiß.



Zum Beispiel wenn die Seiten AB und CD in dem gegebenen Winkel von 45° zusammengesetzt sind; so nehme man die Länge der einen Seite mit dem Zirkel ab; setze dann den Zirkel in A und C, und mache in D Kreuzschnitte.

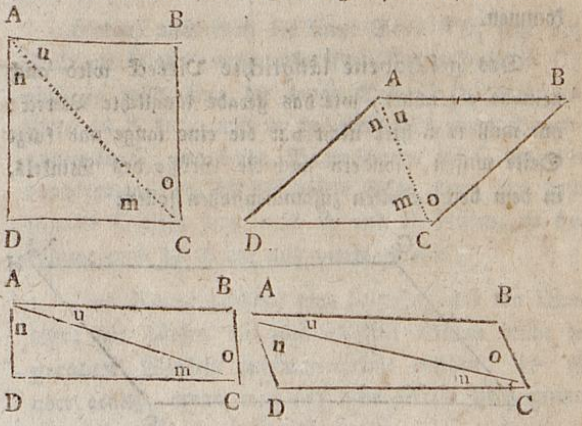
Aus dem Kreuzpunkte D, ziehe man die dritte und vierte Seite nach A und C, so ist die Raute vollkommen.

Das geschobene länglichte Viereck wird auch beinahe gezeichnet, wie das gerade länglichte Viereck; nur muß man hier nicht nur die eine lange und kurze Seite wissen, sondern auch die Größe des Winkels, in dem beide Seiten zusammenstoßen sollen.

Zum Beispiel wenn die beiden gegebenen Seiten EF und FG in dem gleichfalls gegebenen Winkel von 45° zusammengesetzt sind: so messe man die kurze Seite FG, und trage sie von E aus nach H; eben so die längere Seite EF von G aus nach H. Aus dem Kreuzpunkte in H ziehe man nach E und G Linien: so hat man die dritte und vierte Seite des geschobenen länglichten Vierecks GHEFG.

§. 45.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie, in zwei gleiche Theile getheilt, und die einander entgegenstehenden Seiten; ingleichen die einander entgegenstehenden Winkel haben gleiche Größe.



Hier

Hier ist dreierlei zu beweisen:

I. Daß die Diagonallinie AC das Parallelogramm in zwei gleiche Theile theilt.

II. Daß die gegenüberstehenden Seiten gleich groß, und

III. daß die einander entgegenstehenden Winkel gleich sind.

I.

Durch die Diagonallinie AC entstehen zwei Dreiecke aus einem jeden Parallelogramme; nemlich ACD und CAB.

Die Seiten AB und DC sind Parallellinien. Da nun durch zwei Parallellinien eine dritte durchläuft, so entstehen Wechselwinkel, die einander gleich sind. Hieraus ergiebt sich, daß in jedem Parallelogramme die beiden Dreiecke ACD und CAB einander gleich sind, denn sie haben beide die eine Seite AC gemein, und die Winkel an dieser Seite in beiden Dreiecken sind einander gleich, weil sie Wechselwinkel sind, nemlich m = u und n = o.

Wenn aber in zwei Dreiecken, zwei Winkel und ihre Zwischenseite einander gleich sind, so sind auch die ganzen Dreiecke einander gleich (§. 17.)

Diese beiden gleichen Dreiecke sind hier aus jedem Parallelogramme, durch die Diagonallinie entstanden; folglich hat die Diagonallinie AC die Parallelogramme in zwei gleiche Theile getheilt.

II.

Gleiche Dreiecke haben auch gleiche Seiten.

Nun ist (No. I.) bewiesen, daß die beiden Dreiecke ABD und CAB einander gleich sind; folglich ist auch die Seite AB = DC und AD = DC.

Dieses aber sind Seiten, die im Parallelogrammen einander gegenüberstehen; folglich sind die einander gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogrammes einander gleich.

III.

Gleiche Dreiecke haben auch gleiche Winkel; folglich haben auch die beiden gleichen Dreiecke ACD und CAB gleiche Winkel: und es ist schon bewiesen (I.), daß der Winkel m = u und der < n = o.

Gleiches zu gleichen addirt, giebt gleiche Größen oder Summen (I. §. 65.)

Folglich ist m + n = u + o.

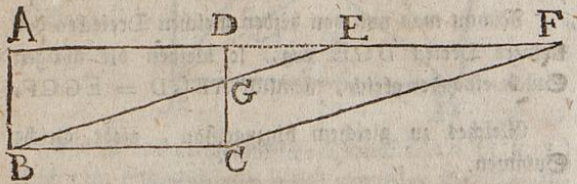
Nun machen die beiden Winkel m und u zusammen den Winkel A im Parallelogramme aus, oder m + u = A und die < u + o machen den Winkel C im Parallelogramme aus, oder u + o = C; folglich ist A = C.

Diese Winkel stehen aber einander gegenüber; folglich sind die einander entgegen stehenden Winkel im Parallelogramme einander gleich.

§. 46.

§. 46.

Parallelogramme (z. B. ABCD und EBCF), die auf einer Grundlinie (AC) und zwischen Parallellinien (AF und BC) stehen, sind einander gleich. —



Weil diese beiden Parallelogramme auf denselben Grundlinien und zwischen zwei Parallellinien BC und AF sich befinden, so entstehen dadurch sichtbar zwei Dreiecke ABE und DCF; diese beiden Dreiecke sind einander gleich, denn die Seite AB = DC und BE = CF; weil die einander entgegenstehenden Seiten vom Parallelogramme einander gleich sind: ferner die Seite AD = BC und EF = BC; aus demselben Grunde.

Zwei Größen, die einer dritten Größe gleich, sind einander selber gleich (I. § 63.).

Folglich ist auch AD = EF.

Und gleiches zu gleichem addirt, giebt gleiche Summe (I. §. 67.)

Addirt man also dieselbe Linie DE zu den beiden gleichen Linien AD und EF, so ist die Summe oder die Linie AE, der Linie DF völlig gleich.

Da nun bewießen ist, daß alle drei Seiten in beiden Dreiecken einander gleich sind (§. 17.): so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Gleiches von gleichen abgezogen, giebt gleiche Reste (I. §. 70.).

Nimmt man nun von beiden gleichen Dreiecken das kleinere Dreieck DGE weg, so bleiben die übrigen Stücke einander gleich, nemlich ABGD = EGCF.

Gleiches zu gleichem hinzugethan, giebt gleiche Summen.

Addire ich also zu den beiden übrig gebliebenen Stücken das Dreieck BGC: so sind die Summen einander gleich, nemlich ABCD = EBCF.

Dieses sind aber die beiden Parallelogrammen, die auf einer Grundlinie und zwischen zwei Parallellinien stehen; folglich sind auch solche Parallelogramme einander gleich.

Folgerungen.

1. Auch diejenigen Dreiecke sind einander gleich, die einerlei oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen zwei Parallellinien stehen.

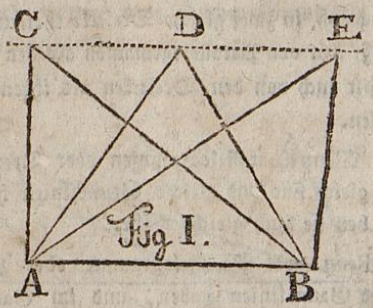


Fig. 1.

Also ist das geradwinkliche Dreieck CAB (Fig. 1.) gleich dem spitzwinklichen ABD und dem stumpfwinklichen ABE. Denn alle drei stehen auf einer Grundlinie AB, und ihre Höhe wird durch die Parallellinie CE begränzt.

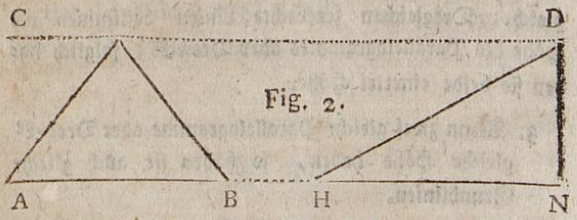


Fig. 2.

Eben so ist in den Dreiecken ACB und HDN die beide auf der geraden Linie AN stehen, (in Fig. 2.) die Grundlinie AB = der Grundlinie HN, und beiden Grundlinien läuft die Linie CD parallel, welche von der Höhe beider Dreiecke erreicht wird; folglich ist das Dreieck ABC = HND.

Beweis.

Jedes Parallelogramm läßt sich nach dem 45sten Pa-

Paragraph in zwei gleiche Dreiecke theilen. Was nun nach §. 46. von Parallelogrammen als den Ganzen gilt; das gilt auch von den Dreiecken als ihren Hälften oder Theilen.

2. Wenn Parallelogrammen oder Dreiecke einander gleich sind und gleiche Grundlinien haben: so haben sie auch gleiche Höhe.

Wenn zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke gleiche Grundlinien haben, und im Ganzen einander gleich sind: so müssen sie zwischen zwei Parallellinien stehen. Parallellinien stehen aber überall gleich weit von einander; folglich sind die senkrechten Linien, die man von einer Spitze beider Parallelogramme oder beider Dreiecke zur Grundlinie herabfallen läßt, einander gleich. Dergleichen senkrechte Linien bestimmen die Höhe des Parallelogrammes oder Dreiecks; folglich haben sie beide einerlei Höhe.

3. Wenn zwei gleiche Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Höhe haben, so haben sie auch gleiche Grundlinien.

Wenn sie gleiche Höhe haben, liegen sie auch zwischen zwei Parallellinien.

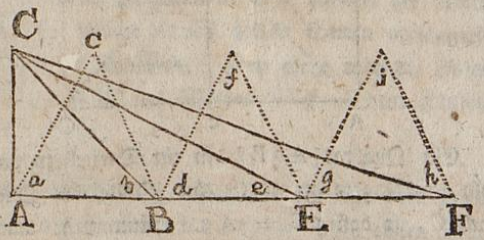
Sie könnten aber unter solchen Umständen einander nicht gleich seyn, wenn sie nicht gleiche Grundlinien hätten.

Anmerkung. Zur ersten Folgerung dieses Paragraphs.

Dieser Folgsatz läßt sich kürzer auch also ausdrücken:

Drei-

Dreiecke von einerlei oder gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

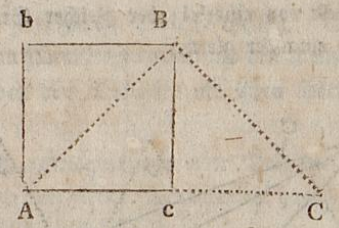


Das Dreieck ABC muß gleich sein, dem Dreieck abc; ferner das Dreieck AEC = dem Dreiecke def u. s. f. Eben so das Dreieck ABC = BCE = ECF u. s. w.; denn gleiche Dreiecke von gleichen Grundlinien müssen einerlei oder gleiche Höhe haben; man sehe den 2ten Folgsatz dieses Paragraphs.

§. 47.

Aufgaben.

Nach dem vorigen Lehrsatze lassen sich auch folgende Aufgaben lösen. Zum Beispiel ein Vieleck oder Polygon in ein Dreieck zu verwandeln. Diese Aufgabe wird man leichter lösen lernen, wenn man erst an einem Viereck den Versuch macht, dieses in ein Dreieck zu verwandeln.



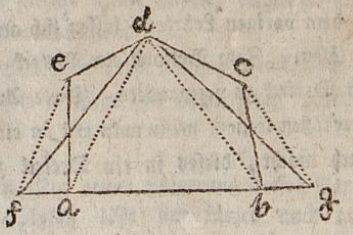
Ein Quadrat AbBc in ein Dreieck zu verwandeln, verlängere man die eine Seite des Quadrats nach C, so daß cC = Ac. Nun ziehe man aus dem Punkte B die Linien BA und BC: so ist das Dreieck ABC gleich dem Quadrate AbBc.

Das Dreieck ABC ist beiden Figuren gemein.

Da nun das Dreieck ABc = AbB (§. 45.): so bleibt nur noch zu beweisen übrig, daß das Dreieck cBC = ABc.

Diese Dreiecke sind aber einander gleich, weil sie beide gleiche Grundlinie und Höhe haben (man sehe die Anmerkung zur ersten Folgerung des vorigen Satzes im 46 §.)

Folglich ist das Dreieck ABC = dem Quadrat bBc



Ein

Ein Fünfeck a b c d e a in ein Dreieck zu verwandeln, ziehe man die Quer- oder Diagonallinie d a und d b; mit diesen gleichlaufend oder parallel die Linien e f und c g, welche die auf beiden Seiten verlängerte Grundlinie a b schneiden. Nun ziehe man die Linien d f und d g, so ist das Dreieck d f g = dem Fünfeck a b c d e.

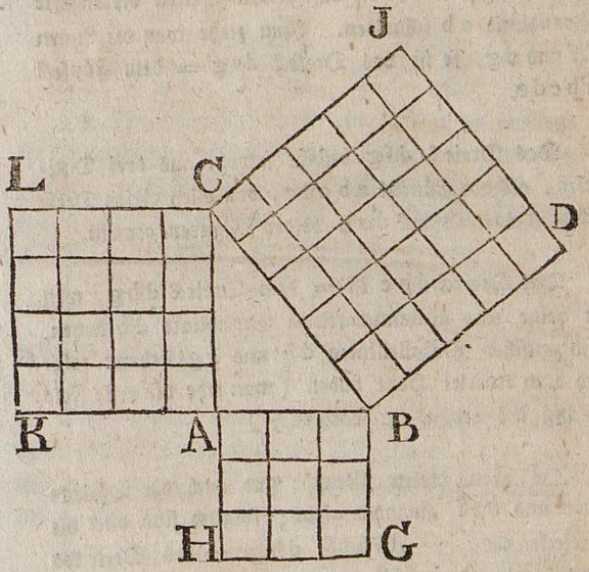
Das Dreieck d f g besteht sowohl aus drei Dreiecken, als das Fünfeck a b c d e, von allen diesen Dreiecken ist das Dreieck d a b beiden Figuren gemein.

Das Dreieck d b c ist = dem Dreieck d b g, weil sie beide eine gemeinschaftliche Grundlinie d b haben, und zwischen Parallellinien d b und c g stehen: folglich auch einerlei Höhe haben (man sehe die erste Folgerung des Satzes im vorigen §.)

Aus eben diesem Grunde sind auch die Dreiecke d a e und d a f einander gleich; folglich sind auch die Dreiecke d a f + d a b + d b g = den Dreiecken d e a + d a b + d b c oder das Dreieck d f g d = dem Fünfeck a b c d e a.

§. 48.

Lehrsaz.



Das Quadrat der Hypotenuse oder der schrägen Seite eines geradwinklichen Dreiecks, ist gleich dem Quadrate der Grundlinie und dem Quadrate der Höhe zusammengenommen.

An dem geradwinklichen Dreiecke A B C ist die
Grundlinie A B = 3′
die Höhe A C = 4′
die Hypotenuse B C = 5′

Folglich

Folglich hat das Quadrat der Grundlinie

ABGH $3' \times 3' = 9^{\square'}$

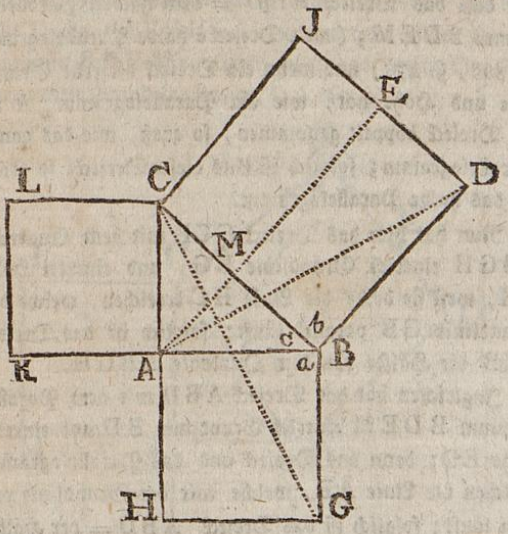
das □ des Kathet. AKLC $4' \times 4' = 16^{\square'}$

addirt $25^{\square'} = 5' \times 5'$

oder dem □ der Hypothenuse.

Eben dies ergiebt sich, wenn man die hier angenommenen Größen (3. 4 und 5) zweifach, dreifach ꝛc. zehnfach ꝛc. nimmt. Z. B. $6^2 + 8^2 = 10^2$ oder $36 + 64 = 100$.

Daß nun das, was in dem angegebenen Falle schon der Augenschein lehret, auch in allen übrigen Fällen zutreffe, läßt sich auf folgende Art beweisen:



Man ziehe für das erste die Hülfslinie AE aus dem geraden Winkel A des geradwinklichen Dreiecks in das Quadrat der Hypotenuse, parallel mit der Seite BD; dadurch wird das Quadrat der Hypotenuse CBDJ in zwey längliche Rechtecke, nämlich CJEM und BMED, abgetheilt und es kommt nun darauf an, zu beweisen, daß das Rechteck BMED gerade so groß sey, als das Quadrat ABGH; und das Rechteck CJEM eben so groß, als das Quadrat ACLK. Um dieses darzuthun, ziehe man noch einige Hülfslinien, nämlich von A nach D, und von C nach G: so ergiebt sich dann, daß das Dreieck GCB = dem halben Quadrate von ABGH; und daß das Dreieck ABD = dem halben Parallelogramm BDEM; (weil Dreiecke halbe Parallelogramme sind, §. 47.) und wenn ein Dreieck dieselbe Grundlinie und Höhe hat, wie ein Parallelogramm: so ist das Dreieck doppelt genommen, so groß, wie das ganze Parallelogramm; folglich ist eins dieser Dreiecke so groß, als das halbe Parallelogramm.

Nun hat hier das Dreieck GCB mit dem Quadrate ABGH einerlei Grundlinie BG, und einerlei Höhe GH, weil sie beide die Linie HC erreichen, welche der Grundlinie GB parallel läuft; folglich ist das Dreieck GCB die Hälfte von dem Quadrate ABGH.

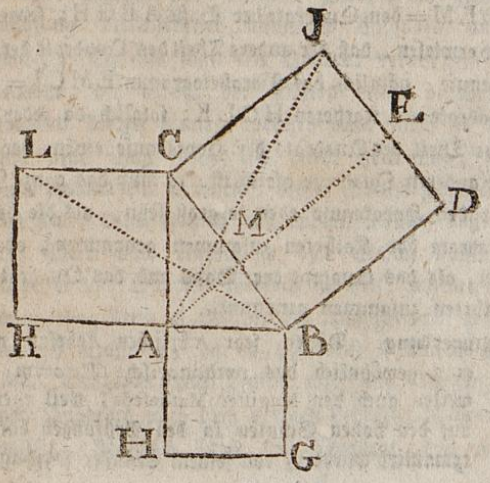
Ingleichen hat das Dreieck ABD mit dem Parallelogramm BDEM einerlei Grundlinie BD und einerlei Höhe ED; denn das Dreieck und das Parallelogramm erreichen die Linie AE, welche mit der Grundlinie parallel läuft; folglich ist das Dreieck ABD = der Hälfte des Parallelogramms BDEM.

Die

Die beiden Dreiecke CGB und ABD sind einander gleich; weil Dreiecke, die zwei gleiche Seiten und einen geraden Zwischenwinkel haben, einander völlig gleich sind.

Denn die Seite BG = der Seite AB und die Seite BC = BD; überdies der Winkel ABD = CBG; denn sie bestehen beide aus dem geraden Winkel a und b eines Quadrats und dem < c, der beiden Dreiecken gemein ist; folglich ist das Dreieck GCB = ABD.

Weil nun bewiesen ist, daß das eine Dreieck so groß ist, als das halbe Quadrat, und das andere Dreieck so groß, als das halbe Parallelogramm, und daß dieselben beiden Dreiecke einander gleich sind: so folgt, daß das halbe Quadrat ABGH = seyn muß dem halben Parallelogramm BDEM: mithin auch das ganze Quadrat dem ganzen Parallelogramm (I. §. 67.)



Auf eben diese Art läßt sich beweisen, daß das andere Parallelogramm CMEJ = dem Quadrat des Katheten ACLK: wenn man gleichfalls Hülfslinien zieht von A nach J und von K nach L, wodurch gleichfalls Dreiecke entstehen, die so groß sind, als die Hälfte der Parallelogramme, die mit den Dreiecken gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Diese Dreiecke sind ebenfalls aus denselben Gründen, wie vorher erwiesen, einander gleich; folglich ist das halbe Parallelogramm CMEJ = dem halben Quadrat ACLK; mithin auch das ganze Parallelogramm dem ganzen Quadrate. Nun besteht aber das Quadrat der Hypotenuse CBDJ aus den beiden Parallelogrammen BDEM und CMEJ.

Und es ist erwiesen, daß der eine Theil des Quadrats der Hypotenuse, nämlich das Parallelogramm BDEM = dem Quadrate der Basis ABGH; ferner ist auch erwiesen, daß der andere Theil des Quadrats der Hypotenuse, nämlich das Parallelogramm EMCJ = dem Quadrate des Katheten HCLK; folglich da jeder einzelne Theil des Quadrats der Hypotenuse einem der beiden anderen Quadrate gleich ist: so muß das ganze Quadrat der Hypotenuse eben so groß seyn, als die beiden Quadrate der Katheten zusammen genommen; oder so groß, als das Quadrat der Basis und das Quadrat des Katheten zusammen genommen.

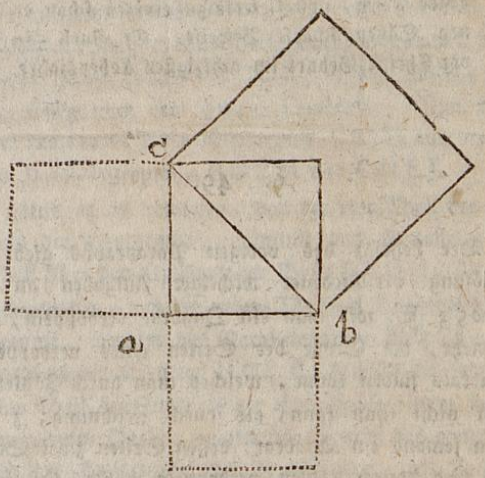
Anmerkung. Diesen sehr nützlichen Lehrsatz nennt man gewöhnlich das pythagorische Theorem (zuweilen auch den Magister Matheseos, weil ehemals auf den hohen Schulen in den Prüfungen darüber examinirt wurde), von seinem Erfinder Pythagoras ei-

einem griechischen Philosophen, welcher beinahe sechs hundert Jahr vor Christi Geburt lebte. Dieser reißte in seiner frühen Jugend nach Aegypten, um daselbst die Geometrie zu erlernen, und kam in der Folge mit dem Studio dieser Wissenschaft so weit, daß wir ihm nicht nur mehrere Sätze derselben zu verdanken haben, sondern er brachte auch die schon vorhandenen Sätze in eine zusammenhängende Form, und lieferte zu einigen schon erfundenen Sätzen scharfe Beweise. Er starb 540 Jahr vor Christi Geburt im achtzigsten Lebensjahre.

§. 49.

Der Lehrsaz des vorigen Parapraphs giebt die Auflösung verschiedener wichtiger Aufgaben an die Hand; z. B. wie man ein Quadrat verdoppeln, oder vielmehr, die Größe der Seiten eines verdoppelten Quadrats finden könne, welches man durch Zählen so leicht nicht thun kann, als durch Zeichnung; z. B. wenn jemand ein Quadrat, dessen Seiten zwei Schuh groß sind, durch Zählen verdoppeln wollte, daß er zu jeder Seite noch einmal so viel Schuh nähme: so würde er das Quadrat vierfach machen, anstatt es zu verdoppeln; denn er bekäme ein Quadrat von 4 × 4 oder 16 Schuhen, da es doch nur 8 Schuh haben sollte. Hingegen durch Linien wird die Verdopplung eines Quadrats nach dem vorigen Lehrsatze leichter und gewisser. Nämlich durch das Quadrat, das verdop-

pelt werden soll, zieht man eine Diagonale oder Queer-Linie und errichtet auf dieser ein neues Quadrat: oder man mißt nur die Queer- oder Diagonal-Linie, und macht davon ein Quadrat, dessen Seiten so groß sind, als die Queer-Linie des kleinern Quadrats. Dieses neue Quadrat ist alsdann doppelt so groß, als das kleinere.



Beweis:

Ein Quadrat verdoppeln, heißt ein Quadrat machen, das so groß ist, als die doppelt oder zweifach genommene Fläche desselben. Nun kann man an jede Seite eines Quadrats ein anderes Quadrat von derselben Größe ansetzen. Folglich kann man sich dergleichen auch an den beiden Sei-

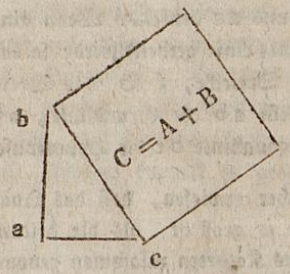
Seiten a b und a c denken. Wenn ein Quadrat durch eine Diagonal-Linie getheilt wird: so entstehen zwei geradwinkliche Dreiecke, z. B. das Dreieck c a b. In demselben stellt a b die Grundlinie, a c den Katheten und die Diagonallinie b c die Hypotenuse vor.

Es ist aber erwiesen, daß das Quadrat der Hypotenuse allein so groß ist, als die beiden Quadrate der Basis und des Katheten zusammen genommen. Folglich ist hier das Quadrat, das auf der Diagonallinie errichtet ist, gerade so groß, als zwei andere, die an den Seiten des kleinern Quadrats errichtet werden könnten.

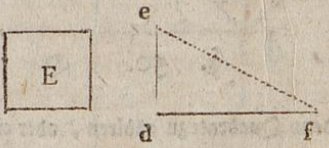
Folglich ist das Quadrat der Diagonallinie noch einmal so groß, als das gegebene kleinere Quadrat selber.

§. 50.

Verschiedene Quadrate zu addiren, oder ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als zwei, drei, vier oder mehrere gleiche oder ungleiche Quadrate.



Wenn nur zwei Quadrate z. B. A und B zu addiren sind, (sie mögen gleich oder ungleich seyn;) so mache man ein geradwinkliches Dreieck a b c, dessen Grundlinie a c so groß ist, als die Seite des einen Quadrats A, und der Kathete so groß, als die Seite des andern Quadrats B: die Hypotenuse ist alsdann die Seite des Quadrats C, das so groß seyn muß, als beide.



Soll zu jenen zweien, noch ein Quadrat z. B. E addirt werden, so errichte man abermals ein geradwinkliches Dreieck e d f, dessen Grundlinie d f so groß ist, als die Hypotenuse des vorigen Dreiecks a b c, oder die Seite des Quadrats C, und setze eine Seite von dem Quadrate E, das dazu addirt werden soll, als Kathete daran; hierauf ziehe man eine neue Hypotenuse: diese ist eine Seite des gesuchten Quadrats das so groß ist, als alle drei.

Soll

Soll ein Quadrat, z. B. J noch mehrere Quadrate außer jenen dreyen enthalten; als noch F, G und H: so fähret man auf gleiche Weise fort, wie beystehende Figur lehret.

Hier ist edf das obige Dreieck.

— — — α, die Quadrat-Seite von F.

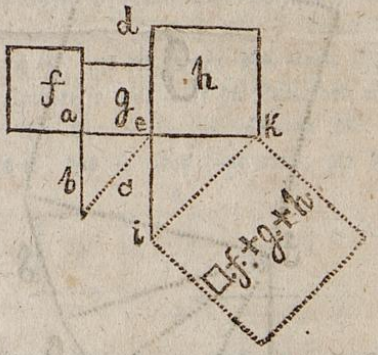
— — — β, die □ S. von G.

— — — δ, die □ S. von H.

□. J = A+B+E.
+F+G+H

Sollen

Sollen also noch mehrere Quadrate z. B. FGH, dazu addirt werden, so sezt man jedesmal eine Seite des hinzukommenden Quadrats mit der gefundenen Hypotenuse in einem geraden Winkel zusammen, so giebt auch jedesmal die neue Hypotenuse die Seite des verlangten Quadrats, welches für sich allein so groß ist, als alle gegebene kleinere in Summa. Nicht minder bequem zu addiren sind die Quadrate, wenn man sie in geraden Winkeln nahe an einander stellt, z. B. wie die Quadrate f. g. h.



Verlängert man die Seite a des Quadrats f. unterwärts der Grundlinie, so, daß b = a wird, so darf nur die Linie oder Hypotenuse c gezogen werden; so hat man eine Seite des Quadrats f + g. Diese Seite des gefundenen Quadrats sezt man an das folgende Quadrat h, indem man die Seite de um so viel unterwärts verlängert, und ziehe dann die Hypotenuse ik.

Be-

Beweis:

Aus dem 48sten Paragraph ist bekannt, daß das □ der Hypotenuse allein so groß ist, als das Quadrat der Grundlinie und des Katheten zusammengenommen. Da nun hier die Seiten der Quadrate, welche addirt werden sollen, als Grundlinien und Katheten zusammengesetzt werden: so giebt die darauf gezogene Hypotenuse jedesmal die Seite eines Quadrats, das so groß ist, als die beiden Quadrate, deren Seiten man in einem geraden Winkel zusammengesetzt hat.

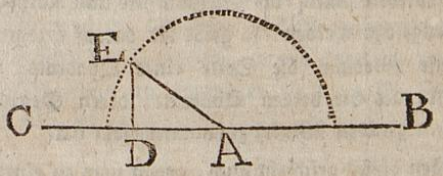
Eben dieses geschieht auch, wenn man zu einem doppelten oder dreyfachen Quadrate, (oder der Summe von zwei oder drei Quadraten) noch ein drittes oder viertes u. s. f. hinzusetzt oder addirt. Denn die Hypotenuse giebt jedesmal die Seite eines Quadrats, das gerade so groß ist, als die Summe von zwei oder drei andern gegebenen Quadraten.

§. 51.

Wie findet man die Differenz zweier Vierecke oder Quadrate? oder wie erfährt man, um wie viel ein Quadrat größer sey, als ein anderes gegebenes?

Zum Beispiel, man habe ein Quadrat A; dessen Seite 5′, und ein Quadrat B, dessen Seite 4′, betrage, wie groß wird die Seite desjenigen Quadrats seyn, das übrig bleibt, wenn man das Quadrat B vom Quadrat A wegnimmt?

Man



Man fasse 5′ oder eine Seite des größern Quadrats A mit dem Zirkel und ziehe mit dieser Eröffnung einen halben Kreis auf einer beliebigen geraden Linie CB.

Nun fasse man 4′, oder eine Seite des kleinern Quadrats B, setze den Zirkel ebenfalls in den vorhin genommenen Mittelpunkt A der geraden Linie CB ein, und schneide mit derselben ein Stück von der geraden Linie oder von dem Durchmesser in D ab. Auf dem Durchschneidungspunkte D errichtet man eine senkrechte Linie ED bis zur Peripherie des Halbkreises.

Endlich ziehe man von dem Mittelpunkte A aus bis zum Punkte E in der Peripherie eine gerade Linie: so entsteht dadurch ein geradwinkliches Dreieck EDA, dessen Grundlinie DA = einer Seite des kleinern Quadrats B. Die Hypotenuse EA = einer Seite des größern □ A, (weil die Seite des größern Quadrats in der Zeichnung des Halbkreises zum Radius angenommen

men wurde). Der Katheter ED aber ist gleich einer Seite des gesuchten Quadrats, welches die Differenz oder der Unterschied ist zwischen dem gegebenen größern und kleinern Quadrate: das heißt, welches übrig bleibt, wenn man das kleinere Quadrat von dem größern □ abzieht.

Beweis:

Da das Quadrat der Hypotenuse gleich ist den beiden Quadraten der Grundlinie und des Katheten zusammen genommen (§. 48) so folgt daraus, daß, wenn das Quadrat der Basis vom Quadrat der Hypotenuse abgezogen wird, das Quadrat des Katheten übrig bleibt, oder daß das Quadrat der Hypotenuse um so viel größer ist gegen das Quadrat der Basis als das □ des Katheten beträgt.

Eben so, wenn man das □ des Katheten abzieht, vom Quadrate der Hypotenuse, so bleibt das □ der Basis übrig; oder das □ der Basis ist die Differenz zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und zwischen dem Quadrate des Katheten.

Da nun hier zwei verschiedene Quadrate gegeben sind, deren Differenz gesucht werden soll, so wird dieses am füglichsten durch die vorhin gegebene Auflösung bewirkt; denn, indem man die Seite des größern Quadrats zum Radius macht, und damit einen halben Kreis zieht: so ist jede gerade Linie, die aus dem Mittelpunkte zur Peripherie gezogen wird, nicht nur ein Radius, sondern auch der Seite des größern Quadrats gleich.

Folglich

Folglich auch die Seite AE in dem geradwinklichen Dreiecke ADE.

Die Seite AD ist mit Fleiß der Seite des kleinern Quadrats gleich gemacht worden.

Durch die Errichtung der senkrechten Linie DE entsteht ein gerader Winkel, und diesem steht die Linie AE entgegen; folglich ist sie die Hypotenuse des Dreiecks. Da nun diese Hypotenuse gleich gemacht ist einer Seite des größern Quadrats, so ist folglich das Quadrat der Hypotenuse dem größern Quadrate selber gleich. Und da die Grundlinie AD einer Seite des kleinern Quadrats gleich gemacht worden ist: so ist folglich das Quadrat der Grundlinie dem kleinern Quadrate selber gleich.

Da nun zum Quadrat der Basis noch das Quadrat des Katheten gehört, wenn es dem Quadrate der Hypotenuse gleich seyn soll: so fehlt also an dem Quadrate der Basis oder an dem gegebenen keinern Quadrate noch so viel, als das □ des Katheten beträgt, ehe es so groß würde, als das □ der Hypotenuse oder das gegebene größere Quadrat.

Folglich darf ich nur wissen, wie groß das □ des Katheten seyn müsse, und dieses zeigt mir die senkrechte Linie DE, welche eine Seite vom Quadrate des Katheten ist.

Indem ich also diese suche, finde ich zugleich die Differenz zwischen dem gegebenen kleinern, und größern Quadrate.

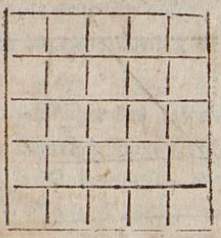
§. 52.

§. 52.

Nun wollen wir zur Ausmessung der Parallelogrammen übergehen.

Am leichtesten mißt man ein Quadrat; denn dieses hat lauter gleiche Seiten, und wenn man zwei seiner Seiten, die einander entgegenstehen, in gleiche Theile abtheilt, z. B. nach Ruthen, Schuhen oder Zollen, und aus den Theilungslinien Parallellinien zur entgegenstehenden Seite zieht: so entstehen daraus so viel gleiche kleine Quadrate oder Reihen von Quadrat-Ruthen, Schuhen, oder Zollen, als jede Seite Theile hat.

Darum darf man nur zwei Seiten des Quadrats durch einander multipliciren, so giebt das Produkt die Summe aller □ Ruthen, Schuh, oder Zolle, welche die □ Fläche enthält. Z. B.

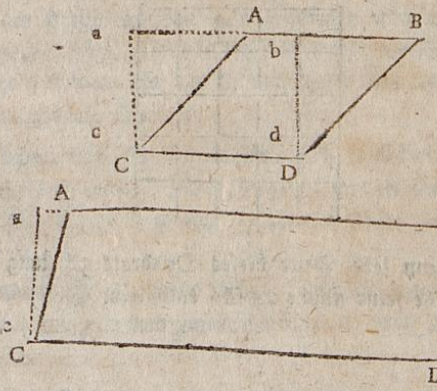


Wenn jede Seite dieses Quadrats 5′ lang wäre, so würde seine Fläche 25 □′ enthalten.

Ein länglichtes Viereck wird so berechnet, daß man die Grundlinie durch die Höhe multiplicirt, so findet man gleichfalls die ganze Fläche Z. B. wenn dieses länglichte Viereck zur Basis hat 8° und zur Höhe 6°, so enthält die Fläche eigentlich 6 Reihen gleicher Quadrate; und auf jeder Reihe sind der Quadrate achte, folglich beträgt die ganze Fläche 6 × 8 das ist 48 □°.

§. 53.

Wie werden Rhomben oder Rauten und die Rhomboiden gemessen?



Weil

Weil die Rauten und Rhomboiden schiefe Winkel haben, so kann man sie nicht geradezu, wie die Quadrate oder länglichten Vierecke messen, weil die schiefen Seitenlinien nicht die wahre Höhe angeben, folglich die Grundlinie nicht durch sie multiplicirt werden kann. Denn in §. 46. (man sehe die dortige Figur) ist bewießen, daß das schiefe Parallelogramm BCFEB völlig gleich ist dem geraden Parallelogramm ABCDA. Wenn nun die Grundlinie BC, 10′, die gerade Seite BA 6′, und die schiefe Seite 12′ betrüge: so würde das gerade Parallelogramm 6 × 10 = 60 □′ betragen. Multiplicirte man aber die Grundlinie BC durch die schiefe Linie BE: so hätte das schiefe Parallelogramm 12 × 10 = 120 □′; also noch einmal so viel als das gerade; welches doch offenbar unrichtig ist. Denn es hat nicht mehr und nicht weniger, als das gerade; daher ist es nicht genug, wenn an Grundstücken bloß die Länge und Breite gemessen wird, ohne sich um die gerade oder schiefe Lage der Seiten zu bekümmern.

Man bedient sich daher des folgenden Mittels: Auf der Basis der gezeichneten Figur errichte man eine Perpendikular-Linie bd, welche sich an der entgegenstehenden Seite endet. Diese Linie ist nach §. 46 die Höhe, welche man eben so, wie die Basis mißt, und beide durch einander multiplicirt: so bekömmt man den Flächen-Inhalt.

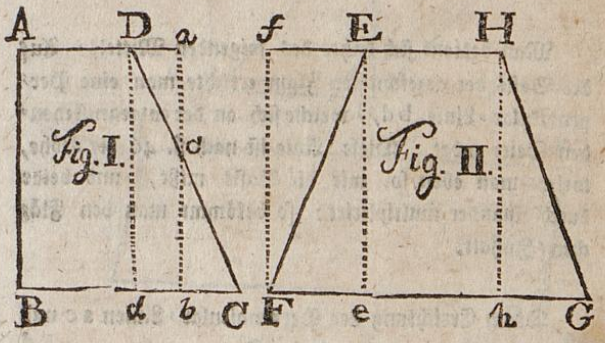
Durch Errichtung der Perpendicular-Linien ac und bd

b d wird also der Rhombus A B D C A oder der Rhomboide A B D C A in ein geradwinkliches Parallelogramm a b d c a verwandelt welches mit den Rhombus oder Rhomboiden einerlei Grundlinie und Höhe hat, weil sie beide zwischen Parallellinien liegen.

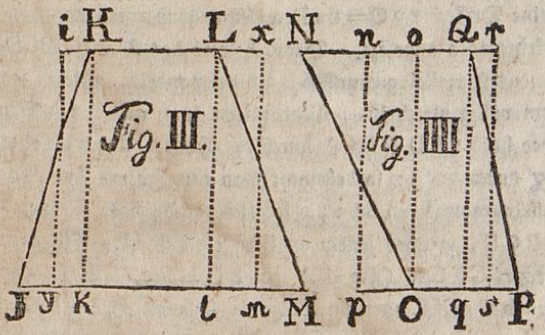
Im Grunde geschieht bei dieser Behandlung nichts weiter, als daß man durch die Perpendikular-Linie auf der einen Seite ein Stück von dem Parallelogramm abschneidet und an der andern Seite wieder ansetzet; wodurch das Parallelogramm gerade oder rechtwinklich wird, ohne von seiner wahren Größe etwas zu verlieren.

§. 54.

Dies ist auch auf Trapezen anwendbar, die zwei Parallel-Seiten haben und übrigens von viererlei Art seyn können.



In



In allen vier Fällen addirt man die Länge der beiden Parallelseiten der Figur z. B. AD und BC nimmt die Summe halb, und multiplicirt diese Hälfte durch die Höhe D d oder den Perpendikular-Abstand beider Parallelseiten.

Gesezt, daß in Fig. I. die Seite AD 30′ hätte, und die Seite BC, 60, so wäre ihre Summe 30+60 =90′, die Hälfte davon beträgt 45′, diese durch die Höhe D d von 70′ multiplicirt, giebt 31□°, 50□′ als Inhalt des ganzen Trapez ABCD. Denn wenn die Linie dC=30′ halb genommen wird db=bC=15, und die eine Hälfte bC=Da oben an die Linie AD, angesezt, auch vom Punkte b zum Punkte a die senkrechte Linie ab gezogen wird: so besteht die obere Linie Aa aus AD+Da = 30+15=45 und die untere Linie Bc—bC wird=Bb=60—15=45. So viel also der größern Parallellinie genommen wird, soviel wird der kleinern zugesezt; folglich werden beide einander

der gleich, und zugleich wird dem Trapez ABCD das kleine Dreieck cbC = caD unten abgenommen und umgekehrt oben angesezt. Dadurch wird das Trapez ABCD in das Parallelogramm ABba verwandelt, welches jenem völlig gleich ist. Multiplicirt man nun Aa = Bb oder halb (AD + BC) durch die Höhe Dd = ab (oder 45′ durch 70′): so bekommt man den Inhalt des Parallelogramms ABba; folglich auch des Trapezes ABCD, welches jenem an Größe gleich ist. In dem Trapez CFGH (Fig. II.) ist hG = Fe. Sezt man nun hG = fE oben an EH an: so wird FG — hG = EH = fE oder FH = fH und ziehet man die senkrechte Linie Ff, so entstehet ein Dreieck FEf = HGh. Es ist also eben so viel, als hätte man das Dreieck HGh von dem Trapez EFGH abgenommen und umgekehrt an der andern Seite oben angesezt, so daß aus dem Trapez EFGH ein Parallelogramm fFhH entsteht, welches dem Trapez völlig gleich ist.

Gesezt also die kürzere Parallelseite EH hätte 40 die längere 90′, und fE sowohl als hG hätte 25′: so wäre EH + fE (oder 40 + 25) = FG — hG, (oder 90 — 25) das heißt: fH = Fh oder 65′ — 65, welches die Hälfte von 40′ + 90′ ist. Diese 65′ als angenommene Grundlinie durch die Höhe Ee = 70′ multiplicirt, giebt 65 × 70 oder 45 □°, 50 □′ als Inhalt des Parallelogramms fFhH, welches dem Trapez EFGH gleich ist.

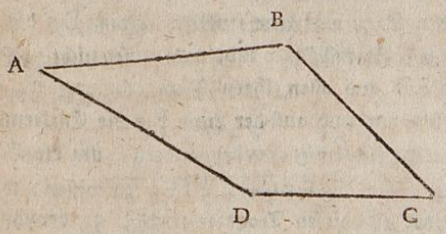
Trapeze von der dritten und vierten Art IKLM und NOPQ (Fig. III. und IIII.) werden, (sowohl im

Dreieck

Dreieck KIk und LMl als im Dreieck NoO und QPq) eben so behandelt, wie das Trapez ABCD (Fig. I.)

Auch hier findet man (durch Abnehmen von beiden Seiten der längern Parallelseite, und durch Ansetzen des Abgenommenen an beyde Seiten der kürzern Parallelseite) das Parallelogramm, welches dem Trapez gleich ist; oder die Grundlinie $= \frac{1}{2}$ (KL + IM) und $\frac{1}{2}$ (NQ+OP), welche durch die Höhe Kk und oO multiplicirt, den Inhalt des Trapezes oder des ihm gleichen Parallelogramms giebt. Denn das Parallelogramm iymx ist gleich dem Trapez IKLM und das Parallelogramm nrsp ist völlig gleich dem schiefen Trapez NOPQ.

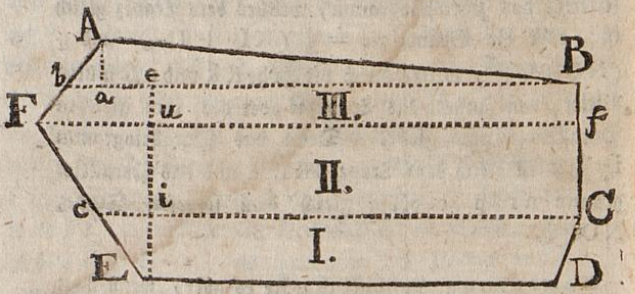
Anmerkung. Unschicklich wäre es aber, wenn man vierseitige Flächen, die keine Parallelseiten haben, wie Paralleltrapezen behandeln wollte, z. B. in der Figur ABCDA kann man weder AB und DC, noch AD und BC zusammennehmen und halbiren.



§. 55.

Es läßt sich aber diese Berechnung der Paralleltrape-

zen zuweilen mit Vortheil bei dem Ausmessen und Berechnen unregelmäßiger Flächen und ganzer Fluren benutzen, wenn man diese schicklich durch Parallellinien in mehrere Trapeze vertheilen kann. Z. B. es wäre gegeben die Fläche ABCDEFA:



so ziehet man, mit einer von den langen Seiten derselben ED, paralle so viel Linien, als sich aus den Seitenwinkeln C, F und B schicklich ausziehen lassen; nemlich die Linien Cc, Ff, Bb, dann errichtet man auf derselben Seite ED eine senkrechte Linie Ee bis an die entfernteste Parallellinie Bb, und misset nicht nur die Länge von ED und allen ihren Parallellinien Cc, Ff und Bb, sondern auch auf der Linie Ee die Entfernung einer jeden Parallellinie von der andern, um die Höhe der Trapeze CDEc, FcCF, BfFb zu wissen: worauf man jedes von diesen Trapezen nach §. 54 berechnen, und ihr Produkt in eine Summe bringen kann, welche Summe den Inhalt von der Fläche BbFEDCB oder dem größten Theile von ABCDEFA angiebt. (wie das übrigbleibende Dreieck ABb berechnet werde, wird im Folgenden angezeigt.)

Es

Es sey in dem Trapez I. oder EDCc.

ED = 11°, 5′ } add.
cC = 13°, 6′ }

ED + cC = 25°, 1′ Diese Sum. halb genom. giebt

½ (ED + cC) = 12°, 5′, 5″, oder die mittlere Grundlinie des Trapez. I.

Ferner sei die Höhe Ei = 2°. Durch diese die Grundlinie, oder 12°, 5′ 5″ multiplicirt, giebt 25□°, 10□′, als Inhalt des Trapez EDCc oder I.

12°, 5′, 5″
2 00″ = 2°.

25,° 1 0′,00″.

In dem Trapez. II oder FfCc sei

cC = 13°, 6′
Ff = 15°, 5′.

cC + Ff = 29°, 1′,

Halb (cC + Ff) = 14°, 5′, 5″ (mittlere Grundlinie des Trapez II.)

Diese Grundlinie durch die Höhe iu = 2°, 6′ multiplicirt, giebt 37□°, 83□′ als Quadrat Inhalt des Trapez II. oder FfCc.

14°, 5′, 5″
2°, 6′, 0″ = 2°, 6′

87, 3 00
291 0

37°, 83′ 00″.

In dem dritten Trapez BfFb sei.

Ff = 15°, 5
cB = 14°, 8

Ff + bB = 30°, 3′ (3′ = 30″)

Halb (Ff + bB) = 15°, 1′ 5″ mittl. Grundl. v. Trapez.
Die Höhe u e = 100″ = 1° (multipl.)

15, 1 5,00 = 15□°, 15□′

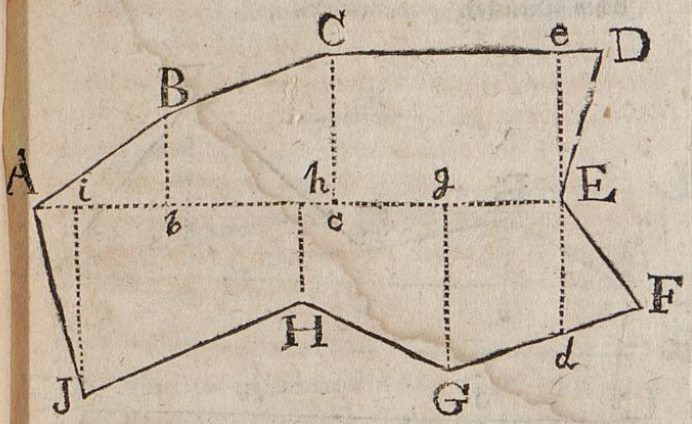
Diese 15□°, 15□′, sind der Quadrat Inhalt vom Trapez III. oder BfFb.

Nun addire man den Inhalt aller dreien Trapezen, um den Inhalt der ganzen Fläche BbFEDCB (welche aus den drey Trapezen besteht) zu finden.

I. = 25□°, 10□′
II. = 37, 83
III. = 15, 15.

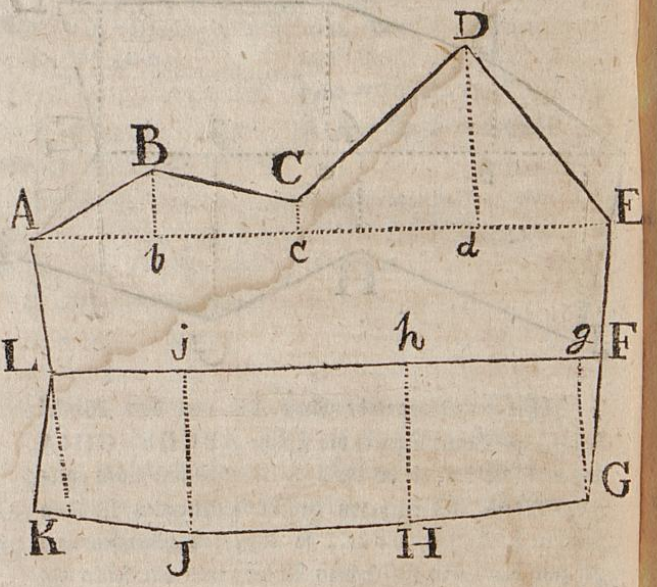
Sum. = 78□°, 08′ als Inhalt der ganzen Fläche BbFEDCB.

Einige andere Arten von Eintheilungen unregelmäßiger Flächenfiguren in Paralleltrapeze, machen die folgenden Figuren sichtbar.



Ziehet man die gerade Linie AE von dem Winkel A bis zum Winkel E durch die Fläche ABCDEFGHIA und errichtet auf dieser Linie AE rechts und links senkrechte Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkeln zustehen z. B. Ji, Bb ꝛc., so entstehen Paralleltrapezen zwischen diesen senkrechten Linien; weil alle senkrechte Linien einander parallel laufen. Die Distanz zwischen den senkrechten Linien z. B. ih, bc ꝛc. giebt die Höhe der Paralleltrapezen. Diese Paralleltrapezen allesammt behandelt man nach §. 54 und 55. und die übrigbleibenden Dreiecke wird die Folge behandeln und berechnen lehren: (und zwar sind die Dreiecke dieser und der zweiten Figur desto leichter zu berechnen, da sie bei der Eintheilung dieser beiden Flächen durch senkrechte Linien zu geradwinklichen Dreiecken geformt worden sind. Man vergl.

gleiche das Ende des 9ten Paragraphs vom rechtwinklichen Dreiecke).

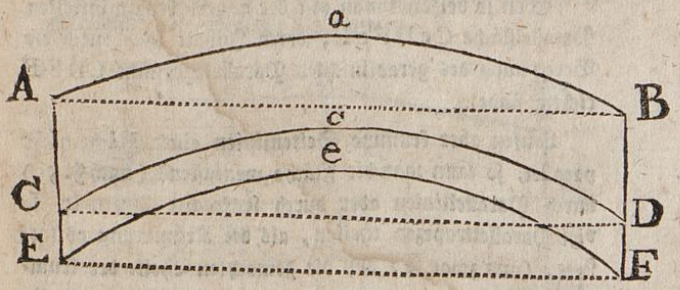


In dieser Figur geschieht dasselbige; nur daß mitten durch die Figur nach Maaßgabe der Seitenwinkel A, E und L zwei Parallellinien AE und LF gezogen werden, welche nicht nur selbst ein Paralleltrapez einschließen sondern auch (wie in der vorhergehenden Figur) die Perpendikularlinien tragen, wodurch die übrigen Paralleltrapezen gebildet werden.

§. 56.

Nunmehr ist es auch leicht einzusehen, wie solche Grund-

Grundstücke oder Flächen zu behandeln sind, die man zwischen zwei Parallelkrümmungen eingeschlossen findet. Z. B.



Wenn die Krümmungen AaB, CcD, EeF wirklich einander parallel laufen, (wie man das nicht selten an Grundstücken findet): so zieht man die Sehnen AB, CD, EF, jedoch einander auch parallel. So entstehen geradlinichte Parallelogramme ABDC und CDFE, welche den krummlinichten AaBDcC und CcDFeE gleich sind. Denn so groß der Abschnitt AaBA ist, der vom krummlinichten Parallelogramm AaBDcC durch die Sehne AB weggenommen wird; eben so groß ist der Abschnitt CcDE, welcher dagegen vermittelst der Sehne CD angesezt wird. So viel also das krummlaufende Stücke auf der einen Seite verliert, bekommt es auf der andern wieder: folglich ist das geradlinichte Parallelogramm innerhalb der Sehnen AB und CD eben so groß, als das krummlinichte innerhalb seiner krummen Linien. Es ist also richtig verfahren, wenn man anstatt der krummlinichten Parallelfigur AaBDcC das geradlinichte Parallelogramm ABDC misset und berechnet.

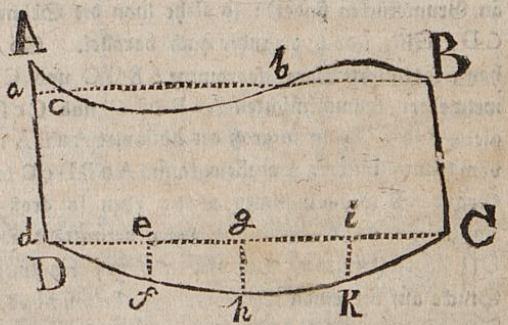
Wi-

Wäre z. B. die Sehne AB = CD = 17°
und die perpendik. Höhe AC = 3°

so wäre der Flächeninhalt = 51 □°.

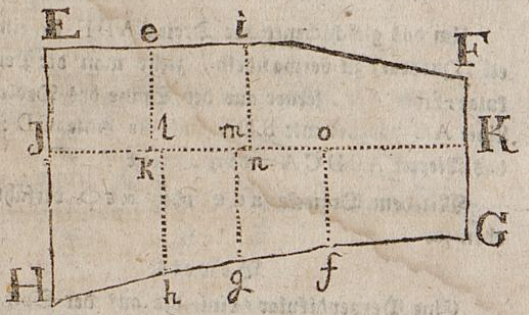
Eben so verfährt man mit der andern krummlinichten Parallelfläche CcDFeE; deren Inhalt man durch die Berechnung des geradlinichten Parallelogramms CDFE richtig findet.

Laufen aber krumme Seitenlinien einer Fläche nicht parallel, so kann man die Fläche wenigstens (nach §. 55) durch Parallellinien oder durch senkrechte Linien in so viel Paralleltrapezen theilen, als die Krümmung es fordert, (und zwar so, daß die gemachten Theile der krummen Linie von einer geraden wenig abweichen und für gerade gelten können. Z. B.



Man ziehe in dieser Figur aB so durch die krumme Linie AcbB, daß sie auf der einen Seite zwischen c und b soviel ansezt als sie auf andern Seite zwischen b und B abnimmt, folglich für die krumme Linie gelten kann; (mit Ausnahme des kleinen Dreiecks

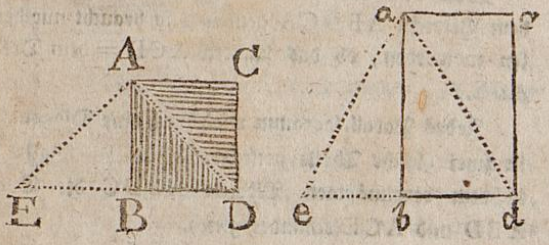
Aca, welches besonders berechnet wird. Mit aB ziehe man dC durch den Winkel C parallel, so bekommt man das Paralleltrapez aBCd, das übrige wird durch senkrechte Linien ef, gh, ik in kleinere Trapeze und geradwinklichte Dreiecke zerschnitten.



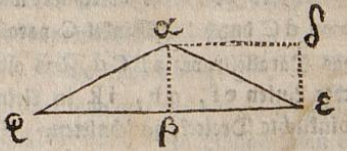
Die Behandlung dieser Fläche EFGH ist aus der Figur selbst und aus §. 55 leicht zu sehen.

§. 57.

Verwandlung der Dreiecke in gleiche große Parallelogramme.



Um



Um das gleichschenklichte Dreieck ADE in ein Viereck (Quadrat) zu verwandeln, ziehe man die Perpendikular-Linie AB, ferner aus der Spitze des Dreiecks die Linie AC parallel mit BD, und die Linie CD: so ist das Viereck ABDCA = dem Dreieck ADE.

Mit dem Dreiecke ade oder αεΦ verfährt man eben so.

Beweis.

Eine Perpendikular-Linie die aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf dessen Grundlinie herabfällt, theilt das ganze Dreieck in zwey gleiche Theile. §. 18. Nun steht die Linie AB auf der Spitze des gleichschenklichten Dreiecks ADE gezogen, senkrecht auf der Grundlinie ED; folglich sind auch die Dreiecke ABD und ABE einander gleich.

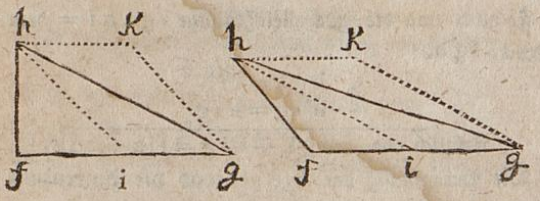
Weil das Dreick ABD sowohl dem Dreiecke als dem Vierecke ABDCA gemein, so braucht nur bewiesen zu werden, ob das Dreieck ACD = dem Dreiecke ABE.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie in zwei gleiche Theile getheilt. §. 45.; folglich sind in dem regelmäßigen Vierecke ABDC die Dreiecke ABD und ACE einander gleich.

Wenn

Wenn zwei Größen einander gleich sind: so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden. §. 62. I.

Da nun das Dreieck ABD sowohl gleich dem Dreiecke ABE als auch dem Dreiecke ACD: so muß auch das Viereck ABDC = dem Dreiecke ADE seyn.



Die Dreiecke fgh in Vierecke (Rhomboiden) zu verwandeln, theile man die Grundlinie fg (nach §. 21) in zwei gleiche Theile und ziehe aus der Spitze derselben die Linien hi. Mit der Linie ig parallel ziehe man die Linie hk, doch so, daß hk=ig. Endlich ziehe man noch die Linie kg: so hat man die Dreiecke in Parallelogramme verwandelt (igkhi), welche eben so groß sind.

Beweis.

Zwei Größen die einer dritten gleich: sind einander selber gleich (§. 63. I.)

Die Dreiecke fih sind gleich den Dreiecken hig, denn sie haben einerlei Höhen, und gleich Grundlinien, (§. 46. 1ste Folgerung) oder mit andern Worten: sie

haben gleiche Grundlinien und stehen zwischen Parallellinien.

Eben so sind die Dreiecke hgk = dem Dreiecke hig, weil jedes durch eine Queerlinie in zwei gleiche Theile getheilt wird. §. 45.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, so kann allemal die eine statt der andern gesezt werden. (§. 62. I.)

Folglich sind die Parallelogramme igkhi = dem Dreiecke fgh.

hgk = fih
hig = hig

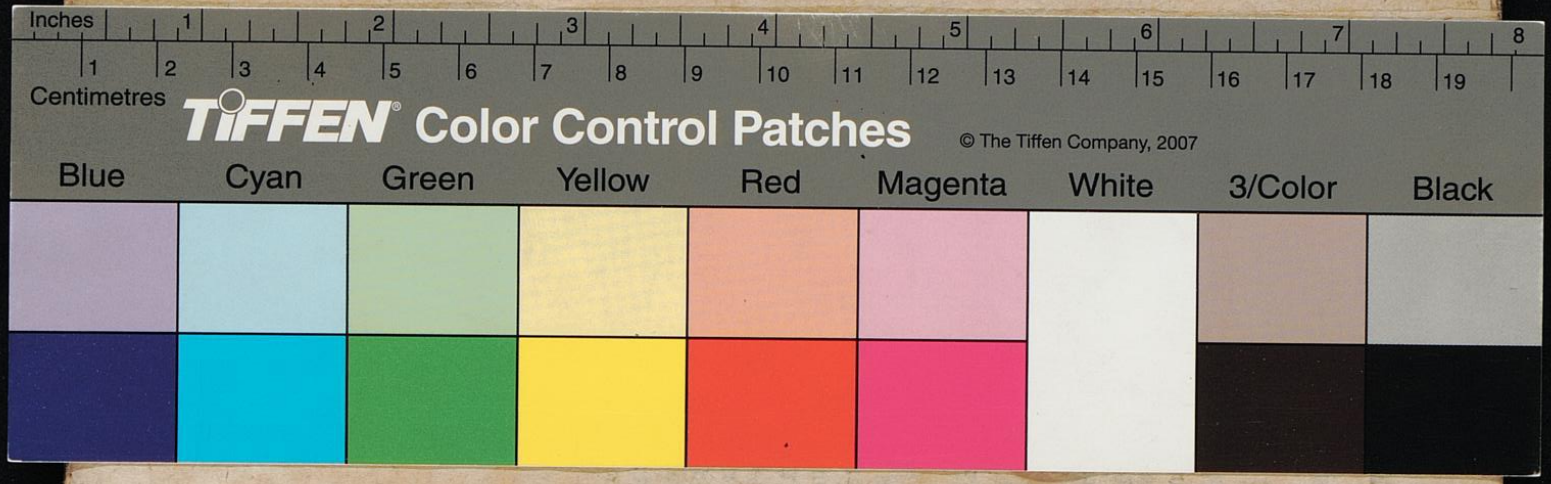
Folglich add. hgk + hig = fih + hig.

Die Berechnung der Dreiecke und die Anwendung derselben folgt im dritten Bändchen.

Druckfehler.

Seite 10. Zeile 8. für brauchbares lies brauchbareres.
— — — 23. gewöhnlich sind sie mit einem Rahmen versehen, in dessen ꝛc. lies: Gewöhnlich sind sie mit einem Rahmen versehen, welcher in dessen ꝛc.
Seite 12. Zeile 9. statt: Fläche heißt, lies: Fläche heißen kann.
S. 17. lezt. Zeile statt §. 2. lies §. 3.
S. 18. Z. 11. statt §. 2. lies §. 3.
S. 27. Z. 15. statt 2 × 4 Einheiten = 7, lies: 2 × 4 Einheiten = 8.
Von der 31sten Seite bis zur 38sten ist die Ueberschrift: Von der Multiplication des Dezimal-Längenmaaßes, falsch. Sie muß heißen: Vervielfältigung oder Multiplication der Größe.
S. 40. Z. 3. statt o mißt? lies: so mißt.
— — Z. 16. der Fläche übri? lies: der Fläche übrig ꝛc.
S. 63 u. d. folg. kömmt das Zeichen < oft vor und wird gelesen: der Winkel. Das eigentliche Zeichen der Winkel, welches im 1sten Bändchen angegeben ist, muß von dem Setzer mit diesen (das Zeichen in gleicher Größe) verwechselt worden seyn.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf