

Fünfter Abschnitt.

VON DEN VERSCHIEDENEN METHODEN DER LÄNGENBESTIMMUNG.

I^{stens} Längenbestimmung durch Chronometer- übertragungen.

136. Die ausserordentlichen Verbesserungen, welche in neuester Zeit in der Construction von Chronometern gemacht worden sind, so wie die schnelle und sichere Verbindung, welche jetzt zwischen sehr entfernten Orten der Erde stattfindet, haben es möglich gemacht die geographische Länge eines Ortes durch Chronometerreisen mit vielen Chronometern, mit einer Genauigkeit zu bestimmen, die wohl schwerlich auf eine andere Weise zu erreichen sein wird. In Folge der schönen Resultate welche Schumacher im Jahre 1821 bekannt machte, wurde diese Methode nachher zur Bestimmung des Längenunterschiedes, mehrerer der berühmtesten Sternwarten, angewandt. Unter den merkwürdigsten Unternehmungen dieser Art kann diejenige genannt werden, welche in den

Jahren 1843 und 1844 zur Bestimmung der Länge der Sternwarte zu Pulkowa ausgeführt wurde. Die Abhandlung von Struve, welche im Jahre 1844 unter dem Titel erschien: *Expédition Chronometrique exécutée par ordre de Sa Majesté L'Empereur Nicolas I. pour la détermination de la longitude géographique relative de l'Observatoire centrale de Russie*, enthält eine vortreffliche Auflösung aller bei der Längenbestimmung eines Ortes durch Chronometer, vorkommenden Fragen, und daher werden wir uns bemühen, die hauptsächlichsten Vorschriften, aus dieser Abhandlung auszuziehen. Eine ebenso strenge, wie auch elegante Auflösung der hierher gehörenden Aufgabe hat auch der berühmte englische Astronomer Royal Airy gegeben in der: „*Determination of the longitude of Valentia in Ireland, by transmission of Chronometers.* *)

Wir wollen nun mit dem einfachsten Falle anfangen, und annehmen, dass der Reisende nur ein Chronometer hat; befindet er sich zum Beispiele in St. Petersburg, und vergleicht sein Chronometer mehrere Tage nach einander mit dem Himmel, so wird er alsdann wissen, um wie viel sein Chronometer an einem bestimmten Tage, zu einer bestimmten Stunde, Minute u. s. w. mehr oder weniger als die mittlere St. Petersburger Zeit (oder auch St. Petersburger Sternzeit) zeigte, und auch zugleich wissen um wie viel sein Chronometer zu dieser Zeit, in einem Tage voreilte oder sich verspätete. Nimmt man nun den Gang des Chronometers als gleichförmig an, so wird es leicht sein zu jeder künftigen Chronometerzeit, die entsprechende St. Petersburger mittlere (oder auch Stern-) Zeit zu bestimmen, und wenn daher der Reisende St. Petersburg verlässt, und an einen anderen Ort gelangt, dessen Länge er zu finden wünscht, so wird er an diesem neuen Orte nur nöthig haben, durch directe Beobachtungen die mittlere oder Sternzeit zu bestimmen, die

*) Appendix to the Greenwich Astronomical Observations. 1845.

einer beliebigen Angabe des Chronometers entspricht. Der Unterschied zwischen dieser und der gleichzeitig stattfindenden St. Petersburger Zeit, welche mit Hülfe des bekannten Standes und Ganges des Chronometers gefunden wird, drückt alsdann die Länge des Beobachtungsortes gegen St. Petersburg aus.

Dieser Unterschied wird etwas genauer werden, wenn wir die Berechnung mit dem mittleren Gange des Chronometers, das heisst (mit demjenigen welcher in der Mitte zwischen dem ersten und letzten Beobachtungsorte stattfand), reduciren. Diese Methode der Längenbestimmung wird viel auf Schiffen gebraucht; aber sie ist nicht sehr zuverlässig, weil die Erfahrung lehrt, dass wenn die Chronometer auf Reisen sind, sie oft einen anderen Gang annehmen, als wenn sie in Ruhe sind.

Die grösste Schwierigkeit liegt immer darin den Gang des Chronometers während der Reise zu bestimmen, wenn die Umstände es gestatten, so besteht das beste Mittel hierzu darin, die Uhr correction zuerst an dem Anfangspunkte der Reise, dann an dem zu bestimmenden Orte zu ermitteln und gleich darauf so schnell als möglich nach dem Anfangspunkte zurückzureisen, und an diesem wiederum die Uhr correction zu finden. Wir wollen nun der Kürze wegen annehmen, dass der Anfangspunkt P sei, hingegen der zu bestimmende Ort A , und die westliche Länge des Ortes A von P , mit λ bezeichnen. Nimmt man nun an, dass zur Zeit t am Orte P die Uhr correction des Chronometers $= p$ war, darauf bei der Ankunft in A zur Zeit t' , diese Correction $= a$, und endlich wiederum nach der Rückkehr, in P zur Zeit t'' , die Uhr correction $= p'$, so können wir als Zeiteinheit einen Tag annehmen, und erhalten alsdann den mittleren täglichen Gang des Chronometers während der Reise: $= m = \frac{p' - p}{t'' - t}$, woraus wir folgern können, dass:

$$\lambda = p + m(t' - t) - a, \text{ oder } \lambda = p' - m(t'' - t') - a.$$

Hat der Reisende mehrere Chronometer zu seiner Disposition, so kann er mit Hülfe eines jeden von ihnen, auf ganz dieselbe Weise, die Länge λ bestimmen. In diesem Falle muss er aber nicht bloß alle Chronometer unter einander, bei ihrer Berichtigung durch astronomische Beobachtungen, sondern auch täglich während der Reise vergleichen, um etwa grössere vorkommende zufällige Unregelmässigkeiten im Gange einiger Chronometer zu entdecken.

Beispiel. Im Jahre 1836 wurde es nothwendig den Längenunterschied zwischen Novotscherkask und Kagalnik, einem kleinen Dorfe am Ufer des Azowschen Meeres, zu finden; hierzu wandte man die Chronometer: Haut No. 11., Kessels No. 1294. und Kessels No. 1290. an, von denen das erstere nach Sternzeit, die beiden letzteren aber nach mittlerer Zeit gingen. Vor und nach der Reihe, fand man zu Novotscherskask aus astronomischen Beobachtungen und durch Vergleichung der Chronometer, folgende Resultate:

Vor der Reise (in Novotscherkask):

Die Uhr correction der Chronometer für $11^h 33' 14''$ nach Haut. No. 11.

Haut No. 11. gegen Sternzeit	Täglich. Gang	Kessels No. 1294. gegen mittl. Zeit	Täglich. Gang	Kessels No. 1290. gegen mittl. Zeit	Täglich. Gang
am 12ten Sept. h ' "	"	h ' "	"	h ' "	"
+0 54 54 .4	+1 .40	+0 34 37 .0	-5 .36	+1 48 9 .3	-1 .60
am 15ten Sept. p = +0 54 58 .6		p = +0 34 20 .1		p = +1 48 4 .3	

Nach der Reise (wieder in Novotscherkask):

am 18ten Sept. h ' "	"	h ' "	"	h ' "	"
p' = +0 55 2 .7	+1 .20	p' = +0 34 4 .4	-5 .70	p' = +1 43 24 .2	-1 .00
am 20ten Sept. +0 55 5 .1		+0 33 53 .0		+1 48 22 .2	

Folglich war der Gang unterwegs:

"	"	"
+1 .36	-5 .23	+6 .70

Am 17^{ten} September 1836 wurden zu Kagalnik, als das Chronometer Haut No. 11.; $18^h 50' 54''.5$ zeigte, folgende Uhr correctionen gefunden:

Haut No. 11.	Kessels No. 1294.	Kessels No. 1290.
gegen Sternzeit	gegen mittlere Zeit	gegen mittlere Zeit
$a = + 0^h 51' 54''.4$	$a = + 0^h 31' 0''.6$	$a = + 1^h 45' 10''.9$

Das Zeichen (+) zeigt an, dass die Chronometer zu spät waren. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die beiden ersten Chronometer ihren Gang unterwegs ziemlich gut beibehalten haben, das letztere aber zeigt eine bedeutende Aenderung seines Ganges an; die tägliche Vergleichung der Chronometer bewies jedoch, dass Kessels No. 1290. diesen veränderlichen Gang, mit geringer Abweichung, während der ganzen Dauer der Reise beibehielt.

Hier ist nun:

$$t'' - t = 3 \text{ Tage}; \quad t'' - t' = 0 \text{ Tage } 7^h 14' 40''.5 = 0.30186 \text{ Tage};$$

folglich hat man für die westliche Länge λ , Kagalniks von Novotscherkask:

nach Haut No. 11.	nach Kessels No. 1294.	nach Kessels No. 1290.
$\lambda = 0^h 3' 7''.3$	$0^h 3' 7''.4$	$0^h 3' 8''.7$

Auf diese Weise finden wir die Länge Kagalniks nach allen Chronometern ziemlich gut unter einander übereinstimmend; wenn wir aber diese Länge nach Kessels No. 1290., mit dem Gange, welchen dieses Chronometer vor oder nach der Reise hatte, berechnet hätten, so würde die auf diese Weise abgeleitete Länge, gänzlich unrichtig gewesen sein.

Bei einer sehr kleinen Zahl von Chronometern, ist es nicht möglich die relative Zuverlässigkeit der mit Hülfe eines

jeden Chronometers abgeleiteten Länge, oder den Grad der Genauigkeit welchen man in ihr erwarten kann, anders zu bestimmen, als dass man unter verschiedenen Umständen die mittlere tägliche Ungleichförmigkeit des Chronometers mittelst umfassender astronomischer Beobachtungen ermittelt. Wenn wir den täglichen mittleren Gang des Chronometers aus Beobachtungen berechnen, die einen bedeutenden Zeitraum umfassen, und wenn wir den Unterschied zwischen diesem mittleren Gange und demjenigen suchen, welchen das Chronometer während der Beobachtungstage wirklich hatte, so wird dieser gefundene Unterschied die mittlere tägliche Ungleichförmigkeit des Chronometers sein. Angenommen dass zwischen zwei aufeinander folgenden Beobachtungen, aus welchen der tägliche Gang des Chronometers hergeleitet wurde, t Tage verflossen waren, und wir bezeichnen den Unterschied zwischen diesem Gange und dem mittleren täglichen allgemeinen Gange durch d , so erhalten wir, wenn die Chronometer-Ungleichförmigkeiten zufällig sind, nach §. 90. Seite 240. Band I. für den wahrscheinlichen Werth der täglichen Ungleichförmigkeit $\alpha' = d\sqrt{t}$.

Die Veränderung des Ganges eines Chronometers auf Reisen, kann man leicht durch Vergleichung dieses Chronometers mit mehreren anderen Chronometern entdecken, und diese Veränderungen muss man alsdann bei Berechnung der Gewichte in Betracht ziehen, indem man die Gewichte überhaupt als umgekehrt proportional mit den Quadraten der wahrscheinlichen täglichen Ungleichförmigkeiten ansehen kann.

Es wird nicht immer möglich sein nach dem früheren Anfangspunkte, auf welchen man die Länge des neuen Beobachtungsortes beziehen will, zurückzukehren; wenn aber dieser letztere zwischen anderen Orten liegt, deren Längen vom Anfangspunkte der Zählung gut bestimmt sind, und der Reisende an allen diesen Orten beobachtet, so kann er als-

dann leicht den Gang seiner Chronometer während der Reise bestimmen, indem er die Uhr correctionen an zwei oder mehreren Orten untersucht, deren Längen bekannt sind. Wenn die Längen mehrerer Oerter zu finden sind, so muss man, um den Gang der Chronometer während der Reise zu bestimmen, entweder nach dem Anfangspunkte, oder nach einem von den früheren, nicht weit von Anfangspunkt abgelegenen, Orten zurückreisen, und dort wieder neue Beobachtungen anstellen; ihre Vergleichung mit den vorherangestellten giebt den mittleren Gang des Chronometers während der Reise, und darauf kann man mit Hülfe dieses Ganges die gesuchten Längen ableiten. Hierbei muss man sich aber so viel als möglich bemühen, nur sehr kurze Zeit an jedem Orte zu verweilen, und überhaupt die Reise schnell und bequem zu beendigen.

Wenn man bemerkt, dass ein Chronometer seinen Gang beständig nach einer Seite hin ändert, und diese Aenderung ausserdem gleichförmig zu sein scheint, so kann man alsdann darauf Rücksicht nehmen, indem man den Werth der täglichen Veränderung des Ganges erforscht, und hierdurch den Stand und Gang des Chronometers so herleitet, wie es die gleichförmig veränderliche Bewegung erfordert; §. 90. Seite 242. Band I.

137. Wir wollen annehmen, dass ein Beobachter, nach der Ankunft aus einem Orte P an einen anderen Ort A , diesen letzteren nach einigen Tagen wieder verlässt, aber dass er dabei, sogleich nach seiner Ankunft an diesen Ort, seine Chronometer mit dem Himmel verglichen hatte, und dasselbe auch kurz vor seiner Abreise aus diesem Orte A gethan; in diesem Falle nun muss man die Länge auf solche Weise herleiten, dass der Gang welchen das Chronometer in der Ruhe annahm, keinen Einfluss auf die Längenbestimmung hat, und hierzu hat nun Struve folgende vortreff-

liche Rechnungsmethode vorgeschlagen. Es seien für die nachfolgenden Zeiten:..... t t' t'' t''' die zugehörigen Chronometer- Fehler $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} p \dots a \dots a' \dots p'$; wobei wir annehmen, dass p und p' am Orte P , dagegen a und a' am Orte A bestimmt würden, es sei λ die westliche Länge des Ortes A von P , und ferner sei angenommen, dass das Chronometer ein und denselben Gang während der Reise von P nach A als während der Reise von A nach P gehabt hätte, so ist alsdann:

$$m = \frac{a + \lambda - p}{t' - t} = \frac{p' - a' - \lambda}{t'' - t''}$$

Setzt man denn $t' - t = x$ und $t'' - t'' = x''$, so folgt:

$$\lambda = \frac{x(p' - a') + x''(p - a)}{x + x''}$$

Berechnet man nun zuerst:

$$p' + a - a' = q \text{ und } (q - p) \frac{x}{x + x''} = r;$$

so wird alsdann:

$$\lambda = \frac{x(q - a) + x''(p - a)}{x + x''} = \frac{x(q - p) + (x + x'')(p - a)}{x + x''}$$

oder auch: $\lambda = p + r - a.$

138. Wir wollen nun untersuchen, wie gross der Fehler in der Längenbestimmung nach der vorhergehenden Methode sein wird, wenn der Gang des Chronometers, anstatt

zufällig, und ganz unabhängig von allen übrigen zu sein, einem bestimmten Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung unterworfen ist.

Wir wollen annehmen, dass man aus Beobachtungen gefunden hätte: zu den Zeiten $t \dots t' \dots t'' \dots t'''$ die entsprechenden Uhrcorrect. $p \dots a \dots p' \dots a'$, und es seien p und p' auf den Ort P , dagegen a und a' auf den Ort A bezogen. Wir wollen nun ferner durch μ die tägliche Beschleunigung des Chronometers am Ende der Zeit t , und durch 2β die tägliche Zunahme des Werths μ am ersten Tag nach der Zeit t bezeichnen. Wenn wir alsdann die unbekannt β als Null ansehen, so werden wir in dieser unrichtigen Annahme, durch einfache Einschaltung zwischen p und p' die Uhrcorrect. $= (p)$ berechnen, welcher am Orte P zur Zeit t' stattfinden würde, wenn der Gang des Chronometers gleichförmig wäre; aber nach §. 90. Seite 242. Band I. wissen wir alsdann, dass der wahre Werth der Uhrcorrect. kleiner als (p) um die Grösse $= \beta \tau \tau'$ wo $\tau = t' - t$ und $\tau' = t'' - t'$, sein wird. Unter derselben Annahme der Gleichförmigkeit des Ganges können wir ebenso durch Interpolation zwischen a und a' die Uhrcorrect., welche der Zeit t'' am Orte A entspricht, $= (a)$ finden, und bezeichnen wir $t''' - t''$ durch τ'' , so werden wir ähnlich wie vorher den Fehler, welcher bei der Berechnung von (a) begangen ist, $= \beta \cdot \tau' \tau''$ finden; nun ist aber $\lambda = (p) - a$ und $\lambda = p - (a)$, folglich werden wir im ersten Falle λ etwas zu gross, im zweiten aber etwas zu klein finden, und wenn $\tau = \tau'$, so wird der Fehler gleich und entgegengesetzt sein; hieraus sieht man, dass wenn man zwischen P und A , und A und P viele aufeinanderfolgende Reisen, in beinahe gleichen Zeiträumen anstellt, so wird überhaupt das Mittel solcher Längen, welche aus der Interpolation wechselweiser Beobachtungen in P und in A hergeleitet werden, beinahe

gänzlich unabhängig von der Beschleunigung des Chronometer-Ganges sein.

139. Man darf jedoch nicht annehmen, dass jede Reise die Länge mit gleicher Zuverlässigkeit giebt, denn um so schneller und bequemer die Reise vor sich geht, um so grösseres Zutrauen verdient das Resultat. Es ist klar, dass hier die Längenbestimmung sich auf die Interpolation verschiedener Stände des Chronometers gründet; und wenn wir daher ihre Fehler als vollkommen zufällig annehmen, so haben wir §. 90. Seite 241. Band I. gesehen, dass alsdann das Gewicht $= g$, oder der Grad des Zutrauens, den die aus einer vollständigen Reise abgeleitete Länge verdient, durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$g = k \frac{(\tau + \tau')}{\tau \tau'},$$

wo k eine constante Zahl ist, welche man willkürlich für die ganze Berechnung, wählen kann, und τ und τ' Zeitintervalle sind, deren Bedeutung wir im vorhergehenden Paragraphen erwähnt haben. Wenn wir statt eines zufälligen, einen gesetzmässigen Fehler des Chronometers §. 90. Seite 242. Band I. voraussetzen wollen, welchen Struve bei einigen astronomischen Uhren empirisch abgeleitet hat, so erhalten wir alsdann für das Gewicht einer Längen-Bestimmung den Ausdruck:

$$g = k \cdot \left(\frac{\tau + \tau'}{\tau \tau'} \right)^2.$$

Uebrigens ist diese Bestimmung der Gewichte, und viele anderer Bestimmungsweisen, welche man vorgeschlagen hat, mehr oder weniger willkürlich, denn jedes Chronometer hat seine Eigenthümlichkeit, welche sehr schwer oder wohl

gar nicht, in Rechnung zu nehmen ist, wozu noch die verschiedenen Umstände, die sich auf der Reise ereignen, hinzukommen. Zur Berechnung der Gewichte hat Struve, endlich folgende Formel angenommen:

$$g = \frac{K}{T \sqrt{\tau \tau''}},$$

wo T die Zeitdauer einer ganzen Reise bezeichnet, τ die Zwischenzeit der Beobachtungen am Anfangspunkte und Endpunkte der Reise und τ'' dasselbe zwischen der letzten Beobachtung am Endpunkte und am Anfangspunkte nach der Zurückkunft. Obgleich diese Formel nur empirisch ist, so erfüllt sie doch sehr gut die einzelnen Bedingungen der Aufgabe, denn es ist klar, dass das Gewicht in dem Maasse als die Dauer der Reise zunimmt, und je grösser die Ungleichheit ihrer Theilung oder um so mehr ihre Theile τ und τ'' von einander verschieden sein werden, sich verringern muss.

Indem wir nun einen der vorhergehenden Ausdrücke, zur Bestimmung der einzelnen Gewichte annehmen, wollen wir die aus den verschiedenen Reisen gefundenen Längen, durch λ' , λ'' , λ''' , ihre zugehörigen Gewichte aber durch g' , g'' , g''' bezeichnen, und erhalten alsdann, nach der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für die wahrscheinlichste Länge λ , den bekannten Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\lambda' g' + \lambda'' g'' + \lambda''' g''' + \dots}{g' + g'' + g''' + \dots}$$

Setzt man hierauf $\lambda' - \lambda = v'$, $\lambda'' - \lambda = v''$, u. s. w. und bezeichnet durch v den mittleren, durch ε aber den wahrscheinlichen Fehler, in der Bestimmung von λ , so erhalten wir:

$$v = \pm \sqrt{\frac{v'^2 g'^2 + v''^2 g''^2 + \dots}{(g' + g'' + \dots)(n-1)}}; \varepsilon = 0.6745 \cdot v$$

wo n die Anzahl der gefundenen Werthe λ' , λ'' , $\lambda''' \dots$ bezeichnet.

Auf ganz dieselbe Weise kann man nun die Länge aus jedem anderen Chronometer berechnen, und ebenso ihren entsprechenden mittleren und wahrscheinlichen Fehler bestimmen; diese Fehler dienen dazu den Grad des Zutrauens beurtheilen zu können, welchen man in eine, mit Hülfe irgend eines Chronometers gemachte Längenbestimmung setzen kann; auch weiss man aus der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass die Gewichte dieser Bestimmungen selbst, sich umgekehrt wie die Quadrate der entsprechenden mittleren Fehler verhalten. Bezeichnet man daher durch L' , L'' , $L''' \dots$ die wahrscheinlichen Längen, wie sie mit Hülfe des 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} \dots Chronometers gefunden wurden, durch G' , G'' , $G''' \dots$ ihre entsprechende Gewichte, und durch w' , w'' , $w''' \dots$ ihre mittleren Fehler, so erhalten wir:

$$G' = \frac{1}{w' w'}, G'' = \frac{1}{w'' w''}, G''' = \frac{1}{w''' w'''}, \dots$$

und endlich für die wahrscheinlichste Länge selbst, wird man haben:

$$L = \sqrt{\frac{L' G' + L'' G'' + L''' G''' + \dots}{G' + G'' + G''' + \dots}}$$

Setzt man nun $L' - L = V'$, $L'' - L = V''$ u. s. w., und bezeichnet, alsdann ihren mittleren Fehler durch V , ihren wahrscheinlichen aber durch F , so findet man:

$$V = \pm \sqrt{\frac{V'^2 G'^2 + V''^2 G''^2 + \dots}{(N-1)(G' + G'' + \dots)}}; F = 0.6745 V;$$

wo N die Zahl der angewandten Chronometer bedeutet.

Der hier angeführte Fehler wird in diesem Falle etwas kleiner als der wahre Fehler der Länge ausfallen; denn dieser letztere hängt noch von den Beobachtungsfehlern an beiden Orten ab, zwischen welchen der Längen-Unterschied gesucht wird.

Wenn zwischen den beiden gegebenen Orten, sich noch viele andere Oerter befinden, an welchen man die Chronometer verglichen, und Zeitbestimmungen gemacht hatte, so kann man die relative Länge aller dieser Oerter, eben so bestimmen, wie wir es eben gezeigt haben.

140. Viele Erfahrungen haben den Beweis geliefert, dass verschiedene Beobachter, die Zeit des Durchganges eines Sternes, durch Fäden, die im Brennpunkte irgend eines astronomischen Instrumentes aufgespannt sind, ganz verschieden beobachten, und man nimmt hierbei an, dass der Unterschied zwischen denselben zwei Beobachtern constant bleibt. Dieser Unterschied heisst, die persönliche Gleichung zwischen den beiden Beobachtern. Wenn daher die Zeitbestimmungen auf denen die Länge beruht, von verschiedenen Beobachtern gemacht worden sind, so muss man bei der Ableitung der Länge selbst, auf diese persönliche Gleichungen Rücksicht nehmen, und alle Beobachtungen so reduciren, als ob sie von einem einzigen Beobachter gemacht worden wären.

Die persönliche Gleichung kann man auf viele verschiedene Weisen, am einfachsten aber auf folgende Art finden. Man wählt einen dem Aequator nahen Stern, und zwei Beobachtern bemerken alsdann die Zeit seines Durchganges durch die Verticalfäden eines im Meridiane festaufgestellten Instrumentes; der eine von ihnen beobachtet den Stern, an einigen

der ersten Seitenfäden, der andere aber an den darauf folgenden, hierauf wählt man einen zweiten Stern, und beobachtet in umgekehrter Ordnung, so dass derjenige welcher vorher den Stern an den ersten Fäden beobachtete, ihn nunmehr an den letzten beobachtet und umgekehrt. In kurzer Zeit wird man leicht genug Beobachtungen machen können, und da man die Entfernungen der Seitenfäden vom Mittelfaden kennt, so kann man alle Beobachtungen eines jeden Sternes die vom ersten Beobachter gemacht worden sind, auf den Mittelfaden reduciren, und auf ähnliche Weise denn auch die Beobachtungen des zweiten Beobachters reduciren; nimmt man darauf den Unterschied zwischen den auf diese Weise, für jeden Beobachter, berechneten Durchgängen der Sterne durch den Mittelfaden, so erhält man die persönliche Gleichung zwischen beiden Beobachtern.

Um den Längenunterschied, unabhängig von der Genauigkeit der Lage der Sterne, die zur Zeitbestimmung gebraucht wurden, finden zu können, muss man an den Oertern, deren Längenunterschied gefunden werden soll, wo möglich ganz dieselben Sterne beobachten. Wenn die Umstände es indessen nöthig machen, verschiedene Sterne zur Zeitbestimmung zu brauchen, so muss man die Fehler der geraden Aufsteigungen der beobachteten Sterne mit in Betracht ziehen.

Um die vorhergehenden Vorschriften zu erläutern, wollen wir nun ein Beispiel aus der meisterhaften Abhandlung Struve's über die Länge der Pulkowaer Sternwarte, entlehnen.

Das Dampfboot, welches wöchentlich eine Reise zwischen Kronstadt und Travemünde vollendet, gab die Möglichkeit an die Hand, im Laufe einiger Sommer 15 Reisen zwischen der Pulkowaer Sternwarte und Altona zu vollenden; bei der kleinen Entfernung von Travemünde nach Altona wurden die Chronometer und der Reisende in einem guten Reisewagen befördert. In Pulkowa wurden die Beobachtungen von 4 Observatoren mit Hülfe verschiedener Durchgängs-

instrumente gemacht; in Altona beobachteten eben so viele Astronomen an zwei Durchgangsinstrumenten. Bei diesen Reisen wurden sehr viele Chronometer benutzt, aber diejenigen von ihnen, welche ungenau gingen, und bei welchen die Länge in verschiedenen Reisen mehr als 6'' in Zeit divergirend ausfiel, wurden ganz fortgelassen, so dass die endliche Länge auf 68 Chronometern beruht. Bei der Ankunft am Orte, wo Beobachtungen angestellt wurden, so wie auch bei der Abreise von dort, wurden alle Chronometer unter einander vermittelt eines Chronometers verglichen, welches 13 Mal in 6'' mittlerer Zeit schlug, und dieses selbst, wurde vor dem Anfange und nach dem Ende der Vergleichen, mit einer astronomischen Pendeluhr, deren Uhr correction ganz genau bekannt war, verglichen. Ausserdem wurden die Chronometer noch täglich unter einander verglichen, um etwa zufällige grössere Veränderungen in ihren Ständen zu entdecken.

Die Beobachtungen wurden nach einer besonders scharfen Methode angestellt, und Struve untersuchte die Personalgleichungen zwischen den verschiedenen Beobachtern aufs Genaueste, wodurch es ihm möglich wurde alle Beobachtungen so scharf zu reduciren, als wenn er sie selbst angestellt hätte. Um das Gewicht g , einer aus einer vollständigen Reise, hin und zurück, abgeleiteten Länge zu bestimmen, nahm Struve die

Formel: $g = \frac{K}{T \sqrt{\tau \tau''}}$ an, welche wir schon oben erwähnt

haben (§. 139. Seite 11.); zur Bequemlichkeit der Rechnung nahm er dabei $K = 34560$ an, indem er für T , τ und τ'' als Zeiteinheit eine mittlere Stunde setzte, so dass also das Gewicht $g = 1$, bei $T = 288$ Stunden und $\tau = \tau'' = 120$ Stunden stattfindet.

Wir wollen nun zuerst ein Zahlenbeispiel angeben, um zu zeigen, wie man die Länge aus einer vollständigen Reise mittelst nur eines Chronometers berechnet; die nachherfol-

gende Tafel enthält die Beobachtungen des Standes des Chronometers Haut No. 31. gegen mittlere Zeit.

Zeit in Pulkowa	Uhrcorrection des Chronometers in Pulkowa	Zeit in Altona	Uhrcorrection des Chronometers in Altona
$t =$ 1843. Mai 19. 21 ^h .54	$p =$ + 0 ^h 6' 38".10	$t' =$ 1843. Mai 24. 22 ^h .66	$a =$ - 1 ^h 14' 39".92
$t'' =$ Mai 31. 0 ^h .00	$p' =$ + 0 ^h 7' 9".58	$t''' =$ Mai 26. 10 ^h .72	$a' =$ - 1 ^h 14' 36".77

Hier ist:

$$\tau = t' - t = 5^{\text{Tage}} 1^{\text{h}} .12 = 121^{\text{h}} .12, \quad \tau'' = t''' - t'' = 109^{\text{h}} .28$$

$$T = t''' - t = 266^{\text{h}} .46; \quad \tau + \tau'' = 230^{\text{h}} .40,$$

$$g = \frac{K}{T \sqrt{\tau \tau''}} = \frac{34560}{266.46 \sqrt{121.12 \times 109.28}} = 1.13$$

$$\begin{array}{l|l} p' = + 0^{\text{h}} 7' 9''.58 & r = \frac{(q - p)}{\tau + \tau''} = + 14''.86 \\ a = - 1 14 39 .92 & p + r = 0^{\text{h}} 6' 52 .99 \\ a' = - 1 14 36 .77 & a = - 1 14 39 .92 \\ \hline q = p' + a - a' = + 0^{\text{h}} 7' 6''.43 & \\ p = + 0 6 38 .10 & p + r - a = + 1^{\text{h}} 21' 32''.91 = \lambda \\ \hline q - p = + 0^{\text{h}} 0' 28''.33 & \end{array}$$

Auf ähnliche Weise macht man nun die Berechnung für jedes Chronometer und für jede Reise. In dem nun folgenden Beispiele, wird die Länge aus zwei Chronometern: Dent No. 1774, und Haut No. 31. vollständig berechnet werden. Bezeichnet man nach Struve die Länge, wenn sie aus den Grenzbeobachtungen in Pulkowa und aus den mittleren in Altona berechnet wurde, durch P , dagegen wenn sie aus den Grenzbeobachtungen in Altona und aus den mittleren in Pulkowa

abgeleitet wurde durch A , wobei die an P und A angehängten Ziffern die Nummer der Reise, und n die Anzahl aller mit den angegebenen Chronometern gemachten Reisen bezeichnen, woraus endlich die wahrscheinlichste Länge = L folgt, so hat man folgende Tafel:

	Ge- wicht = g'	Chronometer- Länge nach Dent. No. 1771.	v oder Abwei- chung von L	$v^2 g'$	Chronometer- Länge nach Haut. No. 31.	v oder Abwei- chung von L	$v^2 g'$
P^I	1.13				1 ^h 21' 32'' .91	+ 0.30	0.102
A^I	1.06				33 .13	+ 0.52	0.306
P^{II}	1.10	1 ^h 21' 32'' .51	+ 0.05	0.002	33 .36	+ 0.75	0.619
A^{II}	1.02	32 .83	+ 0.37	0.139	33 .12	+ 0.51	0.265
P^{III}	1.14	32 .09	- 0.37	0.154	32 .55	- 0.06	0.004
A^{III}	1.05	32 .25	- 0.21	0.046	31 .56	- 1.05	1.158
P^{IV}	1.19	31 .69	- 0.77	0.706	32 .70	+ 0.09	0.010
A^{IV}	0.96	32 .77	+ 0.31	0.092	34 .16	+ 1.55	2.306
P^V	1.09	32 .79	+ 0.33	0.119	32 .23	- 0.38	0.157
A^V	0.80	32 .54	+ 0.08	0.005	31 .65	- 0.96	0.737
P^{VI}	1.00	32 .94	+ 0.48	0.230	33 .38	+ 0.77	0.608
A^{VI}	1.10	31 .93	- 0.53	0.309	31 .97	- 0.64	0.451
P^{VII}	1.20	32 .34	- 0.12	0.017	33 .16	+ 0.55	0.363
A^{VII}	1.09	32 .95	+ 0.49	0.262	31 .78	- 0.83	0.751
P^{VIII}	0.76	31 .86	- 0.60	0.273	30 .92	- 1.69	2.171
A^{VIII}	0.41	33 .77	+ 1.31	0.703			

$$L = 1^h 21' 32'' .46; \Sigma(v^2 g'^2) = 3.057$$

$$n = 14; \Sigma g' = 13.91$$

$$G = \frac{(n-1)}{\Sigma v^2 g'^2} \times \Sigma g' = 59.15$$

$$\varepsilon = \pm 0'' .09$$

$$L = 1^h 21' 32'' .61$$

$$\Sigma(v^2 g'^2) = 10.008$$

$$n = 15, \Sigma g' = 15.69$$

$$G = 21.95$$

$$\varepsilon = \pm 0'' .14$$

Hieraus kann man die wahrscheinlichste Länge nach beiden Chronometern ableiten:

$$L = \frac{(1^h 21' 32'' .46) 59.15 + (1^h 21' 32'' .61) 21.95}{59.15 + 21.95} = 1^h 21' 32'' .50$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler = $\mp 0'' .066$.

II^{tens} Bestimmung des Längen-Unterschiedes durch besondere momentane Signale.

141. Bei dieser Methode, zündet man eine kleine Menge Pulver auf einem hoch gelegenen Punkte an, welcher zwischen den Oertern, deren Längenunterschiede man bestimmen will, gelegen sein muss. Die Beobachter, welche sich an diesen Oertern befinden, berichtigen ihre Chronometer durch astronomische Beobachtungen, und beobachten alsdann zu verabredeten Zeiten, das Verschwinden der plötzlichen Lichterscheinungen, welche im Augenblicke, wenn man das Pulver anzündet, entstehen. Nimmt man alsdann die Unterschiede der Sonnen- oder Sternzeiten, welche in diesen Augenblicken, unter den verschiedenen Meridianen der Beobachter gezählt wurden, so erhält man die gesuchten Längen-Unterschiede dieser Oerter. Meistens beobachtet man des Nachts, und brennt das Pulver ungefähr alle 3 Minuten ab; die Beobachtungen selbst, werden mit Fernröhren angestellt, welche noch bei Tage auf denjenigen Punkt gerichtet werden, an welchem die Pulversignale des Nachts stattfinden sollen. Aus den Versuchen des Barons von Zach folgt, dass die Flamme von 12 bis 16 Loth Pulver bei Nacht ein gutes Signal auf eine Entfernung von ungefähr 25 bis 30 Meilen giebt, aber für Entfernungen von 10 Meilen genügen 4 bis 6 Loth Pulver; man darf nicht zu wenig Pulver nehmen, weil sonst die Signale schlecht ausfallen, nimmt man aber zu viel, so wird die Lichterscheinung nicht plötzlich genug verschwinden, und daher die beobachtete Zeit nicht scharf genug sein.

In neuester Zeit hat man in Nordamerika versucht Längen-Unterschiede dadurch zu bestimmen, dass man die galvanischen oder electromagnetischen Telegraphen zur Hervorbringung der momentanen Signale brauchte; die Versuche sind sehr gelungen aufgefallen, und haben bewiesen, dass wo solche Hülfsmittel vorhanden sind, sie eine ganz vorzügliche Bestimmung der Längen-Unterschiede gewähren!

III^{tens} Allgemeine astronomische Methoden zur Längen-Bestimmung.

142. Die allgemeinste Methode die Länge von Oertern zu bestimmen, besteht darin, Erscheinungen am Himmel, welche gleichzeitig wahrgenommen werden können, an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche zu beobachten; solche Erscheinungen sind nun die Verfinsterungen der Gestirne, und wir wollen die Lage, welche solche Gestirne am Himmel, deren Bewegung uns sehr rasch erscheint, wie z. B. die Bewegung des Mondes, in diesen Augenblicken einnehmen, bestimmen.

1^{stens} *Berechnung der Länge aus Mondfinsternissen, und aus den Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten.*

143. Wenn der Mond zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne, oder um die Zeit des Vollmondes herum, sich in demjenigen Theile seiner Bahn befindet, der sehr nahe an der Ecliptic ist, so wird er alsdann mehr oder weniger vom Schattenkegel, welcher von der Erde zurückgeworfen wird, bedeckt werden, und auf diese Weise auf einige Zeit verfinstert erscheinen. Da der Mond aber an und für sich nur ein dunkler Körper ist, und nur auf seiner Oberfläche von der Sonne erleuchtet wird, so wird derjenige Theil des Mondkörpers welcher in den Schatten tritt, seines Lichtes gänzlich beraubt werden, und wirklich dunkel erscheinen. Den Anfang der Mondfinsternisse wird man, an allen Orten, denen der Mond alsdann sichtbar ist, in einem und demselben physischen Augenblicke wahrnehmen, und ebenso wird das Ende der Finsterniss an allen Orten, denen diese Erscheinung sichtbar ist, in demselben physischen Augenblicke wahr-

genommen werden; folglich wird der Unterschied der Stern- oder Sonnen- Zeiten, welche unter verschiedenen Meridianen beim Anfange oder Ende der Mondfinsterniss gezählt werden, unmittelbar die Längendifferenz dieser Meridiane selbst ausdrücken, und sollten vielleicht an einem Orte, dessen Länge genau bekannt, keine Beobachtungen angestellt worden sein, so wird man beim heutigen Zustande der Mond- und Sonnentafeln, im Stande sein diesen Mangel dadurch zu ersetzen, dass man die Zeit des Anfanges und Endes der Mondfinsterniss für denjenigen Meridian berechnet, auf welchen sich die Tafeln beziehen. Auf diese Weise werden die Mondfinsternisse eines der einfachsten Mittel zur Längenbestimmung eines Ortes sein, und in alten Zeiten wurde auch diese Methode der Längenbestimmung ausschliesslich benutzt, es ist jedoch leicht einzusehen, dass diese sonst so einfache Methode, sehr ungenau ist. Ehe der Mond in den Kernschatten tritt, tritt er erst immer in den Halbschatten, welcher in dem Maasse dunkler wird als er sich dem Kernschatten nähert; folglich wird das Licht der Sonne welches den Mond bescheint, nur allmählig schwächer werden, und daher wird man den Anfang und das Ende der Finsterniss selbst, nie ganz genau bemerken können; der Fehler in dieser Beobachtung beträgt oft 2 Zeitminuten und sogar zuweilen noch mehr. Um diesen Fehler zu verringern, beobachtet man mit einem Fernrohre, die Eintritte und Austritte der verschiedenen Flecke, welche sich auf der Mondscheibe befinden, in den Schatten, und bestimmt alsdann aus diesen Beobachtungen ebenfalls die Länge; aber die Erfahrung lehrt, dass auch in diesem Falle, die Zuverlässigkeit der Resultate, eine sehr geringe ist.

Statt der Mondfinsternisse, kann man ebenso einfach und mit weit mehr Vortheil die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten in den Schatten des Jupiters zur Längenbestimmung anwenden; weil sie nämlich sich häufiger ereignen, und ge-

nauer beobachtet werden können. In diesem Falle nämlich, wird der Fehler, welcher von dem Halbschatten herrührt, wegen der raschen Bewegung der Jupiterstrabanten und ihrer grossen Entfernung von der Erde, viel geringer als bei Mondfinsternissen anfallen; jedoch wird dieses vorzüglich bei den Beobachtungen des I^{ten}, oder dem Jupiter zunächst liegenden Trabanten der Fall sein. In diesem Falle übersteigt der Beobachtungsfehler selten 30 Zeitsecunden, und häufig ist er kleiner. Weit weniger genau sind die Beobachtungen des II^{ten} Trabanten; welcher weiter als der I^{ste} vom Hauptkörper absteht, noch ungenauer sind die Beobachtungen des III^{ten} noch weiter vom Jupiter entfernten Trabanten, so dass der Fehler hier schon 2 bis 3 Minuten erreicht; am ungenauesten sind die Beobachtungen des IV^{ten} am weitesten vom Jupiter abstehenden Trabanten, welche zuweilen sogar 3 bis 4 Minuten betragen.

Desto lichtstärker das Fernrohr ist, welches man bei den Beobachtungen braucht, um so später wird man den Eintritt, und desto früher wird man den Austritt des Trabanten aus dem Schatten des Jupiters beobachten; auch die Gesichtskraft des Beobachters hat in diesem Falle, einen nicht unbedeutenden Einfluss. Uebrigens kann man annehmen, dass wenn die Beobachter mit gleich guten Fernröhren ausgerüstet sind, sie gegenseitig die Eintritte um ebenso viel zu frühe als die Austritte zu spät beobachten werden, und wenn man daher das Mittel aus den Längen nimmt, die aus dem Eintritte und Austritte, welche an verschiedenen Orten, mit denselben Fernröhren und von denselben Beobachtern gefunden worden, hergeleitet wurden, so wird dieses Mittel uns eine weit wahrscheinlichere Länge geben, als wenn wir nur aus dem Eintritte oder nur aus dem Austritte für sich die Länge hergeleitet hätten. In allen Fällen ist es übrigens gut, folgende Vorschriften zu befolgen.

1^{stens} Muss man vorzüglich nur den 1^{sten} Trabanten beobachten; dessen Verfinsterungen sich auch häufiger, als die der anderen Trabanten ereignen.

2^{tens} Bei diesen Beobachtungen darf man keine andere, als sehr lichtstarke achromatische Fernröhre anwenden, deren Focallänge nicht kleiner als 3 bis 4 Fuss, und deren Objectiv eine freie Oeffnung von wenigstens 3 Zoll hat; um so grösser das Fernrohr desto besser.

3^{tens} Muss man nur unter den günstigsten Umständen beobachten, wenn das Gestirn vollkommen ruhig im Fernrohre erscheint, und stets muss man vermeiden, diejenigen Verfinsterungen zu beobachten, die sich um die Zeit der Dämmerung herum ereignen, sowie auch jene, welche bei zu kleinen Höhen des Jupiters über dem Horizonte stattfinden.

4^{tens} Man kann diejenigen Verfinsterungen der Jupiters Trabanten, welche sich zur Zeit der Opposition, oder sich auch drei bis vier Tage vor oder nach der Opposition des Jupiters ereignen, nicht mit Vortheil gebrauchen, denn alsdann geschieht der Eintritt oder Austritt des Trabanten so nahe am hellen Rande des Jupiters selbst, dass man ihn nur sehr schwer beobachten kann.

5^{tens} Man muss erst bestimmen, welcher, von den 4 hellen Punkten die den Planeten begleiten, der Trabant ist, dessen Verfinsterung in den Schatten des Jupiters wir zu beobachten beabsichtigen, und ganz besonders wichtig ist es, den Ort des Austrittes des Trabanten aus dem Schatten zu kennen, damit man bei Zeiten seine Aufmerksamkeit auf diesen Ort richten kann. Zu diesem Zwecke, findet man in den astronomischen Ephemeriden, Mittel angegeben, wodurch man schnell und bequem die scheinbare Lage der Trabanten finden kann; auch findet man die Anleitung hierzu, noch besonders im Anfange jeder Ephemeride umständlich auseinandergesetzt. Die Zeit der Verfinsterung in der Ephemeride, ist immer für denjenigen Ort angegeben, auf welchen die

Ephemeride selbst sich bezieht, legt man darauf zur Zeit der Ephemeride die in Zeit ausgedrückte Länge des Beobachtungsortes hinzu, wenn sie östlich ist, oder zieht sie davon ab, wenn die Länge westlich ist, so erhält man die Zeit der Verfinsterung am Beobachtungsorte selbst, auf den Meridian dieses Ortes bezogen. Vor der Opposition des Jupiters, wird sein Schatten nach Westen, aber nach der Opposition desselben nach Osten gerichtet sein, mithin wird im ersten Falle die Verfinsterung westlich, im zweiten Falle aber, östlich vom Jupiter stattfinden. In astronomischen Fernröhren stellt sich alles umgekehrt dar, welches man wohl beachten muss.

6^{ten} Die Längenbestimmungen, welche aus Jupiters Trabanten-Verfinsterungen gefolgert werden, kann man nur als hinreichend genähert ansehen, wenn man keine grosse Genauigkeit verlangt, denn sonst, muss man zu anderen besseren Methoden seine Zuflucht nehmen.

Wenn man eine Beobachtung einer solchen Verfinsterung gemacht hat, und keine dazu entsprechende an einem anderen Orte finden kann, so kann man alsdann in diesem Falle, die in der Ephemeride angegebene Zeit der Verfinsterung, welche sich auf den Meridian der Ephemeride bezieht, benutzen.

Beispiel. Am 26^{ten} März 1827 ereignete sich der Eintritt des 1^{sten} Trabanten in den Schatten des Jupiters;

nach der Beobachtung in Altona um 11^h 41' 32".8 mittlere Altonaer Zeit
 nach der Connaissance des tems um 11 10 54 .0 mittlere Pariser Zeit.

Östliche Länge Altona's von Paris = 0^h 30' 38".8

Am 20^{ten} Mai 1827 fand man den Austritt des 1^{sten} Jupiterstrabanten aus dem Schatten

nach den Altonaer Beobachtungen um 10^h 36' 16".4 mittlere Altonaer Zeit
 nach der Connaissance des tems um 10 5 52 .0 mittlere Pariser Zeit.

Östliche Länge Altona's von Paris = 0^h 30' 24".4.

Nimmt man das Mittel aus beiden Bestimmungen, so erhält man die östliche Länge Altona's von Paris = $0^{\circ} 30' 31.6$, welche nur um einige Zeit-Secunden von der wahren abweicht.

2^{tes} *Berechnung der Länge aus den Sonnenfinsternissen und aus den Bedeckungen der Sterne und Planeten durch den Mond.*

144. Die Sonnenfinsternisse ereignen sich alsdann, wenn der Mond zur Zeit seiner Conjunction mit der Sonne, oder zur Zeit des Neumondes, in jenem Theile seiner Bahn sich befindet, der sehr nahe an der Ecliptic ist, und da der Mond alsdann zwischen der Erde und der Sonne gelegen ist, so entzieht er unserem Anblicke dadurch einen grösseren oder kleineren Theil dieses letzteren Gestirnes. Auf ganz dieselbe Weise treten zuweilen die unteren Planeten Mercur und Venus in ähnliche Conjunctionen mit der Sonne; und ihr verfinstertester Theil hat alsdann die Gestalt eines kleinen runden schwarzen Fleckes, doch werden solche Erscheinungen von den Astronomen selbst; „Durchgänge der Planeten vor der Sonnenscheibe“, genannt. Ebenso werden sich auch zuweilen, solche Conjunctionen des Mondes mit den Sternen oder Planeten ereignen, so dass diese alsdann von dem Mondkörper bedeckt werden. Da der Mond klein und sehr nahe an der Erde ist, so wird er in demselben physischen Augenblicke von Beobachtern, die sich an verschiedenen Punkten auf der Erdoberfläche befinden, auch in sehr verschiedenen Richtungen erblickt werden, und es kann daher leicht geschehen, dass wenn irgend ein Gestirn, oder ein Theil desselben, einem Beobachter durch den Mond verfinstert erscheint, es dennoch einem anderen Beobachter an einem anderen Orte, entweder gar nicht verfinstert, d. h. in seinem vollen Lichte, oder doch

alsdann zu einer anderen Zeit wenigstens, verfinstert erscheinen wird. Hieraus sieht man nun, dass es aus den Beobachtungen einer solchen Erscheinung nicht anders möglich sein wird, die Längenbestimmung von Orten herzuleiten, als dass man auf den Einfluss Rücksicht nimmt, welcher in der Zeit dieser Erscheinung an verschiedenen Orten, durch die Aenderung in der Lage des Gestirnes hervorgebracht wird. Hierzu giebt es nun verschiedene Methoden, wovon die erste schon von Kepler angegeben, und darauf von Lalande und Bohnenberger noch vervollständigt wurde; die zweite Methode aber ist rein analytisch, und rührt von Lagrange her; sie wurde aber noch so bedeutend von Bessel umgearbeitet und verbessert, dass man sie jetzt mit Recht die Besselsche Methode nennt. Eine andere sehr elegante analytische Methode die Finsternisse zu berechnen ist vom berühmten Gauss vorgeschlagen und in der Dissertation von H. Ursinus: *De eclipsi solari die 7. Septembris 1820 apparitura secundum methodum geometriae analyticae tractata* erläutert worden. Man kann noch einen interessanten Aufsatz des Herrn Woolhouse (Anhang zu dem Nautical Almanac für 1836) über die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse erwähnen; besonders aber müssen wir die vortrefflichen und bedeutenden Untersuchungen Hansens (*Astronomische Nachrichten* No. 339—342) hervorheben. *)

*) Die Behandlung des Herrn Hansen ist rein analytisch und löst alle Aufgaben, welche bei der Berechnung der Finsternisse vorkommen können, mit der grössten Allgemeinheit und Schärfe auf. Vorzüglich wichtig ist die Hansensche Arbeit (*Astronomische Nachrichten* No. 392—395) in welcher er lehrt auf welche Weise man eine grosse Masse von Sternbedeckungen zu behandeln hat, um die wahrscheinlichsten geographischen Längen der Beobachtungsorte und die Verbesserungen der Mondstafeln zu bekommen.

1ste Methode.

145. Diese Methode beruht darauf aus den Beobachtungen der Verfinsterung, eine solche Erscheinung herzuleiten, welche für alle Beobachter auf der Oberfläche der Erde, in demselben physischen Augenblick stattfinden wird; eine solche Erscheinung ist nun die wahre Conjunction des verfinsterten und verfinsternden Körpers; wenn diese Conjunction sich auf die Ecliptic bezieht, so entspricht sie demjenigen Augenblicke, wenn die wahren oder vom Centrum der Erde ausgesehenen Längen beider Gestirne einander gleich sein werden, und heisst alsdann die wahre ecliptische Conjunction der beiden Gestirne; bezieht sie sich aber auf den Aequator, so entspricht sie demjenigen Augenblicke, wenn die beiden Gestirne, gleiche wahre gerade Aufsteigung haben werden, und heisst dann, die wahre aequatorial Conjunction der beiden Gestirne. Mit den heutigen astronomischen Ephemeriden ist es eben so bequem die wahre aequatorial Conjunction als die wahre ecliptische Conjunction, irgend welcher Gestirne zu berechnen.

In den folgenden Untersuchungen, wollen wir nun zuerst die Methode zur Berechnung der Verfinsterungen der Sonne durch den Mond herleiten, und darauf zeigen, wie man die gefundenen Regeln auf andere Arten von Verfinsterungen anwenden kann.

Alle Sonnenfinsternisse sind entweder partiell, das heisst es wird alsdann nur ein Theil der Sonne vom Monde bedeckt, oder sie sind total, welches sich alsdann ereignet, wenn der scheinbare Winkelhalbmesser des Mondes grösser als der der Sonne ist, und zugleich die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne bei der Mitte der Verfinsterung sehr nahe an einander liegen; in diesem Falle wird die ganze Sonne einem Beobachter verfinstert erscheinen, und dieser

vom Schattenkegel des Mondes getroffen werden. Wenn aber bei der Mitte der Verfinsterung, die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne einander sehr nahe sind, und der scheinbare Winkelhalbmesser des Mondes, kleiner wie der der Sonne ist, so wird der Schattenkegel des Mondes den Ort des Beobachters nicht erreichen, und dieser alsdann die Verfinsterung nur ringförmig sehen, d. h. der Mond wird sich alsdann auf der Sonnenscheibe als eine schwarze Kreisfläche darstellen, um welche herum ein heller Lichtring erscheinen wird. Bei totalen und ringförmigen Finsternissen, muss man folgende 4 verschiedene Momente beobachten; 1^{ten} den Anfang der Verfinsterung überhaupt, oder die erste äussere Berührung der Ränder beider Gestirne; 2^{ens} den Anfang der totalen Verfinsterung, und im Falle einer ringförmigen Verfinsterung den Anfang der Ringbildung; welcher der ersten inneren Berührung der Ränder entspricht; 3^{ens} die letzte innere Berührung der Ränder, und 4^{ens} das Ende der Verfinsterung überhaupt oder die letzte äussere Berührung der Ränder. Die Fig. 34 bezieht sich auf den Anfang einer totalen Sonnenfinsterniss; *L* ist der Mittelpunkt des Mondes und *S* der Mittelpunkt der Sonne; hier ist der scheinbare Halbmesser des Mondes grösser als der scheinbare Halbmesser der Sonne, und die erste innere Berührung der Ränder findet immer auf der Ostseite der Sonne statt. Die Fig. 35. bezieht sich auf die erste innere Berührung bei einer ringförmigen Sonnenfinsterniss; *S* ist das Centrum der Sonne und *L* das Centrum des Mondes; aber hier ist der scheinbare Halbmesser des Mondes kleiner als der der Sonne und der erste Anfang der Ringbildung ereignet sich immer auf der Westseite der Sonne. Auf der entgegengesetzten Seite der Sonne findet die letzte innere Berührung statt. Die erste äussere Berührung der Ränder (Fig. 33.) des Mondes und der Sonne ereignet sich immer auf der Westseite der Sonne, die letzte äussere Berührung

der Ränder dagegen auf ihrer Ostseite. Bei der Berechnung dieser Finsternisse, haben wir nur die relative scheinbare Bewegung des Mondes und der Sonne in Betracht zu ziehen, und daher brauchen wir nicht, die Parallaxen des Mondes und der Sonne in gerader Aufsteigung und Abweichung u. s. w. für sich besonders zu berechnen; sondern man kann gleich den Unterschied dieser Parallaxen, oder die relative Parallaxe, wie er sonst auch genannt wird, berechnen; und sich hierzu, der früher angegebenen Formeln in §. §. 19. bis 20. Seite 31. bis 33. Band I. bedienen; man kann sogar in den meisten Fällen, ohne merklichen Fehler, die relative Parallaxe des Mondes dadurch genau herleiten, dass man in den Formeln zur Berechnung der Parallaxe in AR und Decl. beim Monde, statt der Horizontal-Parallaxe des Mondes selbst, den Unterschied dieser und der Sonnenhorizontalparallaxe braucht.

Wir wollen nun annehmen, dass man den Anfang der Finsterniss an irgend einem Orte, zur mittlerer Sonnenzeit t beobachtet hätte, und dass $L + x$, die geographische Länge (in Zeit), des Beobachtungsortes, von demjenigen Meridiane ist, auf welchen sich die Ephemeride bezieht; hierbei nehmen wir L als die genähert bekannte Länge des Ortes, und x als den noch zu findenden Fehler an, welchen man zu L hinzufügen muss, um die genaue Länge herzuleiten; alsdann wird $t \pm (L + x)$ die mittlere Zeit unter dem Meridiane der Ephemeride, in demjenigen Augenblicke ausdrücken, wenn der Beobachter die Zeit t zählt; (+) ist zu nehmen, wenn der Beobachtungsort sich westlich, und (—), wenn der Beobachtungsort sich östlich vom Meridiane der Ephemeride befindet.

Durch Interpolation, können wir aus der Ephemeride für die Zeit $t \pm L$ die folgenden Werthe entnehmen:

des Mondes der Sonne

die wahre gerade Aufsteigung des Centrums α A
 „ „ „ Declination „ „ „ „ δ D
 den wahren Halbmesser r R
 die aequatorial Horizontal-Parallaxe $\pi \text{ C}$ $\pi \text{ C}$

Bezeichnen wir nun die geographische Breite des Beobachtungsorte durch q , die geocentrische durch q' und die Sternzeit am Beobachtungsorte beim Anfange der Finsterniss durch s , so können wir alsdann nach §. §. 19–20. Seite 31–33. Band I. die Horizontal-Parallaxe des Mondes am Beobachtungsorte $= \pi \text{ C}$, oder auch den Unterschied der Horizontal-Parallaxen beider Gestirne $= \pi = \pi \text{ C} - \pi \text{ C}$, an diesem Orte leicht bestimmen, und finden dann:

die relative Parallaxe des Mondes in gerade Aufsteigung $= p$
 „ „ „ „ „ „ „ Declination $= q$
 die Summe der scheinbaren Winkelhalbmesser
 beider Gestirne $= k' = r' + R'$

(oder $k' = r' - R'$ für die innere Berührung der Gestirne bei totalen, dagegen $k' = R' - r'$ für die innere Berührung bei ringförmigen Sonnenfinsternissen.)

die Declination $\delta' = \delta + q$

Was die Zeichen betrifft, so können wir annehmen, dass p und q positiv sind, wenn die scheinbare, grösser als die wahre gerade Aufsteigung und Abweichung des Mondes ist.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus den angeordneten Beobachtungen der Finsterniss: 1stens den Unterschied der wahren geraden Aufsteigung, der Sonne $= \text{C}$ und des Mondes $= \text{C}$ zur Zeit der Beobachtung zu bestimmen; 2^{ens} die wahre Conjunction, für den Meridian des Beobachters zu finden und 3^{ens} den Fehler der Länge des Beobachtungsortes $= x$, welcher vorläufig noch unbekannt ist, zu ermitteln.

Wäre die Länge des Ortes genau bekannt, und die Tafeln der Gestirne ohne Fehler, so würde $x = 0$, $\text{C} = \alpha$,

und $\odot = A$ gefunden werden; aber da x und die Fehler der Sonnen- und Mondstafeln, immer sehr klein sein, und nie eine gewisse Grenze überschreiten werden, so wird man bei der Berechnung der Parallaxen p und q , keinen merklichen Fehler begehen, wenn man statt \odot und \odot' , die Werthe A und α setzt; bezeichnet man daher durch \mathcal{C}' und \odot' die genauen scheinbaren geraden Aufsteigungen der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne zur Zeit der Beobachtung, und durch α' und A' ihre genäherten aus den Tafeln, mittelst der ungenauen Länge L des Ortes, berechneten Werthe, so hat man:

$$p = \alpha' - \alpha - (A' - A) = \mathcal{C}' - \mathcal{C} - (\odot' - \odot).$$

Beim Anfange oder Ende der Finsterniss überhaupt, scheinen sich beide Gestirne äusserlich zu berühren (Fig. 33.), und alsdann wird der scheinbare Abstand ihrer Mittelpunkte $= k' = r' + R'$, oder gleich der Summe der scheinbaren Winkelhalbmesser des Mondes und der Sonne werden. Denkt man sich nun das sphärische Dreieck PLS , welches vom Pole des Aequators P , und von den scheinbaren Mittelpunkten des Mondes L und der Sonne S gebildet wird, bezeichnen wir ferner die scheinbare Abweichung des Mondes durch δ ; die scheinbare Abweichung der Sonne durch D , den Winkel $SP L = a'$, und setzen $a' = (\odot' - \mathcal{D}')$, wo alsdann a' positiv beim Anfange und negativ beim Ende der Verfinsterung zu nehmen ist, so erhalten wir $PS = 90^\circ - D$; $PL = 90^\circ - \delta$, $LS = k' = r' + R'$, und folglich haben wir aus dem Dreieck PLS alsdann:

$$\cos k' = \sin D, \sin \delta, + \cos \delta, \cos D, \cos a'$$

$$\text{oder } \sin^2 \frac{1}{2} k' = \sin^2 \frac{1}{2} (\delta, - D,) + \cos D, \cos \delta, \sin^2 \frac{1}{2} a'.$$

Aber

$$\cos D, \cos \delta, = \cos^2 \frac{1}{2} (\delta, + D,) - \sin^2 \frac{1}{2} (\delta, - D,);$$

folglich:

$$\sin^2 \frac{1}{2} k' = \sin^2 \frac{1}{2} (\delta, - D,) + \sin^2 \frac{1}{2} a' \cos^2 \frac{1}{2} (\delta, + D,) - \sin^2 \frac{1}{2} a' \sin^2 \frac{1}{2} (\delta' - D,).$$

Aber zur Zeit einer Verfinsternung werden die Werthe $\frac{1}{2} a'$ und $\frac{1}{2} (\delta, - D,)$ niemals 17' übersteigen, und ferner wenn der eine von ihnen 17' erreicht, so verschwindet der andere gänzlich, oder wird doch sehr klein werden; den grössten Werth hat das Glied $\sin^2 \frac{1}{2} a' \sin^2 \frac{1}{2} (\delta, - D,)$ alsdann, wenn $\frac{1}{2} a' = \frac{1}{2} (\delta, - D,)$; aber alsdann werden $\frac{1}{2} a'$ und $\frac{1}{2} (\delta, - D,)$ immer kleiner als 12' werden, und folglich kann man das Product dieser beiden Glieder in Vergleich gegen die anderen Glieder als verschwindend ansehen; ebenso kann man auch statt der Sinusse sehr kleiner Bögen, diese Bögen selbst nehmen, und erhält daher, wenn man $b' = \delta, - D, = \delta' - D,$ und $d' = \frac{1}{2} (\delta, + D,)$ oder beinahe $= \frac{1}{2} (\delta' + D)$ setzt:

$$k'^2 = b'^2 + a'^2 \cos^2 d' \dots \dots \dots (1);$$

der Unterschied zwischen dem aus dieser letzten Gleichung gefundenen, und dem wahren Werthe von k' wird niemals 0''.004 in Bogen übersteigen, und daher kann man mit grosser Annäherung:

$$a' = \pm \frac{\sqrt{(k' + b')(k' - b')}}{\cos d'} \text{ setzen. } \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{wo } b' = \delta' - D = \delta + q - D; \quad d' = \frac{\delta' + D}{2} = \frac{\delta + D + q}{2}.$$

Für den Anfang der Finsterniss, muss man (+) nehmen; weil alsdann $a' = \odot' - \zeta'$ und $\odot' > \zeta'$ ist. Bezeichnet man durch a den Unterschied der wahren geraden Aufsteigungen der Sonne und des Mondes, oder setzt man $a = \odot - \zeta$; so wird alsdann die relative Parallaxe $p = \zeta' - \zeta - (\odot' - \odot) = \zeta' - \odot' - (\zeta - \odot)$, und folglich $p = -a' + a$ werden, oder für den Anfang der Verfinsternung:

$$a = a' + p. \dots \dots \dots (3).$$

Wir müssen jetzt die wahren Bewegungen der Mittelpunkte der Gestirnen in gerader Aufsteigung berechnen, und sie für die Mitte des Zeitraumes zwischen dem Anfange der Finsterniss und dem Neumonde oder der wahren Conjunction der Gestirne finden. Es sei daher diese Bewegung in einer mittleren Stunde für die erwähnte Mitte zwischen dem Anfange der Finsterniss und der Conjunction, beim Monde = m Secunden im Bogen, und bei der Sonne = n Secunden im Bogen. In einer mittleren Stunde oder in 3600 mittleren Zeit-Secunden, wird die Grösse a , oder der Unterschied der wahren Geraden-Aufsteigungen der Gestirne, um $m - n$ (in Secunden ausgedrückt), kleiner werden, und folglich, wenn t die mittlere Zeit beim Anfange der Finsterniss bedeutet, wo alsdann die Differenz $\odot - \zeta = a$ ist, und wenn τ die mittlere Zeit ist, welche zur Zeit der wahren Conjunction beider Gestirne unter dem Meridiane des Beobachters gezählt wird, als $a = 0$ war, so wird wenn $\tau - t$ in Secunden ausgedrückt ist: $\tau - t : 3600'' = a : m - n$ sich verhalten; und setzt man nun für a seinen Werth aus der Gleichung (3), so wird:

$$\tau = t + \frac{3600''}{m - n} (a' + p) \dots \dots \dots (4)$$

Aus der astronomischen Ephemeride, kann man die mittlere Zeit T finden, welche zur Zeit der wahren Conjunction unter dem Meridiane der Ephemeride stattfindet; wenn alsdann $L + x$ die wahre westliche vom erwähnten Meridiane abgezählte Länge des Beobachtungsortes bezeichnet, so wird:

$$L + x = T - \tau \dots \dots \dots (5)$$

wenn dieser letztere Unterschied $= T - \tau$ negativ ausfällt, so bedeutet dieses, dass die Länge östlich ist.

Zur Bestimmung von $m - n$ kann man die vorher berechneten Werthe von α und A benutzen; denn zur Zeit $t \pm L$ unter dem Meridiane der Ephemeride wird der Unterschied der wahren geraden Aufsteigungen beider Gestirne $= A - \alpha$ sein, aber zur Zeit T unter demselben Meridiane, wird dieser Unterschied $= 0$ sein, folglich hat man:

$$m - n = \frac{A - \alpha}{T - (t \pm L)}, \text{ wo } A - \alpha \text{ in Secunden und } T - (t \pm L)$$

in Stunden und Theilen einer Stunde ausgedrückt ist.

Auf ähnliche Weise kann man nun die Länge aus der Beobachtung des Endes der Finsterniss bestimmen; denn nimmt man an, dass t und alle übrigen vorhergehenden Bezeichnungen sich auf das Ende der Finsterniss beziehen, so braucht man in diesem Falle bloß in der Gleichung (2) das Zeichen $(-)$ zu nehmen, weil alsdann $\odot' > \ominus'$ ist. Alles sonstige bei der Berechnung vorkommende, bleibt ganz wie zuvor.

Wenn die Finsterniss noch an einem zweiten Orte auf der Erde, dessen Länge genau bekannt ist, beobachtet sein sollte, so kann man, alsdann aus den dort angestellten Beobachtungen, die mittlere Zeit τ , welche an diesem Orte bei der wahren Conjunction beider Gestirne gezählt wurde, ebenso wie wir es eben gezeigt haben berechnen; und dann wird $\tau - \tau$,

den Längen-Unterschied zwischen beiden Beobachtungsorten ausdrücken. Die auf diese Weise bestimmte Länge, welche nämlich auf die Vergleichung der Zeiten der wahren Conjunction, wie sie aus den Beobachtungen an zwei verschiedenen Orten hergeleitet wurden, beruht, ist weit zuverlässiger, als wenn man die aus der Beobachtung abgeleitete Zeit der wahren Conjunction, mit der aus den Tafeln berechneten $= T$ vergleicht, denn dieses T wird nothwendig alle Fehler enthalten müssen, mit denen die Tafeln selbst, zu dieser Zeit behaftet sind.

Es versteht sich von selbst, dass man die Länge aus den Beobachtungen der inneren Berührungen auf ähnliche Weise ableiten kann; nur müssen wir alsdann in diesem Falle, bei totalen Finsternissen, $k' = r' - R'$ und bei ringförmigen, $k' = R' - r'$ setzen; es ist ferner leicht einzusehen, dass bei der ersten inneren Berührung die scheinbare gerade Aufsteigung des Mondes, in beiden Fällen, kleiner als die scheinbare gerade Aufsteigung der Sonne sein wird, und ebenso, dass das Gegentheil bei der letzten inneren Berührung stattfinden wird.

145. Wenn die Beobachtungen vollkommen genau wären, und die Tafeln der Gestirne, und die bei der Berechnung angenommene geographische Länge des Ortes keine Fehler enthielten, so würde die aus Anfang und Ende abgeleitete Zeit der wahren Conjunction vollkommen identisch sein. Aber diese verschiedenen Fehler, welche wir annehmen müssen, werden eine sehr vollkommene Uebereinstimmung nicht gestatten, da jedoch diese Fehler immer klein sein werden, so werden wir den Einfluss, welchen sie auf die Zeit der wahren Conjunction hervorbringen, immer durch die Differenzialrechnung bestimmen können. Es seien die Werthe a' , b' , p' und die relative stündliche Bewegung beider Gestirne in gerader Aufsteigung $= m - n$, auf die oben

erwähnte Weise und in Bezug auf die Zeit des Anfanges der Verfinsternung $= t'$ berechnet, ebenso mögen a'' , b'' , p'' , und m , $-n$, dieselbe Bedeutung für das Ende der Finsterniss $= t''$ haben, wenn alsdann τ' die aus der Beobachtung des Anfanges der Finsterniss, und τ'' die aus der Beobachtung des Endes, abgeleitete Zeit der wahren Conjunction beider Gestirne ist, so werden wir haben:

$$\begin{aligned} \tau' &= t' + h (a' + p'), \text{ wo } h = \frac{3600''}{m - n}, \\ \tau'' &= t'' + h, (a'' + p''), \text{ wo } h, = \frac{3600}{m, -n,}, \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Beinahe immer, wird τ' etwas verschieden von τ'' ausfallen; nimmt man aber an, dass die Werthe von a' und p' , kleine Fehler $\delta a'$ und $\delta p'$ enthalten, welche von den oben erwähnten Ursachen herrühren, so werden die wahren Werthe von a' und p' durch $a' + \delta a'$ und $p' + \delta p'$ ausgedrückt werden; nehmen wir aus demselben Grunde an, dass die wahren Werthe von a'' und p'' , $a'' + \delta a''$ und $p'' + \delta p''$ seien, und bezeichnen durch $\delta \tau'$ und $\delta \tau''$ die Correctionen, welche man zu den berechneten Grössen τ' und τ'' zulegen muss, um die genaue Zeit der wahren Conjunction aus der Beobachtung des Anfanges und Endes der Finsterniss zu erhalten, so wird $\tau' + \delta \tau' = \tau'' + \delta \tau''$ werden. Aus den heutigen Tafeln der Sonne und des Mondes, kann man die wahre relative stündliche Bewegung dieser beiden Gestirne oder $m - n$ u. s. w., schon so genau bestimmen, dass man ohne weiteres annehmen kann, dass die Correctionen in τ und τ'' , nur von $\delta a'$, $\delta p'$ und $\delta a''$, $\delta p''$ abhängen werden, die Werthe h und h , werden also keine Aenderung erleiden, und daher kann man alsdann anstatt der Gleichung (6), folgende annehmen:

$$\tau' + \delta \tau' = \tau' + h (\delta a' + \delta p'); \tau'' + \delta \tau'' = \tau'' + h, (\delta a'' + \delta p'') \dots (7)$$

und:

$$\tau' + \delta \tau' = \tau'' + \delta \tau''.$$

Setzen wir $\frac{1}{2}(\delta' + D) = d'$, so wird der Fehler in $a' \cos d'$, welcher von einer Ungenauigkeit in d' herrührt, bei der Kleinheit von a' , sehr nahe verschwinden, und daher hat man durch die Differenzialrechnung aus der Gleichung (1):

$$k' \partial k' = b' d b' + \cos^2 d' \cdot a' d a'$$

oder setzt man zu Abkürzung:

$$\frac{k'}{a' \cos d'} = \sec \psi'; \quad \frac{b'}{a' \cos d'} = \operatorname{tg} \psi' \dots \dots \dots (8)$$

so erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\partial a' = (\sec \psi' \cdot d k' - \operatorname{tg} \psi' \cdot d b') \sec d' \dots \dots \dots (9)$$

Aus der Gleichung (8) ersieht man ganz deutlich, dass ψ' der Winkel am Sonnencentrum ist, welcher zwischen den beiden Bögen eingeschlossen ist, von denen der eine senkrecht auf dem Declinationskreise des Mondes steht und durch den Mittelpunkt der Sonne geht, der andere aber die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne verbindet; um dieses zu erläutern, sei in Fig. 33. im Dreiecke $Q L S$; $L S$ der Bogen welcher die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne, der Sonne S und des Mondes L , verbindet, der Bogen $Q L$ der Declinationskreis, welcher durch das Centrum des Mondes geht, und $Q S$ der senkrechte Bogen zu $Q L$; nun sind aber die Bögen $L S$, $L Q$ und $Q S$, zur Zeit einer Verfinsternung so klein, dass man das Dreieck $L Q S$ als geradlinigt betrachten kann, setzt man daher $L S = k'$, $L Q = D - \delta'$ und $Q S = a' \cos d'$, und bemerkt man, dass in diesem Dreiecke der Winkel bei Q , rechtwinklicht ist, so erhält man $\sec Q S L = \frac{k'}{a' \cos d'}$, mithin

folgt aus Gleichung 8, dass $Q S L = \psi'$ ist. Der Ausdruck 9 beweist, dass bei sonst gleichen Werthen von $\partial k'$ und $\partial b'$, der Fehler $\partial a'$ um so kleiner werden wird, als ψ' selbst kleiner wird; den geringsten Einfluss üben diese Fehler, nämlich $\partial k'$ und $\partial b'$ auf $\partial a'$, und folglich auch auf $\partial z'$ aus, wenn $\psi' = 0$ wird, d. h. alsdann, wenn bei der Mitte der Verfinsternung, die Mittelpunkte beider Gestirne scheinbar zusammen fallen werden, so dass also dann die Verfinsternung central sein wird. Dieses erklärt vollständig, warum die Resultate die aus gut beobachteten totalen oder ringförmigen Sonnenfinsternissen, abgeleitet werden, so sehr zuverlässig sind, und auch ebenso, warum die partiellen Finsternisse, bei welchen nur ein kleiner Theil der Sonne bedeckt wird und ψ' daher nahe an 90° ist, so wenig Genauigkeit bei der Längenbestimmung gewähren.

Wir wollen jetzt umständlich die Bedeutung der einzelnen Fehler $\partial k'$, $\partial b'$ und $\partial p'$, u. s. w. untersuchen, und zugleich zeigen auf welche Weise man den Fehler in den Tafeln der Gestirne und die Correction der Länge des Ortes, welche bei der ersten Berechnung gefunden wurde bestimmen kann.

Der scheinbare Mondshalbmesser verändert sich sehr langsam mit der Zeit, und obgleich er von der Parallaxe des Mondes abhängt, so wird doch ein kleiner Fehler in dieser Parallaxe keinen merklichen Einfluss auf seine Bestimmung hervorbringen; alles dieses kann man ebenso und mit weit größerem Rechte vom Sonnenhalbmesser behaupten; und daher kann man annehmen, dass, wenn k die Summe oder Differenz der wahren, dagegen k' die Summe oder Differenz der scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne ist, alsdann $\partial k' = \partial k$, oder dass der Fehler in k' gleich dem Fehler in k sein wird.

Wir wollen nun den Unterschied der wahren Declinationen des Mondes und der Sonne $= b$ setzen, indem wir ganz

wie vorher, den Unterschied der scheinbaren Declinationen dieser beiden Gestirne durch b' bezeichnen wollen; alsdann hängt der Fehler in b' , oder $\partial b'$; erstens von ∂b oder dem Fehler von b ab, welcher von der Ungenauigkeit der Tafeln herrührt; zweitens hängt $\partial b'$ von dem Fehler ab, der davon herrührt, dass wir die wahre Declination beider Gestirne mit einer ungenauen Zeit $t' \pm L$ berechnet haben, während wir dazu die genaue Zeit $t' \pm (L + x)$ hätten nehmen sollen; bezeichnet man deshalb den Unterschied in der wahren Bewegung des Mondes und der Sonne in einer mittleren Zeitsecunde durch λ und drückt x in mittleren Zeitsecunden aus, so wird der gesuchte von dieser Ursache herrührender Fehler in $\partial b'$, $= \lambda \cdot x$ werden, und drittens wird $\partial b'$ noch von der Ungenauigkeit im angenommenen Unterschiede der Horizontal-Parallaxen des Mondes $= \pi \text{ C}$ und der Sonne $= \pi \text{ O}$ abhängen; es sei dieser angenommene Unterschied $\pi \text{ C} - \pi \text{ O} = \pi$, der wahre $= \pi + \partial \pi$, und es sei der für den Anfang der Verfinsternung berechnete Unterschied der Parallaxen in Declination $= q'$, aber der wahre $= q' + \partial q'$, so kann man alsdann ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\partial \pi$: $\pi = \partial q'$: q' sein wird, und alsdann wird man bis auf Grössen der ersten Ordnung bei der Kleinheit von $\partial \pi$ und $\partial q'$ ohne weiteres: $\partial q' = \frac{q'}{\pi} \cdot \partial \pi$ setzen können. Auf diese Weise wird der vollständige Ausdruck des Fehlers $\partial b'$:

$$\partial b' = \partial b + \lambda \cdot x + \frac{q'}{\pi} \partial \pi \text{ werden.}$$

Die Ungenauigkeit im Unterschiede der Horizontal-Parallaxen der Gestirne $= \partial \pi$, bringt ebenso in p' einen Fehler hervor, welchen wir durch $\partial p'$ bezeichnen wollen, und dessen Werth man so annehmen kann, dass: $\partial p' = \frac{p'}{\pi} \cdot \partial \pi$

Die Horizontal-Parallaxe verändert sich so ausserordentlich langsam mit der Zeit, dass ein Fehler in der angenommenen Länge des Beobachtungsortes von 1 bis 2 Zeitminuten, keinen merklichen Einfluss auf die Berechnung der Werthe p' und q' hervorbringt, und daher können wir den Einfluss, der kleinen Fehler, welche in p' und q' von einer unrichtig angenommenen Länge herrühren, gänzlich vernachlässigen. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\partial b + \lambda. x = \partial B$$

und substituirt die Werthe von $\partial k'$, $\partial b'$ und $\partial p'$ in die Gleichung (9), so wird endlich:

$$\partial a' = \left(\sec \psi'. \partial k - \operatorname{tg} \psi'. (\partial B + \frac{q'}{\pi} \cdot \partial \pi) \right) \sec d';$$

und alsdann folgt aus Gleichung (7):

$$r' + \partial r' = r' + h \left(\sec \psi'. \partial k - \operatorname{tg} \psi'. (\partial B + \frac{q'}{\pi} \cdot \partial \pi) \right) \sec d' + h \frac{p'}{\pi} \cdot \partial \pi$$

oder:

$$r' + \partial r' = r' + h \sec d' \sec \psi'. \partial k - h \sec d' \operatorname{tg} \psi' \partial B + \left(\frac{h p'}{\pi} - h \sec d'. \operatorname{tg} \psi' \frac{q'}{\pi} \right) \partial \pi$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} \psi' = \frac{b'}{a' \cos d'}; \text{ und } a' = \odot' - \zeta' \text{ ist.}$$

Auf ähnliche Weise findet man für das Ende der Verfinsternung:

$$r'' + \partial r'' = r'' + h, \sec d'' \sec \psi''. \partial k - h, \sec d'' \operatorname{tg} \psi''. \partial B + \left(\frac{h p''}{\pi} - h, \sec d'' \operatorname{tg} \psi''. \frac{q''}{\pi} \right) \partial \pi$$

wo a'' , b'' , h'' , ψ'' , p'' und q'' , die entsprechenden Werthe von a' , b' , h' , ψ' , p' und q' für das Ende der Finsterniss sind, und ganz ähnlich wie vorher $\operatorname{tg} \psi'' = \frac{b''}{a'' \cos d''}$, und $a'' = \odot'' - \mathcal{C}''$ gesetzt ist; wobei ψ von 0° bis 360° zu nehmen ist, von Westen durch Norden nach Osten.

Nun muss aber $x' + \delta x' = x'' + \delta x''$ werden, und setzt man für diese beiden Ausdrücke, ihre eben gefundenen Werthe, so erhalten wir eine Bedingungsgleichung, welche die 3 unbekanntenen Werthe $\delta \pi$, δB und $\delta \pi$ enthält; hieraus sieht man, dass die Beobachtung des Anfanges und Endes einer Finsterniss an nur einem Orte, zur Bestimmung der Fehler der Elemente der Berechnung nicht hinreicht; aber wenn ähnliche Beobachtungen an drei verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche angestellt werden, deren Länge gut bestimmt ist, so werden wir alsdann diejenige Zahl von Bedingungsgleichungen haben, welche nothwendig ist, um die Fehler δk , δb , $\delta \pi$ vollkommen zu bestimmen; sind die Längen der verschiedenen Beobachtungsorte nicht genau genug bekannt, so muss man zuerst δk , δb und $\delta \pi$ vernachlässigen, darauf die Länge der Orte genauer bestimmen, und alsdann wiederum alle Berechnungen wiederholen, indem man diese Fehler genähert sucht, und dadurch eine noch genauere Länge ableitet. Wenn man keine genügende Zahl von Beobachtungen hat, so muss man den kleinsten der Fehler δk , δB und $\delta \pi$ vernachlässigen; der grösste von ihnen wird meistens δB sein; die beiden anderen sind beinahe immer sehr klein; damit aber die Irradiation von welchen wir weiter unten reden werden, keinen Einfluss auf die Zuverlässigkeit der zu bestimmenden Länge haben kann, wird es gut sein die Fehler der Halbmesser in Betracht zu ziehen.

Bei totalen und ringförmigen Finsternissen hat man ausser den Beobachtungen der äusseren Berührung der Ränder, noch die Beobachtungen der inneren Berührung der Ränder,

aber für die innere Berührung nimmt ∂k eine andere Bedeutung an, denn in diesem Falle wird $\partial k = \partial r - \partial R$ für totale, und für ringförmige $\partial k = \partial R - \partial r$; während wir für die äusseren Berührungen, in allen Finsternissen stets $\partial k = \partial r + \partial R$ haben, wo ∂r und ∂R die Fehler in den angenommenen Halbmessern r und R für Mond und Sonne bedeuten. Wenn sowohl die beiden äusseren als auch die beiden inneren Berührungen der Ränder beobachtet wurden, so kann man alsdann durch Vergleichung der vier Resultate der Beobachtung, 3 Bedingungsgleichungen ableiten, welche aber die 4 unbekanntes Werthe ∂r , ∂R , ∂B und $\partial \pi$ enthalten werden, und folglich wird es alsdann zu ihrer Auflösung unumgänglich nöthig sein, entweder eine dieser Unbekannten, z. B. $\partial \pi$, gänzlich zu vernachlässigen, oder hiermit die Beobachtungen ganz derselben Finsterniss an einem anderen Orte auf der Erdoberfläche zu verbinden.

146. Wenn viele Beobachtungen an verschiedenen Orten angestellt wurden, so kann man durch Verbindung dieser Beobachtungen unter einander, eine Menge Bedingungsgleichungen zusammensetzen, aus welchen man dann, nach der bekannten Methode der kleinsten Quadrate, die wahrscheinlichsten Werthe der 4 Unbekannten ∂r , ∂R , ∂b und $\partial \pi$ auffinden kann; aber um sie so genau als möglich zu finden, muss man immer erst vorher, nach der eben erklärten Methode die geographische Länge aller zweifelhaft bestimmten Punkte, mit einem grösseren Grade von Genauigkeit, wenn auch mit Vernachlässigung einzelner kleiner Fehler, erforschen. Nach dieser vorläufigen Berechnung, kann man alsdann schon die Werthe von ∂r , ∂R , ∂b und $\partial \pi$, nach der Methode der kleinsten Quadrate suchen, und darauf die wahrscheinliche Zeit der wahren Zusammenkunft für den Meridian eines jeden Beobachtungsortes bestimmen; nimmt man hierauf die Unterschiede dieser Zeiten, so erhält

man die wahrscheinlichsten geographischen Längen-Unterschiede. Kennt man nun die Länge einiger Beobachtungs-Orte in Beziehung auf den Meridian der Ephemeride, so kann man alsdann leicht aus den Beobachtungen der Finsterniss selbst, die Zeit der wahren Conjunction für den Meridian der Ephemeride herleiten, und wenn die Tafeln für diese Zeit, die gerade Aufsteigung des Mondes genau gleich der geraden Aufsteigung der Sonne geben, so ist dieses ein Beweis, dass die Tafeln richtig sind; findet diess aber nicht statt, so wird der Unterschied, den die Tafeln in diesem Falle, für die gerade Aufsteigung beider Gestirne geben, gleich der algebraischen Summe der Tafelfehler sein, den die Mond- und die Sonnen-Tafeln in gerader Aufsteigung haben; und alsdann wird die unmittelbar aus den Tafeln abgeleitete Zeit der wahren Conjunction beider Gestirne, mehr oder weniger von der aus den Beobachtungen gefundenen verschieden sein. Der Unterschied dieser Zeiten wird bei den heutigen Sonnen- und Mondetafeln, niemals 30 Zeitsecunden übersteigen, und dies ist auch ungefähr die Grenze der Ungenauigkeit, welchen man bei der Herleitung der Länge eines Ortes, in demjenigen Falle erwarten kann, wenn man keine gleichzeitigen entsprechenden Beobachtungen hat.

Wir bemerken ferner, dass man, aus den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse, ebenso wie aus den Beobachtungen von Sternbedeckungen durch den Mond, noch die Abplattung der Erde bestimmen kann, weil von dieser theilweiss die Parallaxe der Gestirne in gerader Aufsteigung und Abweichung abhängt, und welche folglich auch Einfluss auf die Berechnung der Finsternisse haben wird; aber dieser Einfluss ist so gering, dass man selbst bei den allergünstigsten Beobachtungen von Finsternissen, niemals erwarten darf, eine zuverlässige Bestimmung der Erdabplattung erhalten zu können.

147. Um den Verlauf einer Sonnenfinsterniss an irgend einem gegebenen Orte der Erde, gut beobachten zu können, muss man vorher wissen, wenn sie sich an diesem Orte und an welcher Stelle des Sonnenrandes sie sich zuerst ereignen wird. Wir werden weiter unten, die vorzügliche Methode Bessels, zur vorläufigen Vorausberechnung erwähnen, aber diese Methode ist nur dann bequem, wenn man das Berliner astronomische Jahrbuch zur Hand hat; in diesem nämlich werden alle Hülfswerthe angegeben, welche man bei Anwendung der Besselschen Methode braucht. Wir wollen hier eine andere Methode angeben, um die Sonnenfinsternisse mit Hülfe des Nautical Almanacs berechnen zu können. Dieser letztere ist für den Meridian von Greenwich eingerichtet, und man findet in ihm die mittlere Greenwicher Zeit selbst, des frühesten Anfanges und spätesten Endes der Sonnenfinsterniss auf der Erde überhaupt; ebenso wird angegeben, zwischen welchen Grenzen auf der Erdoberfläche die Verfinsterung möglicher Weise stattfinden wird; es sei nun T die Zeit des frühesten Anfanges der Finsterniss auf der Erde überhaupt in mittlerer Greenwicher Zeit ausgedrückt; so wird alsdann an jedem andern gegebenen Orte der Erde der Anfang der Finsterniss gewiss später stattfinden; man berechnet daher den beiden Greenwicher Zeiten T und $T + 1^h 0'$ entsprechend: die wahren geraden Aufsteigungen des Mondcentrums α , und α'' , und die Declinationen des Mond-Centrums δ , und δ'' ; die wahren geraden Aufsteigungen A , und A'' , und die Declinationen D , und D'' , des Sonnencentrums; die Horizontal-Parallaxe des Mondes $= \pi \text{ } \textcircled{D}$ für die Breite des gegebenen Ortes $= \varphi$, den Winkelhalbmesser des Mondes r für die Zeit $T + 0^h 30'$ und endlich den Winkelhalbmesser $= R$ und die Horizontal-Parallaxe der Sonne $= \pi \text{ } \textcircled{S}$ für die Zeit $T + 0^h 30'$.

Es sei nun L die Länge des gegebenen Ortes von Greenwich, in Zeit ausgedrückt; setzt man nun $\tau = T \pm L$,

wo $+L$ gebraucht wird, wenn die Länge östlich, dagegen $-L$ wenn die Länge westlich ist, so wird alsdann τ , die mittlere Zeit, am gegebenen Orte, beim Anfange der Finsterniss auf der Erde überhaupt sein; diese Zeit wird nicht sehr verschieden von der des wirklichen Anfanges der Finsterniss an dem gegebenen Orte der Erde sein, welche wir durch $\tau + t$ bezeichnen wollen. Um nun die Correction t zu finden, berechnet man für den gegebenen Ort die Sternzeiten s , und s'' , welche den an diesem Orte gezählten mittleren Zeiten τ und $\tau + 1^h$ entsprechen; da ferner die geographische Breite des gegebenen Ortes $= \varphi$ bekannt ist, so können wir auch seine entsprechende geocentrische $= \varphi'$ bestimmen, setzt man darauf $\pi = \pi \odot - \pi \ominus$, so kann man mit diesem π und den Sternzeiten s , und s'' , die relativen Parallaxen des Mondes p , und p'' , in gerader Aufsteigung, und ebenso für die Abweichung q , und q'' , bestimmen, auf diese Weise, erhält man den erwähnten Zeiten entsprechend:

Zwischen den geraden Aufsteigungen der Sonne und des Mondes Zwischen den Abweichungen der Sonne und des Mondes

$$a' = A, - (\alpha, + p,) \qquad b' = D, - (\delta' + q,)$$

$$a'' = A'', - (\alpha'', + p'') \qquad b'' = D'', - (\delta'' + q'')$$

Ehe man mit der weiteren Berechnung fortfährt, ist es gut, die Werthe $a'^2 \cos^2 D, + b'^2$ und $a''^2 \cos^2 D'', + b''^2$ mit dem Werthe $(r + R)^2$ zu vergleichen; wenn man bemerkt, dass der erste dieser beiden Werthe sehr viel grösser als $(r + R)^2$ ist, so ist dieses ein Beweis, dass der Anfang der Verfinsternung später, als zur Greenwicher Zeit $T + 1^h$ oder später als zur Zeit $T \pm L + 1^h$ am gegebenen Orte, stattfinden wird; in diesem Falle muss man nochmals eine neue Berechnung für die Greenwicher Zeit $T + 2^h 0'$ anstellen, und darauf alsdann $\tau = T \pm L + 1^h 0'$ setzen, und für dieses τ den entsprechenden Werth t suchen, so dass als-

dann $\tau + t$ die mittlere Zeit am gegebenen Orte ausdrückt, wenn der wirkliche Anfang der Finsterniss stattfindet.

Darauf sucht man noch ausserdem für die mittlere Zeit $\tau + 0^h 30'$ die relative Parallaxe π , und den scheinbaren Winkelhalbmesser des Mondes r' , welcher so wenig vom scheinbaren Winkelhalbmesser des Mondes beim Anfange der Verfinsterung verschieden sein wird, dass man den Unterschied als verschwindend ansehen kann.

Es sei nun $a'' - a' = \mu'$ und $b'' - b' = \beta'$; so werden alsdann μ' und β' die Unterschiede der scheinbaren Bewegungen der Sonne und des Mondes in einer mittleren Stunde in gerader Aufsteigung und Abweichung ausdrücken; während des kleinen Zeitraumes t kann man diese Bewegungen als gleichförmig betrachten, und annehmen, dass zur Zeit $\tau + t$ der Unterschied zwischen den scheinbaren geraden Aufsteigungen der Sonne und des Mondes $= a' + \mu' t$, der Unterschied der scheinbaren Abweichungen dieser Himmelskörper aber $= b' + \beta' t$ sein wird. Auf diese Weise erhalten wir für die erste äussere Berührung der Ränder, oder für den Anfang der Verfinsterung an dem gegebenen Orte:

$$(a' + \mu' t)^2 \cdot \cos^2 d' + (b' + \beta' t)^2 = k'^2 \dots \dots \dots (k)$$

wo $k' = r' + R =$ Summe der scheinbaren Radien der Gestirne, und anstatt d' kann man die halbe Summe der scheinbaren Declinationen der Gestirne zur mittleren Zeit $\tau + 0^h 30'$ setzen. Zur bequemerem Berechnung von t , kann man setzen:

$$a' \cos d' = m \sin M \quad \mu' \cos d' = n \sin N$$

$$b' = m \cos M \quad \beta' = n \cos N$$

$$\sin \psi = \frac{m}{k} \sin (M - N) \dots \dots \dots (l)$$

Hier werden m und n als positive Grössen angesehen, und man nimmt alsdann M und N in denjenigen Quadraten, so dass dadurch den vorhergehenden Gleichungen Genüge gethan wird. Alsdann wird aber*):

$$t = -\frac{m}{n} \cos(M-N) + \frac{k'}{n} \cos \psi = + \frac{m \sin(M-N-\psi)}{n \sin \psi}.$$

Bezeichnet man nun durch Q , denjenigen Winkel, welcher am Centrum der Sonne, von ihrem Declinationskreise, mit der Linie gebildet wird, welche die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes verbindet, und zählt man Q von 0° bis 360° von Norden aus nach rechts herum, so findet man, dass:

$$\operatorname{tg} Q = \frac{(a' + \mu' t) \cos d'}{b + \beta' t} = \operatorname{tg}(N + \psi).$$

*) Führt man in die Gleichung (k) die Werthe m , n , M und N ein, so wird:

$$m^2 + 2 m n t \cos(M-N) + n^2 t^2 = k'^2$$

oder:

$$t = -\frac{m}{n} \cos(M-N) \mp \sqrt{\frac{m^2}{n^2} \cos^2(M-N) + \frac{k'^2}{n^2} - \frac{m^2}{n^2}}$$

von diesen beiden Werthen von t müssen wir nur denjenigen nehmen, welcher für $k'^2 = m^2 = a'^2 \cos^2 d'^2 + b'^2$ sich in Null verwandelt, denn in diesem Falle wird die Verfinsternung wirklich zur Zeit τ anfangen, und $t = 0$ werden. Hieraus sieht man, dass man bei der Quadratwurzel, das untere Zeichen $+$ nehmen muss, und setzt man dann unter dem Wurzelzeichen für m , seinen entsprechenden Werth

$\frac{k' \sin \psi}{\sin(M-N)}$, so erhalten wir die obige im Texte angegebene Gleichung.

In unserer früheren Gleichung bestimmen wir ψ durch den Sinus, und folglich müssen wir zeigen, welcher von beiden Werthen die dieser Bedingung (l) genügen, und wovon der eine den anderen zu 180° ergänzen wird, wir in jedem Falle zu nehmen haben. Hierzu braucht man nur Rücksicht auf den eben gefundenen Ausdruck für $tg Q$ zu nehmen. Der Zähler dieses Ausdruckes wird beim Anfange einer Finsterniss immer positiv, aber beim Ende derselben, immer negativ werden; es kommt daher nur noch darauf an zu wissen, welches Zeichen der Nenner in diesem Ausdrucke haben wird, aber da t noch unbekannt ist, so kann man auf seinen Werth, durch Vergleichung von $m = \sqrt{a'^2 \cos^2 d' + b'^2}$ mit dem

Werthe von k' schliessen; indem man zusieht um wie viel m von k' verschieden ist, und zugleich bemerkt um wie viel ein Vergrößerung der Zeit den Unterschied der scheinbaren Graden Aufsteigungen und Abweichungen der Gestirne ändert; hieraus wird es alsdann leicht sein zu beurtheilen, ob der Nenner im Ausdruck für $tg(N + \psi)$ positiv oder negativ ausfallen wird. Wenn dieser Nenner positiv sein sollte, so wird man für den Anfang der Finsterniss den Winkel $N + \psi$, im ersten Quadranten nehmen müssen; wird aber der Nenner negativ so muss man $N + \psi$ im zweiten Quadranten nehmen; es versteht sich übrigens von selbst, dass wenn die Summe von N und ψ , 360° übersteigt, man von dieser Summe 360° abziehen muss, und aus dem gefundenen Reste, wird man alsdann leicht sehen, in welchen Quadranten $N + \psi$ fällt.

Der Anfang der Finsterniss wird an demjenigen Punkte des Sonnenrandes stattfinden, dessen Abstand von Nordpunkte des Sonnenrandes $= Q$ ist. Beobachtet man aber mit Hülfe eines astronomischen Fernrohres, so muss man hierbei nicht vergessen, dass in diesen Fernröhren alle Gegenstände umgekehrt erscheinen.

Das Ende der Finsterniss berechnet man auf ganz ähnliche Weise voraus; denn an dem gegebenen Orte wird das Ende der Finsterniss gewiss früher als das späteste Ende der Finsterniss auf der Erde überhaupt stattfinden; nimmt man daher aus dem Nautical Almanac die Zeit T dieses letzten Endes, so muss man sich darauf die Lage der Gestirne für die Greenwicher Zeiten T und $T - 1^h$ berechnen, indem man $T \pm L = \tau$ setzt, und ganz wie zuvor verfährt.

Bei allen diesen Rechnungen genügen 5stellige Logarithmen-Tafeln vollkommen.

Bei der Berechnung der inneren Berührungen kann man für τ , das arithmetische Mittel der gefundenen Zeiten des Anfanges und Endes der Verfinsternung nehmen, und mittelst einfacher Interpolation zwischen den scheinbaren Oertern der Gestirne, welche für die erwähnten Zeiten bestimmt wurden, sich ihre scheinbare Lage berechnen, welche der Zeit τ entspricht. In diesem Falle muss man nicht vergessen, dass die scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Gestirne, oder k' , gleich dem Unterschiede der scheinbare Halbmesser der Gestirne sein wird.

148. Als erläuterndes Beispiel, wollen wir hier die Länge von Wien aus den Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss am 7^{ten} Juli 1842 berechnen. An verschiedenen Orten Europas, wurden viele Beobachtungen dieser Finsterniss gemacht, aber der Kürze wegen, wollen wir uns begnügen, nur die Beobachtungen in Wien, wo die Finsterniss total, und die St. Petersburger Beobachtungen, wo die Finsterniss partiell war, anzuführen. In der nachfolgenden Tafel, bezeichnen die in der zweiten Spalte, enthaltenen Zahlen 1, 2, 3 und 4 die Phasen der Verfinsternung; 1 und 4 entsprechen dem Anfange und Ende der Finsterniss überhaupt, oder ihrer ersten und letzten Phase, die Zahlen 2 und 3 beziehen sich auf den Anfang und das Ende der totalen Finsterniss;

oder auf die erste und zweite innere Berührung der Ränder der Gestirne.

Beobachtungsort	Phase	Mittlere Zeit der Phase am Beobachtungsorte	Oestliche Länge des Beobachtungsortes von Berlin	Nördliche Breite des Beobachtungsortes = φ	Sternzeit im mittleren Mittage am Beobachtungsorte am 7. Juli 1842
In Wien	1	17 ⁿ 51' 52'' .0	0 ^h 11' 56'' .6	48° 12' 35'' .0	6 ^h 59' 59'' .3
	2	18 49 25 .0			
	3	18 51 22 .0			
	4	19 53 56 .0			
In St. Petersburg	1	19 ^h 7' 15'' .2	1 ^h 7' 40'' .5	59° 56' 31'' .0	6 ^h 59' 50'' .2
	4	21 12 47 .2			

Da die beiden Beobachtungsorte östlich von Berlin liegen, so müssen wir von den beobachteten mittleren Zeiten, die Länge abziehen, um die ihnen entsprechenden mittleren Berliner Zeiten zu erhalten. Im Berliner astronomischen Jahrbuche findet man alsdann die Oerter des Mondes von 12 zu 12 Stunden in mittlerer Zeit durchs ganze Jahr berechnet, und folglich müssen wir hier bei der Interpolation auf die 4^{ten} Differenzen Rücksicht nehmen; die Oerter der Sonne sind von 24 zu 24 Stunden gegeben, aber diese Oerter verändern sich weit langsamer, und man reicht vollständig mit den 2^{ten} Differenzen aus. In den nun folgenden Tafeln bezeichnen $\alpha \text{ ☾}$, $\delta \text{ ☾}$, $r \text{ ☾}$ und $\pi \text{ ☾}$ für die entsprechende Phase, die wahre gerade Aufsteigung, Abweichung, den wahren Halbmesser und die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes; $\alpha \text{ ☉}$, $\delta \text{ ☉}$, $r \text{ ☉}$ und $\pi \text{ ☉}$ bezeichnen ganz dasselbe für die Sonne.

Phase der Verfinster.	$\alpha \text{ ☾}$	$\delta \text{ ☾}$	$\alpha \text{ ☉}$	$\delta \text{ ☉}$	
In Wien	1	105° 34' 42'' .10	+23° 17' 25'' .31	106° 52' 20'' .87	+22° 33' 13'' .45
	2	106 11 59 .31	10 26 .70	54 48 .47	32 57 .58
	3	106 13 11 .98	10 12 .40	54 53 .47	32 57 .04
	4	106 53 43 .74	2 26 .72	57 33 .93	32 39 .68
In St. Petersburg	1	105° 47' 26'' .92	+23° 15' 3'' .38	106° 53' 11'' .29	+22° 33' 8'' .05
	4	107 8 40 .53	22 59 31 .82	58 33 .20	32 33 .33

Phase der Verfinster.	Sternzeit der Beobachtung	$r \text{ } \mathcal{C}$	$\pi \text{ } \mathcal{C}$	wahre Bewegung in AR. in einer Stunde mittlerer Zeit		
				für Mond	für Sonne	
In Wien	1	0h 54' 47".38	979".90	59' 55".92	$m = 38' 50".8$	$n = 2' 33".9$
	2	1 52 29 .83	980 .23	57 .17	49 .0	33 .9
	3	1 51 27 .13	980 .25	57 .21	49 .0	33 .9
	4	2 57 11 .40	980 .60	58 .51	46 .8	33 .8
In St. Petersburg	1	2h 10' 13".77	980".00	59' 56".36	38' 49".5	2' 33".9
	4	4 16 6 .42	980 .72	59 01	46 .8	33 .8

Für die ganze Dauer der Verfinsterung ist der wahre Winkelhalbmesser der Sonne = $945''.10$ in Bogen, die Horizontal-Parallaxe der Sonne = $8''.44$.

Die angegebenen stündlichen Bewegungen m und n in gerader Aufsteigung beziehen sich auf die Mitte der Zeit zwischen der entsprechenden Phase und der wahren Conjunction des Mondes und der Sonne, welche in gerader Aufsteigung 1842, July 7, 19^h 54'.4 mittlere Berliner Zeit sich ereignete.

Wir wollen hier ein ausführliches Rechnungs-Beispiel für die erste Phase der Verfinsterung in Wien geben; in Beziehung auf die anderen Beobachtungen aber nur die Resultate der Berechnung hersetzen.

Die Beobachtungen selbst wurden nach mittlerer Zeit angestellt, und folglich müssen wir für alle, erst vorher die entsprechenden Sternzeiten finden; bei der Beobachtung der ersten Phase in Wien war die entsprechende Sternzeit = $0^h 54' 47''.38$, verwandelt man sie in Grade, und bezeichnet sie durch s , so wird $s = 13^{\circ} 41' 51''.0$.

Bezeichnet man ferner durch φ die geographische und durch φ' die geocentrische Ortsbreite, und nimmt die wahrscheinliche Abplattung der Erde = $\frac{1}{300}$ an, so erhält man:

$$\lg \left(\frac{299}{300} \right)^2 = 9.9970998$$

$$\varphi = 48^{\circ} 12' 35''.0 \quad \log \operatorname{tg} \varphi = 0.0487607$$

$$\varphi' = 48^{\circ} 1' 10''.4 \quad \log \operatorname{tg} \varphi' = 0.0458605$$

Die Horizontal-Parallaxe des Mondes = $\pi \zeta = \pi \zeta -$

$$\frac{\pi \zeta}{300} \sin^2 \varphi.$$

Für die erste Phase in Wien hat man:

$$59' 55''.92 - 6''.67 = 59' 49''.25 = \pi \zeta$$

$$\text{Horizontal-Parallaxe der Sonne} = 8.44 = \pi \odot$$

$$\text{Relative Horizontal-Parallaxe} = 59' 40''.81 = \pi$$

$$\begin{array}{r|l} \alpha \zeta = 105^\circ 34' 42''.10 & \delta \zeta = 23^\circ 17' 25''.31 \\ \alpha \odot = 106^\circ 52' 20''.87 & \delta \odot = 22^\circ 33' 13''.46 \\ \hline \alpha \zeta - \alpha \odot = -1^\circ 17' 38''.77 & \delta \zeta - \delta \odot = +44' 11''.85 \end{array} \left| \begin{array}{l} \pi \zeta \\ \pi \odot \end{array} \right. - 1 = 424$$

folglich:

$$\begin{array}{r|l} \alpha \zeta = 105^\circ 34' 42''.10 & \delta \zeta = 23^\circ 17' 25''.31 \\ \alpha \odot = 106^\circ 52' 20''.87 & \delta \odot = 22^\circ 33' 13''.46 \\ \hline \alpha \zeta - \alpha \odot = -1^\circ 17' 38''.77 & \delta \zeta - \delta \odot = +44' 11''.85 \\ \hline \frac{\alpha \zeta - \alpha \odot}{424} = -11.00 & \frac{\delta \zeta - \delta \odot}{424} = +6.26 \\ \hline \alpha = 105^\circ 34' 31''.10 & \delta = 23^\circ 17' 31''.57 \\ s = 13^\circ 41' 51''.00 & 2(\alpha - s) = 183^\circ 45' 20''.; 3(\alpha - s) = 275^\circ 38' \\ \hline \alpha - s = 91^\circ 52' 40''.10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \log \sin \pi = 8.239534 & \log P^2 = 6.20360 \\ \log \cos \varphi' = 9.825346 & \log \sin 2(\alpha - s) = 8.81624_n \\ \log \sec \delta = 0.036920 & \text{comp. } \log \sin 2'' = 5.01340 \\ \hline \log P = 8.101800 & - 1''.08 \dots 0.03324_n \\ \log \sin(\alpha - s) = 9.999767 & \log P^3 = 4.3054 \\ \text{comp. } \log \sin 1'' = 5.314425 & \log \sin 3(\alpha - s) = 9.9979_n \\ + 2606''.11 \dots 3.415992 & \text{comp. } \log \sin 3'' = 4.8373 \\ & - 0''.14 \dots 9.1406_n \end{array}$$

Folglich wird die relative Parallaxe in gerader Aufstei-
gung werden: $= \alpha' - \alpha = p = +2606''.11 - 1''.08 - 0''.14 =$
 $= +2604''.89 = 43' 24''.89.$

$\log \operatorname{tg} \varphi' = 0.0458605$	$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^{\circ} 21' 42''.5$
$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = 9.9999654$	
$\log \sec \left(\frac{\alpha' + \alpha}{2} - s \right) = 1.4081660_n$	$\frac{\alpha' + \alpha}{2} - s = 92^{\circ} 14' 22''.5$
$\log \operatorname{tg} \eta = 1.4539919_n$	$\eta = 92^{\circ} 0' 48''.5$
	$\delta = 23^{\circ} 17' 31''.6$
	$\eta - \delta = 68^{\circ} 43' 16''.9$
	$2(\eta - \delta) = 137^{\circ} 26'$
	$3(\eta - \delta) = 206^{\circ} 10'$

$\log \sin \pi = 8.239534$	$\log Q^2 = 6.22202$
$\log \sin \varphi' = 8.871207$	$\log \sin 2(\delta - \eta) = 9.83016_n$
$\operatorname{comp.} \log \sin \eta = 0.000268$	$\operatorname{comp.} \log \sin 2'' = 5.01340$
$\log Q = 8.111009$	$- 11.63 \dots 1.06558_n$
$\log \sin(\delta - \eta) = 9.969336_n$	$\log Q^3 = 4.3330$
$\operatorname{comp.} \log \sin 1'' = 5.314425$	$\log \sin 3(\delta - \eta) = 9.6440$
$- 2481''.82 \dots 3.394770_n$	$\operatorname{comp.} \log \sin 3'' = 4.8373$
	$+ 0''.06 \dots 8.8143$

Hieraus folgt die relative Parallaxe in Declination:

$$\delta' - \delta = q = -2481''.82 - 11''.63 + 0.06 = -41' 33''.39.$$

Für die 1^{ste} Phase in Wien wird $r \zeta = 979''.90$

$\log(\delta - \delta') = 3.39679 \dots$	$\log(\delta - \delta')^2 \sin^2 1'' = 6.1647$
$\log \sin 1'' = 4.68557$	$\log \frac{1}{2} = 9.6990$
$\log \operatorname{cotg}(\eta - \delta) = 9.59044$	$\log r \zeta = 2.9912$
$\log r \zeta = 2.99118$	$0''.07 \dots 8.8549$
$+ 4''.61 \dots 0.66398$	

Folglich wird der relative scheinbare Radius des Mondes

$$r = 979''.90 + 4''.61 - 0''.07 = 984''.44$$

$$\text{Sonnenhalbmesser} \dots = 945.10$$

$$\text{Summe der scheinbaren Halbmesser} = 1929''.54 = k'$$

$$\begin{aligned} \delta + q &= 23^{\circ} 17' 25''.31 - 0^{\circ} 41' 33''.39 = + 22^{\circ} 35' 51''.92 \\ \text{Declination der Sonne} \dots &= D \dots = + 22 \ 33 \ 13 \ .46 \\ \text{Unterschied} \dots \delta' - D &= b' \dots = + 0^{\circ} 2' 38''.46 \\ \text{Halbesumme} \dots \frac{\delta' + D}{2} &= d' \dots = + 22 \ 34 \ 32 \ .68 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} k' + b' = 2088''.00 \dots \log \dots & = 3.319730 \\ k' - b' = 1771 \ .08 \dots \log \dots & = 3 \ 248241 \\ \text{Summe} \dots & = 6.567971 \\ \text{halbe Summe} & = 3.283985 \\ \log \sec d' \dots & = 0.034623 \\ \log a' \dots & = 3.318608 \end{array} \quad \begin{array}{l} \odot - \zeta = a' = + 2082''.61 \\ \zeta - \zeta = p = + 2604 \ .89 \\ \hline a' + p = + 4687''.50 = a \end{array}$$

Für die Zeit der Mitte zwischen der 1^{sten} Phase in Wien und der wahren Conjunction, wird die wahre Bewegung in gerader Aufsteigung in einer mittleren Stunde werden:

$$\begin{array}{l|l} \text{für Mond} \dots m = 38' 50''.8 & \log h = \log \frac{3600''}{m-n} = 0.218447 \\ \text{für Sonne} \dots n = 2 \ 33 \ .9 & \\ \hline m - n = 36' 16''.9 & \log a = 3.670941 \\ \text{oder } m - n = 2176''.9 & \text{in Zeit} \dots 7751''.54 \dots 3.889388 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Wiener Zeit der 1^{sten} Phase} \dots &= 17^h 51' 52''.0 \\ \text{Reduction auf die wahre Conjunction} &= 7751''.54 = 2 \ 9 \ 11 \ .5 \\ \text{Wahre Conjunction in mittlerer Wiener Zeit} \dots &= 20^h 1' 3''.5 \end{aligned}$$

Berechnet man jetzt den Einfluss der Fehler auf die Zeit der wahren Conjunction, so hat man:

$$\frac{b'}{a' \cos d'} = \frac{+ 158''.5}{+ 1923''} = \text{tg } \psi; \psi = 4^{\circ} 39';$$

$$h \sec d' \sec \psi = + 1''.80; h \sec d' \text{tg } \psi = + 0''.14$$

$$h \left(\frac{p}{\pi} - \sec d' \text{tg } \psi \cdot \frac{q}{\pi} \right) = + 1.29$$

folglich wird die mittlere Wiener Zeit der wahren Conjunction:

$$= 20^h 1' 3''.5 + 1''.80 \delta k - 0''.14 \delta B + 1''.29 \delta \pi$$

Führt man auf ähnliche Weise die Berechnung für die anderen Phasen der Verfinsternung durch, so erhält man die, in der Kürze, in folgender Tafel zusammengestellten Resultate:

Phase	p	q	k'	b'	$a' = \odot - \zeta$	$m - n$	
	"	"	"	"	"	"	
In Wien	1	+2601.89	-2493.39	1929.54	+158.46	+2082.61	2176.9
	2	2556.42	2275.04	42.25	-25.92	+36.12	2175.1
	3	2552.18	2267.81	42.30	-32.45	-29.44	2175.1
	4	2325.78	2044.43	1935.47	-257.39	-2076.48	2173.0
	"	"	"	"	"	"	
In St. Petersburg	1	+1882.50	-2660.68	1933.10	-145.35	+2087.04	2175.6
	4	1347.95	2363.96	1937.24	-745.24	-1934.71	2173.0

Hieraus kann man nach der angeführten Methode, aus jeder einzelnen beobachteten Phase der Finsterniss, eine Gleichung für den Ausdruck der Zeit der wahren Conjunction bilden.

Zur Zeit der äusseren Berührungen der Ränder der Gestirne wird $k = r + R$ werden; aber zur Zeit ihrer inneren Berührung bei der totalen Verfinsternung wird $k = r - R$; um nun unterscheiden zu können, wollen wir im ersten Falle den Fehler im Werthe von k durch δk , im zweiten Falle aber durch Δk bezeichnen, alsdann wird $\delta k = \delta r + \delta R$ und $\Delta k = \delta r - \delta R$; wo δr der Fehler im wahren Halbmesser des Mondes und δR der Fehler im wahren Halbmesser der Sonne bedeutet.

Bei dem heutigen Zustande der Monds- und Sonnen-Tafeln können wir die Parallaxe dieser beiden Gestirne als genügend gut bestimmt ansehen; und daher wollen wir der Kürze halber bei dieser Berechnung $\delta \pi = 0$ annehmen; obgleich nun die Halbmesser dieser Gestirne ebensogut be-

stimmt sind, so haben doch, nach der Meinung einiger Astronomen, die Irradiation, Inflexion, oder überhaupt andere wenig ermittelte Ursachen einen solchen Einfluss auf den Werth der scheinbaren Halbmesser, wie sie aus der Beobachtungen folgen, dass man ihre Fehler in jedem einzelnen Falle, wenn es thunlich ist, besonders bestimmen muss.

Setzt man statt ∂k und $\triangle k$ ihre gleichbedeutenden Werthe $\partial r + \partial R$ und $\partial r - \partial R$, so erhalten wir für die Zeit der wahren Conjunction folgende Ausdrücke; nach mittlerer Wiener Zeit:

					Phase:
um	20 ^h 1 ^m 3 ^s .5	+ 1.80 ∂r	+ 1.80 ∂R	- 0.14 ∂B	(1)
	20 0 56 .0	+ 2.27 ∂r	- 2.27 ∂R	+ 1.39 ∂B	(2)
	20 0 57 .3	- 2.80 ∂r	+ 2.80 ∂R	- 2.14 ∂B	(3)
	20 0 49 .0	- 1.81 ∂r	- 1.81 ∂R	- 0.24 ∂B	(4)

nach St. Petersburger mittlerer Zeit	um	20 ^h 56 ^m 43 ^s .6	+ 1.81 ∂r	+ 1.81 ∂R	+ 0.13 ∂B	(1)
	20	56 ^m 35 ^s .1	- 1.98 ∂r	- 1.98 ∂R	- 0.72 ∂B	(4)

Zieht man nun die 4^{te} Gleichung für die Wiener Zeit der wahren Conjunction von der 3^{ten}, ab; ebenso die 3^{te} von der 2^{ten}, und endlich die 2^{te} von der 1^{sten}, so erhält man dadurch 3 Gleichungen; zieht man die Zeit der wahren Zusammenkunft in St. Petersburg in (4) von (1) ab, so erhält man noch eine 4^{te} Gleichung; und dadurch hat man endlich zur Auffindung von ∂r , ∂R und ∂B die folgenden 4 verschiedenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 &+ 8''.3 - 0.99 \partial r + 4.61 \partial R - 1.90 \partial B = 0 \\
 &- 1 .3 + 5.07 \partial r - 5.07 \partial R + 3.53 \partial B = 0 \\
 &+ 7 .5 - 0.47 \partial r + 4.07 \partial R - 1.53 \partial B = 0 \\
 &+ 8 .5 + 3.79 \partial r + 3.79 \partial R + 0.85 \partial B = 0
 \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass alle Beobachtungen gleich gut waren, so kann man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen, und findet dann die folgenden Endgleichungen *):

$$+ 13.80 + 41.20 \partial r - 17.89 \partial R + 23.71 \partial B = 0$$

$$+ 107.51 - 17.89 \partial r + 77.81 \partial R - 29.67 \partial B = 0$$

$$- 24.61 + 23.71 \partial r - 29.67 \partial R + 19.12 \partial B = 0$$

Aus der Auflösung dieser Gleichungen folgt:

$$\partial r = -5''.58; \partial R = +1''.14; \partial B = +9''.98.$$

Setzt man dann diese Werthe in die Ausdrücke der Zeit der wahren Conjunction ein, so findet man dass diese Conjunction sich ereignete:

nach mittlerer Wiener Zeit.	nach mittlerer St. Petersburger Zeit
um 20 ^h 0' 54''.11 . . . (1)	um 20 ^h 56' 36''.89 . . . (4)
54 .36 . . . (2)	36 .61 . . . (4)
54 .77 . . . (3)	Mittel 20 ^h 56' 36''.75
54 .61 . . . (4)	
<u>Mittel 20^h 0' 54''.46</u>	

Der Unterschied: 20^h 56' 36''.75 — 20^h 0' 54''.46 = 0^h 55' 42''.29 drückt die westliche Länge Wiens von Petersburg aus, weil nämlich die mittlere Wiener Zeit kleiner als die ihr entsprechende St. Petersburger mittlere Zeit ist. Indem H. Olufsen, sehr sorgfältig alle in Europa gemachten

*) Die angenommenen Längen Wiens und St. Petersburgs sind so genau, dass es hier nicht nöthig ist die erste Berechnung nochmals zu wiederholen, wie wir in §. 146. Seite 41. erwähnt haben.

Beobachtungen dieser Finsterniss mit in Betracht zog, fand er für diese Länge = $0^h 55' 41''.9$.

Will man noch gerne den Einfluss eines Fehlers in der angenommenen Parallaxe π auf das Endresultat ermessen; so muss man diesen Einfluss zuerst auf die Zeiten der wahren Conjunction, die aus jeder Phase für sich abgeleitet wurden, bestimmen; alsdann ist es leicht den Einfluss auf das mittlere Resultat zu erhalten, und so verfahrend, erhält man für die Zeit der wahren Conjunction:

<i>in mittlerer Wiener Zeit</i>	$20^h 0' 54''.46 + 1.33 \delta \pi$
<i>in mittlerer St. Petersburger Zeit</i>	$20 56 36.75 + 0.94 \delta \pi$
<i>Westliche Länge Wiens</i>	$0^h 55' 42''.29 - 0.39 \delta \pi$

Man sieht hieraus, dass in diesem Falle der Einfluss eines Fehlers in der Parallaxe nicht gross war.

Es bleibt noch übrig den Fehler der Tafeln in gerader Aufsteigung zu bestimmen; aus der vorhergehenden Rechnung folgt, dass die wahre Conjunction des Mondes und der Sonne um $20^h 56' 36''.75$ mittlere St. Petersburger Zeit stattfand; nun liegt St. Petersburg $1^h 7' 40''.5$ östlich vom Meridiane Berlins; und folglich wird die wahre Conjunction um $19^h 48' 56''.25$ mittlere Berliner Zeit sich ereignen; für diese Zeit folgt aus den Tafeln:

wahre gerade Aufsteigung

<i>des Mondcentrums</i>	= $106^\circ 58' 13''.31$
<i>des Sonnencentrums</i>	= $106 57 51.74$
<i>Unterschied</i>	$21''.57$

Nun sollten aber zur Zeit der wahren Aequatorial-Conjunction die geraden Aufsteigungen beider Gestirne einander gleich sein, und folglich sehen wir, dass die Tafeln zu dieser Zeit um $21''.57$ in gerader Aufsteigung fehlerhaft waren, weil aber die neuesten Sonnentafeln weit genauer als die Monds-

tafeln sind, so kann man annehmen, dass am 7^{ten} Juli 1842 um $19^h 48' 56''.2$ mittlere Berliner Zeit, die Mondstafeln, die gerade Aufsteigung des Mondes um nahe $21''.57$ in Bogen zu gross geben.

149. Wenn nur eine entsprechende Phase der Verfinsterung in St. Petersburg und Wien beobachtet worden wäre, so hätten wir alsdann mit der Vernachlässigung aller Fehler δr , δR , δB und $\delta \pi$, für die westliche Länge Wiens von St. Petersburg aus dem Anfange der Finsterniss, die Länge $= 0^h 55' 40''.1$; und aus dem Ende $= 0^h 55' 46''.1$ erhalten; während die wahrscheinliche Länge $= 0^h 55' 42''.29$ zwischen beiden Bestimmungen liegt. Hieraus sieht man, dass wenn man die Länge aus entsprechenden Phasen der Verfinsterung herleitet, diese alsdann ziemlich gut mit der wahren übereinstimmen wird, leitet man dagegen aber die Länge aus Beobachtungen entgegengesetzter Phasen ab, so wird das erhaltene Resultat sehr ungenau werden; wenn zum Beispiel in St. Petersburg nur der Anfang, aber in Wien nur das Ende der Finsterniss beobachtet worden wäre, so würden wir für die Länge Wiens von St. Petersburg $0^h 55' 54''.6$ finden, welche von der wahrscheinlichen um $12''.3$ in Zeit abweicht.

Aus dem gewählten Beispiele werden wir zugleich sehen können, welche Genauigkeit man bei der Berechnung der Länge aus Sonnenfinsternissen, unter den günstigsten Umständen erreichen kann. Aus sehr vielen und guten Beobachtungen wurde gefunden, dass die westliche Länge Wiens von St. Petersburg $= 0^h 55' 43''.9$ ist; wir fanden dafür $0^h 55' 42''.29$; und folglich ist der Fehler unserer Bestimmung sehr nahe $= 1''.6$ in Zeit. Nur bei den nahezu centralen, oder überhaupt sehr grossen Sonnenfinsternissen, wird man im Stande sein die Länge mit dieser bedeutenden Annäherung daraus abzuleiten; in allen anderen Fällen aber muss man

grössere Fehler erwarten. Die aus den Beobachtungen der kleinen partiellen Sonnenfinsternisse berechneten Längen können ein Fehler von $10''$ in Zeit und mehr enthalten; dieses rührt daher, dass es alsdann sehr schwer ist, die Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes genau zu beobachten; und vorzüglich wird dieses der Fall, bei der Beobachtung der ersten äusseren Berührung oder des Anfanges der Finsterniss sein; wesshalb die Erfahrung und die Schkraft des Beobachters, so wie die optische Stärke und die Eigenthümlichkeiten des Fernrohres, in diesem Falle auf den Werth der Beobachtungen grossen Einfluss haben werden.

150. Die Vorübergänge des Merkurs und der Venus vor der Sonnenscheibe, werden vollkommen ebenso berechnet, wie wir es in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt haben, nur muss man dabei, alles was dort von dem Monde gesagt wird, alsdann auf den Planeten beziehen. Uebrigens werden diese Erscheinungen, ausserdem dass sie sich sehr selten ereignen, wegen der langsamen eigenen Bewegung der Planeten, aber vorzüglich des Merkurs, nicht mit Vortheil zur genauen Längenbestimmungen gebraucht werden können; diese Durchgänge werden daher, zwar fleissig, aber zu anderen Zwecken beobachtet.

Zuweilen ereignet es sich, dass der Mond einen Planeten bedeckt, und in diesem Falle kann man die Verfinsternung eben so berechnen, wie es bei den Sonnenfinsternissen gezeigt worden ist, nur dass man denn alles was sich in den Formeln auf die Sonne bezieht, hierbei auf den Planeten beziehen muss.

Sternbedeckungen.

11. Die Beobachtung dieser Erscheinungen, besteht darin, en Augenblick zu bestimmen, wenn ein Stern hinter

dem Mondsrande verschwindet, und ebenso zu beobachten wenn er wieder zum Vorschein kommt; die erste Erscheinung heisst der Eintritt, und entspricht dem Anfange, die zweite aber heisst der Austritt, und entspricht dem Ende der Verfinsterung. Wenn der Mond in seinem ersten oder letzten Viertel sichelförmig erscheint, so wird in dem ersten Falle der Eintritt, in dem anderen der Austritt des Sternes am dunklen Rande des Mondes sehr deutlich und scharf beobachtet werden können, daher in diesem Falle die optische Stärke des Fernrohres wenig Einfluss auf die Genauigkeit der Beobachtung haben wird. Ist aber der Mond nahezu voll, so muss man zur genauen Beobachtung des Ein- und Austrittes des Sternes in oder aus dem hellen Mondsrand, sehr kräftige Fernröhre anwenden. Im allgemeinen ist die aus einer unter günstigen Umständen wahrgenommenen Sternbedeckung abgeleitete Länge eines Ortes, genauer als die aus einer Sonnenfinsterniss gefolgerte.

Aus den Beobachtungen einer Sternbedeckung, kann man für jeden Beobachtungsort, die Zeit der wahren aequatorial Conjunction des Mond und Sternes berechnen, darauf Bedingungsgleichungen bilden, um die Tafelfehler zu finden, und endlich dadurch der Länge des Beobachtungsortes selbst bestimmen; hierbei verfährt man ganz so wie bei der Berechnung der Sonnenfinsternisse; nur wird diese Berechnung, dadurch einfacher werden, dass man in diesem Falle, den Halbmesser, die Parallaxe und die stündliche Bewegung des Sternes $= 0$ setzen muss; folglich muss man dann in unseren Formeln $R = 0$, $\pi \odot = 0$ und $n = 0$ setzen.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dass wenn der Ort des Sternes für eine gewisse Zeit-Epoche, nach mittlerer gerader Aufsteigung und mittlerer Abweichung gegeben ist, man diesen mittleren Ort, mit Rücksicht auf Praecession, Nutation, Aberration und eigener Bewegung erst auf den

scheinbaren Ort reduciren muss, welcher im Moment der Bedeckung stattfindet, und zu ihrer Berechnung dient.

Dieses wollen wir durch ein Rechnungsbeispiel erläutern, indem wir jetzt die Länge des Dorfes Nicolaewka bestimmen werden, welches sich nicht weit vom Azowschen Meere in einer Entfernung von ungefähr 30 Werst von Azow befindet. Am 16^{ten} November 1836 beobachtete man in diesem Dorfe:

mittlere Zeit in Nicolaewka

den *Eintritt* des Sternes τ^2 *Aquarii* in den C^rand um $6^h 54' 53''.9$
 „ *Austritt* „ „ „ „ aus dem „ „ $7 56 28 .8$

Die genäherte Länge des Beobachtungsortes war = $2^h 38' 35''$, östlich von Greenwich; nördliche Breite = $46^{\circ} 58' 21''$.

Für den Anfang des Jahres 1830 findet man aus dem Pondschen Cataloge die mittlere gerade Aufsteigung von τ^2 *Aquarii* = $22^h 40' 54''.14$; und seine mittlere Declination = $-14^{\circ} 27' 19''.8$; alsdann findet man mittelst des Nautical Almanacs, dass für den 16^{ten} November 1836 die scheinbare gerade Aufsteigung des Sternes = $A = 22^h 40' 56''.62$; seine scheinbare Abweichung = $D = -14^{\circ} 27' 10''.4$ war, wo (—) gebraucht wird, weil die Declination des Sternes südlich, die Breite des Ortes aber nördlich ist.

Die Sternzeit im mittleren Mittage zu Nicolaewka am 16^{ten} November 1836 war ferner = $15^h 41' 54''.9$, und folglich die Nicolaewkaer Sternzeit der Beobachtung

des Eintrittes des Sternes = $22^h 37' 56''.8$;

des Austrittes des Sternes = $23^h 39' 41''.9$

Die Länge Nicolaewkas ist östlich; folglich muss man um die entsprechenden Zeiten in Greenwich zu erhalten, die Länge von den obigen mittleren Zeiten abziehen, und findet auf diese Weise für die mittleren Greenwicher Zeiten beim

Eintritte = $4^h 16' 18''.9$ und beim Austritte = $5^h 17' 53''.8$.
Für diese Greenwicher Zeiten erhält man nun durch Interpolation aus dem Nautical-Almanac für das Jahr 1836:

Zur Zeit des Eintrittes des Sternes	Zur Zeit des Austrittes
Wahre gerade Auf- steigung des Mond- centrums } = $339^{\circ} 57' 22''.8 = \alpha$	$340^{\circ} 30' 13''.3$
Wahre Declination . . = $-13 35 57.3$	$-13 21 29.4$
Wahrer Halbmesser des Mondes . . . = $0 15 51.5$	$0 15 51.1$
Aequat. horiz. Parallaxe = $0 58 11.9$	$0 58 10.4$

Die Abplattung der Erde = $\frac{1}{300}$, und die Breite des Ortes $\varphi = 46^{\circ} 58' 21''$, alsdann findet man nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \left(\frac{299}{300}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi,$$

für die geocentrische Breite des Beobachtungsortes φ' den Werth = $46^{\circ} 46' 54''$.

Aequatorial-Horizontal Parallaxe des Mondes $\pi = 58' 11''.9$	beim Austritte $\pi = 58' 4''.2$
Reduction = $\frac{\pi \sin^2 \varphi}{300}$ = 6.2	
Horiz.-Parallaxe beim Eintritte $\pi = 58' 5''.7$	

Die Sternzeit des Eintrittes ist $22^h 37' 56''.8 = s$; die Sternzeit des Austrittes $23^h 39' 41''.9 = s$; in Grade verwandelt, wird beim Eintritte die Sternzeit $s = 339^{\circ} 29' 12''.0$; beim Austritte $s = 354^{\circ} 55' 28''.5$; berechnet man darauf

die Formeln (e), (f), (g) und (h) §. 16.—17. Seite 28—30. Band I.,
so findet man:

für den Eintritt	für den Austritt
$\alpha' - \alpha = p = + 0^{\circ} 0' 20''.4$	$p = - 0^{\circ} 10' 17''.7$
$\delta' - \delta = q = - 0 50 55 .4$	$q = - 0 50 28 .6$
$\delta' = - 14 26 52 .6$	$\delta' = - 14 11 58 .0$
$\frac{\delta' + D}{2} = d' = - 14 27 10 .4$	$d' = - 14 19 34 .0$
$\delta' - D = b' = + 0 0 17 .8$	$b' = + 0 15 12 .4$
$r' = 0 15 59 .4$	$r' = 0 15 58 .7$
$m = + 0 32 1 .0$	$m = + 0 31 58 .6$

wo α' , δ' und r' die scheinbare gerade Aufsteigung des Mondcentrums, seine scheinbare Declination, und den scheinbaren Halbmesser des Mondes bezeichnen; α und δ die wahre gerade Aufsteigung und wahre Abweichung des Mondcentrums; D die Declination des Sterne und m die stündliche Bewegung des Mondes in wahrer gerader Aufsteigung, welche der Mitte der Zeit zwischen den Beobachtungen und der wahren Conjunction des Mondes mit dem Sterne entspricht. Die wahre Conjunction fand nach den Tafeln nahezu um 4^h 48' mittlere Greenwicher Zeit statt.

Beim Anfange und Ende der Sternbedeckung, wird der scheinbare Winkelabstand des Mondcentrums vom Sterne, gleich dem scheinbaren Halbmesser des Mondes werden; und daher alsdann:

$$a' = A - \alpha' = \pm \frac{\sqrt{(r' + b')(r' - b')}}{\cos d'}$$

wo A die in Graden ausgedrückte gerade Aufsteigung des Sterne ist; (+) wird für den Eintritt, und (−) für den Austritt gebraucht; folglich haben wir:

für den Eintritt $a' = + 16' 30''.6$, und für den Austritt $a' = - 5' 3''.8$

Bezeichnet man alsdann durch T die genaue Zeit der wahren Zusammenkunft, und durch t die Zeit der Beobachtung, so wird:

$$T = t + \frac{3600''}{m} (a' + p) + \frac{3600''}{m} \sec d (\sec \psi \partial r - \operatorname{tg} \psi \cdot \partial B) \\ + \frac{3600''}{m} \left(\frac{p}{\pi} - \frac{q}{\pi} \operatorname{tg} \psi \sec d \right) \partial \pi;$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} \psi = \frac{b'}{a' \cos d} \text{ und } \partial B = \partial b + n \cdot x;$$

Hier bedeuten ∂r , ∂b und $\partial \pi$, die Tafelfehler im Mondshalbmesser, in wahrer Declination des Mondes und Sternes und in der Mondsparrallaxe $= \pi$; die Grösse $n \cdot x$ endlich, bezeichnet den Fehler, welchen wir bei Berechnung des aus den Tafeln gefundenen Unterschiedes $\delta - D$ begangen haben, und hängt von x oder dem Fehler in der angenommenen Länge des Beobachtungsortes und von n oder der Veränderung der Mondsdeclination in eine mittleren Zeitsecunde ab; x wird positiv gezählt, wenn die angenommene östliche Länge des Beobachtungsortes grösser als die wahre östliche Länge des Ortes, oder wenn die angenommene westliche Länge kleiner als die wahre westliche Länge ist; n wird positiv sein, wenn der Mond sich dem sichtbaren Pol des Aequators nähert (in Europa dem nördlichen).

In unserem Beispiele wird für den Eintritt $\psi = +1^{\circ} 4'$, und für den Austritt $\psi = 107^{\circ} 52'' \cdot 5$; setzt man nun in T die entsprechenden numerischen Werthe ein, so erhält man für die Beobachtung des:

$$\text{Eintrittes: } T = 7^h 26' 28'' \cdot 6 + 1.94 \partial r - 0.04 \partial B + 0.04 \partial \pi; \\ \text{Austrittes: } T = 7^h 27' 39'' \cdot 8 - 6.32 \partial r + 6.02 \partial B + 5.56 \partial \pi; \\ \text{folglich: } 0 = 0^h 1' 11'' \cdot 2 - 8.26 \partial r + 6.06 \partial B + 5.52 \partial \pi.$$

Wenn dieselbe Sternbedeckung an anderen Orten beobachtet worden wäre, so würden wir viele Bedingungsbedingungen finden können, aus deren Auflösung dann, ebenso wie in §. 148. Seite 55., die Werthe der Fehler ∂r , ∂b und $\partial \pi$ gefunden werden könnten; aber leider fand sich hierzu keine entsprechende Beobachtung; und daher haben wir nur eine Gleichung mit drei unbekanntem Grössen, wovon wir also zwei vernachlässigen müssen. Da man ∂r und $\partial \pi$, im allgemeinen kleiner als ∂B annehmen kann, so wollen wir diese beiden Werthe vernachlässigen, und erhalten alsdann aus obiger Gleichung: $1' 11'' 2 = -6.06 \partial B$; mithin $\partial B = -11'' 75$ und setzt man darauf diesen Werth für ∂B in die Ausdrücke für T , so erhält man für die mittlere Zeit der wahren Conjunction zu Nicolawka:

$$\begin{aligned} T &= 7^h 26' 29''.0 + 1.94 \partial r + 0.04 \partial \pi \\ &= 7 \ 26 \ 29 \ .0 - 6.32 \partial r + 5.56 \partial \pi \\ \text{Mittelwerth} &= 7^h 26' 29''.0 - 2.19 \partial r + 2.80 \partial \pi \end{aligned}$$

Die mittlere Greenwicher Zeit der wahren Conjunction, kann man nun aus den Tafeln berechnen, aber damit diese nicht vom Fehler der Tafeln in gerader Aufsteigung abhängt, muss man vorher diesen Fehler der Tafeln bestimmen; aus Mangel an entsprechenden Beobachtungen der Sternbedeckung an guten Sternwarten, müssen wir unsere Zuflucht zu den Meridian-Beobachtungen des Mondes nehmen. In keiner uns bekannten Sammlung von Beobachtungen, haben wir eine Beobachtung der geraden Aufsteigung des Mondes für den 16^{ten} Novb. 1836 finden können, aber aus den in Kopenhagen und Hamburg angestellten Meridian-Beobachtungen (Astronom. Nachrichten No. 354. u. s. w.) finden wir, dass der Nautical Almanac die geraden Aufsteigungen des Mondcentrums zu gross gab:

um $0''.85$ in Zeit, nach den Beobachtungen
 in Hamburg, am 15^{ten} Novemb. 1836,
 um $0''.93$ in Zeit, nach den Beobachtungen
 in Kopenhagen, am 15^{ten} Novb. 1836,
 folglich: um $0''.89$ in Zeit, als Mittelwerth, am 15^{ten} Novb. 1836,
 ferner: um $0''.36$ in Zeit, nach den Beobach-
 tungen in Kopenhagen, am 18^{ten} Novbr. 1836.

Obgleich man mit Genauigkeit nicht annehmen darf, dass die Fehler der Mondstafeln sich im Laufe von 3 Tagen der Zeit proportional ändern, so kann man doch dieses wenigstens genähert annehmen, und alsdann hat man für den Fehler dieser Tafeln am 16^{ten} November 1836, den Werth $= - 0''.71$ in Zeit; der Nautical Almanac giebt für den 16^{ten} November 1836 um $5^h 0' 0''$ mittlere Greenwicher Zeit

AR $\zeta = 22^h 41' 22''.74$	
wahrscheinlicher Tafelfehler	$= . . . - 0.71$
wahrscheinl. gerade Aufsteigung des Mondes $= 22^h 41' 22''.03$	
gerade Aufsteigung des Sternes	$= 22 40 56 .62$
Unterschied	$= 0^h 0' 25''.41$

Für die Mitte des Zeitintervalls zwischen $5^h 0'$ mittlere Greenwicher Zeit und der wahren Conjunction findet man die wahre stündliche Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung gleich $127''.91$ in Zeit; also braucht der Mond um sich in gerader Aufsteigung um $25''.41$ zu bewegen $715''.15$ oder $11' 55''.15$ in Zeit; und daher wird die mittlere Zeit der wahren Conjunction sein:

in Greenwich um $5^h 0' 0'' - 11' 55''.15 = 4^h 48' 4''.85$	
in Nicolaewka um	$= 7 26 29 .00$
Die gesuchte Länge Nicolaewkas	$= 2^h 38' 24''.15$

Wir haben die Länge Nicolaewkas $= 2^h 38' 35''$ östlich von Greenwich angenommen, und folglich ist diese Länge um

+ 10".85 grösser als die wahre; zu der damaligen Zeit der Beobachtungen näherte sich der wahre Ort des Mondscentrums dem Nordpole des Aequators um 0".23 in einer Zeitsecunde und daher ist in diesem Falle $x = + 10".85$ und $n = + 0.23$; nun haben wir oben gesehen, dass $\delta B = \delta b + n \cdot x = - 11".76$, und folglich wird $\delta b = - 14".26$; es ist jedoch wahrscheinlich dass der Austritt des Sternes zu spät beobachtet wurde, auch können die Rechnungselemente nicht ganz zuverlässig sein, und daher wird δb , oder der Tafelfehler im Unterschiede der Declinationen des Mondes und Sternes, in diesem Falle wahrscheinlich nicht so gross als 14".26 sein.

Karlini's Methode zur Berechnung von Sternbedeckungen.

152. Wenn sowohl der Eintritt als auch der Austritt eines Sternes beobachtet wird, so kann man daraus die Länge durch die vortreffliche Methode von Karlini leicht bestimmen; *) bei dieser Methode braucht man die vorläufige Länge des Beobachtungsortes, lange nicht mit derjenigen Annäherung zu kennen, welche bei der vorhergehenden auseinandergesetzten Methode nöthig war, und ferner braucht man nicht den scheinbaren Halbmesser des Mondes zu bestimmen, weil man den Einfluss der Parallaxe nicht für das Mondscentrum, sondern für denjenigen Punkt des scheinbaren Mondsrandes bestimmt, welcher mit dem scheinbaren Orte des Sternes zusammenfällt. Wir werden diese Methode etwas genauer durchführen als es von ihrem Urheber geschah, und sie ferner in Beziehung auf *den Aequator* geben.

*) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von Zach. 1808.

Es seien: A und D die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung des Sternes; berechnet man darauf die Horizontal-Parallaxe des Mondes $= \pi$ für die geocentrische Breite des Beobachtungsortes $= \varphi'$, die der geographische Breite des Ortes $= \varphi$ entspricht, und setzt man ferner:

für den Eintritt für den Austritt

die wahre gerade Aufsteig. des Mondcentrums $= \alpha \dots \alpha + m$.
 die wahre Declination $\dots \dots \dots = \delta \dots \delta + n$.
 den wahren Halbmesser des Mondes $\dots \dots \dots = r \dots \dots r,$
 die Horizontal-Parallaxe $\dots \dots \dots = \pi, \dots \dots \pi,,$

so kann man diese Werthe aus der Ephemeride mit Hülfe der nur beiläufig bekannten Länge des Beobachtungsortes, welche übrigens um 5' in Zeit oder selbst mehr fehlerhaft sein kann, finden; bestimmt man dabei α , $\alpha + m$, δ und $\delta + m$ durch eine scharfe Interpolation, so werden zwar α und δ durch den Fehler in der angenommenen Länge, einen Fehler enthalten, aber dieser Fehler wird für Eintritt und Austritt constant sein, so dass man immer im Stande sein wird m und n mit hinreichender Genauigkeit daraus zu bestimmen; ebenso werden r , $r,$, π , und $\pi,$ trotz des Fehlers in der Länge gut genug bestimmt sein, denn diese Grössen ändern sich sehr langsam.

A und D bestimmen die *scheinbare* Lage desjenigen Punktes am Rande des Mondes, welcher den Stern beim Eintritt oder Austritte bedeckt, setzt man daher die *wahre* gerade Aufsteigung dieses Punktes des Mondrandes $= A - \Theta$, und seine *wahre* Abweichung $= D - \omega$, so haben wir in den Paragraphen über Parallaxe §. 15—17. Seite. 25—30. Band I. gesehen, dass Θ und ω bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\sin \Theta = \frac{\sin \pi \cos \varphi' \sin (A - s)}{\cos (D - \omega)}, \dots \dots \dots \text{tg } \eta = \frac{\text{tg } \varphi' \cos \frac{1}{2} \Theta}{\cos (A - \frac{1}{2} \Theta - s)}$$

$$\sin \omega = \frac{\sin \pi \sin \varphi' \sin (D - \eta)}{\sin \eta} \dots (*)$$

wo s die Sternzeit der Beobachtung in Graden ausgedrückt ist; π ist der Werth der Horizontal-Parallaxe des Mondes zur Zeit der Beobachtung; folglich beim Eintritte $\pi = \pi_1$, und beim Austritte $\pi = \pi_2$. Vernachlässigt man zuerst ω , und berechnet Θ genähert, so kann man damit ω selbst finden; mit diesen genäherten Werthen von Θ und ω berechnet man darauf nochmals mehr genaue Werthe von Θ und ω , und endlich kann man wiederum mit diesen zuletzt gefundenen Werthen von Θ und ω , ein ganz genauen Werth finden. Obgleich man auf diese Weise die Arbeit drei Mal zu wiederholen hat, so ist sie doch immer sehr leicht, weil man die beiden letzten dieser Bestimmungen, leicht mit Hülfe der Proportional-Theile in den Logarithmentafeln machen kann.

Bei dieser Berechnung sollte man in aller Schärfe, die Horizontal-Parallaxe nicht für das Mondscentrum, sondern

*) Wenn man in die letzte Formel den Ausdruck für $\tan \eta$ einführt, so erhält man folgende bequeme Ausdrücke zur Berechnung von ω und Θ , es ist nämlich:

$$\sin \omega = - \sin \pi \sin \varphi' \cos D + \\ + \sin \pi \cos \varphi' \sin D \cos (A - \frac{1}{2} \Theta - s) \sec \frac{\Theta}{2}$$

oder sehr nahe:

$$\omega = - \pi \sin \varphi' \cos D + \pi \cos \varphi' \sin D \cos (A - \frac{1}{2} \Theta - s) \sec \frac{\Theta}{2} \\ - \frac{1}{6} \omega \sin^2 1'' (\pi + \omega) (\pi - \omega);$$

auf ähnliche Weise findet man:

$$\Theta = \pi \cos \varphi' \sec (D - \omega) \sin (A - s) - \\ - \frac{\Theta}{6} \sin^2 1'' (\pi + \Theta) (\pi - \Theta);$$

für den beobachteten Punkt des scheinbaren Randes nehmen, indessen kann man in den meisten Fällen beide mit einander ohne merklichen Fehler verwechseln; übrigens ist es leicht die eine von ihnen aus der anderen zu berechnen; denn es sei π , die Horizontal-Parallaxe für das Mondscentrum, π aber die Horizontal-Parallaxe für den beobachteten Punkt des Mondsrandes; so erhält man für den Eintritt: *)

*) Es sei (Fig. 36. a.) C das Centrum der Erde; O der Ort des Beobachters auf der Erde, Z sein geocentrisches Zenith; L das Mondscentrum; b der Punkt des Mondrandes, welcher den Stern beim Eintritte oder Austritte bedeckt; z und ζ die wahren, aber z' und ζ' die scheinbaren Zenithdistanzen der Punkte L und b , so dass $ZCL = z$, $ZOL = z'$, $ZCb = \zeta$ und $ZOb = \zeta'$; alsdann folgt aus den Dreiecken $O b C$ und $O C L$:

$$O b : C b = \sin \zeta : \sin \zeta'; \quad O L : C L = \sin z : \sin z';$$

$$\sin \pi, = \frac{O C}{L C}; \quad \sin \pi = \frac{O C}{b C}$$

Die Linie $O b$ ist eine Tangente an die sphärische Oberfläche des Mondes und der Winkel $b O L$ ist der scheinbare Mondshalbmesser $= r'$; folglich $O b = O L \cos r'$, und

$$\frac{\sin \pi,}{\sin \pi} = \frac{b C}{L C} = \frac{b C}{O b} \cdot \frac{O b}{L C} = \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta} \cdot \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot \cos r' \dots \dots (1)$$

In dem Artikel über Parallaxe §. 18. Seite 30. Band I. haben wir gesehen, dass $\sin z : \sin z' = \sin(\eta - \delta) : \sin(\eta - \delta - \omega)$ ist, aber die scheinbare Declination des Punktes b ist $= D$, und seine wahre $= D - \omega$, folglich werden wir ebenso haben:

$$\sin \zeta' : \sin \zeta = \sin(\eta - D) : \sin(\eta - D + \omega);$$

mithin können wir anstatt Gleichung (1) annehmen:

$$\frac{\pi - \pi_1}{\pi_1} = 0.00001 - \frac{\omega (\delta - D + \omega) \sin^2 1''}{\sin (\eta - \delta) \sin (\eta - D)} + \dots$$

wo man statt δ seinen vorher aus der Zeit der Beobachtung mit Hülfe der genäherten Länge des Beobachtungsortes berechneten Werth setzen kann; zu dem vorhergefundenen Θ und ω legt man alsdann ihre entsprechenden Correctionen:

$$+ \frac{\pi - \pi_1}{\pi_1} \Theta \text{ und } + \frac{\pi - \pi_1}{\pi_1} \omega \text{ hinzu. Auf ähnliche Weise}$$

berechnet man die Correctionen für den Austritt, indem man hierbei anstatt δ und π , die Werthe $\delta + n$ und π_1 braucht.

$$\frac{\sin \pi}{\sin \pi_1} = \frac{\sin (\eta - \delta - \omega) \sin (\eta - D + \omega)}{\sin (\eta - \delta) \sin (\eta - D)} \cdot \sec r'$$

beschränkt man sich hierbei auf die Glieder 2^{ter} Ordnung, so wird folglich:

$$\frac{\pi - \pi_1}{\pi_1} = \frac{1}{2} r'^2 \sin^2 1'' - \frac{\omega (\delta - D + \omega) \sin^2 1''}{\sin (\eta - \delta) \sin (\eta - D)} + \dots$$

anstatt r' kann man ohne merklichen Fehler, in diesem Falle, den wahren Winkelhalbmesser des Mondes, oder sogar $r' = 930''$ annehmen, welches ungefähr sein mittlerer Werth ist; alsdann wird $\frac{1}{2} r'^2 \sin^2 1'' = 0.00001016$.

Um das Maximum des Werthes, welches der Ausdruck $\frac{\pi - \pi_1}{\pi_1}$ annehmen kann, bequem zu bestimmen, muss man auf die Gleichung (1) zurückkehren, denn da sehr nahe $\zeta = \zeta' - \pi \sin \zeta'$, $z = z' - \pi \sin z'$, und π sehr nahe an π_1 , so folgt aus der Gleichung (1), dass $\frac{\pi - \pi_1}{\pi_1}$ sehr nahe $= \sin \pi \sin \frac{1}{2} (z' + \zeta') \sin (z' - \zeta')$; wenn $z' - \zeta' = r'$ und $\frac{1}{2} (z' + \zeta') = 90^\circ$, so erhält $\frac{\pi - \pi_1}{\pi_1}$ seinen allergrössten Werth, welcher = 0.00008 ist.

Denkt man sich an der Himmelskugel den grössten Kreisbogen, welcher durch den wahren Ort des Mondscentrums und den Punkt des Randes hindurchgeht, der beim Eintritt oder Austritte den Stern bedeckt, so muss dieser Bogen dem wahren Winkelhalbmesser des Mondes sehr nahezu gleich sein*). Wir wollen jetzt annehmen (Fig. 36. *b*), dass *L* der wahre Ort des Mondscentrums ist; *S* der Ort des Sternes zur Zeit seines Eintrittes in den Mondrand; *AB* der Aequator; *LP* und *Sp* die Declinationskreise, welche den Aequator in den Punkten *P* und *p* schneiden; und *Sq* ein Bogen des grössten Kreises, welcher senkrecht auf *LP* steht; dann wird der Bogen *Pp* = $A - \Theta - \alpha$ sein; *LP* = δ ; *Sp* = $D - \omega$, und sehr nahezu *LS* = *r*,

*) Dieser Bogen ist, in der Fig. 36. *a*, durch den Winkel $bCL = \xi$ ausgedrückt; aus dem Dreiecke *bCL* folgt aber $Lb^2 = LC^2 - 2LC \cdot bC \cdot \cos \xi + bC^2$. Bezeichnet man den wahren Winkelhalbmesser des Mondes durch *r*, so wird jedoch $Lb : LC = \sin r$ sein; nun sind aber *r* und ξ kleine Winkel und man kann $\sin r = r \sin 1''$; $\cos \xi = 1 - \frac{1}{2} \xi^2 \sin^2 1''$ setzen; folglich:

$$r^2 \sin^2 1'' = \frac{Lb^2}{LC^2} = 1 - 2 \frac{bC}{LC} + \frac{bC^2}{LC^2} + \frac{bC}{LC} \cdot \xi^2 \sin^2 1'';$$

$$(r^2 - \xi^2) \sin^2 1'' = \left(1 - \frac{bC}{LC}\right)^2 - \left(1 - \frac{bC}{LC}\right) \cdot \xi^2 \sin^2 1''.$$

Weil nun $\frac{bC}{LC} = \frac{\pi_r}{\pi}$ und $r + \xi$ sehr nahe = $2r$ ist, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass

$$r - \xi = \left(\frac{\pi - \pi_r}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2r \sin^2 1''} - \left(\frac{\pi - \pi_r}{\pi}\right) \cdot \frac{r}{2}$$

ist; der grösste Werth von $r - \xi$ kann daher nie $0''.05$ übersteigen.

$Lq = \delta - (D - \omega)$. Es sei der Winkel $SLq = \varepsilon$; dann folgt:

$$Pp = \frac{Sq}{\cos Sp} = \frac{LS \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)} = \frac{r \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)}; Lq = r \cos \varepsilon.$$

Wir haben also:

$$\alpha = A - \Theta - \frac{r \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)} \text{ und } \delta = D - \omega + r \cos \varepsilon \dots (1).$$

Bezeichnen wir die wahre AR und Declination des Mondmittelpunktes bei dem Austritte des Sternes durch $\alpha + m$ und $\delta + n$; die Grössen Θ , ω , r und ε aber, welche dem Austritte entsprechen durch Θ' , ω' , r' und ε' ; so bekommen wir, da der Austritt am westlichen Rande des Mondes stattfindet, folgende Gleichungen:

$$\alpha + m = A - \Theta' + \frac{r' \sin \varepsilon'}{\cos (D - \omega')}; \delta + n = D - \omega' + r' \cos \varepsilon' \dots (2)$$

Ziehen wir α von $\alpha + m$ und δ von $\delta + n$ ab, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\left. \begin{aligned} m &= \Theta - \Theta' + \frac{r' \sin \varepsilon'}{\cos (D - \omega')} + \frac{r \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)}; \\ n &= \omega - \omega' + r' \cos \varepsilon' - r \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Es sei $\frac{1}{2}(r + r') = \rho$; $\frac{\omega' + \omega}{2} = \beta$; da nun $r' - \rho$ oder $\rho - r$ nie $\frac{1}{3}$ Secunde und $\frac{\omega' - \omega}{2}$ nie 4 Minuten übersteigen; so können wir sehr leicht die Winkel ε und ε' aus der Gleichungen (3) berechnen, indem wir statt r' und r die Grösse ρ ,

und statt $\cos(D - \omega')$ und $\cos(D - \omega)$ den Werth $\cos(D - \beta)$ einführen, was ohne merklichen Fehler geschehen kann; auf diese Weise werden wir sehr nahezu haben*):

$$(m + \Theta' - \Theta) \cos(D - \beta) = \rho \cdot 2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$$

$$n + \omega' - \omega = \rho \cdot 2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$$

$$\text{folglich: } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{n + \omega' - \omega}{(m + \Theta' - \Theta) \cos(D - \beta)}$$

$$\text{und: } \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon') = \frac{n + \omega' - \omega}{2 \rho \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')} \dots \dots \dots (A).$$

$$= \frac{(m + \Theta' - \Theta) \cos(D - \beta)}{2 \rho \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')}$$

Um zu ermitteln in welchem Quadranten man die Winkel $\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$ und $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$ zu nehmen hat, müssen wir bemerken, dass in unserer Figur eine positive (nördliche für die nördliche Hemisphäre der Erde) Declination des Mondes vorausgesetzt wird, und dass die Winkel ε und ε' zwischen 0° und 180° eingeschlossen sind; alsdann muss ε oder ε' ein spitzer Winkel sein, wenn $\delta + \omega > D$ oder $\delta + n + \omega' > D$ ist; ein stumpfer aber im entgegengesetzten Falle. Eine genäherte Kenntniss von δ , welches man bei der Berechnung von n , mit Hülfe der vorläufig bekannten Länge des Beobach-

*) Wollte man die Approximation weiter treiben, was kaum der Mühe werth ist, so muss man an den genäherten Werth von $\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$ die Correction:

$$- (r' - r) \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')}{2 \rho \sin 1''} [1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')] + \frac{\omega' - \omega}{4} \operatorname{tg}(D - \beta) \sin(\varepsilon - \varepsilon') \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$$

anbringen; zu dem Werthe von $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$ aber die Correction

$$- \frac{(r' - r)}{2 \rho \sin 1''} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$$

hinzuaddieren.

tungsortes aus den Ephemeriden findet, entscheidet also in welchen Quadranten ε oder ε' zu nehmen sind.

Die Winkel ε und ε' werden von dem Punkte des Mondrandes abgezählt, welcher dem Aequator am nächsten liegt; ist also die Declination des Mondes eine negative (südliche für die nördliche Hemisphäre der Erde), so müssen wir in unseren Formeln $180^\circ - \varepsilon$ und $180^\circ - \varepsilon'$, statt ε und ε' nehmen; in diesem Falle wird folglich:

$$\alpha = A - \Theta - \frac{r \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)}, \quad \delta = D - \omega - r \cos \varepsilon;$$

$$\alpha + m = A - \Theta' + \frac{r' \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega')}; \quad \delta + n = D - \omega' - r' \cos \varepsilon';$$

$$\varrho = \frac{1}{2} (r' + r); \quad \beta = \frac{1}{2} (\omega + \omega');$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varepsilon' - \varepsilon) = \frac{n + \omega' - \omega}{(m + \Theta' - \Theta) \cos (D - \beta)};$$

$$\sin \frac{1}{2} (\varepsilon' + \varepsilon) = \frac{(m + \Theta' - \Theta) \cos (D - \beta)}{2 \varrho \cos \frac{1}{2} (\varepsilon' - \varepsilon)} = \frac{n + \omega' - \omega}{2 \varrho \sin \frac{1}{2} (\varepsilon' - \varepsilon)} \dots (B)$$

sein; wo ε oder ε' also ein spitzer Winkel sein muss, wenn $\delta + \omega$ oder $\delta + n + \omega'$ numerisch grösser als D ist; dagegen ist ε oder ε' ein stumpfer Winkel, wenn $\delta + \omega$ oder $\delta + n + \omega'$ numerisch kleiner als D ist. Bei diesen Berechnungen sind 5stellige Logarithmen vollkommen ausreichend.

Zur Zeit der wahren aequatorial Conjunction des Mondes mit dem Sterne, muss die wahre AR des Mond-Mittelpunctes gleich A oder gleich der AR des Sternes sein; ist also α die für die mittlere Zeit t des Eintrittes nach obiger Methode bestimmte AR des Mondes, μ die wahre stündliche Bewegung des Mondes in AR für die Mitte des Zeitraumes geltend, zwischen dem Eintritte und der mittleren Conjunctionszeit τ des Beobachtungsortes, so wird:

$$\tau = t + \frac{(A - \alpha)}{\mu} \dots \dots \dots (C)$$

sein. Der Unterschied zwischen dieser Conjunctionszeit τ und der mittleren Zeit, die an einem anderen Orte bei derselben wahren Conjunction gezählt wird, giebt nun die geographische Längen-Differenz beider Orte. Berechnet man aus den Ephemeriden oder aus den Mondstafeln, mit Hülfe der genauen Länge der Beobachtungsorter die wahre AR und Declination $\alpha \odot$ und $\delta \odot$ des Mondes für die wahre Conjunctionszeit, so erhält man die zu dieser Zeit stattfindenden Tafelfehler $A - \alpha \odot$ und $\delta + \nu (\tau - t) - \delta \odot$, wo ν die wahre stündliche Bewegung des Mondes in Declination bedeutet, welche für die Zeit $\frac{\tau + t}{2}$ gilt; man bekommt auf diese Weise die Unterschiede zwischen den Fehlern der Mondstafeln und den Fehlern der, bei der Rechnung angenommenen Position des Sternes.

Die Hauptresultate sind ganz unabhängig von dem eigentlichen Fehler in Bezug auf die Declination des Mondes oder des Sternes, und hängen nur von der Richtigkeit des angenommenen Halbmessers des Mondes r , der Mondparallaxe π ; und wenn keine correspondirenden Sternbedeckung an einem anderen Orte beobachtet worden ist, noch von der Richtigkeit der angenommenen geraden Aufsteigungen des Mondes α und des Sternes A ab. Wenn ∂r und $\partial \pi$ die Correctionen von r und π bedeuten, so wird die entsprechende Correction von τ durch die Gleichung $\partial \tau = \frac{\partial (A - \alpha)}{\mu}$ bestimmt, und die Grösse $\partial (A - \alpha)$ durch die Differentiation der Gleichungen (1) und (3) in Bezug auf $(A - \alpha)$, Θ , ω , Θ' , ω' , r , r' , ε und ε' , gefunden. Eine leichte Rechnung ergiebt dann, dass derjenige Theil des $\partial (A - \alpha)$, welcher von $\partial \pi$ und ∂r abhängt, sich folgendermaassen ausdrücken lässt:

$$\partial(A - \alpha) = \frac{\partial \pi}{\pi \sin(\varepsilon + \varepsilon')} \left\{ \Theta \cdot \sin \varepsilon \cos \varepsilon' + \Theta' \cdot \cos \varepsilon \sin \varepsilon' + \right. \\ \left. + \frac{(\omega' - \omega) \cos \varepsilon \cdot \cos \varepsilon'}{\cos(D - \beta)} \right\} + \frac{\partial r \cdot \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')}{\cos(D - \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')}$$

wo $\beta = \frac{1}{2}(\omega' + \omega)$ gesetzt ist. Wenn viele Beobachtungen des Eintrittes und Austrittes an verschiedenen Orten gemacht wurden, deren geographische Länge gut bekannt sind, so kann man auch die Verbesserungen ∂r und $\partial \pi$ der angenommenen Werthe von r und π suchen, indem man Bedingungsgleichungen von der Form: $\tau + \partial \tau - (\tau' + \partial \tau') = l$ bildet; wo l der Längen-Unterschied zweier Beobachtungsorte; τ die Conjunctionszeit des einen und τ' die des anderen bedeutet.

Beispiel. Zur Erläuterung des vorhergehenden, wollen wir nach Karlini's Methode dasselbe Beispiel berechnen, welches wir schon §. 151. Seite 61. angeführt haben. Am 16^{ten} November 1836 wurde nämlich im Dorfe Nicolaewka, dessen nördliche geographische Breite = $46^{\circ} 58' 21''$ und genäherte östliche Länge von Greenwich = $2^{\text{h}} 38' 35''$ ist, der Eintritt des Sternes τ^2 *Aquarii* in den Mondrand um $6^{\text{h}} 54' 53''.9$, der Austritt desselben um $7^{\text{h}} 56' 28''.8$ mittlere Nicolaewkaer Zeit beobachtet.

Wir behalten hier alle früher angenommenen Elemente der Berechnung unverändert bei, und nehmen also an, dass $\varphi' = 46^{\circ} 46' 54''$; die AR des Sternes, oder $A = 340^{\circ} 14' 9''.3$; seine Declination $D = -14^{\circ} 27' 10''.4$, ferner hat man:

	für den Eintritt	für den Austritt.
die Horizontal-Parallaxe . . .	$\pi = 58' 5''.7$	$\pi' = 58' 4''.2$
der wahre Halbmesser des \odot	$r = 15 51 .50$	$r' = 15 51 .08$
die Sternzeit in Graden s	$= 339^{\circ} 29 12 .00$	$s = 354 55 28 .5$
damit findet man	$\eta = +46 47 2 .80$	$\eta' = 47 43 9 .40$
nach den Formeln	$\omega = -0 50 55 .47$	$\omega' = -0 50 35 .31$
des §. 152 Seite 68-69.	$\Theta = +0 0 32 .11$	$\Theta' = -0 10 22 .41$

Mit Hülfe der vorläufig angenommenen geographischen Länge des Beobachtungsortes bekommen wir aus dem Nautical Almanac die wahre AR des Mondcentrums:

$$\begin{array}{l|l} \text{für den Eintritt} \dots \alpha_0 = 339^\circ 57' 22''.81 & \delta_0 = -13^\circ 35' 57''.20 \\ \text{für den Austritt } \alpha_0 + m = 340 \ 30 \ 13 \ .27 & \delta_0 + n = -13 \ 21 \ 29''.40 \\ \hline & m = +32' 50''.46 \qquad n = +14' 27''.80 \end{array}$$

Alsdann folgt nach dem vorhergehenden:

$$\begin{aligned} n + \omega' - \omega &= +14' 47''.96 = +887''.96; \\ m + \Theta' - \Theta &= +21 \ 55 \ .94 = +1319 \ .94 \\ \varrho &= \frac{1}{2}(r' + r) = 15 \ 51 \ .29 = 951 \ .29; \\ \beta &= \frac{1}{2}(\omega' + \omega) = -0^\circ 50'.7; \\ D - \beta &= -13^\circ 36'.4 \\ \text{tg } \frac{1}{2}(\varepsilon' - \varepsilon) &= \frac{+887''.96}{+1319''.94 \cos(D - \beta)} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{1}{2}(\varepsilon' + \varepsilon) = + \frac{1319''.94 \cos(D - \beta)}{2 \varrho \cos \frac{1}{2}(\varepsilon' - \varepsilon)} = \frac{887''.96}{2 \varrho \sin \frac{1}{2}(\varepsilon' - \varepsilon)}$$

$$\varepsilon = 90^\circ 18'.4; \quad \varepsilon' = 159^\circ 50'.5$$

$$A - \Theta - \frac{r \sin \varepsilon}{\cos(D - \omega)} = 339^\circ 57' 18''.2 = \alpha;$$

$$A - \Theta' + \frac{r \sin \varepsilon'}{\cos(D - \omega')} - m = 339 \ 57 \ 18 \ .4 = \alpha;$$

$$\text{im Mittel } \alpha = 339^\circ 57' 18''.3$$

$$A - \alpha = +0 \ 16 \ 51 \ .0$$

$$D - \omega - r \cos \varepsilon = -13^\circ 36' 9''.8 = \delta$$

$$D - \omega' - r' \cos \varepsilon' - n = -13 \ 36 \ 10 \ .1 = \delta$$

$$\delta = \dots \dots \dots -13^\circ 36' 9''.95$$

Nach dem Nautical Almanac findet die wahre Conjunction ungefähr um 4^h 48' mittlerer Greenwicher Zeit statt; der Eintritt hat stattgefunden um 6^h 54'.9 Nicolaewkaer oder um 4^h 16'.3 mittlere Greenwicher Zeit; nun ist um 4^h 32' Greenwicher Zeit die wahre Bewegung des Mondes im AR während

einer mittleren Stunde = $1921''.0 = \mu$ in Bogen; folglich muss nach Nicolaewkaer mittlerer Zeit die wahre Conjunction stattfinden zu der Zeit:

$$\tau = t + \frac{(A - \alpha)}{\mu} = 6^h 54' 53''.9 + 0^h 31' 34''.6 = 7^h 26' 28''.5$$

Nach §. 151. Seite 66. die wahre Conj. zu Greenw. . . 4 48 4 8

Also liegt Nicolaewka östlich von Greenwich . . . 2^h 38' 23''.7

Der Fehler der Mondstafeln in AR kann in diesem Falle nicht bestimmt werden, weil die Sternbedeckung nur an einem Orte beobachtet wurde, dessen Länge eben durch diese Bedeckung gefunden worden ist. Nach unserer Rechnung war die wahre Declination des Mondcentrums beim Eintritte = $\delta = -13^{\circ} 36' 9''.9$; mit der gefundenen Länge aber bekommen wir aus dem Nautical Almanac $\delta = -13^{\circ} 35' 54''.8$; folglich würde der Fehler der Tafeln in Declination, wenn die Beobachtungen des Eintrittes und Austrittes genau und der angenommene Sternort richtig gewesen wäre, gleich $-15''.1$ sein.

Alle hier ermittelten Resultate stimmen ziemlich nahe mit denjenigen überein, welche wir schon in §. 151. Seite 66–67 erhalten haben.

Allgemeine Bemerkungen.

153. Wir schliessen den Artikel über die Bestimmung der Längendifferenz aus Bedeckungen durch den Mond mit einigen Bemerkungen, welche wir zum Theil aus dem vortrefflichen Aufsätze des berühmten Astronomen Hansen (Astronomische Nachrichten, No. 392–395, 17^{ter} Band 1840) entnehmen.

Aus dem vorher gesagten folgt nämlich, dass um die Längendifferenz von den Fehlern, die auf sie einwirken,

möglichst zu befreien, man den Fehler der geraden Aufsteigung und Abweichung des Sternes und den Fehler der geraden Aufsteigung, Abweichung, Horizontalparallaxe und Radius des Mondes kennen muss. Da unsere jetzigen Tafeln die gerade Aufsteigung und Abweichung des Mondes im Allgemeinen minder genau geben, wie eine einzelne gute Meridianbeobachtung des Mondes, so würde man in den Fällen, wo eine solche Meridianbeobachtung am Tage der Sternbedeckung vorhanden ist, die daher rührenden Fehler wohl vermeiden können; der Einfluss anderer Fehler bleibt jedoch noch vorhanden und ist zuweilen nicht unbedeutend. Die Positionen der Sterne, die man aus den älteren Catalogen zu nehmen genöthigt ist, können manchmal mit eben so grossen oder grösseren Fehlern behaftet sein, wie die AR und Declination des Mondes, welche die jetzigen Mondstafeln geben; auch der Einfluss der Fehler des Halbmessers und der Horizontalparallaxe kann zuweilen grösser werden, wie der eines gleichen Fehlers in der Abweichung des Mondes oder des Sternes. Ein solcher Fall findet meistens dann statt, wenn an einem Orte nur der Eintritt, an einem anderen aber nur der Austritt beobachtet worden ist; in den Fällen jedoch, wo die Beobachtungen gleicher Gattung sind, heben sich die Fehler in der Längendifferenz oft zum grössten Theile auf.

Wenn man zur Bestimmung der Längendifferenzen recht viele Sternbedeckungen benutzen kann, so muss man die Rechnung nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeit, oder nach der Methode der kleinsten Quadraten führen, und es wird am zweckmässigsten sein, ein Verfahren anzuwenden, welches H. Hansen in No. 393, 394. der Astronomischen Nachrichten auseinander gesetzt hat. Begnügt man sich aber mit nahezu richtigen Resultaten, so kann man die wahrscheinlichsten Längendifferenzen aus vielen Sternbedeckungen leicht folgendermaassen bestimmen.

Angenommen, dass am mehreren Orten, sowohl der Eintritt, wie auch der Austritt bei irgend einer Sternbedeckung beobachtet wurde, so kann man die Zeit der wahren Aequatorial-Conjunction und die Glieder, welche den Einfluss der Rechnungselemente oder Data ausdrücken, aus den Beobachtungen an jedem einzelnen Orte berechnen. Alsdann bilden sich durch die Vergleichung der Bedingungs-gleichungen für den Eintritt und für den Austritt an jedem Beobachtungsorte mehrere Gleichungen, (ähnlich wie diejenigen, in §. 148. Seite 55.), welche von den Fehlern im Halbmesser, in der Parallaxe des Mondes und in dem Unterschiede zwischen der Declination des Mondes und des Sternes abhängen. Wenn man nur an drei Orten den Eintritt und den Austritt beobachtet hat, so wird man drei Gleichungen zur Berechnung der drei unbekanntenen Grössen haben und die Aufgabe ist völlig bestimmt; d. h. man wird Werthe finden, welche den Gleichungen genau genug thun; die Fehler der Beobachtung werden dabei als verschwindend betrachtet werden müssen. Sind aber an vielen Orten die Eintritte und die Austritte beobachtet worden, so muss man nach der Methode der kleinsten Quadrate das System der wahrscheinlichsten Werthe der unbekanntenen Grössen suchen, welche sich den Beobachtungen am nächsten anschliessen.

Der erste Schritt zur Auflösung der Aufgabe wird darin bestehen müssen, dass man den Grad der Zuverlässigkeit einer jeden aus den Beobachtungen gebildeten Bedingungs-gleichung, oder das sogenannte Gewicht derselben, ermittelt. Die Beobachtungen haben gewiss, je nach der Geübtheit des Beobachters, der Güte des Fernrohres, und dem Zustande der Luft während der Sternbedeckung, eine verschiedene Genauigkeit; aber es ist unmöglich den Werth dieser Umstände auf eine, auch einigermaassen genügende Weise in Zahlen auszudrücken, und daher muss man bei der Bestimmung des Gewichtes sich hier auf die Berücksichtigung allgemeiner

Umstände beschränken. Ein solcher ist der Umstand, dass die Beobachtung einer Sternbedeckung sich desto besser zur Längenbestimmung eignet, je länger die Chorde ist, welche der Stern hinter der Mondscheibe beschreibt, indem alsdann die Ungleichheiten des Mondrandes und die Fehler der Rechnungselemente einen geringen Einfluss auf das Resultat äussern. H. Hansen nimmt das Gewicht eine Beobachtung einer Sternbedeckung dieser Chorde proportional an, oder, was dasselbe ist, dem Cosinus des Winkels proportional, den die Chorde mit dem Halbmesser des Mondes bildet; es ist hierbei also die Genauigkeit einer solchen Beobachtung, bei welcher der Weg des Sternes auf dem Mondrande senkrecht steht, zur Einheit genommen.

Multiplieirt man die Bedingungsgleichungen mit solchen, ihnen entsprechenden Gewichten, und behandelt dann die Aufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate, so wird man erstens: die wahrscheinlichen Fehler in der angenommenen Grösse des Halbmessers, der Horizontalparallaxe des Mondes und dem Unterschiede der Declinationen des Mondes und des Sternes finden; zweitens: diese Fehler in den allgemeinen Ausdruck der Zeit der wahren Conjunction für jeden Beobachtungsort substituiren, und darauf die Längendifferenz bestimmen. Das Gewicht dieser Bestimmung kann man nahezu gleich dem Producte aus der Anzahl der bei dieser Bestimmung angewandten Beobachtungen mit dem arithmetischen Mittel aus den Cosinussen der oben erwähnten Winkel, welche verschiedenen Beobachtungen einer Sternbedeckung entsprechen, annehmen. Auf dieselbe Weise wird die Längendifferenz auch aus anderen beobachteten Sternbedeckungen abgeleitet und ihr relatives Gewicht bestimmt. Um nun ein definitives Resultat aus einzelnen, verschiedenen Bestimmungen der Längendifferenz eines Ortes zu erhalten, multiplicirt man jede einzelne Bestimmung mit seinem Ge-

wichte, und die Summe solcher Producte, dividirt man durch der Summe der Gewichte; der Quotient wird das gesuchte Resultat sein.

Bessels Methode zur Berechnung aller von Parallaxe abhängigen Verfinsterungen.

154. Bessel hat die vollständige Theorie der Finsternisse im 2^{ten} Theile seiner Astronomischen Untersuchungen entwickelt; doch wollen wir hier nur das Hauptsächlichste dieser Theorie, zugleich mit ihrer Anwendung auf geographische Längenbestimmung mittheilen.

Es sei (Fig. 37) T das Centrum der Erde, S das Centrum der Sonne, L das des Mondes oder Planeten, und O der Ort des Beobachters auf der Erdoberfläche. Die Ränder der Gestirne S und L werden sich zu berühren scheinen, wenn der Punkt O sich auf der Oberfläche des Kegels befindet, welcher beide Gestirne umwickelt. Solche Kegel giebt es nun zwei; der eine von ihnen $V \Phi V'$ (Fig. 37.) hat seinen Scheitel in Φ , zwischen den Mittelpunkten der Gestirne L und S , der andere aber $V \Phi' V'$ (Fig. 38) hat seinen Scheitel Φ' in der Verlängerung der Linie $L S$, zwischen T und L . Wenn der Punkt O auf der Oberfläche des ersten Kegels liegt, so wird ein Beobachter in O die äussere Berührung der scheinbaren Ränder der Gestirne L und S bemerken; wenn aber O auf der Oberfläche des zweiten Kegels liegen sollte, so wird der Beobachter die innere Berührung der Ränder sehen und dieses wird sich sowohl bei totalen, als überhaupt bei centralen Verfinsterungen ereignen.

Um nun die einfachste Gleichung für die eben erwähnte Kegeloberfläche aufzustellen, denke man sich ein rechtwinkliges dreiaxichtes Coordinaten-System, dessen Ursprung im

Centrum der Erde T sei (Fig. 37. und 38.); seine Achse der z sei die Linie TZ , welche der Linie LS , die die Mittelpunkte der Gestirne L und S verbindet, parallel läuft; ihre positive Richtung, wollen wir auf der Seite der Linie nehmen, welche von dem der Erde am nächsten liegenden Gestirne L nach dem entfernteren S geht und ferner annehmen, dass das positive Ende dieser Achse TZ einem Punkte Z der Himmelskugel entspricht, dessen grade Aufsteigung $= a$, dessen Declination aber $= d$ ist; ferner setzen wir voraus, dass die Achse der y oder TY in der Ebene liege, welche durch TS und den sichtbaren Pol des Aequators geht, und es sei das positive Ende dieser Achse auf einen Punkt T der Himmelskugel gerichtet, dessen grade Aufsteigung $= a$, und dessen Declination $= 90^\circ + d$ ist, die dritte oder die Achse der x sei endlich die Linie TX , welche senkrecht auf der Ebene des Declinationskreises ZTY steht und im Aequator selbst, in einem Winkel-Abstand $= 90^\circ$, vom Durchschnitte des Aequators mit dem Declinationskreise ZTY liegt; die Declination der beiden Enden dieser Achse wird $= 0^\circ 0' 0''$ werden, und als positive Richtung dieser Achse, der x , wollen wir diejenige nehmen, welche der geraden Aufsteigung $= 90^\circ + a$ entspricht. Wir wollen nun annehmen, dass die auf das Centrum der Erde bezogenen:

Coordinaten die Lage bestimmen:

x, y und z des Centrum L , des näheren Gestirns

x', y' und z' des Centrum S , des entfernteren „

ξ, η und ζ des Punktes O , oder des Orts des Beobach.

Ferner sei $G =$ der Linie LS , oder der Entfernung beider Gestirne L und S von einander;

„ „ $f =$ dem Winkel $O\phi L$ (Fig. 37.) oder $O\phi' L$ (Fig. 38.), welchen die Achse mit der Seite des Kegels bildet.

„ „ $s =$ dem liniären senkrechten Abstände der Spitze des Schattenkegels von der Ebene YTX .

Da die Achse TZ mit der Linie LS parallel ist, so haben wir:

$$x' = x, y' = y \text{ und } z' = z + G. \dots \dots \dots (1)$$

Wenn man nun von der Spitze des Kegels Φ aus (Fig. 37.) und vom Punkte O aus, die senkrechten Linien ΦQ und $O b$ auf die Ebene XTY fällt, darauf in dieser Ebene die Linien Ql und bp senkrecht auf die Achse TY zieht, und endlich die Linie pr parallel der Linie bQ zieht, so wird:

$$Ob = \zeta, Tp = \eta; bp = \xi; \Phi Q = s, Tl = y; Ql = x; \\ pl = y - \eta \text{ und } rl = Ql - Qr = Ql - bp = x - \xi.$$

Denkt man sich nun eine Ebene nOk , welche durch den Ort des Beobachters in O geht, und der Ebene YTX parallel ist; bezeichnet die in ihr, mit den Achsen TY und TX , parallel laufenden Linien durch On und Om , ferner den Punkt, wo die Verlängerung der Linie LS diese Ebene $Om n$ trifft, durch K , und fällt endlich die Linie Kn senkrecht auf On , so wird:

$$Kn = rl = x - \xi; On = pl = y - \eta \text{ und } OK = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Aus dem bei K rechtwinklichten Dreiecke ΦOK , folgt:

$$tg f = tg \Phi OK = \frac{OK}{\Phi K} \text{ und } \Phi K = Q\Phi - KQ = s - \zeta,$$

mithin:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (s - \zeta)^2 tg^2 f \dots \dots \dots (2)$$

Diese Gleichung entspricht der Kegeloberfläche bei der äusseren Berührung, eine ganz ähnliche kann man aber auch für den Schattenkegel bei der inneren Berührung ableiten.

Bei der Annahme, dass beide Gestirne L und S kugelförmig sind, kann man den Halbmesser des ersten Gestirnes oder $LW = k$ und den Halbmesser SV des zweiten $= k'$ setzen; alsdann hat man aus den ähnlichen bei W und V rechtwinklichten Dreiecken $L\phi W$ und $S\phi V$; $SV : S\phi = LW : L\phi$; $S\phi + L\phi = G$; $S\phi \cdot \sin S\phi V = S\phi \cdot L\phi \sin L\phi W = LW$; aber $S\phi V = L\phi W = f$, $S\phi = z' - s$; $L\phi = s - z$; folglich:

$$z' - s : k' = s - z : k; \quad G \sin f = k' + k$$

Denkt man sich den Schattenkegel, welcher der inneren Berührung entspricht und bezeichnet seinen Scheitel durch ϕ' (Fig. 38.), so wird in diesem Falle $\phi' L = QL - Q\phi' = z - s$; $\phi' S = z' - s$ und $LS = \phi' S - \phi' L = G$; aber es ist $\phi' S \cdot \sin V\phi' S = SV = k'$; $\phi' L \sin W\phi' L = LW = k$; folglich werden wir bei der inneren Berührung haben:

$$z' - s : k' = z - s : k \quad \text{und} \quad G \sin f = k' - k.$$

Hieraus findet man für die

$$\text{äussere Berührung} \dots s = \frac{zk' + z'k}{k' + k} \quad \text{und} \quad \sin f = \frac{k' + k}{G},$$

$$\text{innere Berührung} \dots s = \frac{zk' - z'k}{k' - k} \quad \text{und} \quad \sin f = \frac{k' - k}{G},$$

Wir haben jetzt noch zu betrachten, in welchen Fällen der Winkel f spitz, und wenn er stumpf sein wird. Für einen Beobachter im Punkte O auf der Erdoberfläche wird die Spitze des Schattenkegels entweder nach derjenigen

Himmelsgegend, in welcher die Gestirne liegen, oder nach der entgegengesetzten Gegend gerichtet sein; der erstere Fall, wird sich bei der äusseren Berührung überhaupt und bei der inneren Berührung zur Zeit der ringförmigen Verfinsterungen ereignen; die Spitze des Schattenkegels befindet sich alsdann entweder in \mathcal{O} (Fig. 37.) oder in \mathcal{O}'' (Fig. 39.); dagegen wird der zweite Fall stattfinden, wenn die Finsterniss total und die Berührung innerlich ist; alsdann befindet sich \mathcal{O}' (Fig. 38.) zwischen dem Beobachter und dem Centrum der Erde T . Zählt man nun den Winkel f , welchen die Achse des Kegels mit der Seite des letzteren bildet, immer nach derselben Richtung, so erhält man $f = \mathcal{O} \mathcal{O} \mathcal{Q}$ (Fig. 37.), oder $f = \mathcal{O} \mathcal{O}'' \mathcal{Q}$ (Fig. 39.), welches beide spitze Winkel sind, und $f = \mathcal{O} \mathcal{O}' \mathcal{Q}$ (Fig. 38.), welches ein stumpfer Winkel ist; hieraus sieht man, dass für die äusseren Berührungen überhaupt und für die innere bei ringförmigen Verfinsterungen, der Winkel f spitz ist; dagegen für die inneren Berührungen bei totalen Finsternissen wird dieser Winkel stumpf werden.

Eliminirt man s und $tg f$ aus der Gleichung (2), mit Hülfe ihrer gefundenen Werthe, so erhält man:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{[k'(\alpha - \zeta) \mp k(\alpha' - \zeta)]^2}{G^2 - (k' \mp k)^2} \dots \dots \dots (3)$$

wo (+) sich auf die äusseren und (−) sich auf die inneren Berührungen bezieht. Setzt man nun der Kürze halber:

$$l = \frac{\alpha(k' \mp k) \mp kG}{\mp \sqrt{G^2 - (k' \mp k)^2}} = \alpha tg f \mp k sec f$$

$$i = \frac{k' \mp k}{\mp \sqrt{G^2 - (k' \mp k)^2}} = tg f \dots \dots \dots (4)$$

wo (+) sich auf die äusseren, aber (−) sich auf die inneren

Berührungen bezieht ^{*)}, so erhält man, unter der Bemerkung, dass $z' = z + G$ ist, anstatt der Gleichung (3), die folgende:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (l - i\zeta)^2 \dots \dots \dots (5)$$

155. Wir wollen nun zeigen, wie man für jede gegebene Zeit mit Hülfe der Ephemeride die Werthe von x , ξ , y , η , l , i und ζ berechnen kann. Um dieses zu bewerkstelligen denke man sich ein neues sich im Mittelpunkte der Erde rechtwinkelig durchschneidendes Achsen-System; die neue Coordinaten-Achse der z sei nach dem sichtbaren Pole des Aequators gerichtet, die neue Achse der x sei im Aequator gelegen, und nach einem Punkte des Himmels gerichtet, dessen gerade Aufsteigung = α' , gleich derjenigen des entfernteren Gestirnes von der Erde (der Sonne) sei, endlich sei die Achse der y auf einen Punkt des Aequators gerichtet, dessen gerade Aufsteigung = $90^\circ + \alpha'$, und ferner seien diese Richtungen den positiven Seiten der Coordinaten-Achsen entsprechend. Bezeichnen wir nun durch α , δ und r , die wahre gerade Aufsteigung, die wahre Abweichung und die wahre Entfernung des Mondcentrums vom Erdcentrum, dagegen durch α' , δ' und R dieselben Grössen für das Sonnencentrum, wobei wir annehmen wollen, dass r und R sich auf dieselbe Längen-Einheit beziehen, so können wir die neuen Coordinaten, ganz ähnlich, wie in §. 15. Seite 26. Band I. berechnen, und finden alsdann:

*) Es ist klar, dass $l = stg$ der Radius des Kreises ist, welcher vom Durchschnitte des Schattenkegels mit der Ebene gebildet wird, die durch das Centrum der Erde geht und senkrecht auf der Achse der z steht, von der wir schon §. 154. Seite 85. gesprochen haben.

<p>Die Coordinaten des Mondscentrums L parallel der neuen Achse, der</p> <p>z $r \sin \delta$ y $r \cos \delta \sin (\alpha - \alpha')$ x $r \cos \delta \cos (\alpha - \alpha')$</p>	<p>des Sonnencentrums S</p> <p>$R \sin \delta'$ 0 $R \cos \delta'$</p>
--	--

Wenn man die Coordinaten-Achsen nach dem Mittelpunkte L des Mondes verlegt, wo alsdann die Achse der z nach dem Pole, die Achse der x nach der geraden Aufsteigung $= \alpha'$, und die Achse der y nach der geraden Aufsteigung $= 90^\circ + \alpha'$ gerichtet sein soll, so werden solche Coordinaten-Achsen mit den ebenvorhin erwähnten Achsen parallel laufen, und wir finden alsdann für die *Coordinaten des Mittelpunktes des entfernteren Gestirnes (der Sonne)*, in Bezug auf das der Erde zunächst gelegene:

$$\begin{array}{ll}
 \text{parallel der neuen Achse der } z & \dots G \sin d \\
 \text{,, ,, ,, ,, ,, } y & \dots G \cos d \sin (a - \alpha') \\
 \text{,, ,, ,, ,, ,, } x & \dots G \cos d \cos (a - \alpha')
 \end{array}$$

dann wird vom Centrum L des Mondes ausgesehen, die gerade Aufsteigung des Centrum S , des entfernteren Gestirnes $= a$, seine Declination $= d$ und seine Entfernung $= G$ werden.

Es sei $\frac{G}{R} = g$ und $\frac{r}{R} = m$; dann ist:

$$\left. \begin{array}{l}
 g \sin d = \sin \delta' - m \sin \delta \\
 g \cos d \sin (a - \alpha') = -m \cos \delta \sin (\alpha - \alpha') \\
 g \cos d \cos (a - \alpha') = \cos \delta' - m \cos \delta \cos (\alpha - \alpha')
 \end{array} \right\} \dots (6)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Winkel a und d finden, um aber x , y u. s. w. zu berechnen, muss man wiederum zu unserem ursprünglichen Coordinaten-Systeme §. 154. Seite 84. zurückkehren. Denkt man sich um den Punkt T herum (Fig. 40.) eine Kugel mit einem beliebigen Halb-

messer beschrieben, und bezeichnet auf ihr durch L den Ort des Mondes, durch P den Pol des Aequators und durch Z, Y, X , die Punkte auf dieser Kugel, die von den positiven Enden der oben erwähnten Achsen getroffen werden, so wird alsdann bei diesem Systeme P , in der Ebene des grössten Kreises $Z Y$ liegen und die Punkte L, X, Y, Z werden durch die geraden Aufsteigungen und Abweichungen α und δ , a und d , a und $90^\circ + d$, $90^\circ + a$ und 0° bestimmt werden. Die Coordinaten z, y und x des Punktes L in Beziehung auf T , den erwähnten Achsen parallel genommen, werden den Projectionen der Linie $T L = r$ auf diesen Achsen gleich sein, oder den entsprechenden Producten der Linie $T L$ mit den Cosinussen der Bögen $Z L, Y L$ und $X L$ gleich werden; aber die Cosinusse dieser Bögen kann man aus den sphärischen Dreiecken $Z P L, Y P L$ und $X P L$, leicht berechnen, in denen die Seiten $Z P = 90^\circ - d$, $L P = 90^\circ - \delta$, $Y P = d$, $X P = 90^\circ$ und die Winkel $Z P L = a - \alpha$, $Y P L = 180^\circ - (a - \alpha)$ und $X P L = 90^\circ + a - \alpha$; folglich hat man:

$$\left. \begin{aligned} z &= r [\sin d \sin \delta + \cos d \cos \delta \cos (\alpha - a)] \\ y &= r [\cos d \sin \delta - \sin d \cos \delta \cos (\alpha - a)] \\ x &= r \cos \delta \sin (\alpha - a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Hat man auf diese Weise z, y und x berechnet, so kann man z', y' und x' durch folgende Ausdrücke finden:

$$z' = z + G, y' = y \text{ und } x' = x.$$

Denkt man sich nun, dass L in (Fig. 37.) nicht mehr des Mondscenrum, sondern das geocentrische Zenith des Beobachters bedeutet; so wird alsdann die Declination des Punktes L gleich φ' oder der geocentrischen Breite des Beobachtungsortes, und seine gerade Aufsteigung wird gleich

der in Graden ausgedrückten Sternzeit μ des Beobachters werden; setzt man alsdann die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkte der Erde $= \varrho$, so erhalten wir die Werthe von ζ , η und ξ aus der Gleichung (7), wenn man darin statt r , α und δ , die Grössen ϱ , μ und φ' substituirt; folglich ist nunmehr:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \varrho [\sin d \sin \varphi' + \cos d \cos \varphi' \cos (\mu - \alpha)]; \\ \eta &= \varrho [\cos d \sin \varphi' - \sin d \cos \varphi' \cos (\mu - \alpha)]; \\ \xi &= \varrho \cos \varphi' \sin (\mu - \alpha). \end{aligned} \right\} \dots \dots (8).$$

Die Einheit, auf welche sich die Längen der Linien r , R und ϱ beziehen, ist vollkommen willkürlich; zur Bequemlichkeit der Rechnung hat Bessel für diese Einheit den Aequatorial-Halbmesser der Erde angenommen. Es sei das nähere Gestirn der Mond, das entferntere die Sonne, nimmt man alsdann an, dass die Aequatorial-*Horizontal-Parallaxe* des Mondes $= \pi$ ist, die mittlere *Horizontal-Parallaxe* der Sonne $= \pi'$, und r' die Entfernung des Erdcentrums vom Sonnencentrum, ebenso ausgedrückt wie man es in den Sonnentafeln oder Ephemeriden findet; d. h. wo die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit betrachtet wird; so erhält man, wenn der Aequatorial-Halbmesser der Erde zur Einheit genommen wird:

$$r = \frac{1}{\sin \pi} \quad \text{und} \quad R = \frac{r'}{\sin \pi'}.$$

Es sei H der *mittlere Halbmesser* der Sonne, oder der Halbmesser in welchem die Sonnenscheibe in der Entfernung $r' = 1$ erscheint; so wird der *liniäre Halbmesser* der Sonne oder k' , falls der Aequatorial-Halbmesser der Erde zur Einheit genommen wird, ausgedrückt werden, durch:

$$k' = \frac{\sin H}{\sin \pi'} \dots \dots \dots (9);$$

folglich wird man für alle Sonnenfinsternisse haben:

$$r = \frac{1}{\sin \pi}; m = \frac{\sin \pi'}{r' \sin \pi}; g = \frac{G \cdot \sin \pi'}{r'}; \dots \dots \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin f &= \frac{\sin H \pm k \sin \pi'}{r' g} \\ \text{tg } f &= l = z \text{ tg } f \pm k \sec f \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} + \text{ für die äusseren Berührungen} \\ - \text{ für die inneren Berührungen} \end{array}$$

Der Zähler im Ausdrucke für $\sin f$ ist eine für alle Sonnenfinsternisse constante Grösse; Encke hat aus den Venus-Durchgängen vor der Sonnenscheibe in den Jahren 1761 und 1769 gefunden, dass $\pi' = 8''.5776$ ist; aus den Messungen Bessels bei dem Durchgange des Merkurs vor der Sonne im Jahre 1832 wurde $H = 959''.788$ abgeleitet und endlich folgt aus den Burckhardtschen Mondstafeln, dass wenn man den Aequatorial-Halbmesser der Erde als Einheit annimmt, der liniäre Halbmesser des Mondes oder $k = 0.2725$ sein wird; folglich hat man überhaupt:

$$\begin{aligned} \log \pi' &= 5.6189407 - 10; \dots; \log(\sin H + k \sin \pi') = 7.6688050 - 10; \\ \log(\sin H - k \sin \pi') &= 7.6666896 - 10 \dots \dots \dots (11). \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Ausdrücke für a , d , g und für die Coordinaten x , y , z , ξ , η und ζ in die bequemste Form zur logarithmischen Berechnung umwandeln; es sei daher:

$$\text{tg } u = \frac{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \cdot \text{tg} \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}; \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos u};$$

so kömmt:

$$g = \sqrt{1 - 2m \cos \gamma + m^2}$$

Weil nun γ , oder die geocentrische Entfernung beider Gestirne, ein sehr kleiner Winkel bei Sonnenfinsternissen ist, so kann man folgende schnell convergirenden Reihen annehmen:

$$g = 1 - m + \frac{1}{2} \frac{m}{1-m} \cdot \gamma^2 \sin^2 1'' - \dots; d_0 = \delta' + \frac{m}{g} (\delta' - \delta)$$

$$d - \delta' = \frac{m}{g} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \delta' - \delta \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta)}{\sin 1'' \cos \frac{1}{2} (\delta' + d_0)} - \frac{1}{2} m \gamma^2 \frac{\sin 1'' \cdot \sin \delta'}{\cos \frac{1}{2} (\delta' + d_0)} + \dots$$

$$a - \alpha' = \left(\frac{m \cos \delta}{\cos \delta'} \right) \frac{\sin (\alpha' - \alpha)}{\sin 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{m \cos \delta}{\cos \delta'} \right)^2 \frac{\sin 2 (\alpha' - \alpha)}{\sin 1''} + \dots$$

wenn m sehr klein ist, oder:

$$tg(a - \alpha') = \frac{m \cos \delta \cdot \sin (\alpha' - \alpha)}{2 \sin \frac{1}{2} (b - \delta') \sin \frac{1}{2} (b + \delta')}, \text{ wo } \cos b = m \cos \delta \cos (\alpha' - \alpha);$$

wenn m kein sehr kleiner Bruch ist.

Bei den Verfinsterungen der Sonne durch den Mond ist m ungefähr $\frac{1}{400}$, und dann sind die letzten Glieder in den Ausdrücken für $d - \delta'$ und $a - \alpha'$ beinahe unmerklich.

Es sei:

$$tg \delta \sec (\alpha - a) = tg \Theta; \frac{\cos \delta \cos (\alpha - a) \sec \Theta}{\sin \pi} = E$$

$$tg \varphi' \sec (\mu - a) = tg \psi; q \cos \varphi' \cos (\mu - a) \sec \psi = F$$

wenn man alsdann bei x, y u. s. w. dieselbe Einheit wie oben annimmt, so wird:

$$x = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - a)}{\sin \pi}$$

$$y = E \sin (\Theta - d); z = E \cos (\Theta - d) \dots \dots \dots (12)$$

$$\xi = \rho \cos \varphi' \sin (\mu - a);$$

$$\eta = F \sin (\psi - d), \quad \zeta = F \cos (\psi - d) \dots \dots \dots (13)$$

156. Diese Formeln für x, y, z, ξ, η und ζ sind ganz allgemein und beziehen sich auf jede Verfinsternung; im Falle der Bedeckung eines Planeten durch den Mond bleibt alles beim Gesagten, nur bezeichnet alsdann r' die Entfernung des Planeten von der Erde, eben so ausgedrückt wie es in den Ephemeriden geschieht und H ist derjenige Winkel, unter welchem der Halbmesser des Planeten vom Centrum der Erde aus erscheinen würde, wenn der Planet sich in einer Entfernung von der Erde befände, die gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist. Im Falle einer Sternbedeckung werden sich π', r' und H auf den Stern beziehen, und daher alsdann $\pi' = 0, r' = \infty, H = 0; m = 0, f = 0, a = a'; d = \delta'$ und $(s - \zeta) \operatorname{tg} f = k = 0,2725$.

Bei den Durchgängen der unteren Planeten vor der Sonnenscheibe stellen r und r' die Entfernungen des Planeten und der Sonne von der Erde dar, ebenso ausgedrückt wie man es gewöhnlich in den Tafeln findet; α, δ und π beziehen sich alsdann auf den Planeten, bezeichnet man durch h den Winkelhalbmesser des Planeten, wie er von der Erde aus erscheinen würde, wenn der Planet sich in einer Entfernung von der Erde befände, die gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist, so hat man nach den Formeln in §. 155. Seite 92, wenn man anstatt r den Werth $\frac{r}{\sin \pi'}$ setzt:

$$m = \frac{r}{r'}; \sin f = \frac{\sin H \pm \sin h}{r' g}; s \operatorname{tg} f = z \operatorname{tg} f \pm \frac{\sin h}{\sin H} \sec f.$$

157. Wir wollen hier nun zwei Aufgaben behandeln, 1stens: Eine Finsterniss für irgend einen bestimmten Ort der

Erde vorauszuberechnen, unter der Bedingung dass man sich mit einer genäherten Berechnung begnügt, und 2^{ten}: Die genaue Länge eines Ortes und die Tafelfehler der Gestirne mit Hülfe einer beobachteten Finsterniss zu berechnen.

Wir wollen zuerst diese Aufgaben in Beziehung auf die Verfinsterungen der Sonne durch den Mond auflösen. Es sei daher φ die geographische Breite eines gegebenen Ortes, φ' seine geocentrische, und ω die in Zeit ausgedrückte östliche Länge dieses Ortes vom Meridiane der Ephemeride abgezählt.

Für den gegebenen Ort der Erde kann sich der Anfang und das Ende der Verfinsterung, für die Erde überhaupt, nur um wenige Stunden vor und nach der Mitte der Verfinsterung, wie man sie in der Ephemeride angegeben findet ereignen; es sei daher T die mittlere Sonnenzeit, welche bei der Mitte solcher Verfinsterung unter dem Meridiane, für welche die Ephemeride berechnet ist, gezählt wurde, so wird $T + \omega$ die entsprechende mittlere Zeit dieser Mitte, unter dem Meridian des gegebenen Ortes sein, und setzt man nun $T + \omega + t$ für die mittlere Zeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss an dem gegebenen Orte, so können wir annehmen, dass t ein kleiner Zeitraum ist*).

Für die mittleren Zeiten $T - 1^h$ und $T + 1^h$ berechnet man sich alsdann aus der Ephemeride α , δ und $\pi \llcorner$ für den Mond und α' , δ' und r' für die Sonne; hierauf findet man nach §. 155. Seite 89. Gleichung (6) und (10) die Winkel a und d und §. 155. Seite 93. Gleichung (12), die Werthe

*) Wenn man keine astronomische Ephemeride zur Hand hat, in welcher man immer die Finsternisse für einen gewissen Ort der Erde voraus berechnet findet, so kann man die Monds- und Sonnentafeln zu Hülfe nehmen, und für T alsdann, entweder die Zeit der wahren Conjunction, oder noch besser die Zeit der Mitte der Verfinsterung für die Erde überhaupt nehmen, welche sehr leicht zu berechnen ist.

von z , y und x ; ebenso die Werthe l , und $\log i$ nach §. 154. Seite 87. Gleichung (4) und §. 155. Seite 92. Gleichung (9) und (10), welche letzteren man aber nur für die Zeit T bestimmt; denn die Bedeutung dieser Grössen selbst zeigt, dass sie sich sehr langsam ändern werden, und folglich kann man für eine genäherte Berechnung, diese Werthe, während der ganzen Dauer der Verfinsternung als constant annehmen.

Nimmt man nun an, dass zu den mittleren Zeiten $T - 1^h$ und $T + 1^h$, unter dem Meridiane der Ephemeride die Coordinaten x , y und z , die Werthe:

$$p - p', q - q', b - b' \dots \dots \text{ und } \dots \dots p + p', q + q', b + b'$$

haben werden, so werden alle diese Werthe für alle Orte der Erde ganz allgemein sein; für den gegebenen Ort auf der Erde aber, muss man noch die Sternzeiten berechnen, welche unter dem Meridiane dieses Ortes, in denjenigen Augenblicken gezählt wurden, als die mittleren Zeiten $T + 1^h$ und $T - 1^h$ unter dem Meridian der Ephemeride stattfanden; alsdann berechnet man sich nach Gleichung (8) §. 155. Seite 91. die Werthe der Coordinaten ξ , η und ζ für den gegebenen Ort der Erde; und wir wollen nun diese Coordinaten für die eben erwähnten beiden Augenblicke gleich:

$$u - u', v - v', w - w' \dots \dots \text{ und } \dots \dots u + u', v + v', w + w'$$

annehmen.

Darauf wird man genähert annehmen können, dass entweder zur Zeit der wahren Conjunction, oder zur Zeit T unter dem Meridiane der Ephemeride, die Werthe x , y , z , ξ , η und ζ , den Werthen p , q , b , u , v und w gleich sein werden, ferner, dass die stündlichen Veränderungen dieser Werthe ausgedrückt sind, durch: p' , q' , b' , u' , v' und w' , und endlich

kann man überhaupt genähert annehmen, dass im Laufe eines nicht zu grossen Zeitraumes die erwähnten Werthe sich der Zeit proportional ändern werden; mithin findet man alsdann für die mittlere Zeit $T + t$ unter dem Meridiane der Ephemeride, genähert:

$$\begin{aligned} x &= p + p' t; y = q + q' t; z = b + b' t, \\ \xi &= u + u' t; \eta = v + v' t; \zeta = w + w' t \end{aligned}$$

wo t in Stunden und Stundenbruch ausgedrückt ist.

Keine der Coordinaten ξ , η und ζ kann die Einheit übertreffen; ferner verändern sie sich im Laufe eines nicht zu grossen Zeitraumes sehr wenig, und der Werth $l - i \zeta$, welcher der Zeit T entspricht, bleibt beinahe für die Dauer einer Finsterniss constant; denn erstens verändert sich l sehr langsam, und zweitens wird ζ mit $i = tg f$ multiplicirt, wo f ein sehr kleiner Winkel ist. Auf diese Weise erhält man aus der Gleichung (5) §. 154. Seite 88. wenn man anstatt x , y u. s. w. ihre Werthe setzt:

$$[p - u + (p' - u') \cdot t]^2 + [q - v + (q' - v') \cdot t]^2 = (l - i \zeta)^2.$$

Zur Erleichterung der Rechnung kann man setzen:

$$\left. \begin{aligned} p - u &= m \sin M; p' - u' = n \sin N; \\ q - v &= m \cos M; q' - v' = n \cos N; \\ l - i \zeta &= L; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

wo m und n immer als positiv betrachtet werden *). Alsdann wird:

*) Wenn T , die hinlänglich genäherte Zeit der Mitte der Verfinsternung für die Erde überhaupt unter dem Meridiane des

$$(m \sin M + n t \sin N)^2 + (m \cos M + n t \cos N)^2 = L^2 \text{ oder} \\ [m \cos(M - N) + n t]^2 = L^2 - m^2 \sin^2(M - N)$$

Beobachters ist, so kann man für eine genäherte Berechnung, u' und v' leicht auf folgende Weise bestimmen; man differenzirt ξ , η und ζ in Bezug auf die Zeit, und vernachlässigt dabei $\frac{\partial d}{\partial t}$, wegen der geringen Aenderung des Winkels d ; alsdann bekommt man:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho \cos \varphi' \cos(\mu' - a + \omega) \frac{\partial(\mu' - a)}{\partial T} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \rho \cos \varphi' \sin(\mu' - a + \omega) \sin d \frac{\partial(\mu' - a)}{\partial T}$$

wo μ' die Sternzeit unter dem Meridiane der Ephemeride, welche der mittleren Zeit T entspricht, bedeutet, und ω die östliche Länge des gegebenen Ortes in Bezug auf den Meridian der Ephemeride, ebenso wie μ' in Graden ausgedrückt, bezeichnet; es entspricht daher $\mu' + \omega$ der Sternzeit, in Graden ausgedrückt, am gegebenen Orte der Erde, $\frac{\partial(\mu' - a)}{\partial T}$ ist aber die Aenderung der Grösse $(\mu' - a)$

in der angenommenen Zeit-Einheit, ebenso wie $\mu' - a$ selbst, in Graden ausgedrückt; nimmt man für diese Zeiteinheit eine mittlere Stunde an, und bezeichnet durch $A(\mu' - a)$, die Aenderung von $(\mu' - a)$ in Bogensekunden, in einer mittleren Stunde, so wird: $A(\mu' - a) \sin 1'' = \frac{\partial(\mu' - a)}{\partial T}$ werden, und daher kann man ohne einen sehr grossen Fehler zu begehen, annehmen, dass:

$$u' = \rho \cos \varphi' \cos(\mu' - a + \omega) A(\mu' - a) \sin 1'' \\ v' = \rho \cos \varphi' \sin(\mu' - a + \omega) \sin d A(\mu' - a) \sin 1''$$

Hat man diese Werthe von u' und v' gefunden, so genügt es, u und v nur einmal für die Epoche T zu berechnen.

Es sei nun $\frac{m \sin (M - N)}{L} = \sin \psi (15);$

so wird, wenn t eine reele Grösse ist, oder die Verfinsternung wirklich stattfindet, der Winkel ψ immer möglich zu berechnen sein; substituirt man darauf $\sin \psi$ in den vorletzten Ausdruck, so erhält man nach Ausziehung der Quadratwurzel:

$$t = \frac{m \cos (M - N)}{n} \pm \frac{L \cos \psi}{n}$$

wo die Einheit auf die sich t bezieht, eine mittlere Stunde ist. Es ist offenbar dass der grössere der beiden Werthe von t , in einem positiven Sinne verstanden, sich auf das Ende, der kleinere von beiden sich aber auf den Anfang der Finsterniss beziehen muss, weil nämlich das Ende später als der Anfang erfolgt. Nimmt man auf diese Weise $\psi < 90^\circ$ an, so findet man, dass für den gegebenen Ort der Erde, nach der mittleren Zeit dieses Ortes:

der Anfang der Verfinsternung um $T + \omega - \frac{m}{n} \cos (M - N) - \frac{L}{n} \cos \psi$

das Ende „ „ „ $T + \omega - \frac{m}{n} \cos (M - N) + \frac{L}{n} \cos \psi$

stattfinden wird, wo L ohne merklichen Fehler mit l verwechselt werden darf.

Um nun bestimmen zu können, an welchem Punkte des scheinbaren Sonnenrandes, der Anfang oder das Ende der Finsterniss stattfinden wird, muss man sich eine Linie denken, welche durch den Ort des Beobachters parallel mit der Linie der Conjunction des Centrum des Mondes und der Sonne fortläuft, und nach der positiven Seite der Coordinaten-Achse der z gerichtet ist, so wird alsdann die Ebene, welche durch

diese Linie, und der Achse der (y) (§. 154. Seite 84.) parallel, gelegt wird, mit der Ebene, welche durch jene Linie und den scheinbaren Ort des Gestirnes geht, einen Winkel bilden, dessen Tangente $= \frac{x - \xi}{y - \eta}$ ist. Es sei dieser Winkel $= Q$;

weil nun die Sonne sehr weit von der Erde und vom Monde entfernt ist, so wird die Linie der Conjunction, welche durch das Centrum des Mondes und der Sonne geht, zur Zeit einer Finsterniss, einen sehr kleinen Winkel mit derjenigen Linie bilden, welche durch den Ort des Beobachters und der Sonne geht; man kann daher annehmen, dass der Winkel Q , demjenigen Winkel gleich ist, welcher am Sonnen Centrum, durch den Declinationskreis der Sonne und denjenigen Kreis gebildet wird, welcher durch das Centrum der Sonne und den Punkt des scheinbaren Sonnenrandes geht, wo der Anfang oder das Ende der Finsterniss stattfindet; also wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} Q &= \frac{x - \xi}{y - \eta} = \frac{p - u + (p' - u') \cdot t}{q - v + (q' - v') \cdot t} \\ &= \frac{m \sin M + n \sin N \cdot t}{m \cos M + n \cos N \cdot t} \\ &= \frac{m \sin M - m \sin N \cos (M - N) \mp L \cos \psi \sin N}{m \cos M - m \cos N \cos (M - N) \mp L \cos \psi \cos N} \end{aligned}$$

Setzt man anstatt L seinen Werth aus (15), so erhält man nach einiger Reduction:

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\sin \psi [\sin M - \sin N \cos (M - N)] \mp \sin (M - N) \cos \psi \sin N}{\sin \psi [\cos M - \cos N \cos (M - N)] \mp \sin (M - N) \cos \psi \cos N}$$

$$\begin{aligned} \text{Aber } \sin M - \sin N \cos (M - N) &= + \cos N \sin (M - N) \\ \cos M - \cos N \cos (M - N) &= - \sin N \sin (M - N) \end{aligned}$$

folglich:

$$\operatorname{tg} Q = \frac{+ \sin \psi \sin (M-N) \cos N \mp \cos \psi \sin (M-N) \sin N}{- \sin \psi \sin (M-N) \sin N \mp \cos \psi \sin (M-N) \cos N}$$

oder endlich:

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\sin (\psi \mp N)}{\mp \cos (\psi \mp N)} = \mp \operatorname{tg} (\psi \mp N)$$

Hier bezieht sich das obere Zeichen (—) auf den Anfang der Verfinsternung, das untere (+) dagegen auf das Ende; also hat man:

$$\begin{aligned} \text{für den Anfang} \dots \operatorname{tg} (180 - Q) &= \operatorname{tg} (\psi - N), \text{ oder } Q = 180^\circ + N - \psi \\ \text{für das Ende} \dots \operatorname{tg} Q &= \operatorname{tg} (\psi + N), \text{ oder } Q = N + \psi \end{aligned}$$

Der Winkel Q wird auf dem Rande der Sonne, von seinem Nordpunkte selbst aus nach Osten von 0° bis 360° gezählt; denkt man sich nämlich durch das Centrum der Sonne einen Declinationskreis gelegt, so wird Q den Winkel bedeuten, welcher zwischen dem Durchschnittspunkte des Declinationskreises mit dem scheinbaren Sonnenrande, und dem Punkte des Anfanges oder Endes der Finsterniss liegen wird; dieses sind daher die Punkte, auf welche der Beobachter seine ganze Aufmerksamkeit richten muss, um die Erscheinung nicht zu verfehlen. Wenn der Beobachter ein parallaxtisch aufgestelltes Fernrohr hat, so kann er sehr leicht den Nordpunkt des scheinbaren Sonnenrandes bestimmen. In der Ocularröhre solcher Fernröhre sind zwei Fäden eingespannt, die rechtwinklicht aufeinander stehen; stellt man alsdann bei diesen die Ocularröhre so, dass wenn das Fernrohr fest aufgestellt ist, irgend ein Sonnenfleck bei der täglichen scheinbaren Bewegung der Sonne im Gesichtsfelde des Fernrohres den einen Faden nicht verlässt, so wird offenbar der andere Faden an seinen Endpunkten den nördlichsten und südlichsten Punkt

des scheinbaren Sonnenrandes bezeichnen. Aber wenn das Fernrohr nicht parallaxisch aufgestellt ist, so muss man alsdann die Punkte in denen der Anfang und das Ende der Finsterniss stattfinden wird, dadurch bestimmen, dass man ihren Abstand vom obersten Punkte des Sonnenrandes berechnet, wozu man aber erst den Winkel Θ suchen muss, welcher am Centrum der Sonne, von ihrem Declinations und ihrem Höhenkreise gebildet wird; es seien daher α' und δ' , die durch die vorhergehende Berechnung schon bekannte gerade Aufsteigung und Abweichung der Sonne, ebenso μ die bekannte Sternzeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss unter dem Meridiane des Beobachtungsortes, und q die geographische Breite dieses Ortes, so wird alsdann:

$$A = \cos q \sin(\mu - \alpha'); \quad B \sin D = \cos q \cos(\mu - \alpha') \quad \text{und} \quad B \cos D = \sin q$$

alsdann folgt:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{A}{B} \sec(\delta' + D),$$

und der Nordpunkt des scheinbaren Sonnenrandes, wird rechts vom obersten Punkte dieses Randes liegen, wenn die Sonne sich im Westen des Meridianes befindet, und links davon liegen, wenn sie im Osten ist.

Wenn man die Sonnenfinsternisse gerne recht genau vorausberechnen will, so muss man mit Hülfe der, nach der ersten Berechnung genähert gefundenen Zeit t , wie wir es oben gezeigt haben, nochmals die genaueren Werthe von $p, q, b, p', q', b', u, v, w, u', v', w', l - i \zeta$ berechnen, und zwar für den Anfang und das Ende der Finsterniss, und darauf sucht man die neue Correction t' , welche man zu dem Ausdrucke $T + \omega + t$, zulegen muss, um die genaue Zeit der eben erwähnten Erscheinungen zu erhalten; diese Correction t'

wird übrigens eben so berechnet, wie wir es für die Zeit t gezeigt haben, und der Werth von t' übertrifft dann selten $0^h .05$ oder 3 Zeitminuten.

Im Berliner astronomischen Jahrbuche sind besondere Tafeln gegeben, welche die Werthe von p, q, p' und q' von Stunde zu Stunde für jede wichtige Sonnenfinsterniss enthalten, ebenso werden die Werthe $\alpha, \delta, \pi, \alpha', \delta', \log r; a, d, \log g, x, y$ und $\log z, \log n, N, l$ und $\log i$ dort angegeben. Mit diesen strengere berechneten Hilfsgrößen, wird die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse sehr einfach.

158. Nach der eben auseinandergesetzten Theorie, wird es leicht sein die Formeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond abzuleiten, denn wegen der ungeheuren Entfernung der Fixsterne kann man annehmen, dass die von ihnen ausgehenden Lichtstrahlen, welche die Ränder des Mondes berühren, die Oberfläche eines Cylinders bilden, und daher hat man bei Bedeckungen der Sterne durch den Mond; $f = 0, a = A, d = D, l = k, i = 0, g = \infty$ und die Horizontal-Parallaxe des Sternes $= 0$; wobei A und D die gerade Aufsteigung und Abweichung des Sternes bedeuten. Folglich wird in diesem Falle:

$$k^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \dots \dots \dots (k)$$

und setzt man hierin statt ξ und η ihre Werthe aus der Gleichung (8). §. 155. Seite 91., und statt x und y ihre Werthe aus der Gleichung (7). §. 155. Seite 90. so erhält man, unter der Bemerkung, dass $r = \frac{1}{\sin \pi}$:

$$k^2 = \left\{ \frac{\cos \delta \sin (\alpha - A)}{\sin \pi} - q \cos \varphi' \sin (\mu - A) \right\}^2 +$$

$$+ \left\{ \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A)}{\sin \pi} - \right. \\ \left. - \varrho (\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos (\mu - A)) \right\}^2$$

wo ϱ und φ' ganz dasselbe, wie in §. 155. Seite 90. bezeichnen; π ist dabei die aequatorial Horizontal-Parallaxe des Mondes.

Es sei T die mittlere Zeit, unter dem Meridiane der Ephemeride, welche sich auf die Mitte der Finsterniss bezieht, und es sei $T + t$ die mittlere Zeit unter demselben Meridiane, welche dem Augenblicke des Eintrittes oder Austrittes des Sternes an einem gegebenen Orte der Erde entspricht, dessen geographische Breite φ , seine geocentrische aber $= \varphi'$, und dessen Länge vom Meridiane der Ephemeride östlich ab gezählt $= \omega$ ist. Zählt man nun die östlichen Längen positiv, und die westlichen negativ, so muss $T + \omega + t$ die mittlere Zeit des Eintrittes oder Austrittes des Sternes am gegebenen Orte sein.

Bezeichnet man nun durch $\frac{1}{15} \mu'$ die Sternzeit, welche an dem gegebenen Orte der dortigen mittleren Zeit $T + \omega$ entspricht; so findet man, wenn man 1 mittlere Zeiteinheit als Einheit annimmt, dass die mittleren Zeiten $T + \omega + 1^h$ und $T + \omega + t^h$ entsprechen werden den Sternzeiten:

$$\frac{1}{15} \mu' + 1^h 0' 9''.86 \text{ und } \frac{1}{15} \mu' + t^h (1.00274) = \frac{1}{15} \mu; \\ \text{denn } 9''.86 = 0^h .00274.$$

Drückt man diese Zeiten in Gradmass aus, so erhält man: $\mu' = \mu + t. 54147''.8$; und alsdann wird man überhaupt haben:

$$\sin (a + b) = \sin a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

$$\cos (a + b) = \cos a - 2 \sin \frac{b}{2} \sin \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

folglich:

$$\begin{aligned}\sin(\mu - A) &= \sin(\mu' - A) + 2 \sin(t.27073''.9) \cos(\mu' - A + t.27073''.9); \\ \cos(\mu - A) &= \cos(\mu' - A) - 2 \sin(t.27073''.9) \sin(\mu' - A + t.27073''.9);\end{aligned}$$

begnügt man sich nun bei der Vorausberechnung einer Sternbedeckung mit einer Genauigkeit von einer oder zwei Zeitminuten, welches immer genügend sein wird, so kann man annehmen, dass $2 \sin(t.27073''.9)$ beinahe:

$$\begin{aligned}&= 2t \sin(27073''.9) = t. \lambda \text{ ist, wobei man} \\ \lambda &= 2 \sin(27073''.9) \text{ setzt, und folglich wird dann } \lg \lambda = 9.4192 - 10\end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun die Glieder, welche von t^2 abhängen, so folgt, dass:

$$\begin{aligned}\sin(\mu - A) &= \sin(\mu' - A) + \lambda t \cos(\mu' - A); \\ \cos(\mu - A) &= \cos(\mu' - A) - \lambda t \sin(\mu' - A);\end{aligned}$$

Wenn t kleiner als eine Stunde, oder doch wenigstens nicht viel grösser ist, so wird diese Annahme keinen merklichen Fehler hervorbringen; ausserdem kann man zuerst noch statt der genauen Ausdrücke für x und y , ihre genäherten Werthe $\frac{\alpha - A}{\pi}$, $\cos \delta$ und $\frac{\delta - D}{\pi}$ benutzen, und ferner die Veränderungen, welche $\cos \delta$ und π im Laufe der Zeit t erleiden, vernachlässigen. Wenn man nun, durch $A\alpha$ und $A\delta$ die stündlichen Bewegungen des Mondes in wahrer gerader Aufsteigung und wahrer Abweichung bezeichnet, und α , δ und π für die Zeit T bestimmt, so erhält man für die Zeit $T + t$:

$$p = \frac{\alpha - A}{\pi} \cos \delta; \quad p' = \frac{A\alpha}{\pi} \cos \delta; \quad q = \frac{\delta - D}{\pi} \quad \text{und} \quad q' = \frac{A\delta}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 x &= p + p' t; \quad y = q + q' t; \\
 \xi &= \rho \cos \varphi' \sin (\mu' - A) + \rho \cos \varphi' \cos (\mu' - A) \cdot \lambda t = u + u' t, \\
 \eta &= \rho \sin \varphi' \cos D - \rho \cos \varphi' \sin D \cos (\mu' - A) \\
 &\quad + \rho \cos \varphi' \sin D \sin (\mu' - A) \cdot \lambda t = v + v' t.
 \end{aligned}$$

Die Werthe p , q , p' , und q' kann man im Berliner astronomischen Jahrbuche finden; $\mu' - A$ ist für Berlin der Stundenwinkel des Sternes, zur Zeit wenn in Berlin die mittlere Zeit T gezählt wird; für denselben Augenblick daher, unter einem anderen Meridiane, dessen östliche Länge von Berlin $= \omega$ in Graden ausgedrückt ist, wird dieser Stundenwinkel $= \mu' - A + \omega$ werden; und setzen wir alsdann zur Abkürzung

$$h = \mu' - A, \quad a = \rho \cos \varphi' \sin (h + \omega), \quad b = \rho \cos \varphi' \cos (h + \omega);$$

so wird:

$$\begin{aligned}
 u &= a; \quad u' = b \cdot \lambda \\
 v &= \rho \sin \varphi' \cos D - b \sin D; \quad v' = a \lambda \sin D.
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von t aus der Gleichung (k) Seite 103. können wir die früheren Vorschriften befolgen, und haben dann:

$$\begin{aligned}
 m \sin M &= p - u, \quad n \sin N = p' - u'. \\
 m \cos M &= q - v, \quad n \cos N = q' - v'.
 \end{aligned}$$

Um aber mit dem Berliner Jahrbuche in Uebereinstimmung zu sein, werden wir nehmen müssen:

$$\frac{m}{k} \sin (M - N) = \cos \psi,$$

und dabei ψ stets kleiner als 180° voraussetzen; alsdann erhält man:

$$t = -\frac{m}{n} \cos(M-N) \mp \frac{k}{n} \sin \psi,$$

wo das obere Zeichen (—) dem Eintritte, das untere (+), dem Austritte angehört, und die Zeit-Einheit auf die sich t bezieht, eine mittlere Stunde ist; alsdann wird an dem gegebenen Orte der Erde, der Anfang oder das Ende der Verfinsternung des Sternes stattfinden, wenn an diesem Orte die mittlere Zeit $T + \omega + t$ gezählt wird.

Bei den Sonnenfinsternissen haben wir angenommen, dass $\frac{m \sin(M-N)}{k} = \sin \psi$ ist, und hier haben wir $\frac{m}{k} \sin(M-N) = \cos \psi$ gesetzt, folglich wenn wir in diesem Falle ebenfalls den Winkel Q auf dem scheinbaren Rande des Mondes, von seinem nördlichsten Punkte aus, bis zu demjenigen Punkte des Mondsrandes zählen, an welchem der Eintritt oder Austritt des Sternes stattfindet, so erhält man:

für den Eintritt $Q = N + \psi - 90^\circ$;

„ „ Austritt $Q = N - \psi - 90^\circ$.

wo hier alsdann der Winkel Q auf dem Mondsrande herum vom Nordpunkte nach links von 0° bis 360° gezählt wird; denn *letzens* muss man in dem früher gefundenen Ausdrucke für Q statt ψ den Werth $90^\circ - \psi$ setzen, und zweitens muss man bedenken, dass dort Q sich auf den Rand des entfernteren Körpers oder der Sonne bezog, hier aber wird Q auf dem Rande des Mondes gezählt, wenn nun aber die Verfinsternung an der östlichen Seite des entfernteren Körpers stattfindet, so wird sie zu derselben Zeit auf der westlichen Seite des näheren Körpers sich ereignen, so dass alsdann der Winkel Q , welcher auf dem Rande des entfernteren Körpers gezählt wird, beinahe die Ergänzung des Winkels

Q , der auf dem Rande des näheren Körpers gezählt wird zu 360° sein wird.

Uebrigens kann man in diesem Falle genau so, wie in §. 157. Seite 102, leicht den Punkt des Mondrandes bestimmen, an welchem der Eintritt oder Austritt stattfindet, wenn man diesen Punkt auf den höchsten oder untersten Punkt des Mondrandes beziehen will.

Bessels Methode zur Berechnung der Länge eines Ortes und der Tafelfehler der Gestirne aus den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse, der Stern- und der Planeten-Bedeckungen.

159. Die Beobachtungen geben unmittelbar entweder die Sternzeit, oder die wahre Sonnenzeit für die verschiedenen Phasen der Verfinsterung an; die mittlere entsprechende Zeit aber lässt sich nur dann bestimmen, wenn die Länge des Ortes ω bekannt ist; doch kann man beinahe immer voraussetzen, dass die vorläufig angenommene Länge des Beobachtungsortes hinreichend genau sein wird, um aus der bekannten Sternzeit, oder wahren Sonnenzeit, die mittlere Zeit ohne einen merklichen Fehler ableiten zu können; und deshalb wollen wir hier sowohl die Sternzeit, wie auch die mittlere Zeit der Beobachtung irgend einer Phase der Verfinsterung, als gegeben betrachten, und ferner noch die geographische Breite des Beobachtungsortes als bekannt ansehen.

Die allgemeinen Zahlen-Elemente der gegebenen Finsterniss x, y, l, i, a und d , muss man von Stunde zu Stunde für die mittlere Zeit des ersten Meridianes berechnen, unter welchem, wir den Meridian der Tafeln oder der Ephemeride verstehen wollen; diese Zeiten muss man so wählen, dass der

Verlauf der Finsterniss nahe zwischen den angenommenen Zeiten zu liegen kommt.

Die Werthe i , a und d verändern sich langsam, und man kann sie daher zu der Beobachtungszeit als sehr genau bekannt annehmen; denn i ist ausserordentlich klein, aber a und d hängen vorzüglich vom Orte der Sonne ab, welchen die Tafeln ziemlich genau geben; wir müssen dieses um so mehr annehmen, da es aus den Beobachtungen von Finsternissen nicht möglich sein wird die Fehler, welche in den eben erwähnten Werthen stecken, zu ermitteln. Dagegen wird man die Fehler, welche in den angenommenen Werthen von x , y und l enthalten sind, recht gut bestimmen können, und daher wollen wir anstatt x , y und l , andere Werthe $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $l + \Delta l$ einführen, wo Δx , Δy und Δl die gesuchten Fehler in x , y und l bezeichnen. Bessel hat auch den Einfluss untersucht, welchen ein unbestimmter Fehler $\Delta e e$ des Quadrates der Excentricität ee des Erd-Meridianes auf die Berechnung der gesuchten Länge des Ortes ω hervorbringt.

Wir wollen nun durch t die mittlere Sonnenzeit der Beobachtung, durch $t - \omega$ die entsprechende mittlere Zeit unter dem ersten Meridiane, und durch τ eine andere willkürlich angenommene mittlere Zeit, die nahe an $t - \omega$ ist, ebenfalls auf den ersten Meridian bezogen, bezeichnen. Nimmt man alsdann an, dass die Grössen x , y . . . zur Zeit τ , die Werthe x_0 , y_0 . . . u. s. w. erhalten, und dass x und y während der kleinen Zwischenzeit $t - \omega - \tau$ Änderungen erfahren, welche der Zeit nahezu proportional sind, so kann man annehmen, dass zur Zeit $t - \omega$, diese Werke von x und y nahezu gleich mit

$$x_0 + x'(t - \omega - \tau) + \Delta x, y_0 + y'(t - \omega - \tau) + \Delta y \text{ u. s. w.}$$

sein werden; wo x' und y' die stündlichen Veränderungen in x und y bezeichnen, welche so berechnet worden sind, dass sie die vorhergehenden Werthe von x und y ganz genau zur

Zeit $t - \omega$ darstellen; man sieht ferner ein, dass die Werthe von x' und y' veränderlich sind, und daher muss man zur genauen Bestimmung von x' und y' die Werthe von x und y für einige Stunden vor und nach der Zeit τ berechnen, so dass man auf diese Weise erhält:

$$\begin{array}{l} \text{für } \tau - 2^h \\ \text{,, } \tau - 1^h \\ \text{,, } \tau \\ \text{,, } \tau + 1^h \\ \text{,, } \tau + 2^h \end{array} \left| \begin{array}{l} x = A_{,,} \\ x = A_1 \\ x = A_0 \\ x = A' \\ x = A'' \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2} (A_0 - A_{,,}) \\ x' = (A_0 - A_1) \\ x' = \frac{1}{2} (A' - A_1) - \frac{1}{6} \Delta_3 \\ x' = (A' - A_0) \\ x' = \frac{1}{2} (A'' - A_0) \end{array} \right.$$

wo Δ_3 , die aus der Zahlen-Reihe $A_{,,}, A$, u. s. w. abgeleitete dritte Differenz ist; alsdann kann man nach den Gesetzen der Interpolation den Werth von x' , welcher irgend einer anderen gegebenen Zeit entspricht, die zwischen $\tau - 2^h$ und $\tau + 2^h$ eingeschlossen ist, leicht finden.

Der Werth $l - i\zeta$ ändert sich im Laufe der Zeit sehr wenig, so dass man ohne merklichen Fehler, den Werth von $l - i\zeta$, welcher der Zeit der Beobachtung entspricht, mit dem wahren berechneten Werthe, den $l - i\zeta$ zur Zeit $t - \omega$ hat, verwechseln darf, wobei man statt der genauen Länge ω , die vorläufig bekannte östliche Länge des Beobachtungsortes brauchen kann. Der Einfluss des Fehlers Δee auf $i\zeta$ ist verschwindend klein, drückt man daher nun x und y u. s. w., durch die ihnen entsprechenden Werthe aus, so erhält man

$$\begin{aligned} (l - i\zeta + \Delta l)^2 = & \left\{ x_0 + x'(t - \omega - \tau) + \Delta x - \xi - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \cdot \Delta ee \right\}^2 \\ & + \left\{ y_0 + y'(t - \omega - \tau) + \Delta y - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \cdot \Delta ee \right\}^2 \dots (A). \end{aligned}$$

Hieraus kann man $t - \omega - \tau$ durch nachfolgende An-

näherungen herleiten; zuerst berechnet man m, M, n, N nach den Formeln:

$$m \sin M = x_0 - \xi; n \sin N = x', \sin \psi = \frac{m}{l - i \xi} \sin (M - N)$$

$$m \cos M = y_0 - \eta; n \cos N = y', \dots \dots \dots (B)$$

Vernachlässigt man alsdann vorläufig $\Delta x, \Delta y, \Delta l, \Delta e, e$, so findet man für das gesuchte ω , die Gleichung:

$$t - \omega - \alpha = -\frac{m}{n} \cos (M - N) - \left(\frac{l - i \xi}{n} \right) \cos \psi \dots \dots (C)$$

Da nun hier ψ mit Hülfe des Sinus bestimmt wird, so bleibt es unentschieden, ob ψ spitz oder stumpf ist; jedoch wird in den meisten Fällen die gesuchte Länge des Ortes oder ω , vorläufig schon so genähert bekannt sein, dass man über die Grösse von ψ nicht im Zweifel sein kann, und es ist klar, dass man ψ so annehmen muss, dass die aus der Gleichung (C) hergeleitete Länge ω nur wenig verschieden von ihrem bekannten genäherten Werthe ausfällt. Sollte die berechnete Länge, um mehrere Minuten von der angenommenen verschieden sein, so muss man nochmals die Werthe x', y', ξ, η, ζ u. s. w. berechnen, und darauf einen genaueren Werth von ω bestimmen.

160. Wenn die verschiedenen Phasen der Verfinsternung, an vielen verschiedenen Orten zugleich beobachtet wurden, so kann man alsdann, nicht nur die gesuchte geographische Länge (ω), sondern auch die Tafelfehler der Gestirne bestimmen. Hierzu wollen wir den Einfluss der Fehler $\Delta x, \Delta y$ u. s. w. in der einfachsten Gestalt entwickeln. Setzt man in die Gleichung (A) die Winkel M und N und die Werthe m und n ein, so folgt sogleich:

$$(l - i\zeta + \Delta l)^2 = \left(m \sin M + n \sin N(t - \omega - \tau) + \Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \Delta ee \right)^2 \\ + \left(m \cos M + n \cos N(t - \omega - \tau) + \Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \Delta ee \right)^2$$

Es sei der Kürze wegen $u = t - \omega - \tau$; setzt man alsdann, statt $l - i\zeta$ seinen Werth aus Gleichung (B), und ordnet die Glieder nach Potenzen von u , so wird:

$$\left(\frac{m \sin(M-N)}{\sin \psi} + \Delta l \right)^2 = m^2 + 2mn \cos(M-N)u + n^2 u^2 \\ + 2 \left(\Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \Delta ee \right) (m \sin M + n \sin N \cdot u) + \left(\Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \Delta ee \right)^2 \\ + 2 \left(\Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \Delta ee \right) (m \cos M + n \cos N \cdot u) + \left(\Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \Delta ee \right)^2 \\ = \left\{ n \cdot u + m \cos(M-N) + \left(\Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \Delta ee \right) \sin N + \right. \\ \left. + \left(\Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \Delta ee \right) \cos N \right\}^2 \\ + \left\{ m \sin(M-N) + \left(\Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial ee} \Delta ee \right) \cos N - \right. \\ \left. - \left(\Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \Delta ee \right) \sin N \right\}^2$$

Setzt man nun zur Vereinfachung:

$$\lambda = + \Delta x \sin N + \Delta y \cos N - \left(\frac{\partial \xi}{\partial ee} \sin N + \frac{\partial \eta}{\partial ee} \cos N \right) \Delta ee$$

$$\lambda' = - \Delta x \cos N + \Delta y \sin N + \left(\frac{\partial \xi}{\partial ee} \cos N - \frac{\partial \eta}{\partial ee} \sin N \right) \Delta ee$$

und vernachlässigt die kleinen Grössen Δl^2 , λ^2 und λ'^2 , so findet man, dass:

$$\begin{aligned}
 [n \cdot u + m \cos (M - N) + \lambda]^2 &= \left(\frac{m}{\sin \psi} \sin (M - N) + \Delta l \right)^2 - \\
 &\quad - [m \sin (M - N) - \lambda']^2 \\
 &= \frac{m^2 \sin^2 (M - N) \cos^2 \psi}{\sin^2 \psi} \left(1 + \frac{2 \Delta l \sin \psi}{m \sin (M - N) \cos^2 \psi} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{2 \lambda' \operatorname{tg}^2 \psi}{m \sin (M - N)} \right).
 \end{aligned}$$

Zieht man aus diesem Ausdrucke, auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und vernachlässigt die Glieder, in welchen Δl und λ' in höheren Potenzen als die erste vorkommen, so findet man:

$$\begin{aligned}
 u = t - \omega - \tau = -\frac{m}{n} \cos (M - N) - \frac{\lambda}{n} + \left\{ \left(\frac{l - i \zeta}{n} \right) \cos \psi + \right. \\
 \left. + \frac{\Delta l}{n} \sec \psi + \frac{\lambda'}{n} \operatorname{tg} \psi \right\}
 \end{aligned}$$

von diesen beiden Zeichen muss man hier nur das obere (—), ähnlich wie in Gleichung (C) nehmen, und ψ in demjenigen Quadranten wählen, für welchen die gefundene Länge ω , nicht widersprechend mit der bekannten angenommenen herauskommt, oder nur wenige Minuten und Secunden von der letzteren abweicht. Auf diese Weise wird:

$$\begin{aligned}
 \omega = t - \tau + \frac{m}{n} \cos (M - N) + \left(\frac{l - i \zeta}{n} \right) \cos \psi + \frac{\lambda}{n} + \\
 + \frac{\lambda'}{n} \operatorname{tg} \psi + \frac{\Delta l}{n} \sec \psi \dots \dots \dots (D)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde nun eine mittlere Stunde als Zeit-Einheit angenommen; um also ω in Stunden, Minuten und Secunden zu erhalten, muss man auch t und τ auf dieselbe Weise ausdrücken, alle anderen Glieder aber mit 3600' multipliciren.

Wir wollen jetzt die Werthe von λ und λ' weiter entwickeln; dazu haben wir:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + n \sin N \cdot (t - \omega - \tau) \text{ und } y = y_0 + n \cos N \cdot (t - \omega - \tau); \\ \text{folglich. } x \sin N + y \cos N &= x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau); \\ -x \cos N + y \sin N &= -x_0 \cos N + y_0 \sin N, \dots (E) \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung hängt nicht von der Zeit ab; setzt man jetzt: $-x_0 \cos N + y_0 \sin N = \sigma$, und nimmt man die Summe der Quadrate der beiden vorhergehenden Ausdrücke für x und y , so wird:

$$x^2 + y^2 = \sigma^2 + [x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau)]^2$$

Hieraus sieht man, dass das Minimum der Summe $x^2 + y^2$, gleich σ^2 ist; bezeichnen wir nun durch T die mittlere Zeit unter dem ersten Meridian, wenn die Summe $x^2 + y^2$ ein Minimum wird, so haben wir zur Bestimmung von T und σ die folgenden Gleichungen:

$$T = \tau - \frac{1}{n} (x_0 \sin N + y_0 \cos N)$$

$$\sigma = -x_0 \cos N + y_0 \sin N, \dots (F)$$

Setzt man darauf diese Werthe in die Gleichung (E) ein, so folgt:

$$x \sin N + y \cos N = n(t - \omega - T)$$

$$-x \cos N + y \sin N = \sigma \dots \dots \dots (G)$$

Mit Hülfe dieser Werthe von T und σ , kann man nun aus der Gleichung (D) die Tafelfehler ausdrücken. Es ist aber:

$$x = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - a)}{\sin \pi}, \quad y = \frac{\cos \delta \sin \delta - \sin \delta \cos \delta \cos(\alpha - a)}{\sin \pi}$$

und setzen wir der Kürze wegen:

$$x = \frac{X}{\sin \pi} \text{ und } y = \frac{Y}{\sin \pi},$$

so folgt aus der Differenzialrechnung:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\sin \pi} - x \cdot \frac{\Delta \pi}{\operatorname{tg} \pi}; \quad \Delta y = \frac{\Delta Y}{\sin \pi} - y \cdot \frac{\Delta \pi}{\operatorname{tg} \pi};$$

und daher den Formeln (F) zufolge:

$$\Delta x \sin N + \Delta y \cos N = \frac{\Delta X \sin N + \Delta Y \cos N}{\sin \pi} - n(t - \omega - T) \frac{\Delta \pi}{\operatorname{tg} \pi}$$

$$- \Delta x \cos N + \Delta y \sin N = - \frac{\Delta X \cos N + \Delta Y \sin N}{\sin \pi} - \sigma \frac{\Delta \pi}{\operatorname{tg} \pi}$$

Aber:

$$\Delta X = \cos \delta \cos (\alpha - a) \Delta (\alpha - a) - \sin \delta \sin (\alpha - a) \Delta \delta$$

$$\Delta Y = \cos \delta \sin (\alpha - a) \sin d \Delta (\alpha - a) +$$

$$+ [\cos d \cos \delta + \sin d \sin \delta \cos (\alpha - a)] \Delta \delta$$

$$- [\sin d \sin \delta + \cos d \cos \delta \cos (\alpha - a)] \Delta d$$

Hier sind $\Delta (\alpha - a)$ und $\Delta (\delta - d)$ kleine Fehler, welche man während der ganzen Dauer der Finsterniss als constant ansehen, und als die Tafelfehler zur Zeit der Conjunction betrachten kann, aber alsdann ist $\alpha = a$, und ebenso wird zur Zeit der Verfinsterung selbst, δ immer sehr nahe an d sein, so dass man also in diesem Falle, in den Gliedern die mit $\Delta \delta$ und Δd multiplicirt sind, $\cos (\delta - d) = 1$ annehmen kann, wodurch man erhält:

$$\Delta X = \cos \delta \Delta (\alpha - a) \text{ und } \Delta Y = \Delta (\delta - d),$$

Man kann ebenso in den kleinen Gliedern, ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\sin \pi = tg \pi = \pi$ ist, und erhält auf diese Weise: (H)

$$\begin{aligned} \Delta x \sin N + \Delta y \cos N &= + \sin N \cos \delta \cdot \frac{\Delta(\alpha - a)}{\pi} + \cos N \cdot \frac{\Delta(\delta - d)}{\pi} \\ &\quad - n(t - \omega - T) \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi} \\ - \Delta x \cos N + \Delta y \sin N &= - \cos N \cos \delta \cdot \frac{\Delta(\alpha - a)}{\pi} + \sin N \cdot \frac{\Delta(\delta - d)}{\pi} \\ &\quad - \sigma \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen enthalten den Theil der Ausdrücke λ und λ' , welcher unabhängig von $\Delta e e$ ist; wir wollen daher jetzt die Glieder untersuchen, welche $\Delta e e$ in sich fassen. Aus der Differenziation der Ausdrücke für ξ und η folgt, dass:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial e e} &= \sin(\mu - a) \cdot \frac{\partial(\rho \cos \varphi')}{\partial e e} \\ \frac{\partial \eta}{\partial e e} &= \cos d \cdot \frac{\partial(\rho \sin \varphi')}{\partial e e} - \sin d \cos(\mu - a) \cdot \frac{\partial(\rho \cos \varphi')}{\partial e e}; \\ \text{aber } \rho \cos \varphi' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \text{ und } \rho \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \text{setzt man darauf: } \beta &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \dots \dots \dots, \text{ so folgt:} \\ \frac{\partial(\rho \cos \varphi')}{\partial e e} &= \frac{1}{2} \beta^2 \rho \cos \varphi; \quad \frac{\partial(\rho \sin \varphi')}{\partial e e} = -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Nimmt man Rücksicht auf die Bedeutung von ξ und η , so wird man haben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial e e} = \frac{1}{2} \beta \cdot \rho^2 \xi; \quad \frac{\partial \eta}{\partial e e} = \frac{1}{2} \beta^2 \cdot \eta - \beta \cos d;$$

$$\begin{aligned}
 -\sin N \frac{\partial \xi}{\partial ee} - \cos N \frac{\partial \eta}{\partial ee} &= -\frac{1}{2} \beta^2 (\xi \sin N + \eta \cos N) + \beta \cos d \cos N; \\
 +\cos N \frac{\partial \xi}{\partial ee} - \sin N \frac{\partial \eta}{\partial ee} &= +\frac{1}{2} \beta^2 (\xi \cos N - \eta \sin N) + \beta \cos d \sin N.
 \end{aligned}$$

Aber es ist:

$$\begin{aligned}
 \xi &= x_0 - (x_0 - \xi) = x_0 - m \sin M \\
 \eta &= y_0 - (y_0 - \eta) = y_0 - m \cos M,
 \end{aligned}$$

und in Folge der Gleichungen (F), (B) und (C), hat man:

$$\begin{aligned}
 \xi \sin N + \eta \cos N &= n(t - T) - m \cos(M - N), \\
 \xi \cos N - \eta \sin N &= -\sigma - m \sin(M - N), \\
 -m \cos(M - N) &= n(t - \omega - T) + (l - i \zeta) \cos \psi, \\
 +m \sin(M - N) &= (l - i \zeta) \sin \psi,
 \end{aligned}$$

folglich erhält man: (J)

$$\begin{aligned}
 -\sin N \frac{\partial \xi}{\partial ee} - \cos N \frac{\partial \eta}{\partial ee} &= -\frac{1}{2} \beta^2 [n(t - \omega - T) + (l - i \zeta) \cos \psi] \\
 &\quad + \beta \cos d \cos N. \\
 +\cos N \frac{\partial \xi}{\partial ee} - \sin N \frac{\partial \eta}{\partial ee} &= -\frac{1}{2} \beta^2 [\sigma + (l - i \zeta) \sin \psi] \\
 &\quad + \beta \cos d \sin N.
 \end{aligned}$$

Nun bleibt uns noch übrig die Bedeutung des Fehlers Δl zu entwickeln. Für die äusseren Berührungen überhaupt, und eben so für die inneren bei ringförmigen Finsternissen, haben wir:

$$\begin{aligned}
 l &= z \operatorname{tg} f + k \operatorname{sec} f, \text{ oder:} \\
 l \cos f &= z \sin f + k = z \cdot \frac{\sin H + k \sin \pi \odot}{r' g} + k,
 \end{aligned}$$

wo f ein spitzer Winkel ist; zur Zeit einer totalen Verfinsterung, wird f ein stumpfer Winkel werden, und setzt man alsdann $180 - f = f'$, so findet man:

$$l \cos f' = k - z \sin f = k + z \cdot \frac{k \sin \pi \odot - \sin H}{r' g}$$

Bei der Berechnung der Fehler kann man annehmen, dass:

$$g = 1 - \frac{\sin \pi \odot}{\sin \pi} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{\sin \pi},$$

wo π und $\pi \odot$ die Aequatorial - Horizontal - Parallaxen des Mondes und der Sonne sind.

Folglich alsdann:

$$l \cos f = \frac{r' k \sin \pi + \sin H}{r' \sin \pi - \sin \pi \odot}, \quad \text{oder beinahe} = k + \frac{H}{r' \pi};$$

$$l \cos f' = \frac{r' k \sin \pi - \sin H}{r' \sin \pi - \sin \pi \odot}, \quad \text{oder beinahe} = k - \frac{H}{r' \pi};$$

$$\Delta(l \cos f) = \Delta k + \frac{\Delta H}{r' \pi} - \frac{H}{r'} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi \pi};$$

$$\Delta(l \cos f') = \Delta k - \frac{\Delta H}{r' \pi} + \frac{H}{r'} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi \pi};$$

nun sind aber f und f' sehr kleine Winkel, folglich kann man anstatt $\Delta l \cos f$ und $\Delta l \cos f'$ nahe Δl selbst annehmen, woraus dann folgt, dass:

$$\Delta l = \Delta k \pm \frac{\Delta H}{r' \pi} \mp \frac{H}{r' \pi} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi} \dots \dots \dots (K)$$

wo die oberen Zeichen, sich auf den ersten, und die unteren, sich auf den zweiten, der obigen beiden erwähnten Fälle beziehen.

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\gamma = \frac{3600''}{n \cdot \pi}; \quad \beta = \frac{e \sin \varphi'}{1 - e e} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\Delta B = \gamma [+ \sin N \cos \delta. \Delta (\alpha - a) + \cos N. \Delta (\delta - d)]$$

$$\Delta C = \gamma [- \cos N \cos \delta. \Delta (\alpha - a) + \sin N. \Delta (\delta - d)]$$

und bestimmt darauf σ und T aus der Gleichung (F), so kann man anstatt der Werthe λ , λ' und Δl , ihre Werthe wie sie aus den Gleichungen (H), (J) und (K) folgen, in die Gleichung (D) einsetzen, wodurch man alsdann folgende Formel zur Bestimmung von ω in Zeitsecunden erhält:

. (L)

$$\begin{aligned} \omega = t - \tau + 3600'' \cdot \frac{m}{n} \cos (M - N) + 3600'' \cdot \frac{(l - i \zeta)}{n} \cos \psi \\ + \Delta B + tg \psi. \Delta C + \gamma \left(\pi \Delta k \pm \frac{\Delta H}{r'} \right). \sec \psi \\ - \gamma \left\{ n (t - \omega - T) + \sigma tg \psi \pm \frac{H}{r \pi}. \sec \psi \right\} \Delta \pi \\ - \gamma \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 [n (t - \omega - T) + \sigma tg \psi + (l - i \zeta) \cos \psi] - \right. \\ \left. - \frac{\beta \cos d \cos (N - \psi)}{\cos \psi} \right\} \pi. \Delta e e \end{aligned}$$

wo vorausgesetzt wird, dass die Beobachtungsmomente in mittlerer Zeit gegeben sind, und das obere Zeichen bei H und ΔH sich auf die äusseren Berührungen überhaupt, oder auf die inneren bei ringförmigen Finsternissen, dagegen das untere Zeichen sich nur auf die inneren Berührungen bei totalen Finsternissen bezieht.

161. Ganz ähnliche Formeln kann man nun für die Berechnung jeder anderen Art von Verfinsternung aufstellen;

indem man die nöthigen Veränderungen vornimmt, welche in den verschiedenen Fällen stattfinden, und die wir schon ausführlich auseinander gesetzt haben, in §. 156. Seite 94.

Man findet ein sehr ausführliches Rechnungsbeispiel im zweiten Bande der Astronomischen Untersuchungen von Bessel und in der vortrefflichen Abhandlung von Olufsen über die Sonnenfinsterniss am 7^{ten} Juli 1842. (Astronomische Nachrichten. No. 518 und 519.) Sind correspondirende Beobachtungen an vielen verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche gemacht worden, so wird man die wahrscheinlichsten Längenunterschiede nach der vom berühmten Astronomen Hansen vorgeschlagenen Methode (Astronomische Nachrichten No. 392—395) am sichersten bestimmen können.

Vom Einflusse der Irradiation des Lichtes auf den scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne.

162. Manche der früheren Astronomen glaubten, dass zur grösseren Uebereinstimmung der Berechnung mit den Beobachtungen von Sonnenfinsternissen, es nöthig sei, den in den Tafeln gegebenen Halbmesser der Sonne um 3'' wegen Irradiation, den gegebenen Halbmesser des Mondes aber, um beinahe 3''.5 wegen der Inflexion des Lichtes zu vermindern; diese Annahme beruht auf die Untersuchungen du Sejours, in Bezug auf die Sonnenfinsternisse in den Jahren 1764 und 1769 *) und auch noch auf einige andere Untersuchungen, von welchen wir weiter unten sprechen werden.

*) *Traité analytique des mouvemens des corps célestes;*
Tome. I. page. 394.

Wir lassen jetzt die Erklärung der Irradiation aus Bessels *)
Schriften hier folgen.

Unter dem Ausdrücke Irradiation versteht man einen, durch die Lebhaftigkeit des Sonnenlichtes erzeugten Lichtrand von einigen Secunden Breite, welcher den wahren Sonnenrand umgiebt, so dass er durch Fernröhre gesehen, nicht von diesem unterschieden werden kann, also die Sonnenscheibe grösser darstellt, als sie wirklich ist. Ist dieses der Fall, so muss bei der Annäherung eines vor der Sonne vorübergehenden dunkeln Körpers, des Mondes oder des Planeten, dass zwischen den Rändern der beiden Gestirne befindliche Licht in dem Augenblicke verschwinden, in welchem der Rand des dunkeln Körpers den wahren Sonnenrand bedeckt; es erfolgt also vor dem Antritte dieses Körpers an den scheinbaren Sonnenrand eine plötzliche Unterbrechung des Lichtfadens zwischen beiden. Da die Irradiation die Mond- oder Planetenscheibe eben so viel verkleinern muss, als sie die Sonnenscheibe vergrössert, so erfolgt die plötzliche Unterbrechung schon im Augenblicke, wenn der scheinbare Zwischenraum zwischen beiden Rändern bis auf die doppelte Breite der Irradiation herabgekommen ist. Bei dem Austritte zeigt sich alles dieses in umgekehrter Ordnung. Die Grösse der Irradiation, kann sowohl dadurch bestimmt werden, dass man die Breite des Lichtrandes im Augenblicke seiner plötzlichen Unterbrechung (oder noch früher, wenn man der Beobachtung durch Rechnung zur Hülfe kommt) misst, als auch durch Vergleichung des gemessenen Sonnendurchmessers mit dem aus der Zeit der Verweilung des durchgehenden Gestirnes vor der Sonnenscheibe erhaltenem Durchmesser.

Die Grösse der Irradiation kann man dadurch bestimmen, dass man die Grösse des Sonnendurchmessers, wie er aus

*) Bessels astronomische Untersuchungen. 2. Band; Seite 246, 247 und 257.

der Messung mit Winkelmesswerkzeugen folgt, mit seiner Grösse vergleicht, wie sie aus den Beobachtungen abgeleitet wird, die in dem Zeitraume, zwischen der ersten und letzten inneren Berührung der Gestirne angestellt wurden. Nicht nur die oben erwähnten Verfinsterungen der Sonne im Jahre 1764 und 1769, sondern auch die Durchgänge des Mercur's im Jahre 1761 und 1769^{*)}, beweisen deutlich die Existenz einer Irradiation des Lichtes; aber ist es eben so ausgemacht, dass die Grösse der Irradiation selbst, sehr vom Fernrohre abhängt, wodurch man die Sonne beobachtet; denn Bessel, hat aus Beobachtungen, die mit dem Fernrohre des Königsberger Heliometers beim Durchgange des Mercur's im Jahre 1832 angestellt wurden, keine Irradiation des Lichtes bei der Sonne gefunden; eben so wenig wurde sie bei der ringförmigen Sonnenfinsterniss im Jahre 1836, welche Bessel mit demselben Fernrohre beobachtete, bemerkt; dagegen hat Argelander gefunden, welcher ebenfalls auf der Königsberger Sternwarte im Jahre 1832 den Durchgang des Mercur's vor der Sonnenscheibe mit Hülfe eines kleinen, aber guten Frauenhoferschen Fernrohrs beobachtete, dass um die Zeit der inneren Berührung herum, als der Rand des Planeten von dem der Sonne, um beinahe eine Secunde von einander entfernt waren, eine Verlängerung der runden Figur des Mercur's nach dem Sonnenrande zu entstand, also wohl eine plötzliche Unterbrechung zwischen beiden Gestirnen. Dieser von Argelander gefundene Werth der Irradiation, ist weit kleiner als der von du Séjour angenommene, und es folgt hieraus, dass sich eigentlich nichts bestimmtes über die Grösse der Irradiation sagen lässt; es ist daher auch ganz unsicher den Einfluss der Irradiation bei der Berechnung von Sonnenfin-

_____ dass man die Grösse des Sonnendurchmessers, wie er aus

(*) Der Venus-Durchgang im Jahre 1769; von J. F. Encke, p. 95—97.

sternissen zu berücksichtigen. Dieselbe Unsicherheit herrscht auch darüber, die Correction des Mondhalbmessers, welche von dem Einfluss der Inflexion des Lichtes auf den Mondrand herrührt und welche von einigen früheren Astronomen angenommen wurde, zu bestimmen.

Allgemeine Bemerkungen über die Beobachtungen von Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen; sowie von der Wichtigkeit einiger Umstände, welche diese Erscheinungen begleiten.

163. Um die Beobachtungen mit Genauigkeit anstellen zu können, muss man vorher nicht blos die Zeit des Anfanges, und des Endes, für die verschiedenen Phasen der Verfinsterung wissen, sondern auch den Ort, in welchem die Erscheinung auf dem scheinbaren Rande der Sonne, oder bei Sternbedeckungen auf dem des Mondes stattfinden wird; die Methoden, die man hierbei befolgen muss, haben wir schon früher erläutert. Wenn der Beobachter ein Fernrohr braucht, welches keine Fäden hat, und sich nur vertical und horizontal bewegen lässt, so muss man den Punkt des Randes des Gestirnes bestimmen, in welchem sich die gegebene Phase der Verfinsterung ereignen wird, indem man hierbei diesen Punkt vom obersten Theile des Randes des Gestirnes abzählt, wie wir es schon früher auseinandergesetzt haben. Alsdann ist es am bequemsten sich eine kleine Zeichnung anzufertigen, welche die Kreisscheibe des Gestirnes darstellt, und auf dieser bezeichnet man sich den obersten Theil des Randes und den Punkt, wo der Anfang und das Ende der Verfinsterung stattfinden wird; benutzt man nun nachher diese Zeichnung bei den Beobachtungen, so muss man sich ferner

erinnern, dass im astronomischen Fernrohre die Gegenstände sich im umgekehrter Gestalt darstellen.

Zur bequemerer Beobachtung schlägt Bessel vor die Ocularröhre so einzurichten, dass in ihrem inneren, ein deutlich zu sehender Faden eingespannt ist, und dass man diese Röhre ganz frei um die optische Achse des Fernrohres herum bewegen kann; an dem äusseren Umfange der Ocularröhre herum, ist eine Kreistheilung von 0° bis 360° angebracht, und auf diese ein Zeiger gerichtet, der an der Haupt- röhre fest angebracht ist, so dass er folglich bei der Drehung des Oculares unbeweglich bleibt. Wenn das Fernrohr parallactisch aufgestellt ist, so kann man die Richtung der täglichen Bewegung auf der Theilung der Ocularröhre ein für allemal bestimmen; ist das Fernrohr aber nicht parallactisch aufgestellt, so kann man einige Minuten vor dem Eintritte der Erscheinung selbst, den Faden auf den Rand der Sonne oder des Mondes, oder noch besser auf einen nicht zu grossen Flecken dieser Gestirne stellen, und darauf die Ocularröhre so lange drehen, dass der Rand des Gestirnes oder der Fleck auf demselben, bei der scheinbaren täglichen Bewegung dieses Gestirnes immer mit dem Faden im Gesichtsfelde des Fernrohres in Berührung bleibt. Alsdann wird der Theilstrich auf der Ocularröhre, welcher dem Zeiger gegenübersteht, die Lage des Fadens bestimmen, welche der täglichen Bewegung des Gestirnes entspricht, und wenn man denn diese Theilung auf der Ocularröhre um 90° dreht, so wird die Lage des Fadens sehr nahe mit dem Declinationskreise des Gestirnes zusammenfallen, und das obere Ende dieses Fadens (in astronomischen Fernröhren das untere, weil diese Fernröhre die Gegenstände umkehren) wird in unserer Halbkugel dem Nordpunkte des scheinbaren Randes des Gestirnes entsprechen; dreht man darauf die Ocularröhre um den Winkel Q (Seite 46; oder Seite 101 und Seite 107.) von diesem Nordpunkte aus, nach der gehörigen Seite herum, so wird der

Faden alsdann eine solche Lage einnehmen, dass das eine seiner Enden, auf dem Rande des Gestirnes den Ort angegeben wird, an welchem die dem Winkel Q entsprechende Phase der Verfinsternung stattfinden wird; das andere Ende aber wird dem diametral entgegengesetzten Orte des Randes entsprechen; da aber immer die Seite des Gestirnes bekannt ist, auf welcher die Erscheinung sich ereignen wird, so wird man niemals darüber im Zweifel sein können, auf welches Ende des Fadens man seine Aufmerksamkeit zu richten hat. Bei dieser Stellung des Fadens würde er nur dann den gewünschten Punkt am Rande des Gestirnes anzeigen, wenn man ihn auf den Mittelpunkt der Sonne oder des Mondes brächte. Dieses ist aber bei stark vergrößernden Fernröhren, welche nur einen Theil der Sonne oder des Mondes zeigen, nicht mit der nöthigen Genauigkeit ausführbar. Der Faden muss daher dem, die Mittelpunkte der Gestirne verbindenden grössten Kreise, senkrecht gestellt, und alsdann mit dem sichtbaren Gestirne zur Berührung gebracht werden; dieser Berührungspunkt giebt nun den Ort an, wo die erwartete Erscheinung stattfinden wird.

Es kann sich zuweilen ereignen, dass an einem Abende der Mond kurz nach einander mehrere Sterne verfinstert, und dieses wird zum Beispiele geschehen, wenn der Mond das Sternbild der Pleiaden bedeckt, alsdann aber kann man, anstatt die Bedeckung eines jeden Sternes für sich vorauszuberechnen, eine allgemeine Figur anfertigen, welche sehr bequem alle zu erwartenden Bedeckungen in den verschiedenen Fällen zeigt. Hierzu wählt man sich nun eine Epoche, welche dem Mittel der Zeiten der Bedeckungen vieler benachbarter Sterne entspricht, auch ist es gut zu dieser Epoche irgend eine volle mittlere Stunde in Greenwich zu nehmen, welche dem erwähnten Mittel so nahe als möglich liegt, und für welche man dann gleich ohne Interpolation den Ort des Mondes aus dem Nautical Almanac entnehmen kann; es sei

diese Greenwicher mittlere Zeit $= T$; darauf sucht man in dem Nautical Almanac die geraden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondes für die drei Zeiten $T - 1^h$, T und $T + 1^h$, ebenso die Horizontal-Parallaxe des Mondes und seinen wahren Halbmesser r , und berechnet alsdann die diesen mittleren Greenwicher Zeiten entsprechenden Sternzeiten $S - 1^h 0' 10''$, S und $S + 1^h 0' 10''$, die sich auf den Meridian eines Beobachtungsortes beziehen sollen, dessen geocentrische Breite $= \varphi'$ ist, und der als bekannt angesehen werden muss; mit diesen gegebenen Grössen, berechnet man sich nun für die eben erwähnten Zeiten, die scheinbaren geraden Aufsteigungen α' , α'' , α''' , und die scheinbaren Abweichungen δ , δ' , δ'' für den Mond und zwar in Graden, Minuten und Zehnteln von Minuten ausgedrückt, indem man sich bei der ganzen Berechnung nur 4 oder höchstens 5stelliger Logarithmen zu bedienen braucht. Fällt man jetzt in Taf. II. Fig. 41. die gerade Linie $L' L''$ senkrecht auf die Linie $A B$, so wird man durch die erste Linie $L' L''$ einen Theil des scheinbaren Declinationskreises des Mondes zur mittleren Zeit T darstellen können, und ebenso durch die zweite Linie $A B$ einen Theil seines Declinationsparallels, in welchem zu dieser Zeit sein Centrum L sich befindet. Man macht sich nun einen Maassstab, und nimmt zum Beispiel $\frac{1}{10}$ Theil eines Zolls für jede Bogenminute eines grössten Kreises an; auf der Linie $A B$ setzt man dann mittelst eines Zirkels mit Hülfe des Maassstabes links von L aus, den Werth $Ln = (\alpha'' - \alpha') \cos \delta'$, und ebenso auf der rechten Seite von L aus, die Linie $Lm = (\alpha''' - \alpha'') \cos \delta''$ mit dem Zirkel ab. In n und m errichtet man darauf die Perpendikel nq und mp auf die Linie $A B$, und macht $nq = \delta' - \delta''$ und $mp = \delta''' - \delta''$; wenn nämlich $\delta' - \delta''$ negativ und $\delta''' - \delta''$ positiv ist, so wird das erste Perpendikel unterhalb, das zweite oberhalb der Linie $A B$ liegen, im entgegengesetzten Falle, wird man die Linien mp und nq nach einer Seite hinziehen. Führt

man nun die Figur weiter aus, so kann man $nn' = 2Ln - Lm$,
 $mm' = 2Lm - Ln$; $n'q' = 2(\delta'' - \delta) - (\delta''' - \delta')$ und
 $p'm' = 2(\delta''' - \delta'') - (\delta'' - \delta')$ nehmen. Die Punkte q' , q ,
 L , p und p' verbindet man darauf durch gerade Linien, so
dass alsdann die gebrochene Linie $q'qLpp'$ einen Theil
der scheinbaren Bahn des Mondcentrums, genähert darstellt.
Darauf bleibt uns nur noch übrig die Oerter der Sterne im
Sternbilde der Pleiaden, welche durch den Mond in diesem
Falle verfinstert werden können, auf der Figur aufzutragen,
es habe zum Beispiel einer von diesen Sternen zur Zeit der
Beobachtung die gerade Aufsteigung A und Abweichung D ;
so können wir die Bögen $(A - \alpha'') \cos \frac{1}{2}(D + \delta'')$ und $D - \delta''$
in Minuten ausdrücken, und wenn der erste von ihnen positiv
ist, so nehmen wir die Linie $Ls = (A - \alpha'') \cos \frac{1}{2}(D + \delta'')$,
und setzen sie auf der Linie Lm rechts von L aus ab; sollte
sie negativ sein, so nimmt man die Länge der Linie und
setzt sie von L aus links ab, darauf errichtet man auf Ls ,
in s das Perpendikel $s\sigma = D - \delta''$, und wenn $D - \delta''$
positiv ist, so liegt $s\sigma$ oberhalb der Linie AB , im entgegen-
gesetzten Falle aber unterhalb. Drückt man nun den Radius
 r des Mondes in Minuten und Zehnteln von Minuten aus,
so können wir mit einem Zirkel auf dem Maassstabe die
Länge von r abnehmen, und alsdann aus dem Punkte σ , wel-
cher den Ort des Sternes darstellt, mit dem Radius r einen
Kreisbogen schlagen, welcher die Linie Lpp' oder die
scheinbare Bahn des Mondcentrums, in den Punkten λ und λ'
schneiden wird. Diese Punkte λ und λ' bestimmen nun den
Ort des Mondcentrums beim Eintritte und Austritte des
Sternes; fällt man daher aus λ und λ' die Linien λe und $\lambda' e'$
senkrecht auf AB , und misst mit dem Maassstabe die Länge
der Linien Le und me' aus, so kann man in der Annahme
dass e' zwischen m und m' liegt, die Werthe $\frac{Le}{Lm}$ und $\frac{me'}{mm'}$,
berechnen, wodurch man sogleich den Stundenbruch erhält,

welchen man zu den Greenwicher Zeiten T und $T + 1^h$ zulegen muss, um die Zeit des Eintrittes und Austrittes des Sternes, in oder aus dem Mondsrande zu erhalten; legt man zur Austritts- oder Eintrittszeit, die eben auf diese Weise gefunden wurde, die östliche Länge des Beobachtungsortes von Greenwich ausgezählt, hinzu, oder zieht man sie ab, wenn die Länge westlich von Greenwich ist, so erhalten wir die mittlere Zeit der beiden Erscheinungen am Beobachtungsorte, und zwar auf den Meridian dieses Ortes bezogen. Um auf dem Mondsrande den Ort zu finden, in welchem der Eintritt oder Austritt des Sternes stattfinden wird, schlägt man mit dem Halbmesser r zwei Kreise, um die Punkte λ und λ' als Mittelpunkte herum, und verlängert darauf die Perpendikel λe und $\lambda e'$, bis sie diese beiden Kreise oben in l und l' schneiden; alsdann werden die Punkte l und l' auf unserer Halbkugel die Nordpunkte des Mondrandes bezeichnen; der Winkel $l \lambda \sigma$ aber zeigt beim Eintritte die Winkel-Entfernung des Sternes vom Nordpunkte des Mondrandes an, wobei die Zählung von Norden aus nach links bis 360° geschieht; ganz ähnlich wird der Abstand des Nordpunktes des Mondrandes vom Orte des Austrittes des Sternes $= 360^\circ - l' \lambda' \sigma$ sein, und wünscht man noch ausserdem die Punkte des Mondrandes zu bestimmen, in welchem der Eintritt oder Austritt des Sternes sich ereignet, wenn man vom höchsten Theile des Mondrandes abrechnet, so muss man erst hierzu den parallactischen Winkel bestimmen, und überhaupt ganz so verfahren, wie es auf Seite 107. gezeigt worden ist.

164. Wir haben schon gesehen, dass die wichtigsten Verfinsterungen der Sonne die ringförmigen und totalen Finsternisse sind; auf ähnliche Weise sind nun diejenigen Sternbedeckungen für geographischen Längenbestimmungen die vorzüglichsten, bei welchen bei der Mitte der Verfinsterung

die scheinbare Lage des Mondscentrums sehr nahe mit dem scheinbaren Orte des Sternes zusammenfällt. Die günstigste Zeit, zur Beobachtung einer Sternbedeckung wird allemal beim ersten oder letzten Viertel des Mondes sein, weil um die Zeit des Vollmondes herum, die Lichtstärke des Mondes es nicht gestattet den Stern in der unmittelbaren Nähe des Mondsrandes deutlich zu sehen; vorzüglich aber, ist es gut alsdann zu beobachten, wenn die Sternbedeckung sich beim letzten Viertel ereignet, weil in diesem Falle der Eintritt des Sternes in den hellen, der Austritt aber, aus dem dunklen Rande des Mondes geschieht. Hierbei ist es leicht den Stern bis zu seinem Eintritte in den Rand zu verfolgen, und man kann nicht leicht einen Fehler bei der Beobachtung des Austrittes des Sternes aus dem dunklen Mondsrande machen, weil dieses ganz plötzlich geschieht. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass wenn man Sternbedeckungen in der Morgen- oder Abenddämmerung, sogar mit sehr starken Fernröhren beobachtet, diese Beobachtungen selten ganz zuverlässig sein werden.

Es muss hier besonders hervorgehoben werden, nie eher an die definitive Berechnung von Sternbedeckungen zu gehen, als bis die Positionen der bedeckten Sterne mit möglichster Genauigkeit bestimmt worden sind; nur dann kann man aus Beobachtungen, welche zur Untersuchung der Fehler der Mondstafeln zahlreich genug sind, diese Fehler wirklich frei von den Fehlern der Sternpositionen, erhalten. Wenn der Zweck der Beobachtungen, nur darin besteht den Unterschied der geographischen Längen zu finden, so ist es wohl vortheilhaft, wenn correspondirende Beobachtungen an Oertern angestellt werden, deren geographische Lage nicht allzu verschieden von dem zu bestimmenden Punkte sind, und wo dieselben Phasen der Verfinsternung beobachtet wurden.

Falls es sich aber darum handelt die Tafelfehler der Gestirne zu erforschen, so muss man diejenigen Beobachtun-

gen als vorzüglich wichtig betrachten, die an passend gewählten, aber weit von einander entfernten Orten der Erde angestellt worden sind; ausserdem muss man aber noch seine Zuflucht zu einigen abgesonderten Erscheinungen für sich nehmen; wie zum Beispiel, wenn man die Parallaxe der Sonne zu finden wünscht, es bekannt ist, dass das beste Mittel hierzu, darin besteht, den Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe zu beobachten. Für die vortheilhafteste Bestimmung der Summe oder der Differenz der Halbmesser der Sonne und des Mondes, eignen sich vorzüglich die inneren Berührungen der Ränder dieser Gestirne, während der totalen oder ringförmigen Sonnenfinsternisse, indem man sie hierzu in der Nähe der Grenzen des schmalen Gürtels der Erde beobachtet, in welchen sie überhaupt noch zu sehen sind.

Was die Mondsparallaxe betrifft, so sieht man aus den Formeln (*L*) §. 160. Seite 119. leicht ein, dass um so verschiedener die Beobachtungszeiten unter verschiedenen Beobachtungsorten sein werden, desto genauer auch die Bestimmung der Parallaxe ausfallen wird. Bekanntlich können die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes sehr sicher wahrgenommen werden; und Bessel hat bemerkt, dass ihre Beobachtung an zwei verschiedenen Orten der Erde, die so gelegen sind, dass an dem einen, die Verfinsterung beim Aufgange, an dem anderen, die Verfinsterung beim Untergange wahrgenommen werden kann, einen grösseren Erfolg bei der Bestimmung der Mondsparallaxe, als alle anderen Mittel der practischen Astronomie gewähren. Hierzu ist es jedoch erforderlich, dass die Längenunterschiede der genannten Orte, unabhängig von diesen Finsternissen genau bestimmt seien, und dass man an allen Beobachtungsorten dieselbe Phase der Verfinsterung beobachtet hat, namentlich im Falle ringförmiger Finsternisse, die Momente der vollständigen Erscheinung und ersten Unterbrechung des Ringes; oder auch bei einer totalen Sonnenfinsterniss das letzte Verschwinden,

und die erste Wiedererscheinung des Sonnenlichtes. Die Vergleichung der Beobachtungen einer solchen Sonnenfinsterniss unter einander, die zu gleicher Zeit in Europa und Nordamerika beobachtet werden könnte, würde wie Bessel bemerkt, alle Elemente zu einer genauen Bestimmung der Mondparallaxe liefern.

Ganz besondere Rücksicht, verdienen die Beobachtungen des Durchganges des Mondes durch das Sternbild den Pleiaden; durch Bessels Arbeiten, kann man mit vorzüglicher Genauigkeit die relative Lage aller Sterne dieses Sternbildes untereinander finden; und daher wird man beim Durchgange des Mondes durch dieses Sternbild, eben so viele Gleichungen zur Herleitung der Länge des Beobachtungsortes aufstellen können, als man Sternbedeckungen selbst beobachtet hat, denn die Fehler der Mondstafeln, bleiben während eines Durchganges des Mondes durch die Pleiaden beinahe constant. Nun ereignet es sich gewöhnlich, dass entweder die Eintritte genauer als die Austritte beobachtet werden, oder auch umgekehrt; alsdann erhält man durch die einen, oder durch die anderen allein, eine Anzahl auf sichere Beobachtungen gegründeter Gleichungen, welche vorzüglich, wenn der Mond nördlich von einigen und südlich von anderen Sternen durchgeht, die Bestimmung der Fehler der bei der Rechnung angenommenen AR , Declination und Halbmessers des Mondes, sowie auch ihre Elimination aus den Resultaten weit vollständiger macht, als im Falle der Bedeckung eines einzelnen Fixsternes zu erwarten steht. Hierdurch wächst der Werth, welchen ein an zwei Orten beobachteten Durchgang des Mondes durch die Pleiaden bei der Bestimmung des Längenunterschiedes dieser Oerter erhält, vergleichungsweise mit dem Werthe der Beobachtungen, einer einzelnen Sternbedeckung, stärker als die Zahl der bedeckten Sterne; so dass wenn jene Beobachtungen, (bei vorausgesetzter genauer Zeitbestimmung) einigemal gut gelungen sind,

das Gewicht des daraus hervorgegangenen Längenunterschiedes, durch andere, einzelne Sternbedeckungen schwerlich wird vermehrt werden können. Diesen grossen Vortheil haben die Bedeckungen der Pleiaden aber nur deshalb voraus, weil die relativen Oerter ihre Sterne mit der zu diesem Zwecke erforderlichen Genauigkeit bekannt sind. Sogar die Lage des Mondes selbst, wird man hierdurch genauer als durch irgend eine andere Methode bestimmen können. Der Werth solcher Bestimmungen zur Prüfung der Genauigkeit einer Mondstheorie, wird noch dadurch vermehrt, dass sie die frühesten von hinreichender Zuverlässigkeit sind, welche man durch Beobachtungen erlangen konnte *).

165. Gewöhnlich nimmt man an, dass die Strahlenbrechung keinen merklichen Einfluss auf die verschiedenen Phasen der Verfinsternung verursacht; aber Hansen hat in No. 347 der Astronomischen Nachrichten die Unrichtigkeit dieser Voraussetzung bewiesen; aus den Untersuchungen von Bessel **) geht jedoch hervor, dass ausser in denjenigen Fällen, wenn das beobachtete Gestirn sich nahe am Horizont befindet, man in allen anderen, den Einfluss der Strahlenbrechung vernachlässigen kann; selbst in der Nähe des Horizontes wird er sogar sehr klein sein. Die Asymptote des zum Auge gelangenden Strahles vom Berührungspunkte der Ränder, schneidet die Lothlinie des Auges an einem Punkte, wo die Ränderberührung, wenn keine Strahlenbrechung vorhanden wäre, genau so erscheinen würde, wie sie wirklich erscheint. Man berücksichtigt also den Einfluss der Strahlenbrechung, indem man den Beobachtungsort an diesen Punkt verlegt.

*) Die hier angeführten Worte sind die des berühmten Bessels; Astronomische Untersuchungen, 2. B. S. 237.

**) Astronomische Untersuchungen. Seite 238 und Seite 240.

Die Gaussische Methode den Verlauf einer Sonnenfinsterniss auf der Erde überhaupt, zu berechnen.

166. Diese Methode scheint uns in der Praxis die bequemste zu sein; sie wurde zuerst in der Dissertation des H. G. F. Ursin: de eclipsi solari die 7 Septembris 1820 apparitura, Hafniae; 1820, näher erläutert.

Die Aufgabe um die es sich hier handelt, besteht eigentlich darin, dass man für verschiedene Zeitmomente die gegenseitige Lage der Centra des Mondes L , der Sonne S , der Erde T und die Lage gewisser Punkte auf der Oberfläche der Erde bestimmt, von welchen aus die gegebenen Phasen der Sonnenfinsterniss gesehen werden können. Am leichtesten wird die Aufgabe gelöst, wenn man die Lage der Gestirne in Bezug auf eine Ebene ermittelt, die senkrecht auf die Linie $S T$ steht und in der Nähe der Conjunction des Mondes mit der Sonne, durch den Mittelpunkt L des Mondes geht. Eine solche Ebene wollen wir die Projections-Ebene nennen.

Die Einheit der Entfernungen ist hier willkürlich, und da wir vorzüglich mit Winkelgrössen zu thun haben, so können wir $L T = \frac{1}{\sin 1''} = 206264'' \cdot 8$ und $S T = 206264'' \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{p}$ annehmen, wo p die Horizontalparallaxe der Sonne und π die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes bedeutet; bei den vorläufigen Rechnungen, welche sich auf die Erde überhaupt beziehen, können wir aber die Erde als ein Kugel von mittlerem Durchmesser betrachten, und für π die Horizontal-Parallaxe bei der Polhöhe von 45° , annehmen.

Nennen wir N den Punkt, wo die Linie ST mit der Projectionsebene zusammentrifft, so werden TN und SN die Entfernungen der Centra T und S der Erde und der Sonne von der Projectionsebene sein; nun ist das Dreieck $SN'T$ bei N rechtwinklicht, also wird $TN = L'T \cos L'TS$ und da in der Nähe der Conjunction der Winkel $L'TS$ immer klein ist; so haben wir sehr nahezu:

$$TN = 206264'' \cdot 8; SN = ST - TN = 206264'' \cdot 8 \left(\frac{\pi - p}{p} \right).$$

Denken wir uns jetzt eine gerade Linie, die von dem Centrum S der Sonne ausgehend, die Oberfläche der Erde berührt, und bezeichnen wir durch M den Punkt, in welchem die Projectionsebene von dieser Linie getroffen wird; so muss $NM = SN \operatorname{tg} p$, oder wegen der Kleinheit von p , $= SN \sin 1'' \cdot p$ sein; folglich wird:

$$NM = 206264'' \cdot 8 \sin 1'' \cdot p \left(\frac{\pi - p}{p} \right) = \pi - p;$$

d. h. $\pi - p$ bedeutet in diesem Falle die Projection des Halbmessers der Erde auf die Projectionsebene.

167. Um die Lage verschiedener Punkte auf der Projectionsebene zu bestimmen, wollen wir zweie, sich rechtwinklicht durchschneidende Achsen annehmen, wovon die eine, die Achse der positiven Ordinaten y , in der Declinationsebene der Sonne und in der geraden Aufsteigung α der Sonne liegt; die andere aber, die Achse der positiven Ordinaten x , senkrecht auf jener Declinationsebene steht und der geraden Aufsteigung $\alpha + 90^\circ$ entspricht; den Anfangspunkt der Coordinaten nehmen wir im Punkte N , oder im geocentrischen Orte des Mittelpunktes der Sonne an. Als ersten

Meridian auf der Erde, wollen wir denjenigen nehmen, für welchem die Sonnen- und Monds-Oerter gegeben sind; z. B. den Greenwicher Meridian, wenn man bei der Rechnung den Nautical Almanac gebraucht.

Es seien, zu einer unbestimmten, aber von der Conjunction nicht gar zu entfernten, wahren Sonnenzeit $\frac{1}{15} \tau$ des ersten Meridianes, die Coordinaten des Mondsortes auf der Projectionsebene x und y ; Δ die Entfernung zwischen N und dem Mittelpunkte des Mondes; S der Winkel der Linie NS mit der Achse der y ; dann kömmt:

$$x = \Delta \cdot \sin S; \quad y = \Delta \cdot \cos S.$$

Weil nun $TN = \frac{1}{\sin I'}$ gesetzt ist, so drückt Δ auch den geocentrischen Winkelabstand der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander aus, und offenbar ist S der Winkel der Declinationsebene der Sonne mit derjenigen Ebene, welche durch die Mittelpunkte der Sonne, des Mondes und der Erde geht. Wenn wir also an der Himmelskugel ein sphärisches Dreieck zwischen dem Nordpole des Aequators und den geocentrischen Orten der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne denken, wenn ferner $\alpha \zeta$ und α die wahren geraden Aufsteigungen, $\delta \zeta$ und δ die wahren Declinationen des Mondes und der Sonne bedeuten, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\sin(\alpha \zeta - \alpha)}{\operatorname{tg} \delta \zeta \cos \delta - \sin \delta \cos(\alpha \zeta - \alpha)};$$

$$\sin \Delta = \frac{\sin(\alpha \zeta - \alpha) \cdot \cos \delta \zeta}{\sin S}.$$

Nun ist überhaupt:

$$\begin{aligned} \sin \Theta &\equiv \Theta - \frac{1}{6} \Theta^3 + \dots \\ \operatorname{tg} \Theta &\equiv \Theta + \frac{1}{3} \Theta^3 + \dots \\ \cos \Theta &\equiv 1 - \frac{1}{2} \Theta^2 + \dots \end{aligned}$$

und wenn Θ einen kleinen Bogen bedeutet, so kann man sehr nahezu, $\Theta (\cos \Theta)^{\frac{1}{3}}$ statt des $\sin \Theta$, und $\Theta (\cos \Theta)^{-\frac{2}{3}}$ statt der $\operatorname{tg} \Theta$ annehmen. Zur Zeit der Finsternisse sind $(\alpha \zeta - \alpha)$ und Δ immer sehr kleine Grössen; wir erhalten alsdann:

$$\operatorname{tg} S = \frac{(\alpha \zeta - \alpha) \cos \delta'}{(\delta' - \delta) [\cos^2 (\alpha \zeta - \alpha) \cos (\delta' - \delta)]^{\frac{1}{3}}};$$

$$\Delta = \frac{(\alpha \zeta - \alpha) \cos \delta \zeta [\cos (\alpha \zeta - \alpha)]^{\frac{1}{3}}}{\sin S};$$

wo $\operatorname{tg} \delta' = \frac{\operatorname{tg} \delta \zeta}{\cos (\alpha \zeta - \alpha)}$ oder:

$$\delta' = \delta \zeta + \frac{\sin \delta \zeta \cos \delta \zeta 2 \sin^2 (\alpha \zeta - \alpha)}{\sin 1''} + \dots$$

ist.

Während einer Sonnenfinsterniss ändern sich die Coordinaten x und y beinahe der Zeit proportional, und es wird hinreichend sein, x und y von zwei zu zwei Stunden unmittelbar zu berechnen, und für dazwischenliegende Zeiten, x und y durch Interpolation zu bestimmen. Es seien $\frac{1}{15} \tau'$ und $\frac{1}{15} \tau''$, zwei nahe zur Conjunction und nahe zu einander liegende wahre Sonnenzeiten des ersten Meridianes; x' , y' und x'' , y'' die ihnen entsprechenden Coordinaten; wenn man nun:

$$\frac{x'' - x'}{\tau'' - \tau'} = n \cos f \quad \text{und} \quad \frac{y'' - y'}{\tau'' - \tau'} = n \sin f \dots \dots (A),$$

berechnet, so wird n auf der Projectionsebene nahezu die Chordé bedeuten, welche die beiden Mondsörter verbindet, und f der Winkel sein, welchen die Chorde mit der Declinationsebene der Sonne bildet; wollte man also während des Zeitintervalls $\frac{1}{15} (\tau'' - \tau')$ die relative Bewegung des Mondes in Bezug auf die Sonne als geradlinigt und gleichförmig annehmen, so würde n die Geschwindigkeit und f die Richtung der relativen Mondsbeziehung ausdrücken. Wenn wir durch $\frac{1}{15} T$ die wahre Sonnenzeit der Conjunction des Mondes mit der Sonne in gerader Aufsteigung bezeichnen, so muss im Momente $\frac{1}{15} T$ die Ordinate $x = 0$ werden, die Ordinate y aber, eine gewisse Grösse η erhalten; statt der Gleichung (A), bekommen wir alsdann:

$$n \cos f = \frac{x'}{\tau' - T} = \frac{x''}{\tau'' - T}; \quad n \sin f = \frac{y' - \eta}{\tau' - T} = \frac{y'' - \eta}{\tau'' - T}$$

woraus alsdann folgt:

$$T = \tau' - \frac{x'}{n \cos f} = \tau'' - \frac{x''}{n \cos f}; \dots \dots \dots (B)$$

$$\eta = y' - x' \operatorname{tg} f = y'' - x'' \operatorname{tg} f$$

168. Wäre die relative Mondsbeziehung gleichförmig und geradlinigt, so müssten n und f constant bleiben, und man hätte die Coordinaten x, y sehr leicht nach den Formeln: $x = (\tau - T) n \cos f, y = (\tau - T) n \sin f + \eta$ berechnen können. Es ist aber möglich dieselben Formeln für die Berechnung von x und y beizubehalten, wenn man auf die Veränderlichkeit der Mondsbeziehung Rücksicht nimmt; dazu ist es nur nöthig, statt T, n, f, η variable Grössen einzuführen, oder solche, welche nur während eines sehr kleinen Zeitintervalls $\frac{1}{15} (\tau'' - \tau')$ constant sind, sich nachdem aber, mehr oder weniger ändern; alsdann wird man überhaupt haben:

$$x = (x - T) n \cos f; \quad y = (x - T) n \sin f + \eta. \quad (C)$$

wo $\frac{1}{15} x$ eine unbestimmte Zeit ist, welche zwischen $\frac{1}{15} x''$ und $\frac{1}{15} x'$ liegt; und ferner n und f nach den Formeln (A); dagegen T und η nach den Formeln (B) berechnet werden. Wegen der sehr langsamen Veränderung in T , η , n und f , wird es hinreichend sein, diese Grössen nur für drei oder vier verschiedene Momente, etwa von 2 zu 2 Stunden vor- auszuberechnen.

169. Es seien X und Y die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Projectionsebene mit der geraden Linie, welche vom Beobachtungsorte auf der Oberfläche der Erde nach dem Mittelpunkte der Sonne geht; bezeichnen wir diesen Beobachtungsort durch O , und die Mittelpunkte der Erde und der Sonne durch T und S , so wird der Winkel OST die Höhenparallaxe der Sonne ausdrücken, und sehr nahezu $= p \sin z$ sein, wo p die Horizontalparallaxe und z die wahre Zenithdistanz der Sonne bedeutet. Wenn wir uns nun die Punkte N und K denken, in welchen unsere Projectionsebene von den Linien ST und OT durchschnitten wird, so erhalten wir das rechtwinklichte Dreieck NSK , in welchem die Seite $NK = NS \cdot \operatorname{tg} N S K$ ist; nun ist aber $NS = \frac{(\pi - p)}{p \cdot \sin 1''}$ und der Winkel $N S K = O S T = p \sin z$; folglich wird sehr nahezu die Seite $NK = (\pi - p) \sin z$ sein. Das geocentrische Zenith des Beobachtungsortes O , liegt aber immer in der Verlängerung des Radius OT , und der Winkel, welchen die Ebene OST mit dem wahren Declinationskreise der Sonne bildet, misst zugleich die Neigung der Linie NK gegen die Ordinaten-Achse der y ; bezeichnen wir diesen Winkel durch q , so ist q der sogenannte parallactische Winkel; und man hat alsdann ohne weitere Mühe:

Ueber die Gleichungen, welche sich auf die Erscheinung einer Sonnenfinsterniss im Allgemeinen beziehen.

171. Die vier Grössen φ , λ , t und D sind mit einander so verbunden, dass wenn drei derselben gegeben sind, die vierte von ihnen sich bestimmen lässt; um nun die Relationen zwischen diesen Grössen zu einander am bequemsten auszudrücken, wollen wir die Gleichung $D^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$ in die zwei folgenden:

$$x - X = D \sin \vartheta \text{ und } y - Y = D \cos \vartheta$$

zerlegen, wo ϑ einen gewissen Hülfswinkel bedeutet. Substituirt man $t - \lambda$ für τ ; wo λ die östliche Länge des Beobachtungsortes vom Meridiane der Ephemeride abgezählt bedeutet; und statt $x - X$ und $y - Y$, ihre Werthe aus den Gleichungen (C) und (D), so kömmt:

$$\begin{aligned} D \sin \vartheta &= (t - \lambda - T) n \cos f - (\pi - p) \cos \varphi \sin t \\ D \cos \vartheta &= (t - \lambda - T) n \sin f + \eta - (\pi - p) \sin \varphi \cos \delta + \\ &\quad + (\pi - p) \cos \varphi \sin \delta \cos t \end{aligned}$$

Multiplcirt man die Gleichung für $D \sin \vartheta$ mit $\sin f$, die Gleichung für $D \cos \vartheta$ dagegen mit $\cos f$, zieht alsdann das erste Product von dem zweiten ab, und setzt der Kürze halber:

$$\left. \begin{aligned} b \sin B &= \sin \delta \cos f; & c \sin C &= \sin \delta \sin f \\ b \cos B &= \sin f & c \cos C &= \cos f \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (F)$$

$$k = (\pi - p) \sin \varphi \cos \delta - \eta; \dots \dots$$

so erhält man:

$$D \cos (\vartheta + f) = -k \cos f + (\pi - p) \cos \varphi \cdot b \sin (B + t) \dots (G)$$

Multipliziert man die Gleichung für $D \sin \vartheta$ mit $\cos f$, die Gleichung für $D \cos \vartheta$ mit $\sin f$, und nimmt die Summe der Producte, so kömmt:

$$D \sin(\vartheta + f) = (t - \lambda - T) \cdot n - k \sin f + (\pi - p) \cos \varphi \cdot c \cdot \sin(C - t) \quad (H)$$

Es sei $\vartheta + f = \psi$;
bestimmt man $\cos \psi$ aus der Gleichung (G), und λ aus der Gleichung (H), so wird:

$$\cos \psi = \frac{(\pi - p) \cdot b \cos \varphi \cdot \sin(B + t) - k \cos f}{D} \dots \dots \dots (K)$$

$$\lambda = t - T - \frac{k}{n} \sin f + \frac{(\pi - p)}{n} \cdot c \cdot \cos \varphi \sin(C - t) - \frac{D}{n} \sin \psi \quad (L)$$

oder wenn:

$$\frac{k \cos f}{D} = i, \quad T + \frac{k}{n} \sin f = L$$

$$\frac{k \cos f}{b(\pi - p) \cos \varphi} = g; \quad (\pi - p) \frac{c}{n} \cdot \cos \varphi = l$$

gesetzt wird, so hat man:

$$\cos \psi = i \left(\frac{\sin(B + t)}{g} - 1 \right) \dots \dots \dots (K')$$

$$\lambda = t - L + l \sin(C - t) - \frac{D}{n} \sin \psi \dots \dots \dots (L')$$

Der scheinbare Abstand der Sonne vom Monde $= D$, nimmt vom Anfange der Finsterniss bis zu ihrer Mitte beständig ab, von der Mitte aber bis zum Ende immer zu; dieser Umstand entscheidet nun, in welchem Quadranten der Winkel ψ in jedem besonderen Falle zu nehmen ist. Setzt

man ψ für $\vartheta + f$ und differenziert die Gleichungen (G) und (H) in Bezug auf D , ψ und t , so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos\psi \cdot \partial D - D \sin\psi \cdot \partial\psi &= +(\pi-p) \cdot b \cdot \cos\varphi \cos(B+t) \cdot \sin 1'' \cdot \partial t \\ \sin\psi \cdot \partial D + D \cos\psi \cdot \partial\psi &= n \partial t - (\pi-p) \cdot c \cdot \cos\varphi \cos(C-t) \cdot \sin 1'' \cdot \partial t \end{aligned}$$

wo ∂D , $\partial\psi$ und ∂t in Bogensekunden ausgedrückt werden. Die erste dieser Gleichungen mit $\cos\psi$, die zweite mit $\sin\psi$ multiplicirt und die Summe der Produkte mit ∂t dividirt, so kömmt:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = n \sin\psi - (\pi-p) \cdot c \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos(C-t) \cdot \sin 1'' \left. \vphantom{\frac{\partial D}{\partial t}} \right\} \dots (M) \\ + (\pi-p) \cdot b \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi \cdot \cos(B+t) \cdot \sin 1''$$

Die zwei letzten Glieder sind immer sehr klein; wenn also ψ selbst nicht sehr nahezu 0° oder 180° ist, so muss $\frac{\partial D}{\partial t}$ negativ oder positiv sein, je nachdem $\sin\psi$ negativ oder positiv ist; folglich muss ψ für den Anfang der Finsterniss im 3^{ten} oder 4^{ten}, für das Ende derselben, aber im 1^{ten} oder 2^{ten} Quadranten genommen werden.

Auf einem gegebenen Parallel den Ort zu finden, von welchem aus die grösste Phase gesehen werden kann, sowie die Grösse dieser Phase, und die Zeit am Orte.

172. Der verfinsterte Theil des Sonnendurchmessers in Zwölftel-Theilen des letzteren, oder in sogenannten Zollen, ausgedrückt, heisst die Phase der Verfinsternung. Offenbar entsprechen nun die verschiedenen Phasen der Verfinsternung den verschiedenen scheinbaren Entfernungen (D) der Sonnen- und Mondmittelpunkte von einander; also ist zur Zeit:

des Anfanges oder des Endes :

der partiellen Finsterniss..... $D = \varrho + r$

der ringförmigen Finsterniss... $D = r - \varrho$

der totalen Finsterniss..... $D = \varrho - r$

Wenn die Finsterniss central wird..... $D = 0$

Wenn m Zoll, oder m Zwölftel-Theile des Son-

nendurchmessers verfinstert werden, so ist... $D = \varrho - \left(\frac{m-6}{6}\right) \cdot r$,

wo r den Halbmesser der Sonne, und ϱ den des Mondes bedeutet.

Je grösser also m , oder die Phase der Verfinstörung ist, desto kleiner muss D sein; so dass wenn die Phase die Grösste ist, D ein Minimum werden muss.

Wenn wir die Punkte auf der Erdoberfläche betrachten, welche eine gleiche Polhöhe haben, so bekommen wir einen mit dem Aequator parallelen Kreis, oder einen sogenannten Breitenparallel. Kann man von einem gewissen Parallel aus, die Sonnenfinsterniss sehen, so muss es einen Ort geben, von welchem aus, man die grösste aller Phasen, die auf den verschiedenen Punkten dieses Paralleles bemerkt werden, sehen kann. Den Werth des entsprechenden D , welcher ein relatives Minimum von D bildet, die geographische Länge λ jenes Ortes und den dazugehörigen Stundenwinkel t , werden wir leicht aus der Betrachtung der oben angeführten Gleichung (M) für $\frac{\partial D}{\partial t}$ ableiten. Jede Veränderung in der Länge λ bringt eine ebenso grosse Veränderung in dem Stundenwinkel t hervor; folglich wird die Bedingung des Minimums für D , in sofern sie von der Veränderlichkeit der Länge λ abhängt, durch die Gleichung:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

ausgedrückt, was vermöge der Gleichung (M) nicht anders

geschehen kann, als wenn erstens $\sin \psi = 0$ ist, damit die ersten zwei Glieder des Ausdruckes für $\frac{\partial D}{\partial t}$ verschwinden, und zweitens wenn zugleich $\cos(B + t) = 0$ wird, damit auch das dritte oder letzte Glied in demselben Ausdrucke verschwindet. Hiermit erhält man die Bedingungen:

$$\psi = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} \text{ und } t = \begin{cases} 90^\circ - B, \\ 270^\circ - B. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe von ψ und t in den allgemeinen Ausdruck (K') des $\cos \psi$, und leitet man daraus den entsprechenden Werth von D ab, so kömmt:

$$\pm D = k \cos f. \left(\pm \frac{1}{g} - 1 \right), \text{ oder } D = k \cos f. \left(\frac{1 \pm g}{g} \right) \dots (N).$$

Man erhält also zwei D ; weil aber die Bedingung $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ sowohl dem Minimum, als auch dem Maximum von D entspricht, so kann man leicht beweisen, dass ein Werth hier der grössten, der andere dagegen der kleinsten Phase angehört; haben die gefundenen D verschiedene Zeichen, so kann man daraus schliessen, dass eine centrale Verfinsternung möglich ist. — Es kann aber zutreffen, dass eine der beiden Auflösungen verworfen werden muss; ist nämlich $t = 90^\circ - B$, oder $t = 270^\circ - B$, nicht zwischen 0° und den Werthen $\pm t^0$ enthalten, welche der Gleichung $\cos t^0 = -tg \varphi. tg \delta$ genügen, so kann die entsprechende Phase nicht gesehen werden, weil alsdann die Sonne sich unter dem Horizonte befindet.

Die geographische Länge des Ortes, von welchem aus auf einem gegebenen Parallele die grösste Phase gesehen werden kann, bekömmt man aus der Gleichung (L'), indem

man $\sin \psi = 0$ setzt, und für t den Werth $90^\circ - B$, oder $270^\circ - B$, substituirt; es ist also:

$$\lambda = t - L + l \sin (C - t).$$

Wir können jetzt leicht die folgende Aufgabe lösen, welche bei der Vorausberechnung von Finsternissen wichtig ist.

Den Breiten-Parallel zu finden, auf welchem eine gewisse vorherbestimmte Phase der Verfinsterung als grösste Phase gesehen werden kann.

173. Ist die Phase gegeben, so ist auch die entsprechende scheinbare Entfernung D der Sonnen- und Mondmittelpunkte von einander gegeben; damit nun aber die vorherbestimmte Phase die grösste, oder D ein Minimum werden soll, müssen wir haben:

$$D = k \cos f \cdot \left(\frac{1 \pm g}{g} \right).$$

Hier ist nun:

$$g = \frac{k \cos f}{b (\pi - p) \cos \varphi}, \quad k = (\pi - p) \sin \varphi \cos \delta - \eta; \quad b = \frac{\sin \delta \cdot \cos f}{\sin B};$$

folglich:

$$\frac{1 \pm g}{g} = \frac{b (\pi - p) \cos \varphi \pm k \cos f}{k \cos f}$$

$$D = \cos f \cdot (\pi - p) \left(\frac{\sin \delta}{\sin B} \cdot \cos \varphi \pm \cos \delta \sin \varphi \right) \mp \eta \cos f;$$

$$\frac{D \pm \eta \cdot \cos f}{\cos f (\pi - p)} = \frac{\sin \delta}{\sin B} \cdot \cos \varphi \pm \cos \delta \cdot \sin \varphi.$$

Wenn wir also:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin B}$$

setzen, und darauf den Hüllswinkel M berechnen, so ist, weil alsdann zugleich; $\cos M = \cos \delta \cos f$, auch ebenfalls:

$$\sin(\varphi \pm M) = \frac{(\eta \cos f \pm D)}{(\pi - p)}, \dots \dots \dots (N)$$

Wir erhalten auf diese Weise zwei Breiten φ , welche die nördlichen und südlichen Grenzen bestimmen, zwischen welchen die vorherbestimmte Phase der Verfinsternung gesehen werden kann; an den Grenzen selbst aber, erscheint sie als die grösste aller Phasen, welche dort gesehen werden können.

Wenn $\eta \cos f \pm D$ so gross ist, dass der $\sin(\varphi \pm M)$ imaginär wird, so schliesst man daraus, dass in diesem Falle die Aufgabe etwas unmögliches fordert, und dass es für solche D keine Grenzparallelen, entweder in dem einen, oder in dem anderen Sinne giebt.

Ueber die Curven auf der Erde, auf welchen eine gewisse vorherbestimmte Phase als die grösste Phase gesehen wird.

Auf einem gegebenen Breitenparallel den Ort zu finden, wo zu einer gegebenen Zeit, die grösste Phase gesehen werden kann, sowie die Grösse dieser Phase.

174. Zwischen den oben erwähnten Grenz-Parallelen, können sowohl die grösseren als auch die kleineren Phasen, beobachtet werden, und es wird möglich sein, die geographische Länge λ desjenigen Punktes eines gegebenen Parallels zu berechnen, an welchem, die bei einem vorherbestimmten Stundenwinkel t erscheinende Phase grösser ist, als alle

anderen Phasen, welche aus demselben Punkte gesehen werden. Ueberhaupt muss $D^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$ sein, und die Bedingung des Minimums von D giebt:

$$(x - X) (\partial x - \partial X) + (y - Y) (\partial y - \partial Y) = 0;$$

hier sind aber φ und t gegebene Grössen; folglich müssen $\partial X = 0$, und $\partial Y = 0$ sein; und wenn $D \sin \vartheta$ und $D \cos \vartheta$, statt der $x - X$ und $y - Y$ substituirt werden, so kömmt:

$$D \sin \vartheta \cdot \partial x + D \cos \vartheta \cdot \partial y = 0,$$

$$\text{oder da } \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} f \text{ und } \vartheta + f = \psi$$

ist, so erhalten wir:

$$0 = \sin \vartheta \cos f + \cos \vartheta \sin f = \sin (\vartheta + f) = \sin \psi.$$

$$\text{also: } \cos \psi = \pm 1, \psi = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

Vermöge der Gleichungen (K') und (L'), haben wir daher endlich:

$$\pm D = k \cos f \left(\frac{\sin(B + t)}{g} - 1 \right) \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$\lambda = t - L + l \sin(C - t) \dots \dots \dots (\beta)$$

Die Gleichung (β) giebt die gesuchte Länge, die Gleichung (α) aber die Grösse des scheinbaren Abstandes der Sonnen- und Mondmittelpunkte, während der grössten Phase von einander; je nachdem D positiv oder negativ wird, oder je nach dem Zeichen von $k \cos f \left(\frac{\sin(B + t)}{g} - 1 \right)$, bestimmt

man, ob der nördliche oder südliche Theil der Sonne verfinstert wird.

Auf einem gegebenen Breitenparallel, den Ort zu finden, wo eine gegebene Phase der Verfinsternung als grösste Phase gesehen werden kann, sowie die Zeit an diesem Orte zu finden.

175. Wenn statt des Stundenwinkels t , eine vorherbestimmte Phase, oder ein scheinbarer entsprechenden Abstand D gegeben wäre, und diese Phase auf dem zu berechnenden Punkte eines gegebenen Parallels, die grösste unter allen von dort aus sichtbaren Phasen sein soll, so wird man zuerst nach der Gleichung (α) den entsprechenden Stundenwinkel t abzuleiten haben; hat man also aus:

$$\sin(B + t) = \left(\pm \frac{D}{k \cos f} + 1 \right) g$$

den Stundenwinkel t bestimmt, so wird die geographische Länge nach der Gleichung (β) gefunden. Zugleich muss man auf die Gleichung $\cos t^0 = -tg \varphi tg \delta$ Rücksicht nehmen, um solche Auflösungen auszuschliessen, für welche die Sonne unter dem Horizonte des entsprechenden Ortes stehen muss.

Mit Hülfe des Vorhergehenden, können wir die Curven auf der Erde finden, auf welchen eine gewisse vorherbestimmte Phase als grösste Phase gesehen wird. Nach der Gleichung (N), werden nämlich die nördlichen und die südlichen Grenz-Parallele φ , und φ'' , berechnet; auf jedem der zwischenliegenden Parallele, befinden sich alsdann manche Punkte, von welchen aus, eine grössere als die gegebene Phase beobachtet werden kann; aber ein jeder dieser Parallele enthält auch Punkte, von welchen aus nur kleinere Phasen gesehen werden können, und es muss also auch solche Punkte geben, auf welchen gerade die vorbestimmte Phase als die grösste Phase sich beobachten lässt. Um diese Punkte zu bestimmen,

berechnet man nach den Gleichungen (β) und (α) für jede, zwischen den gegebenen Grenz-Parallelen q_1 und q_2 , liegende Polhöhe, die geographische Länge des Ortes, wo die gegebene Phase als die grösste Phase gesehen wird, und die Zeit dieser Erscheinung. Alsdann kann man die gefundenen Punkte auf eine Karte auftragen und durch Linien zusammen verbinden, wodurch die verlangten Curven entstehen werden.

Die Oerter zu finden, an welchen eine gewisse vorherbestimmte Phase am frühesten, oder am spätesten gesehen wird.

176. Die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes werden in einem gegebenen scheinbaren Abstände D am frühesten gesehen, wenn vor der Conjunctionszeit der wahre oder der geocentrische Abstand der Mittelpunkte der Gestirne, so eben die Grösse $\pi - p + D$ erreicht, und wenn der Beobachter sich in demjenigen Orte befindet, wo der geocentrische Abstand durch die volle Wirkung der Parallaxen, also um $\pi - p$, vermindert wird; in diesem Falle muss der Punkt des Sonnenrandes, an welchem die Verfinsterung anfängt im Horizonte und in derselben Verticalebene mit dem Monde stehen, so dass der parallactische Winkel q der Sonne, alsdann dem Winkel S , oder dem Winkel zwischen dem Declinationskreise der Sonne und der die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes verbindenden Linie, gleich sein muss. Derselbe Umstand findet auch nach der Conjunction statt, wenn der geocentrische Abstand beider Gestirne wieder die Grösse $\pi - p + D$ erreicht, und der Punkt des Sonnenrandes, an welchem die Verfinsterung aufhört, im Horizonte desjenigen Ortes liegt, an welchem die gegebene Phase am spätesten gesehen wird.

Es sei, ebenso wie früher, Δ der geocentrische Abstand der Mittelpunkte der Gestirne von einander; x und y die auf den geocentrischen Ort des Sonnenmittelpunktes bezo-

genen Coordinaten des wahren Ortes des Mittelpunktes des Mondes; alsdann findet man $x = \Delta \cdot \sin S$ und $y = \Delta \cdot \cos S$; hier ist aber $\Delta = \pi - p + D$; $S = q$ und z , oder die Zenithdistanz der Sonne, nahezu $= 90^\circ$. Wenn folglich anstatt $\sin z \cdot \sin q$ und $\sin z \cdot \cos q$ ihre Werthe (§. 169. Seite 139.) eingeführt werden, und ferner für t die gleichbedeutende Grösse $t - \lambda$ substituirt wird, so erhält man:

$$\begin{aligned} x &= (t - \lambda - T) n \cdot \cos f &= (\pi - p + D) \cos q \cdot \sin t \\ y &= (t - \lambda - T) n \sin f + \eta &= (\pi - p + D) \sin q \cos \delta \\ & & - (\pi - p + D) \cos q \sin \delta \cdot \cos t \\ \cos t &= -tg \varphi \cdot tg \delta; \sin t &= \sqrt{1 - tg^2 \varphi \cdot tg^2 \delta}. \end{aligned}$$

Eliminirt man $(t - \lambda - T)$, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{y \cos f - x \sin f}{\pi - p + D} &= \frac{\eta \cdot \cos f}{\pi - p + D} = \\ &= \cos f (\sin q \cos \delta - \cos q \sin \delta \cos t) - \sin f \cdot \cos q \sin t; \\ \frac{\eta \cos f}{\pi - p + D} &= \cos f \left(\sin q \cos \delta + \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta} \cdot \sin q \right) - \\ & - \sin f \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot tg^2 \delta} \\ &= \cos f \cdot \frac{\sin q}{\cos \delta} - \sin f \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta}}. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner:

$$\frac{\sin q}{\cos \delta} = \sin V,$$

so haben wir:

$$\frac{\eta \cdot \cos f}{\pi - p + D} = \cos f \cdot \sin V - \sin f \cdot \cos V = \sin(V - f).$$

Man sieht hieraus, dass mit Hülfe der gegebenen Grössen η , f , $\pi - p + D$, sich sowohl die Polhöhe des Punktes, auf

welchem die vorbestimmte Phase am frühesten, oder am spätesten gesehen wird, als auch der entsprechende Stundenwinkel t der Sonne, durch folgende Gleichungen bestimmen lässt:

$$\sin(V-f) = \frac{\eta \cdot \cos f}{\pi - p + D},$$

$$\sin \varphi = \sin V \cdot \cos \delta,$$

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Die geographische Länge λ dieses Ortes, findet man alsdann durch die Gleichungen (K') und (L').

Um die Bedeutung des Hülfswinkels V zu erläutern, denke man sich ein sphärisches Dreieck PSZ , zwischen dem sichtbaren Pole P des Aequators, dem Orte des Sonnenmittelpunktes S und dem Zenithe Z , des hier betrachteten Punktes der Erde; alsdann ist sehr nahezu die Seite $ZS = 90^\circ$; $ZP = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$ und $\sin \varphi = \cos \delta \cdot \cos ZSP$; folglich muss $ZSP = 90^\circ - V$, oder $ZSP + f = 90^\circ - (V - f)$ sein. Nun liegen in diesem Falle die scheinbaren und die geocentrischen Oerter der Gestirne in einem Verticalkreise, also auch in einer geraden Linie auf der Projectionsebene; der Winkel ZSP muss daher dem ϑ , oder dem Winkel gleich sein, welchen die erwähnte gerade Linie mit der Declinationsebene der Sonne bildet; auf diese Weise findet man, dass hier $\vartheta + f$ oder $\psi = ZSP + f = 90^\circ - (V - f)$ ist.

Die Punkte eines gegebenen Breitenparallels zu finden, an welchen eine vorherbestimmte Phase bei aufgehender oder untergehender Sonne gesehen werden kann.

177. Ausser den beiden erwähnten Punkten, an welchen die Phase am frühesten oder am spätesten gesehen werden kann, giebt es noch auf der Erde eine Reihe anderer Punkte, welche in der Zwischenzeit dieselbe Phase ebenfalls im Hori-

zonte sehen, und die auf verschiedenen Parallelen zwischen den nördlichen und südlichen Grenzen der Sichtbarkeit der Phase liegen.

Der Stundenwinkel t bei aufgehender oder untergehender Sonne wird durch die Gleichung:

$$\cos t = - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

bestimmt, wo φ die gegebene Breite des Parallels bedeutet; alsdann wird man daraus den Winkel ψ , und die geographische Länge λ mit Hilfe der Gleichungen (K') und (L') berechnen können. Man bekommt hierbei aber eine vierfache Auflösung, weil die Bedingungsgleichung für $\cos t$ zwei Werthe von t giebt, und jeder dieser Werthe den zweien verschiedenen Winkeln ψ entspricht; man bekommt nämlich 1^{stens} den Ort, an welchem der Anfang, und 2^{tens} den Ort, wo das Ende der Phase bei aufgehender Sonne beobachtet wird; 3^{tens} den Ort, an welchem der Anfang und 4^{tens} den Ort, wo das Ende der Phase bei untergehender Sonne gesehen werden kann.

Um die Curven zu ziehen, auf welchen die vorherbestimmte Phase im Horizonte gesehen wird, berechnet man für verschiedene Zeiten von dem ersten Anfange bis zum letzten Ende der Phase auf der Erde und für verschiedene Polhöhen von der nördlichsten bis zu der südlichsten Grenze der Sichtbarkeit der Phase, die wahren Zeiten $\frac{1}{3} t$ und die geographischen Längen λ der Orte, wo diese Phase im Horizonte erscheinen muss. Solche Punkte zusammen verbunden, geben alsdann die verlangten Curven.

Anwendung des vorhergehenden, auf die Berechnung der verschiedenen Phasen der Verfinsterung.

Berechnung der Curven für die äusseren und inneren

Berührungen der Ränder.

178. Der Kegel des Halbschattens des Mondes ist, da wo er die Erde trifft, nie so ausgedehnt, dass die ganze Erde

auf einmal in sein inneres eintreten könnte. Bei allen vom Monde veranlassten Finsternissen, ist daher wenigstens eine krumme Linie auf der Erdoberfläche vorhanden, von welcher einerseits die Finsterniss nicht sichtbar wird; deren Punkte also nur die äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes, oder bloss den Appuls, sehen können; tritt der Kegel ganz in die Erde ein, so ist noch eine zweite Linie dieser Art vorhanden. Berechnet man die Punkte auf der Erde, wo die äussere Berührung der Ränder im Horizonte gesehen wird und auch die Punkte, an welchen die Ränderberührung, als die grösste Phase der Verfinsterung erscheint, so wird man die Curven bekommen, die den Raum auf der Erde begrenzen, ausserhalb welchem die Finsterniss nicht wahrgenommen werden kann. Diese Curven werden nach den oben auseinandergesetzten Vorschriften berechnet; dazu ist nur es nöthig, statt D , überall $\varrho + r$ zu setzen.

Um die Grenzen der Sichtbarkeit bei totalen oder bei ringförmigen Sonnenfinsternissen zu bestimmen, muss man statt D in den allgemeinen Formeln den Werth $r - \varrho$ oder $\varrho - r$ einsetzen, welches den inneren Berührungen der Ränder entspricht, und zwar gilt $r - \varrho$ für ringförmige und $\varrho - r$ für totale Verfinsterungen.

Berechnung der Grenzen der Centralität.

179. Der Weg der centralen Finsterniss auf der Erde und die Zeiten ihres Anfanges und Endes werden bestimmt, wenn man in den Gleichungen $D = 0$ setzt, also hat man den nördlichsten und südlichsten Grenz-Parallel, zwischen welchen die Finsterniss central gesehen werden kann, durch die Gleichungen §. 173. Seite 146.:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin B}, \quad \sin(\varphi \pm M) = \frac{\eta \cdot \cos f}{(\pi - p)}.$$

zu bestimmen.

Berechnung des Ortes auf einem gegebenen Breitenparallel wo die Finsterniss, central werden kann, so wie die Zeit an diesem Orte.

180. Auf jedem gegebenen und zwischen den erwähnten Grenzen liegenden Parallel, wird man die Zeit und den Ort, wo die Finsterniss central werden kann, berechnen können, durch die Gleichungen:

$$\sin(B+t) = g; \lambda = t - L + l \sin(C-t).$$

Da bei dem Aufgange oder Untergange der Sonne, $\cos t^0 = -tg \varphi$. $tg \delta$ wird, so muss t zwischen $+t^0$ und $-t^0$ enthalten sein, damit es möglich wird die centrale Finsterniss, beobachten zu können.

Den Ort zu finden, wo zu einer gegebenen Zeit die Finsterniss central werden kann.

181. Für den Ort, an welchem zu einer gegebenen Zeit die Finsterniss central gesehen werden kann, hat man:

$$\sin(B+t) = g = \frac{k \cos f}{(\pi-p) b \cos \varphi} \frac{[(\pi-p) \sin \varphi \cos \delta - \eta] \cdot \sin B}{(\pi-p) \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi}$$

und alsdann folgt:

$$\eta = (\pi - p) \left\{ \sin \varphi \cos \delta - \frac{\sin(B+t)}{\sin B} \sin \delta \cos \varphi \right\}$$

wenn daher:

$$e \cos E = \cos \delta, e \sin E = \frac{\sin(B+t)}{\sin B} \cdot \sin \delta; \text{ oder } tg E = \frac{\sin(B+t)}{\sin B} \cdot tg \delta;$$

gesetzt wird, so erhält man:

$$\sin(\varphi - E) = \frac{\eta \cos E}{(\pi - p) \cdot \cos \delta}$$

Mit Hilfe der so gefundenen Breite φ und der gegebenen Zeit $\frac{1}{15} t$, findet man die Länge λ ebenso wie früher.

Den Ort der centralen Verfinsternung im Mittage zu finden.

182. Wenn $t=0$ ist, so erhält man den Ort, wo die centrale Finsterniss zur Zeit des wahren Mittagcs gesehen wird; in diesem Falle, wird $E = \delta$ und $\sin(\varphi - \delta) = \frac{\eta}{\pi - p}$.

Die Orte zu finden, wo die Finsterniss bei aufgehender oder untergehender Sonne central werden kann.

183. Die Orte, wo die centrale Finsterniss bei aufgehender oder untergehender Sonne beobachtet werden kann, ermittelt man durch die Gleichungen:

$$\sin(V - f) = \frac{\eta}{\pi - p} \cdot \cos f$$

$$\sin \varphi = \sin V \cdot \cos \delta; \quad \cos t = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\lambda = t - L + l \sin(C - t).$$

Ueber die Genauigkeit der verschiedenen Rechnungen.

184. Wenn der Verlauf einer Sonnenfinsterniss nur ungefähr gezeigt werden soll, so kann man die Erde als eine Kugel vom mittleren Halbmesser der Erde betrachten, und die $f, \delta, B, b, C, c, \eta$ als nahezu constant annehmen. Die dadurch verursachten Fehler, werden nicht sehr erheblich sein, und wenn man auch eine grosse Genauigkeit erlangen will, so ist es vorthailhaft mit solchen vorläufigen Rechnungen den Anfang zu machen; nachdem aber die kleinen Verbesserungen der Resultate zu bestimmen. Um diese Cor-

rectionen zu erhalten, muss man für verschiedene Zeitmomente, etwa von 2 zu 2 Stunden, die Declinationen δ der Sonne, die Winkel f und die entsprechenden Werthe von η , T , B , $\log b$, C und $\log c$ berechnen; da man den Anfang und das Ende der Phasen der Verfinsternung schon nahezu für verschiedene Orte auf der Erdoberfläche kennt, so wird man die diesen Zeiten correspondirenden Werthe von η , f , T , B u. s. w. genau genug durch Interpolation finden, und hiemit die Momente des Anfanges, oder des Endes der Phasen schärfer bestimmen können.

Ausserdem ist es noch nöthig auf die Verbesserung des scheinbaren Halbmessers des Mondes, aus dem zu bestimmenden Punkte der Erdoberfläche gesehen, und auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen. Ist die Polhöhe jenes Punktes φ und der Stundenwinkel der Sonne t , welcher dort der zu berechnenden Phase entspricht, nahezu bekannt, so kann man ohne merklichen Fehler bei der Berechnung des scheinbaren Halbmessers ϱ' des Mondes, t und δ statt des Stundenwinkels und der Declination des Mondes brauchen. Hat man alsdann durch die Formel:

$$\cos z = \cos \varphi \cos \delta \cdot \cos t + \sin \varphi \sin \delta$$

die wahre Zenithdistanz bestimmt; so wird die scheinbare Zenithdistanz $z' = z + (\pi - p) \cdot \sin z$, und der scheinbare Halbmesser:

$$\varrho' = \varrho \cdot \frac{\sin z'}{\sin z}, \text{ oder sehr nahezu } = \varrho + (\pi - p) \cdot \varrho \cdot \sin 1'' \cdot \cos z$$

sein.

Wenn die Polhöhe desjenigen Ortes, für welchen man die verschiedenen Erscheinungen der Sonnenfinsterniss be-

rechnen will, gegeben ist, so bekommt man leicht die entsprechende geocentrische Breite φ , indem man von der Polhöhe den Winkel $\frac{\sin 2 \varphi}{300 \cdot \sin 1''}$ abzieht; ist H die Horizontal-Aequatorial-Parallaxe des Mondes, so bekommt man auch die Horizontal-Parallaxe $\pi = H - \frac{H}{300} \sin^2 \varphi$, welche dem

gegebenen Parallelkreise angehört; mit diesem π und der geocentrischen Breite φ , muss die Rechnung alsdann geführt werden. Die von der Gestalt der Erde abhängigen Correctionen der vorläufig gefundenen Grenzen der Parallelkreise auf der Erde, zwischen welchen die vorherbestimmte Phase gesehen wird, kann man auch sehr leicht berechnen. Es seien φ_0 und φ_0' , die Polhöhen der nördlichen und südlichen Parallelkreise, welche den gefundenen Grenzen entsprechen; D die gegebene scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, welche von dort aus, während der grössten Phase der Verfinsternung, gesehen werden kann. Alsdann berechnet man: die Correctionen für die Polhöhen $\varphi_0 + 0^\circ 30'$ und $\varphi_0 - 0^\circ 30'$; $\varphi_0' + 0^\circ 30'$ und $\varphi_0' - 0^\circ 30'$, (um diese Polhöhen in geocentrische Breiten verwandeln zu können), so wie auch die entsprechende Horizontal-Parallaxe, den $\log k$ und den $\log g$; damit berechnet man nach der Formel:

$$D^{(n)} = k \cos f \cdot \frac{1 \pm g}{g}$$

die correspondirenden Abstände: D' , D'' , D''' und D^{IV} . Die Unterschiede $D' - D$, $D'' - D$ und $D''' - D$, $D^{IV} - D$, werden verschieden je nach der Polhöhe ausfallen; und da diese Unterschiede überhaupt sehr klein sind, so kann durch Interpolation oder Regel de tri, die Polhöhe finden, welche der Gleichung $D^{(n)} = D$ Genüge leistet; diese Polhöhe ist nun genau die zu bestimmende Grenze.

Die unter der Annahme der Kugelgestalt der Erde gefundene Zeit und der Ort des frühesten Anfanges einer vorherbestimmten Phase, können folgendermaassen wegen der Abplattung der Erde verbessert werden. Es sei φ_0 die annähernd bekannte Polhöhe des genannten Ortes; man berechne:

$$\varphi = \varphi_0 + 0^\circ 30' - \frac{\sin(2\varphi_0 + 1^\circ)}{300 \cdot \sin 1''} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_0 - 0^\circ 30' - \frac{\sin(2\varphi_0 - 1^\circ)}{300 \cdot \sin 1''},$$

so wird φ die geocentrische Breite sein, welche den Polhöhen $\varphi_0 + 0^\circ 30'$ und $\varphi_0 - 0^\circ 30'$ entspricht. Es entsteht nun folgende Aufgabe:

Die scheinbare Distanz D' , der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander zu bestimmen, welche unter einer gegebenen Polhöhe früher, als unter allen anderen Parallelkreisen erscheinen wird.

185. Die Bedingung des frühesten Anfanges erfordert, dass die beiden Gestirne sich in einer Verticalebene befinden sollen, und dass die Sonne im Horizonte liegt; man hat also §. 176:

$$\cos \psi = \frac{\eta \cdot \cos f}{\pi - p + D'} \quad \text{oder:} \\ D' \cos \psi = \eta \cos f - (\pi - p) \cos \psi,$$

und da überhaupt:

$$D' \cos \psi = k \cos f \cdot \left(\frac{\sin(B+t)}{g} - 1 \right)$$

ist, so bekommt man, wenn statt k , sein Werth substituirt wird:

$$D' \cos \psi = b(\pi - p) \cos \varphi \sin(B+t) - (\pi - p) \sin \varphi \cos \delta \cos f + \eta \cos f.$$

Indem man nun die beiden Ausdrücke für $D' \cos \psi$ mit ein-

ander vergleicht, so entsteht:

$$\cos \psi = \sin \varphi \cos \delta \cos f - b \cos \varphi \sin (B + t).$$

Setzt man daher:

$$\frac{b \sin (B + t)}{\cos \delta \cos f}, \text{ oder } \frac{tg \delta \cdot \sin (B + t)}{\sin B} = tg \xi,$$

wo t aus der Gleichung $\cos t = -tg (\varphi_0 + 0^\circ 30') \cdot tg \delta$ zu bestimmen ist, so kömmt:

$$\cos \psi = \frac{\cos \delta \cdot \cos f}{\cos \xi} \cdot \sin (\varphi - \xi),$$

$$D' = \frac{\eta \cos f}{\cos \psi} - (\pi - p);$$

die Grössen: π , p , η , f , b , δ und B , gelten hier für die nahezu bekannte Zeit des Anfanges; wobei φ und π , die zu der Polhöhe $\varphi_0 + 0^\circ 30'$ gehörende geocentrische Breite des Ortes und die dortige Horizontalparallaxe bedeuten.

Auf dieselbe Weise, berechnet man die Distanz D'' , welche unter der Polhöhe $\varphi_0 - 0^\circ 30'$ früher, als irgendwo anders erscheint. Die so unter der Berücksichtigung der wahren Gestalt der Erde gefundenen Distanzen D' und D'' mit dem gegebenen Abstände D verglichen, welcher der vorbestimmten Phase entspricht, geben durch eine Interpolation die genaue Polhöhe des Ortes, wo diese Phase am frühesten anfängt. Hat man die Polhöhe φ des Ortes des Anfanges gefunden, so werden die entsprechenden Stundenwinkel t der Sonne und die geographische Länge des Ortes durch die Gleichungen: $\cos t = -tg \varphi \cdot tg \delta$ und $\lambda = t - L + l \sin (C + t) - \frac{D}{n} \sin \psi$ berechnet.

Ebenso lässt sich die Zeit des Endes und die geographische Lage des Ortes, wo das Ende am spätesten gesehen wird, ermitteln.

Berechnung des Verlaufes der Sonnenfinsterniss für einen Ort, dessen Polhöhe und Länge gegeben ist.

186. Man bestimmt zuerst die geocentrische Breite und die Horizontalparallaxe π , welche der gegebenen Polhöhe entspricht; mit diesen Grössen und mit der bekannten Länge des Ortes, berechnet man zuerst für eine wahre Zeit $\frac{1}{15} T$, welche von der Conjunctionszeit nicht sehr verschieden ist, die Coordinaten x', y', X', Y' ; alsdann wiederholt man die Berechnung der Coordinaten für die Zeit $\frac{1}{15} T + 1^h$; es seien x'', y'', X'', Y'' diese Coordinaten; D die scheinbare Distanz der Sonnen- und Mondmittelpunkte von einander, welche der vorherbestimmten Phase der Finsterniss angehört, und $\frac{1}{15} T + u$ die gesuchte Zeit des Eintretens der Phase. Um die Unbekannte u nur nahezu zu bekommen, kann man annehmen, dass für die Zeit $\frac{1}{15} T + u$, die correspondirenden Coordinaten sein werden:

$$x = x' + q.u; y = y' + h.u; X = X' + Q.u; Y = Y' + H.u;$$

wo q, h, Q, H die stündlichen Zunahmen der Coordinaten, oder respective $x'' - x', y'' - y', X'' - X', Y'' - Y'$ bedeuten. Alsdann kömmt:

$$D^2 = [x' - X' + (q - Q).u]^2 + [y' - Y' + (h - H).u]^2.$$

Nimmt man nun an, dass:

$$x' - X' = \mu.\sin M, q - Q = \nu.\sin N;$$

$$y' - Y' = \mu.\cos M, h - H = \nu.\cos N;$$

und setzt man ferner:

$$\frac{\mu}{D} \sin(M - N) = \cos \Theta$$

so wird:

$$u = -\frac{\mu}{\nu} \cos(M - N) \mp \frac{D}{\nu} \sin \Theta,$$

wo das obere Zeichen für den Anfang, oder für die erste Phase, das untere aber für das Ende, oder für die letzte Phase gilt, vorausgesetzt, dass man $\Theta < 180^\circ$ genommen hat, was immer geschehen kann.

Um die gesuchte Zeit genauer zu bestimmen, berechnet man die Coordinaten x, y, X, Y für die Zeiten $\frac{1}{15} T + u$ und $\frac{1}{15} T + u + 1'$ und bildet für D^2 eine ähnliche Gleichung wie früher, wo aber nicht die stündliche, sondern die Zunahme der Coordinaten, während einer Zeit-Minute vorkommen wird; die Auflösung dieser Gleichung wird die neue Correction u' der gesuchten Zeit in Minuten und Theilen einer Minute ausdrücken. Auf dieselbe Weise kann man die Genauigkeit weiter treiben.

Gauss hat eine viel leichtere, wenn auch indirecte Methode zur Lösung dieser Aufgabe vorgeschlagen; man nimmt einen willkürlichen Stundenwinkel t der Sonne an, z. B. den Stundenwinkel, welcher 1^h oder 2^h von der Conjunction stattfindet, wenn man den Anfang, oder ebenso viel nach der Conjunction, wenn man das Ende berechnet; bestimmt man alsdann den Hülfswinkel ψ , und darauf λ durch folgende Formeln:

$$\cos \psi = \frac{k \cos f}{D} \cdot \left(\frac{\sin(B + t)}{g} - 1 \right)$$

$$\lambda = t - L + l \sin(C - t) - \frac{D}{n} \sin \psi;$$

so wird eine Länge gefunden, welche von der bekannten Länge des gegebenen Punktes mehr oder weniger abweicht; nun wiederholt man die Rechnung für einen anderen Stundenwinkel und sieht zu, ob die Uebereinstimmung der berechneten und gegebenen Länge besser wird. Wenige Versuche werden hinreichend sein, um einen solchen Stundenwinkel t der Sonne zu finden, welcher zu der gegebenen Länge genau passt. Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei diesen Rechnungen die geocentrische Breite φ und die entsprechende Horizontal-Parallaxe π , so wie auch die zu der Zeit des Stundenwinkels t gehörigen Werthe von π , n , f , B , u. s. w. hierbei angewandt werden müssen.

Wenn man den Anfang, oder das Ende der Finsterniss bestimmen will, so wird D gleich der Summe der scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes gesetzt werden müssen. Offenbar ist nun $\psi - f$ oder ϑ der Winkel, welchen die, die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes verbindende Linie mit dem Declinationskreise der Sonne bildet; dieser Winkel von Norden rechts herum gezählt, giebt also den Punkt der Sonnenscheibe an, wo die Finsterniss anfängt oder endigt. Wenn von ϑ der parallactische Winkel q abgezogen wird, so erhält man den Winkel, den die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Gestirne mit dem Verticalkreise der Sonne macht. Am bequemsten bekommt man den parallactischen Winkel q durch die Formeln:

$$\operatorname{tg} F = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos t}, \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} t \cdot \cos F}{\sin (F - \delta)},$$

wo ebenso wie früher, t den Stundenwinkel, und δ die Declination der Sonne bedeutet; alsdann ist $\vartheta - q$ der Winkel zwischen dem höchsten Punkte der Sonnenscheibe und dem Punkte wo die Finsterniss anfängt oder endigt.

**Berechnung der grossen totalen Sonnenfinsterniss
am 28^{sten} Juli 1851 nach der Gauss'schen Methode,
vom Uebersetzer.**

Auf den Wunsch des Hr. Verfassers, hat sich der Uebersetzer die Erlaubniss genommen, die Berechnung der grossen totalen Sonnenfinsterniss, welche sich am 28^{sten} Juli 1851 ereignen wird, diesem Werke einzuverleiben, auch glaubt derselbe, dass es nicht überflüssig erscheinen dürfte, einige Vereinfachungen, welche bei dieser Rechnung von ihm vorgenommen worden sind, so wie einige dabei zur Anwendung kommenden Hülftafeln näher zu erläutern. Zu diesen Vereinfachungen gehört nun eine directe Methode die Coordinaten x und y §. 167. Seite 135, ohne Zwischenstufen mit Hülfe einer Tafel zu berechnen, so wie auch ein Paar Tafeln um den Einfluss der Erdabplattung ohne Mühe zu berücksichtigen, welche nun sogleich näher erläutert werden sollen.

*Ueber die Berechnung der Coordinaten x und y mit
einer Tafel.*

Die von Gauss eingeführten Hülfsgrössen δ' , A und S (§. 167. Seite 136.), werden nur zur Berechnung von x und y und sonst weiter gar nicht gebraucht; ich habe es aber bequemer und einfacher gefunden x und y , ohne alles weitere direct zu berechnen, was leicht geschehen kann, und naturgemässer erscheint. Denkt man sich nämlich, das oben im Texte §. 167. Seite 135. erwähnte sphärische Dreieck PLS , zwischen dem Pole des Aequators P , dem Centrum des Mondes L und dem Centrum der Sonne S , so wird man sogleich haben:

$$\begin{aligned} \sin LS \sin PSL &= \sin PL \sin SPL \\ \sin LS \cos PSL &= \cos PL \sin PS - \sin PL \cos PS \cos SPL \\ \cos LS &= \cos PL \cos PS + \sin PL \sin PS \cos SPL \end{aligned}$$

und wenn man sich erinnert, dass nach den früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$LS = A, PSL = S, PL = 90 - \delta \zeta,$$

$$PS = 90 - \delta \text{ und } SPL = \alpha \zeta - \alpha \text{ ist;}$$

so hat man:

$$\sin A \sin S = \cos \delta \zeta \sin (\alpha \zeta - \alpha)$$

$$\sin A \cos S = \sin \delta \zeta \cos \delta - \cos \delta \zeta \sin \delta \cos (\alpha \zeta - \alpha)$$

$$\cos A = \sin \delta \zeta \sin \delta + \cos \delta \zeta \cos \delta \cos (\alpha \zeta - \alpha)$$

Die beiden letzten Formeln, lassen sich aber auch so schreiben:

$$\sin A \cos S = \sin (\delta \zeta - \delta) + 2 \cos \delta \zeta \sin \delta \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha \zeta - \alpha)$$

$$\cos A = \cos (\delta \zeta - \delta) - 2 \cos \delta \zeta \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha \zeta - \alpha)$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A^2 = \sin^2 \frac{1}{2} (\delta \zeta - \delta) + \cos \delta \zeta \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha \zeta - \alpha)$$

Nun ist aber:

$$\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha \zeta - \alpha) = \frac{1}{4} \sin^2 (\alpha \zeta - \alpha) \cdot \sec^2 \frac{1}{2} (\alpha \zeta - \alpha)$$

und daher hat man endlich, weil nach dem früheren §. 167. Seite 135:

$$x \sin 1'' = \sin A \sin S$$

$$y \sin 1'' = \sin A \cos S$$

auch ebenfalls:

$$x = \frac{\sin(\alpha \zeta - \alpha)}{\sin 1''} \cdot \cos \delta \zeta$$

$$y = \frac{\sin(\delta \zeta - \delta)}{\sin 1''} + \frac{\cos \delta \zeta \sin \delta \cdot \sin^2(\alpha \zeta - \alpha)}{2 \sin 1'' \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha \zeta - \alpha)}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin^2(\delta \zeta - \delta)}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\delta \zeta - \delta)} + \frac{\cos \delta \zeta \cos \delta \cdot \sin^2(\alpha \zeta - \alpha)}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha \zeta - \alpha)}$$

also wird man auch haben:

$$x = \frac{\sin(\alpha \zeta - \alpha)}{\sin 1''} \cdot \cos \delta \zeta$$

$$y = \frac{\sin(\delta \zeta - \delta)}{\sin 1''} + \frac{\sin 1''}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha \zeta - \alpha)} \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Nun ist aber immer, von $\omega = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\omega = +\frac{1}{2}\pi$:

$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{5040}\omega^7 + \dots$$

und setzt man:

$$\frac{1}{6}\omega^3 - \frac{1}{120}\omega^5 + \dots = w,$$

so wird man haben:

$$\sin \omega = \omega - w$$

wo w von der dritten Ordnung sein wird, wenn ω von der ersten Ordnung ist.

Hier sind nun ω und w noch in Bogen ausgedrückt, will man aber ω und w nicht als Bogengrößen gebrauchen, sondern sie lieber gleich in Bogensekunden ausgedrückt haben, so wird man statt obiger Gleichung erhalten:

$$\frac{\sin \omega}{\sin 1''} = \omega - w$$

wo nunmehr ω und w wirkliche Winkelgrößen sind. Vorausgesetzt, dass nun der Winkel ω nicht sehr gross ist, so wird w immer eine sehr kleine Grösse sein müssen, zum Beispiel für $\omega = 3^0$, wird w erst $= 4''4$, man kann daher w sehr bequem mit ω als Argument in eine Tafel bringen, wenn ω nicht gar zu gross wird, ebenso lässt sich auch der Werth $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega$ mit ω als Argument, leicht in eine Tafel bringen, und zwar wird es genügen die Tafel nur bis zu $\omega = 3^0$ auszudehnen.

Die nun folgende Tafel I, welche von Minute zu Minute, von $\omega = 0^0$ bis $\omega = 3^0$, regelmässig fortschreitet, wurde von mir berechnet und enthält in ihrer:

1^{ten} Columne: den Winkel ω als Argument in Graden und Minuten ausgedrückt.

2^{ten} Columne: den Winkel ω in Bogen-Secunden ausgedrückt.

3^{ten} Columne: den Werth $w = \omega - \sin \omega = \frac{1}{6} \omega^3 - \frac{1}{120} \omega^5 + \frac{1}{5040} \omega^7 - \dots$ in Secunden.

4^{ten} Columne: den Werth $\log \mu$, $\sin \mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \sec^2 \frac{1}{2} \omega$.

Zur Bequemlichkeit sind überall die Differenzen für w und $\log \mu$, beigefügt, und daher wird es nun mit dieser Hilfstafeln sehr leicht sein, die Coordinaten x und y ganz direct zu berechnen, denn man wird haben:

$$x = (a\zeta - \alpha - a) \cdot \cos \delta \zeta$$

$$y = \delta \zeta - \delta - \delta + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

wo $a\zeta - \alpha$ und $\delta \zeta - \delta$, unmittelbar durch die Elemente der Rechnung, wie man sie aus den Ephemeriden erhält, gegeben sind, die Werthe a und μ dagegen mit $a\zeta - \alpha$ als Argument statt ω , aus der Tafel I, unter den Ueberschriften w und $\log \mu$ erhalten werden, und δ endlich ebenfalls aus Tafel I, unter der Rubrik w mit dem Argumente $\delta \zeta - \delta$ statt ω gefunden werden kann.

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w	$\log \mu$
0° 0'	0	0".00000	4.3845449
1	60	0.00000	5449
2	120	0.00001	5449
3	180	0.00003	5450
4	240	0.00006	5451
5	300	0.00011	5452
0 6	360	0.00019	4.3845453
7	420	0.00030	5454
8	480	0.00044	5455
9	540	0.00062	5457
10	600	0.00085	5459
11	660	0.00113	5461
0 12	720	0.00147	4.3845463
13	780	0.00187	5465
14	840	0.00233	5467
15	900	0.00286	5470
16	960	0.00347	5473
17	1020	0.00416	5476
0 18	1080	0.00493	4.3845479
19	1140	0.00580	5482
20	1200	0.00677	5485
21	1260	0.00784	5489
22	1320	0.00902	5493
23	1380	0.01030	5497
0 24	1440	0.01171	4.3845501
25	1500	0.01323	5506
26	1560	0.01488	5511
27	1620	0.01666	5516
28	1680	0.01858	5521
29	1740	0.02064	5526
0 30	1800	0.02285	4.3845531

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:

$w = \omega - \sin \omega$ in Secunden, und $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega$,
und dann ist:

$$x = (a \zeta - a - a) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - \delta + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w		$\log \mu$
0° 30'	1800	0''.02285		4.3845531
31	1860	0.02521	236 16	5537 6
32	1920	0.02773	252 16	5543 6
33	1980	0.03041	268 17	5549 6
34	2040	0.03326	285 17	5555 6
35	2100	0.03628	302 18	5562 7
			320 18	
0 36	2160	0.03948	338 18	4.3845569
37	2220	0.04286	357 19	5575 6
38	2280	0.04643	376 19	5581 6
39	2340	0.05019	396 20	5588 7
40	2400	0.05415	416 20	5595 7
41	2460	0.05831	437 21	5603 8
			459 21	
0 42	2520	0.06268	480 22	4.3845611
43	2580	0.06727	503 23	5619 8
44	2640	0.07207	526 23	5627 8
45	2700	0.07710	549 23	5635 8
46	2760	0.08236	573 24	5643 8
47	2820	0.08785	597 24	5652 9
			622 25	
0 48	2880	0.09358	647 25	4.3845661
49	2940	0.09955	673 26	5670 9
50	3000	0.10577	700 26	5679 9
51	3060	0.11224	727 27	5688 9
52	3120	0.11897	754 27	5697 9
53	3180	0.12597	782 28	5707 10
			810 28	
0 54	3240	0.13324	840 28	4.3845717
55	3300	0.14078	868 29	5727 10
56	3360	0.14860	899 30	5737 10
57	3420	0.15670	931 30	5748 11
58	3480	0.16510	964 31	5759 11
59	3540	0.17378	999 31	5769 10
1 0	3600	0.18277	1035 30	4.3845779

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:

$w = \omega - \sin \omega$ in Secunden, und $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega$,
und dann ist:

$$x = (\alpha \zeta - \alpha - a) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - \delta + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w	$\log \mu$
1° 0'	3600	0".18277	4.4845779
1 1	3660	0.19206	5791
2	3720	0.20167	5803
3	3780	0.21158	5814
4	3840	0.22182	5825
5	3900	0.23238	5837
1 6	3960	0.24327	4.3845849
7	4020	0.25450	5861
8	4080	0.26606	5873
9	4140	0.27797	5886
10	4200	0.29023	5899
11	4260	0.30285	5912
1 12	4320	0.31582	4.3845925
13	4380	0.32916	5939
14	4440	0.34287	5953
15	4500	0.35696	5966
16	4560	0.37143	5979
17	4620	0.38629	5993
1 18	4680	0.40153	4.3846007
19	4740	0.41718	6022
20	4800	0.43322	6037
21	4860	0.44967	6052
22	4920	0.46653	6067
23	4980	0.48381	6082
1 24	5040	0.50151	5.3846097
25	5100	0.51963	6113
26	5160	0.53819	6129
27	5220	0.55718	6145
28	5280	0.57662	6161
29	5340	0.59650	6177
1 30	5400	0.61683	4.3846193

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:
$$w = \omega - \sin \omega \text{ in Secunden, und } \mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega,$$

und dann ist:

$$x = (\alpha \zeta - \alpha - a) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - \delta + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w	$\log \mu$
1° 30'	5400	0°.61683	4.3846193
31	5460	0°.63762	6210
32	5520	0°.65887	6227
33	5580	0°.68058	6244
34	5640	0°.70277	6261
35	5700	0°.72544	6278
1 36	5760	0°.74859	4.3846295
37	5820	0°.77223	6313
38	5880	0°.79636	6331
39	5940	0°.82099	6349
40	6000	0°.84612	6367
41	6060	0°.87176	6386
1 42	6120	0°.89791	4.3846405
43	6180	0°.92458	6424
44	6240	0°.95177	6443
45	6300	0°.97949	6462
46	6360	1°.00774	6481
47	6420	1°.03653	6501
1 48	6480	1°.06586	4.3846521
49	6540	1°.09575	6541
50	6600	1°.12618	6561
51	6660	1°.15717	6581
52	6720	1°.18873	6601
53	6780	1°.22086	6622
1 54	6840	1°.25355	4.3846643
55	6900	1°.28683	6664
56	6960	1°.32069	6685
57	7020	1°.35514	6707
58	7080	1°.39018	5729
59	7140	1°.42582	6751
2 0	7200	1°.46207	4.3846773

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:

$w = \omega - \sin \omega$ in Secunden, und $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega$,
und dann ist:

$$x = (\alpha \zeta - \alpha - a) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - b + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w			$\log \mu$
2° 0'	7200	1''	.46207		4.3846773
1	7260	1	.49893	3686 61	6795 22
2	7320	1	.53640	3747 62	6817 22
3	7380	1	.57449	3809 63	6839 22
4	7440	1	.61321	3872 62	6861 22
5	7500	1	.65255	3934 64	6884 23
				3998 63	6884 23
2 6	7560	1	.69253		4.3846907
7	7620	1	.73314	4061 65	6931 24
8	7680	1	.77440	4126 65	6955 24
9	7740	1	.81631	4191 66	6978 23
10	7800	1	.85888	4257 66	7001 23
11	7860	1	.90211	4323 66	7025 24
				4389 67	7025 24
2 12	7920	1	.94600		4.3847049
13	7980	1	.99056	4456 67	7074 25
14	8040	2	.03579	4523 69	7099 25
15	8100	2	.08171	4592 68	7124 25
16	8160	2	.12831	4660 69	7149 25
17	8220	2	.17560	4729 70	7174 25
				4799 70	7174 25
2 18	8280	2	.22359		4.3847199
19	8340	2	.27228	4869 70	7224 25
20	8400	2	.32167	4939 72	7249 25
21	8460	2	.37178	5011 71	7275 26
22	8520	2	.42260	5082 72	7301 26
23	8580	2	.47414	5154 72	7328 27
				5226 74	7328 27
2 24	8640	2	.52640		4.3847355
25	8700	2	.57940	5300 73	7381 26
26	8760	2	.63313	5373 75	7407 26
27	8820	2	.68761	5448 73	7434 27
28	8880	2	.74282	5521 76	7461 27
29	8940	2	.79879	5597 76	7489 28
				5673 76	7489 28
2 30	9000	2	.85552		4.3847517

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:

$w = \omega - \sin \omega$ in Secunden, und $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^3 \frac{1}{2} \omega$,
und dann ist:

$$x = (\alpha \zeta - \alpha - a) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - b + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Tafel I.

enthaltend die Werthe w und $\log \mu$ mit ω als Argument.

ω	ω''	w			$\log \mu$
2° 30'	9000	2.85552			4.3847517
31	9060	2.91301	5749	76	7544
32	9120	2.97126	5825	78	7571
33	9180	3.03029	5903	77	7599
34	9240	3.09009	5980	78	7627
35	9300	3.15067	6058	79	7656
			6137		
2 36	9360	3.21204			4.3847685
37	9420	3.27420	6216	80	7714
38	9480	3.33716	6296	80	7743
39	9540	3.40092	6376	81	7772
40	9600	3.46549	6457	81	7801
41	9660	3.53087	6538	82	7831
			6620		
2 42	9720	3.59707			4.3847861
43	9780	3.66409	6702	82	7891
44	9840	3.73193	6784	84	7921
45	9900	3.80061	6868	84	7951
46	9960	3.87013	6952	84	7981
47	10020	3.94049	7036	84	8012
			7120		
2 48	10080	4.01169			4.3848043
49	10140	4.08375	7206	86	8074
50	10200	4.15667	7292	86	8105
51	10260	4.23045	7378	87	8136
52	10320	4.30510	7465	87	8167
53	10380	4.38062	7552	88	8199
			7640		
2 54	10440	4.45702			4.3848231
55	10500	4.53430	7728	89	8263
56	10560	4.61247	7817	89	8295
57	10620	4.69153	7906	90	8328
58	10680	4.77149	7996	91	8361
59	10740	4.85236	8087	90	8393
			8177		
3 0	10800	4.93413			4.3848425

Die Tafel giebt unmittelbar die Werthe w und $\log \mu$, wo:

$w = \omega - \sin \omega$ in Secunden, und $\mu = \frac{1}{2} \sin 1'' \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \omega$,
und dann ist:

$$x = (\alpha \zeta - \alpha - \alpha) \cdot \cos \delta \zeta; \quad y = \delta \zeta - \delta - \delta + \mu \cdot \frac{\sin \delta}{\cos \delta \zeta} \cdot x^2$$

Man sieht nun leicht ein, dass mit Hülfe der vorhergehenden Tafel, die Berechnung von δ , A und S in §. 167. Seite 136. gänzlich erspart wird; und dass man daher gewissermassen, bei Befolgung der hier gegebenen Methode, sogleich zu den Fundamental-Grössen x und y gelangen kann. Das zweite Glied im Ausdrucke für y , oder $\mu \frac{\sin \delta}{\cos \delta} x^2$,

kann bei Finsternissen niemals $38''$ übersteigen, wenn die Zeit, für welche die Coordinaten x und y gelten, nicht mehr als 3 Stunden von der Conjunctionszeit entfernt ist; es wächst nämlich dieses Glied zugleich mit dem Werthe von x und auch mit dem Werthe von δ . In Beziehung auf x tritt das Maximum seines Werthes ein, sobald x sein Maximum erreicht, also für den Anfang und das Ende der Verfinsterung überhaupt, dagegen wird es ein Maximum in Beziehung auf δ , zur Zeit der Solsticien. Zur Zeit der Aequinoxien, muss es Null werden, was auch der Werth von x sein mag, und wird daher alsdann ein absolutes Minimum. Was nun die Werthe von a und b betrifft, so sind diese Grösse ungewein klein, sie müssen bei Finsternissen immer zwischen $0''$ und $2''$ schwanken. Der Werth von w und also auch die Werthe von a und b müssen immer das entsprechende Zeichen des Arguments haben, mit dem sie aufgeschlagen werden; es findet daher in allen Fällen bei der Formation der Ausdrücke $\alpha \ll - \alpha - a$, $\delta \ll - \delta - b$ u. s. w. wirklich eine reele Subtraction statt. Schliesslich wäre noch zu bemerken, dass die Tafel nicht bloss bei der vorliegenden Aufgabe, eine Erleichterung der Rechnung gewährt, sondern sich überhaupt auch allemal da anwenden lässt, wo es sich um die Berechnung von Ausdrücken von der Form:

$$\xi = \frac{A \cdot \sin \nu}{\sin 1''}$$

handelt, wo A einen beliebigen Coefficienten bedeutet, und ν

ein kleiner Winkel ist, denn alsdann wird, $\xi = A. (\nu - n)$, wo n aus der Tafel I. mit ν als Argument gefunden werden kann, sobald ν nicht grösser als 3^0 ist; es wäre sogar für manche Zwecke gut, die Tafel I. noch weiter auszudehnen, welches ich an einem anderen Orte zeigen werde.

Ueber die Berücksichtigung der Gestalt der Erde bei der Berechnung der Hilfsgrössen k , g , L und l , welche bei der Gaussischen Methode vorkommen, mit Tafeln.

Aus den allgemeinen Gleichungen, welche in §. 171. Seite 140. hergeleitet wurden, so wie aus den nachfolgenden §. §. ergibt sich, dass die Länge eines Ortes auf einem gegebenen Breitenparallel, wo irgend eine bestimmte Phase der Verfinsterung gesehen werden soll, sich am bequemsten finden lässt, wenn man gewisse Hilfsgrössen k , g , L und l einführt, welche durch folgende Relationen näher bestimmt werden, nämlich:

$$k = (\pi - p) \sin \varphi'. \cos \delta - \eta$$

$$g = \frac{k \cos f}{b (\pi - p) \cos \varphi'}$$

$$L = T + \frac{k}{n} \cdot \sin f$$

$$l = (\pi - p) \cdot \frac{c}{n} \cdot \cos \varphi'.$$

In diesen Ausdrücken bedeutet π die Horizontal-Parallaxe des Mondes, an einem Orte, dessen geocentrische Breite φ' ist, oder dessen geographische Breite $= \varphi$. Bezeichnet man nun die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes durch II , so wird bekanntlich in aller Strenge §. 14. Seite 24. Band I.:

$$\sin \pi = \frac{r}{a} \cdot \sin \Pi$$

wo r die Entfernung des Ortes (dessen Breite φ ist), vom Centrum der Erde bedeutet und a der Aequatorial-Halbmesser der Erde ist. Nimmt man nun a als Einheit an, so kann man mit grosser Annäherung setzen:

$$\pi = r \cdot \Pi$$

Wenn nun die Aequatorial - Horizontal - Parallaxe der Sonne durch P bezeichnet wird, so wird man ebenfalls haben:

$$p = r \cdot P$$

Es wird daher auch mit grosser Annäherung $\pi = p = r \cdot (\Pi - P)$, so dass man also die Formeln für k , g , L und l , nunmehr auch so schreiben kann:

$$k = r \sin \varphi' \cdot (\Pi - P) \cos \delta - \eta$$

$$g = \frac{k}{r \cos \varphi'} \cdot \frac{\cos f}{b(\Pi - P)}$$

$$L = T + k \cdot \frac{\sin f}{n}$$

$$l = r \cos \varphi' \cdot \frac{(\Pi - P) \cdot c}{n}$$

Bei dieser Art und Weise die Ausdrücke für k , g , L und l zu schreiben, bleiben diejenigen Grössen, welche nur von der Zeit abhängen, also die Werthe $(\Pi - P) \cos \delta$; η , $\frac{\cos f}{b(\Pi - P)}$, $\frac{\sin f}{n}$, $\frac{(\Pi - P) \cdot c}{n}$, c abgesondert von den Grössen: $r \sin \varphi'$; $r \cos \varphi'$; welche nur von der Lage des Ortes auf der Erde abhängen, dessen Polhöhe $= \varphi$ ist, man kann daher

die ersteren Grössen ein für allemal für den ganzen Verlauf der Finsterniss, von Stunde zu Stunde oder von 2 zu 2 Stunden vorausberechnen und in eine Tafel bringen. Ebenso lassen sich aber auch die Werthe $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$ in eine Tafel bringen, welche aber, wenn sie einmal berechnet ist; nicht blos für eine besondere Finsterniss gelten wird, sondern ganz allgemein bei der Vorausberechnung jeder Finsterniss gebraucht werden kann. Bei dieser Art und Weise zu verfahren, erspart man sich daher die Berechnung der örtlichen Horizontalparallaxen, und da man ferner φ' und r nicht mehr abgesondert braucht, sondern nur in der Gestalt, $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$, so wird auch zugleich die Berechnung der geocentrischen Breite erspart, indem man sich ein für allemal eine Tafel anfertigen kann, welche die Werthe $r \sin \varphi$ und $r \cos \varphi$ mit der geographischen Breite φ als Argument, unmittelbar angiebt. Hat man sich alsdann die von der Zeit abhängigen Werthe von Stunde zu Stunde vorausberechnet, so kann man sogleich mit Hülfe dieser Tafel, die Werthe k , g , L und l , für irgend ein besonderes Zeit-Moment bestimmen, oder noch besser k , g , L und l für den ganzen Verlauf der Finsterniss in Tafeln mit doppeltem Eingang bringen, mit den beiden Argumenten: Geographische Breite $= \varphi$ und wahre Zeit des ersten Meridianes $= \tau$.

Ueber die Bestimmung der Ausdrücke $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$.

Im ersten Bande dieses Werkes §. 14. Seite 24. ist gezeigt worden, dass:

$$r \sin \varphi' = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$r \cos \varphi' = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \text{ und}$$

$$tg \varphi' = (1 - e^2) tg \varphi$$

wo r den Halbmesser der Erde am Beobachtungsorte, a den Aequatorial-Halbmesser der Erde, φ' die geocentrische Breite, φ die geographische Breite und e die Excentricität des Erdmeridianes bedeutet. Bezeichnet man nun das Stück der Normale von Beobachtungsorte bis zur Aequatorial-Achse mit A , dagegen das Stück der Normale vom Beobachtungsorte bis zur Polar- oder Rotations-Achse durch B , und setzt endlich den Quotienten zwischen beiden $= T$, so wird man haben:

$$A = \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \text{ und}$$

$$T = 1 - e^2.$$

Diese Grössen ändern sich sehr langsam, und lassen sich folglich mit grosser Bequemlichkeit mit φ als Argument, in eine Tafel bringen, welche nur wenig Raum einnimmt, sobald man für e irgend einen bestimmten Werth festsetzt. Nun ist aber bekanntlich:

$$e^2 = \mu(2 - \mu),$$

wo durch μ die Abplattung des Erdsphäroides bezeichnet werden soll, die nach Burckhardt sehr nahe $= \frac{1}{300}$ ist; bei dieser grossen Annäherung an die Wahrheit, kann man daher den wahren Werth von

$$\mu = \frac{1}{300 + \eta}$$

setzen, wo alsdann η nothwendig eine sehr kleine Zahl sein muss, die nur wenige Einheiten betragen kann.

Bezeichnet man also die Werthe von A, B und Γ , welche in der Annahme $\mu = \frac{1}{300}$ oder $e^2 = \frac{599}{90000}$ berechnet werden durch α, β und γ , so wird man allgemein annehmen können, sobald η recht klein ist, dass:

$$\log A = \log \alpha + \alpha' \cdot \eta$$

$$\log B = \log \beta + \beta' \cdot \eta$$

$$\log \Gamma = \log \gamma + \gamma' \cdot \eta$$

wo die Werthe der Coefficienten α', β' und γ' sich leicht durch den Taylorschen Lehrsatz bestimmen lassen werden; oder auch ganz einfach dadurch, dass man die Grössen $\log A$, $\log B$ und $\log \Gamma$ nach η differenziert. Nun ist aber:

$$\lg B = -\frac{1}{2} \lg (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

mithin:

$$\beta' = \frac{d \lg B}{d \eta} = + (\text{Mod}) \cdot B^2 \sin^2 \varphi \cdot e \left(\frac{d e}{d \eta} \right)$$

wo (Mod) den Modulus des Briggischen Systems bedeutet.

Es ist aber:

$$e^2 = \mu (2 - \mu) = \frac{1}{300 + \eta} \left(2 - \frac{1}{300 + \eta} \right)$$

also auch:

$$2 \lg e = - \lg (300 + \eta) + \lg \left(2 - \frac{1}{300 + \eta} \right)$$

und daher ebenfalls:

$$2. \frac{de}{e} = -\frac{d\eta}{300+\eta} + \frac{d\eta}{(300+\eta)^2 \left(2 - \frac{1}{300+\eta}\right)}$$

mithin:

$$\frac{de}{d\eta} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\mu + \frac{\mu^2}{2-\mu}\right) \cdot e = -\frac{\mu - \mu^2}{2-\mu} \cdot e$$

Man hat daher endlich:

$$\beta' = -(\text{Mod}) \cdot e^2 \cdot \frac{\mu - \mu^2}{2-\mu} \cdot B^2 \sin^2 \varphi$$

also auch:

$$\beta' = -(\text{Mod}) \cdot \mu^2 (1-\mu) \cdot B^2 \sin^2 \varphi$$

Man hat ferner:

$$\lg \Gamma = \lg (1 - e^2)$$

$$\gamma' = \frac{d \log \Gamma}{d \eta} = \frac{-2(\text{Mod}) e}{1 - e^2} \cdot \frac{de}{d\eta} = +2(\text{Mod}) \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{\mu - \mu^2}{2 - \mu}$$

also wird:

$$\gamma' = \frac{2(\text{Mod}) \cdot \mu^2}{1 - \mu}$$

und da:

$$A = B \cdot \Gamma$$

so ist auch:

$$\log A = \log B + \log \Gamma$$

und daher endlich:

$$\frac{d \log A}{d \eta} = \frac{d \log B}{d \eta} + \frac{d \log \Gamma}{d \eta}$$

oder:

$$\alpha' = \beta' + \gamma' = (\text{Mod.}) \mu^2 \left\{ \frac{2}{1-\mu} - (1-\mu) \cdot B^2 \sin^2 \varphi \right\}$$

Berechnet man nun die Coefficienten in den Ausdrücken für α' , β' und γ' numerisch, in der Annahme, dass $\mu = \frac{1}{300}$, so hat man endlich:

$$\begin{aligned} \alpha' &= + 0.0000096.8327 - 0.0000048.0941 B^2 \sin^2 \varphi \\ \beta' &= - 0.0000048.0941 B^2 \sin^2 \varphi \\ \gamma' &= + 0.0000096.8327 \end{aligned}$$

Um A und B zu berechnen, wurde folgendermaassen verfahren:

Es ist nämlich:

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi}}$$

Bestimmt man nun einen Hülfswinkel M auf solche Weise, dass:

$$\operatorname{tg} M = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \cos \varphi$$

so wird:

$$B = \frac{\cos M}{\sqrt{1 - e^2}} \text{ und}$$

$$A = \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos M$$

Man hat also in dem vorliegenden Falle bei der Annahme, dass $\mu = \frac{1}{300}$, oder $\eta = 0$:

$$\log \operatorname{tg} M = 8.9130422 + \log \cos \varphi$$

$$\log \alpha = 9.9985499 + \log \cos M$$

$$\log \beta = 0.0014501 + \log \cos M$$

$$\log \gamma = 9.9970999$$

Diese Formeln sind zur Berechnung von α und β vorzüglich genau und bequem, indem man den Winkel M nicht aufzuschlagen braucht, sondern sogleich in der Logarithmentafel von $\log \operatorname{tg} M$ auf $\log \cos M$ übergehen kann.

Nach diesen Formeln wurden nun die Werthe $\lg \alpha$, $\lg \beta$, $\lg \gamma$, α' , β' und γ' vom Uebersetzer berechnet, und nachher in der Tafel II. zusammengestellt; das Argument dieser Tafel ist die geographische Breite φ , und die Einrichtung der Tafel ist so einfach, dass sie keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Für den Fall, dass die Erdabplattung $= \frac{1}{300}$ angenommen wird, welches wohl für's erste noch lange geschehen kann, (indem Grad-Messungen schwerlich jemals vermögend sein werden, den Werth von η bis auf eine Einheit sicher zu bestimmen, und eine genauere Bestimmung von η sich nur durch eine vollendete Mondtheorie erlangen lässt), wird man η immer unbedenklich $= 0$ annehmen können, und in diesem Falle wird:

$$A = \alpha, B = \beta, T = \gamma.$$

Die Werthe α' , β' und γ' sind jedoch für diejenigen Rechner hergesetzt worden, welche sich vielleicht mit besonderer Vorliebe des Besselschen, oder irgend eines anderen Werthes der Abplattung bedienen wollen; in diesem Falle hat man nämlich:

$$\log A = \log a + \alpha' \cdot \eta$$

$$\log B = \log \beta + \beta' \cdot \eta$$

$$\log \Gamma = \log \gamma + \gamma' \cdot \eta$$

wo die Werthe von η , welche aus verschiedenen Untersuchungen hervorgegangen sind, in folgender Tafel zusammengestellt erscheinen:

Name des Berechners.	η	mittlerer Fehler von η
Burckhardt	0	unbekannt
Walbeck	+ 2.7800	unbekannt
Schmidt	- 2.5210	± 10.500
Bessel I.	+ 0.7047	± 4.810
Bessel II.	- 0.8472	± 4.667
Airy	- 1.6750	unbekannt

Es wird nunmehr leicht sein, die Werthe von $r \sin \varphi'$, $r \cos \varphi'$ und $tg \varphi'$ zu bestimmen, denn man hat, wenn zur Vereinfachung der Aequatorial-Halbmesser der Erde oder $a = 1$ gesetzt wird:

$$r \sin \varphi' = A \sin \varphi$$

$$r \cos \varphi' = B \cos \varphi$$

$$tg \varphi' = \Gamma tg \varphi$$

und damit wird die Berechnung der obigen Formeln auf Seite 175. höchst einfach.

Nicht blos bei der Gaussischen Methode sondern bei allen Methoden, welche sich mit der Berechnung von Finsternissen beschäftigen, so wie bei allen parallactischen Rechnungen, treten die Werthe $r \sin \varphi'$, $r \cos \varphi'$ und $tg \varphi'$, häufig in die Rechnung ein; und zwar sind diese Functionen der geocentrischen Breite, zugleich die einzigen Functionen derselben, welche direct und explicite hierbei eine Anwendung finden, indem die geocentrische Breite als solche, eigentlich gar nicht vorkommt; dieses wird dem Leser, bei der Durchsicht der verschiedenen Methoden, welche in diesem Werke gelehrt worden sind, sogleich in die Augen springen, und es wird daher, die hier gegebenen Tafel bei allen früheren Rechnungsmethoden von Seite 26—162. mit Vortheil angewendet werden können.

Mit Hülfe der Seite 185. gegebenen Tafel II. wird es immer leicht sein, die Werthe A , B und T , für jeden Werth der Abplattung zu bestimmen, und folglich auch die Werthe $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$, welche bei der Formation der Werthe k , g , L und l auf Seite 175. gebraucht werden, zu finden; wenn es sich jedoch darum handelt, die Curven auf der Erdoberfläche auszumitteln, wo bestimmte vorhergegebene Phasen der Verfinsterung als grösste Phasen gesehen werden sollen, wie z. B. die Curve der Centralität, die Curven für die inneren und äusseren Berührungen der Ränder, oder auch die Curven für die Verfinsterung beim Aufgange und Untergange u. s. w., so ist es vortheilhaft, eine Tafel zu haben, welche die Werthe $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$ unmittelbar von Grad zu Grad oder von 2 zu 2 Grad angiebt. Bei der Berechnung solcher Curven, nimmt man nämlich am bequemsten eine Breite an, die in der Nähe des Anfanges der Curve liegt, und zwar die nächste runde Zahl von ganzen Graden, und schreitet dann regelmässig mit der Rechnung, von Grad zu Grad oder von 2 zu 2 Grad bis zum Ende der Curve fort; auf diese Weise braucht man also nur eine Tafel für $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$, welche

diese Grössen für ganze Grade angiebt, indem bei Befolgung des oben erwähnten Verfahrens nur ganze Grade der Breite angewandt werden. Die nach der Tafel II, unmittelbar folgende Tafel III, giebt daher, für diesen Zweck, die Werthe $r \sin \varphi'$ und $r \cos \varphi'$, von Grad zu Grad, unter der Annahme $\mu = \frac{1}{300}$ ohne weitere Beisetzung der Differenzen, indem eine Interpolation hierbei nicht nöthig ist.

Geht man nun auf die Ausdrücke für k , g , L und l , wie sie auf Seite 175. gegeben wurden, zurück, und setzt:

$$\mathfrak{A} = (\Pi - P) \cos \delta$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\cos f}{b(\Pi - P)}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\sin f}{n}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(\Pi - P) c}{n}$$

welches diejenigen Grössen sind, die nur von der Zeit abhängen, so hat man unter der Bemerkung, dass:

$$r \sin \varphi' = A \sin \varphi, \text{ und}$$

$$r \cos \varphi' = B \cos \varphi$$

zugleich auch, folgende Endausdrücke für k , g , L und l , welche zur numerischen Rechnung besonders bequem sind, nämlich:

$$k = \mathfrak{A} \cdot A \sin \varphi - \eta$$

$$g = \mathfrak{B} \cdot \frac{k}{B \cos \varphi}$$

$$L = T + \mathfrak{C} \cdot k, \text{ und}$$

$$l = \mathfrak{D} \cdot B \cos \varphi$$

wo A und B für den Fall, dass man die Erdabplattung vernachlässigen will $= 1$ zu setzen sind; für $\mu = \frac{1}{300}$ dagegen, ist $A = \alpha$ und $B = \beta$ zu setzen.

Tafel II.

Zur Berücksichtigung der Gestalt der Erde bei Finsternissen, und bei parallactischen Berechnungen überhaupt.

Geogr. Breite φ	Log. der Normale bis zur Aeq.-Achse oder $\lg \alpha$	α'	Log. der Normale bis zur Polar-Achse oder $\lg \beta$	β'
0° 0'	9.9970999	+96.83	0.0000000	0.00
1 0	9.9971003	96.82	0.0000004	0.01
2 0	9.9971016	96.77	0.0000017	0.06
3 0	9.9971038	96.70	0.0000039	0.13
4 0	9.9971069	96.60	0.0000070	0.23
5 0	9.9971108	96.47	0.0000109	0.37
6 0	9.9971156	+96.31	0.0000157	0.53
7 0	9.9971213	96.12	0.0000214	0.71
8 0	9.9971278	95.90	0.0000279	0.93
9 0	9.9971352	95.66	0.0000353	1.18
10 0	9.9971434	95.38	0.0000435	1.45
11 0	9.9971525	95.08	0.0000526	1.75
12 0	9.9971623	+94.75	0.0000624	2.08
13 0	9.9971730	94.40	0.0000731	2.43
14 0	9.9971844	94.02	0.0000845	2.82
15 0	9.9971966	93.61	0.0000967	3.22
16 0	9.9972096	93.18	0.0001097	3.66
17 0	9.9972234	92.72	0.0001235	4.11
18 0	9.9972379	+92.24	0.0001380	4.60
19 0	9.9972531	91.73	0.0001532	5.10
20 0	9.9972690	91.20	0.0001691	5.63
21 0	9.9972856	90.65	0.0001857	6.18
22 0	9.9973028	90.08	0.0002029	6.76
23 0	9.9973206	89.48	0.0002207	7.35
24 0	9.9973391	+88.87	0.0002392	7.97
25 0	9.9973581	88.23	0.0002582	8.60
26 0	9.9973777	87.58	0.0002778	9.25
27 0	9.9973979	86.91	0.0002980	9.93
28 0	9.9974186	86.22	0.0003187	10.62
29 0	9.9974398	85.51	0.0003399	11.32
30 0	9.9974614	+84.79	0.0003615	12.04

$\log \gamma = 9.9970999 \quad \gamma' = + 96.83$

Mit Hülfe dieser Tafel, findet man:

$$\lg A = \lg \alpha + \alpha', \eta; \lg B = \lg \beta + \beta', \eta; \lg \Gamma = \lg \gamma + \gamma', \eta;$$

$$r \sin \varphi' = A \sin \varphi; r \cos \varphi' = B \cos \varphi; \lg \varphi' = \Gamma \lg \varphi.$$

Tafel II.

Zur Berücksichtigung der Gestalt der Erde bei Finsternissen, und bei parallactischen Berechnungen überhaupt.

Geogr. Breite φ	Log. der Normale bis zur Aeq.-Achse oder $\lg \alpha$	α'	Log. der Normale bis zur Polar-Achse oder $\lg \beta$	β'
30° 0'	9.9974614	+84.79	0.0003615	-12.04
31 0	9.9974835 ²²¹	84.05 ⁷⁴	0.0003836 ²²¹	12.78 ⁷⁴
32 0	9.9975060 ²²⁵	83.30 ⁷⁵	0.0004061 ²²⁵	13.53 ⁷⁵
33 0	9.9975289 ²²⁹	82.54 ⁷⁶	0.0004290 ²²⁹	14.29 ⁷⁶
34 0	9.9975522 ²³³	81.76 ⁷⁸	0.0004523 ²³³	15.07 ⁷⁸
35 0	9.9975758 ²³⁶	80.97 ⁷⁹	0.0004759 ²³⁶	15.86 ⁷⁹
36 0	9.9975997 ²³⁹	+80.18 ⁷⁹	0.0004998 ²³⁹	-16.65 ⁷⁹
37 0	9.9976239 ²⁴²	79.37 ⁸¹	0.0005240 ²⁴²	17.46 ⁸¹
38 0	9.9976483 ²⁴⁴	78.56 ⁸¹	0.0005484 ²⁴⁴	18.28 ⁸²
39 0	9.9976730 ²⁴⁷	77.74 ⁸²	0.0005731 ²⁴⁷	19.10 ⁸²
40 0	9.9976978 ²⁴⁸	76.91 ⁸³	0.0005979 ²⁴⁸	19.93 ⁸³
41 0	9.9977228 ²⁵⁰	76.07 ⁸⁴	0.0006229 ²⁵⁰	20.76 ⁸³
42 0	9.9977479 ²⁵¹	+75.24 ⁸³	0.0006480 ²⁵¹	-21.60 ⁸⁴
43 0	9.9977731 ²⁵²	74.39 ⁸⁵	0.0006732 ²⁵²	22.44 ⁸⁴
44 0	9.9977983 ²⁵²	73.55 ⁸⁴	0.0006984 ²⁵²	23.28 ⁸⁴
45 0	9.9978236 ²⁵³	72.71 ⁸⁴	0.0007237 ²⁵³	24.13 ⁸⁵
46 0	9.9978489 ²⁵³	71.86 ⁸⁵	0.0007490 ²⁵³	24.97 ⁸⁴
47 0	9.9978742 ²⁵³	71.02 ⁸⁴	0.0007743 ²⁵³	25.82 ⁸⁵
48 0	9.9978994 ²⁵²	+70.17 ⁸⁵	0.0007995 ²⁵²	-26.66 ⁸⁴
49 0	9.9979246 ²⁵²	69.34 ⁸³	0.0008247 ²⁵²	27.50 ⁸⁴
50 0	9.9979496 ²⁵⁰	68.50 ⁸⁴	0.0008497 ²⁵⁰	28.33 ⁸³
51 0	9.9979744 ²⁴⁸	67.67 ⁸³	0.0008745 ²⁴⁸	29.16 ⁸³
52 0	9.9979991 ²⁴⁷	66.84 ⁸³	0.0008992 ²⁴⁷	29.99 ⁸³
53 0	9.9980236 ²⁴⁵	66.03 ⁸¹	0.0009237 ²⁴⁵	30.81 ⁸²
54 0	9.9980479 ²⁴³	+65.22 ⁸¹	0.0009480 ²⁴³	-31.62 ⁸¹
55 0	9.9980718 ²³⁹	64.42 ⁸⁰	0.0009719 ²³⁹	32.42 ⁸⁰
56 0	9.9980954 ²³⁶	63.63 ⁷⁹	0.0009955 ²³⁶	33.21 ⁷⁹
57 0	9.9981188 ²³⁴	62.84 ⁷⁹	0.0010189 ²³⁴	33.99 ⁷⁸
58 0	9.9981418 ²³⁰	62.07 ⁷⁷	0.0010419 ²³⁰	34.76 ⁷⁷
59 0	9.9981644 ²²⁶	61.32 ⁷⁵	0.0010645 ²²⁶	35.51 ⁷⁵
60 0	9.9981865 ²²¹	+60.58 ⁷⁴	0.0010866 ²²¹	-36.25 ⁷⁴
$\log \gamma = 9.9970999 \quad \gamma' = + 96.83$				

Mit Hülfe dieser Tafel, findet man:

$$\lg A = \lg \alpha + \alpha'. \eta; \quad \lg B = \beta + \beta'. \eta; \quad \lg \Gamma = \lg \gamma + \gamma'. \eta;$$

$$r \sin \varphi = A \sin \varphi; \quad r \cos \varphi = B \cos \varphi; \quad tg \varphi' = \Gamma tg \varphi.$$

Tafel II.

Zur Berücksichtigung der Gestalt der Erde bei Finsternissen, und bei parallactischen Berechnungen überhaupt.

Geogr. Breite φ	Log. der Normale bis zur Aeq.-Achse oder $\lg \alpha$	α'	Log. der Normale bis zur Polar-Achse oder $\lg \beta$	β'
60° 0'	9.9981865	+60.58	0.0010866	-36.25
61 0	9.9982082 ²¹⁷	59.85 ⁷³	0.0011083 ²¹⁷	36.98 ⁷³
62 0	9.9982295 ²¹³	59.15 ⁷⁰	0.0011296 ²¹³	37.68 ⁷⁰
63 0	9.9982503 ²⁰⁸	58.45 ⁷⁰	0.0011504 ²⁰⁸	38.38 ⁷⁰
64 0	9.9982705 ²⁰²	57.77 ⁶⁸	0.0011706 ²⁰²	39.06 ⁶⁸
65 0	9.9982902 ¹⁹⁷	57.11 ⁶⁶	0.0011903 ¹⁹⁷	39.72 ⁶⁶
66 0	9.9983093 ¹⁹¹	+56.47 ⁶⁴	0.0012094 ¹⁹¹	-40.36 ⁶⁴
67 0	9.9983279 ¹⁸⁶	55.85 ⁶²	0.0012280 ¹⁸⁶	40.98 ⁶²
68 0	9.9983459 ¹⁸⁰	55.25 ⁶⁰	0.0012460 ¹⁸⁰	41.58 ⁶⁰
69 0	9.9983632 ¹⁷³	54.67 ⁵⁸	0.0012633 ¹⁷³	42.16 ⁵⁸
70 0	9.9983798 ¹⁶⁶	54.11 ⁵⁶	0.0012799 ¹⁶⁶	42.72 ⁵⁶
71 0	9.9983957 ¹⁵⁹	53.58 ⁵³	0.0012958 ¹⁵⁹	43.25 ⁵³
72 0	9.9984110 ¹⁵³	+53.07 ⁵¹	0.0013111 ¹⁵³	-43.76 ⁵¹
73 0	9.9984256 ¹⁴⁶	52.58 ⁴⁹	0.0013257 ¹⁴⁶	44.25 ⁴⁹
74 0	9.9984394 ¹³⁸	52.12 ⁴⁶	0.0013395 ¹³⁸	44.72 ⁴⁷
75 0	9.9984525 ¹³¹	51.68 ⁴⁴	0.0013526 ¹³¹	45.15 ⁴³
76 0	9.9984648 ¹²³	51.27 ⁴¹	0.0013649 ¹²³	45.56 ⁴¹
77 0	9.9984763 ¹¹⁵	50.88 ³⁹	0.0013764 ¹¹⁵	45.95 ³⁹
78 0	9.9984871 ¹⁰⁸	+50.52 ³⁶	0.0013872 ¹⁰⁸	-46.31 ³⁶
79 0	9.9984970 ⁹⁹	50.19 ³³	0.0013971 ⁹⁹	46.64 ³³
80 0	9.9985061 ⁹¹	49.89 ³⁰	0.0014062 ⁹¹	46.95 ³¹
81 0	9.9985144 ⁸³	49.61 ²⁸	0.0014145 ⁸³	47.22 ²⁷
82 0	9.9985218 ⁷⁴	49.36 ²⁵	0.0014219 ⁷⁴	47.47 ²⁵
83 0	9.9985283 ⁶⁵	49.14 ²²	0.0014284 ⁶⁵	47.69 ²²
84 0	9.9985340 ⁵⁷	+48.95 ¹⁹	0.0014341 ⁵⁷	-47.88 ¹⁹
85 0	9.9985389 ⁴⁹	48.79 ¹⁶	0.0014390 ⁴⁹	48.05 ¹⁷
86 0	9.9985429 ⁴⁰	48.65 ¹⁴	0.0014430 ⁴⁰	48.18 ¹³
87 0	9.9985460 ³¹	48.55 ¹⁰	0.0014461 ³¹	48.28 ¹⁰
88 0	9.9985482 ²²	48.48 ⁷	0.0014483 ²²	48.36 ⁸
89 0	9.9985495 ¹³	48.43 ⁵	0.0014496 ¹³	48.40 ⁴
90 0	9.9985499 ⁴	+48.42 ¹	0.0014500 ⁴	-48.42 ²

$$\log \gamma = 9.9970999 \quad \gamma' = + 96.83$$

Mit Hülfe dieser Tafel, findet man:

$$\lg A = \lg \alpha + \alpha'. \eta; \quad \lg B = \lg \beta + \beta'. \eta; \quad \lg \Gamma = \lg \gamma + \gamma'. \eta;$$

$$r \sin \varphi = A \sin \varphi; \quad r \cos \varphi = B \cos \varphi; \quad \lg \varphi' = \Gamma \lg \varphi.$$

Tafel III: enthaltend die Werthe von $\alpha \sin \varphi$ und $\beta \cos \varphi$ von Grad zu Grad der geographischen Breite.

φ	$\alpha \sin \varphi$	$\beta \cos \varphi$	φ	$\alpha \sin \varphi$	$\beta \cos \varphi$
0 ^o	— ∞	0.000000	45 ^o	9.8473086	9.8502087
1	8.2389556	9.9999342	46	9.8517830	9.8425203
2	8.5399208	9.9997371	47	9.8620017	9.8315576
3	8.7159040	9.9994083	48	9.8689729	9.8263104
4	8.8406914	9.9989178	49	9.8757035	9.8177676
5	8.9374068	9.9983551	50	9.8822036	9.8089172
6	9.0163502	9.9976300	51	9.8884770	9.7997463
7	9.0830158	9.9967721	52	9.8945312	9.7902412
8	9.1406831	9.9957807	53	9.9003722	9.7803867
9	9.1914676	9.9946552	54	9.9060055	9.7701667
10	9.2368136	9.9933950	55	9.9114363	9.7595632
11	9.2777513	9.9919992	56	9.9166696	9.7485572
12	9.3150412	9.9904668	57	9.9217102	9.7371277
13	9.3492610	9.9887970	58	9.9265623	9.7252516
14	9.3808596	9.9869886	59	9.9312300	9.7129038
15	9.4101928	9.9850405	60	9.9357171	9.7000566
16	9.4375477	9.9829513	61	9.9400275	9.6866795
17	9.4631587	9.9807198	62	9.9441644	9.6727389
18	9.4872203	9.9783443	63	9.9481312	9.6581972
19	9.5098950	9.9758233	64	9.9519307	9.6430126
20	9.5313207	9.9731549	65	9.9555659	9.6271386
21	9.5516148	9.9703374	66	9.9590395	9.6105227
22	9.5708782	9.9673688	67	9.9623540	9.5931060
23	9.5891986	9.9642468	68	9.9655118	9.5748214
24	9.6066524	9.9609694	69	9.9685149	9.5555925
25	9.6233064	9.9575339	70	9.9713656	9.5353316
26	9.6392197	9.9539380	71	9.9740658	9.5139377
27	9.6544447	9.9501789	72	9.9766173	9.4912935
28	9.6690279	9.9462536	73	9.9790219	9.4672610
29	9.6830110	9.9421592	74	9.9812810	9.4416776
30	9.6964314	9.9378921	75	9.9833963	9.4143488
31	9.7093228	9.9334492	76	9.9853689	9.3850401
32	9.7217157	9.9288266	77	9.9872002	9.3534644
33	9.7336377	9.9240204	78	9.9888915	9.3192661
34	9.7451139	9.9190265	79	9.9904136	9.2819959
35	9.7561671	9.9138404	80	9.9918576	9.2410764
36	9.7668184	9.9084574	81	9.9931343	9.1957469
37	9.7770869	9.9028726	82	9.9942746	9.1449772
38	9.7869903	9.8970805	83	9.9952790	9.0873229
39	9.7965448	9.8910757	84	9.9961483	9.0206687
40	9.8057653	9.8848519	85	9.9968831	8.9417350
41	9.8146557	9.8784028	86	9.9974837	8.8450275
42	9.8232588	9.8717215	87	9.9979501	8.7202463
43	9.8315564	9.8648007	88	9.9982536	8.5742675
44	9.8395696	9.8576325	89	9.9984833	8.4133049
45	9.8473086	9.8502087	90	9.9985499	— ∞

Berechnung der totalen Sonnenfinsterniss am 28^{sten} Juli 1851.

Geht man in den Nautical Almanac für 1851 ein, so findet man, dass die Aequatorial-Conjunction des Mondes mit der Sonne am 28^{sten} Juli 1851, ungefähr um 2^h 14' wahre Zeit in Greenwich stattfinden wird; da diese Zeit nun nicht sehr weit von der Mitte der Finsterniss entfernt sein kann, so wird es zur Berechnung der Werthe x , y , n , f , T , η u. s. w. für den ganzen Verlauf der Finsterniss genügen, die Rechnung von Juli 27 um 23^h 30' bis Juli 28 um 5^h 30' durchzuführen. Man findet demnach aus dem Nautical Almanac, wenn man ganz scharf interpolirt, folgende Elemente der Finsterniss:

für 1851 Juli 28:

Wahre Zeit in Greenwich oder $\frac{1}{15}\tau$	Zeit-Gleichung	AR der Sonne α	Declination der Sonne δ	AR des Mondes $\alpha \zeta$	Declination des Mondes $\delta \zeta$
h ' "	" " "	" " "	" " "	" " "	" " "
23 30	+6 11 .07	127 5 6 .74	+19 5 38 .36	125 24 36 .62	+20 5 34 .87
0 30	6 11 .04	127 7 34 .06	19 5 3 .89	126 3 39 .77	20 0 17 .74
1 30	6 11 .01	127 10 1 .38	19 4 29 .39	126 42 41 .64	19 54 51 .82
2 30	6 10 .98	127 12 28 .70	19 3 54 .86	127 21 42 .15	19 49 17 .17
3 30	6 10 .95	127 14 56 .02	19 3 20 .30	128 0 41 .22	19 43 33 .85
4 30	6 10 .91	127 17 23 .34	19 2 45 .71	128 39 38 .77	19 37 41 .92
5 30	6 10 .87	127 19 50 .66	19 2 11 .09	129 18 34 .72	19 31 41 .44

Man findet ferner:

Wahre Zeit in Greenwich oder $\frac{1}{15}\tau$	Declination der Sonne δ	Sonnen-Halbmesser r	Sonnen-Parallaxe P	Monds-Halbmesser ρ	Monds-Parallaxe Π
0h 0'	+19° 5' 21".13	946".50	8".45	988".54	3627".70
1 0	19 4 46 .64	946 .50	8 .45	988 .84	3628 .81
2 0	19 4 12 .13	946 .50	8 .45	989 .13	3629 .90
3 0	19 3 37 .59	946 .50	8 .45	989 .41	3630 .97
4 0	19 3 3 .01	946 .50	8 .45	989 .68	3632 .02
5 0	19 2 28 .40	946 .50	8 .45	989 .94	3633 .05

Mit diesen Elementar-Grössen, lässt sich nun die Berechnung der Coordinaten x und y nach den auf Seite 166. gegebenen Formeln folgendermaassen in extenso darstellen:

Berechnung der Coordinaten x und y für wahre Greenwicher Zeit: 1851. Juli 28.

	July 27.	July 28.	July 28.	July 28.	July 28.	July 28.	July 28.
Wahre Zeit in Greenwich	23/30' 0'' .00	0/30' 0'' .00	1/30' 0'' .00	2/30' 0'' .00	3/30' 0'' .00	4/30' 0'' .00	5/30' 0'' .00
Zeit-Gleichung	+0 6 11 .07	+0 6 11 .04	+0 6 11 .01	+0 36 10 .98	+0 6 10 .95	+0 6 10 .91	+0 6 10 .87
Mittlere Zeit	23/36' 11'' .07	0/36' 11'' .04	1/36' 11'' .01	3/36' 10'' .98	3/36' 10'' .95	4/36' 10'' .91	5/36' 10'' .87
AR des Mondes = α (C)	125°24'36'' .62	126° 3'39'' .77	126°42'41'' .64	126°21'42'' .15	128° 0'41'' .22	128°39'38'' .77	129°15'34'' .72
AR der Sonne = α (C)	127 5 6 .74	127 7 34 .06	127 10 1 .38	127 12 28 .70	127 14 56 .02	127 17 23 .34	127 19 50 .66
α (C) - α (C)	-1° 40'30'' .12	-1° 3'54'' .29	-0°27'19'' .74	+0° 9'13'' .45	+0°15'45'' .20	+1°22'15'' .43	+1°58'44'' .06
α (C) - α (A)	-0'' .8589	-0'' .2208	-0'' .0173	+0'' .0007	+0'' .0810	+0'' .4709	+1'' .4163
α (C) - α (A)	-6029'' .2611	-3834'' .0692	-1639'' .7227	+553'' .4493	+2745'' .1130	+4934'' .9591	+7122'' .6437
$\lg(\alpha$ (C) - α (A))	3.7802641 <i>m</i>	3.5836599 <i>m</i>	3.2147704 <i>m</i>	2.74330778	3.4382612	3.6932836	3.8526412
$\lg \cos \delta$ (C)	9.9727286	9.9729722	9.9732214	9.9734761	9.9737369	9.9740009	9.9742708
$\lg x$	3.7529927 <i>m</i>	3.5566321 <i>m</i>	3.1879918 <i>m</i>	2.7165539	3.4122971	3.6672845	3.8269120
x	-5662'' .2976	-3602'' .7333	-1541'' .6714	+520'' .6596	+2584'' .0273	+4648.1963	+6712'' .9278
Decl. des Mondes = δ (C)	+20° 5'34'' .87	+20° 0'17'' .74	+19°54'51'' .82	+19°49'17'' .17	+19°43'33'' .85	+19°37'41'' .92	+19°31'41'' .44
Decl. der Sonne = δ (C)	+19 5 38 .36	+19 5 3 .89	+19 4 29 .39	+19 3 54 .86	+19 3 20 .30	+19 2 45 .71	+19 2 11 .09
δ (C) - δ (C)	+0°59'56'' .51	+0°55'13'' .85	+0°50'22'' .43	+0°45'22'' .31	+0°40'13'' .55	+0°34'56'' .21	+0°29'30'' .35
δ (C) - δ (A)	+0'' .1822	+0'' .1426	+0'' .1082	+0'' .0790	+0'' .0550	+0'' .0361	+0'' .0217
δ (C) - δ (A)	+3596'' .3278	+3313'' .7074	+3022'' .3218	+2722'' .2310	+2413'' .4950	+2096'' .1739	+1770'' .3253
$\lg \mu$	4.3846377	4.3845824	4.3845518	4.3845457	4.3845611	4.3846071	4.3846745
$\lg \sin \delta$	9.51447054	9.5144958	9.51442857	9.5140754	9.5138618	9.5136539	9.5134427
$\lg \sec \delta$ (C)	0.0272714	0.0270278	0.0267786	0.0265239	0.0262641	0.0259991	0.0257292
$\lg x^2$	7.5059854	7.1132612	6.5759836	5.4331078	4.3312972	3.3345690	2.6538240
$\lg y$	1.4325999	1.0333702	0.3015997	9.3552528	0.7492897	1.2588291	1.5776704
y	+37'' .0769	+10'' .9189	+2'' .0026	+0'' .2282	+5'' .6142	+18'' .1480	+37'' .8156
δ (C) - δ (A)	+3596 .3278	+3313 .7074	+3022 .3218	+2722 .2310	+2413 .4950	+2096 .1739	+1770 .3253
y	+3623'' .4017	+3324'' .6563	+3024'' .3244	+2722'' .4592	+2419'' .1092	+2114'' .3219	+1808'' .1439

Aus dieser Rechnungs - Tabelle, kann man folgende kleine Tafeln, für die Werthe von x ; $x'' - x$; y und $y'' - y'$ herleiten.

Tafel für die Werthe x und $x'' - x'$.

$\frac{1}{15} \tau$	x	$x'' - x'$	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.	3 ^{te} Dif.
$\frac{h}{h'}$	"	"	"	"	"
23 30	-5662.2976	"	"	"	"
0 30	-3602.7333	+2059.5643	+ 1.4976	- 0.2285	- 0.0039
1 30	-1541.6714	+2061.0619	+ 1.2691	- 0.2324	- 0.0030
2 30	+ 520.6596	+2062.3310	+ 1.0367	- 0.2354	- 0.0034
3 30	+2584.0273	+2063.3677	+ 0.8013	- 0.2388	- 0.0034
4 30	+4648.1963	+2064.1690	+ 0.5625		
5 30	+6712.9278	+2064.7315			

Tafel für die Werthe y und $y'' - y'$.

$\frac{1}{15} \tau$	y	$y'' - y'$	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.	3 ^{te} Dif.
$\frac{h}{h'}$	"	"	"	"	"
23 30	+3623.4047	"	"	"	"
0 30	+3324.6563	- 298.7484	- 1.5835	+ 0.0502	- 0.0017
1 30	+3024.3244	- 300.3319	- 1.5333	+ 0.0485	- 0.0010
2 30	+2722.4592	- 301.8652	- 1.4848	+ 0.0475	- 0.0009
3 30	+2419.1092	- 303.3500	- 1.4373	+ 0.0466	
4 30	+2114.3219	- 304.7873	- 1.3907		
5 30	+1808.1439	- 306.1780			

Wir gelangen jetzt zur Berechnung der Werthe, welche während der Dauer der Finsterniss nahezu constant bleiben; nimmt man nämlich Rücksicht auf §. 167. Seite 137, §. 171. Seite 140. und Seite 184, so erhält man in folgendem Tableau, die vollständige Berechnung der Werthe f , n , T , η , b , B , c , C , \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} und \mathfrak{D} , für die ganze Dauer der Verfinsternung; wobei es aber bemerkt werden muss, dass die Einheit auf die sich der Werth n bezieht, eine Bogensecunde ist; es ist nämlich gesetzt worden:

$$\tau'' - \tau' = 15^0 = 54000 \text{ Bogensekunden,}$$

$$\text{also: } \log (\tau'' - \tau') = 4.7323938.$$

Berechnung der Constanten für die totale

Wahre Zeit = $\frac{1}{15} T$	0h	1h	2h
$x'' - x'$	+ 2059'' .5643	+ 2061'' .0619	+ 2062'' .3310
$y'' - y'$	- 298'' .7484	- 300'' .3319	- 301'' .8652
$lg(x'' - x')$	3 3137751	3 3140911	3 3143583
$lg(y'' - y')$	2 4753056 n	2 4776015 n	2 4798131 n
Comp. $lg(x'' - x')$	5.2676062	5 2676062	5.2676062
$lg n \sin f$	7.7429118 n	7 7452077 n	7 7474193 n
$lg n \cos f$	8 5813816	8 5816973 n	8 5819645
$lg tg f$	9.1615302 n	9 1635104 n	9.1654548 n
f	351°44'47'' .66	351°42'33'' .76	351°40'21'' .71
$lg \cos f$	9.9954785	9 9954375	9.9953968
$lg n$	8.5859031	8 5862598	8.5865677
$lg x'$	3.7529927 n	3 5566321 n	3 1879918 n
$lg n \cos f$	8 5813816	8 5816973	8 5819645
$lg(x' - T)$	5 1716111 n	4 9749348 n	4 6060273 n
$x' - T$	-41°14'20'' .55	-26°13'11'' .92	-11°12'47'' .07
T	352 30 0 .00	7 30 0 .00	22 30 0 .00
T	33°44'20'' .55	33°43'11'' .92	33°42'4'' .07
$lg x'$	3 7529927 n	3 5566321 n	3 1879918 n
$lg tg f$	9.1615302 n	9 1635104 n	9 1654548 n
$lg(y' - \eta)$	2 9145229	2 7201425	2 3534466
$y' - \eta$	+ 821'' .3398	+ 524'' .9796	+ 225'' .6558
y'	+ 3623'' .4047	+ 3324'' .6563	+ 3024'' .3244
η	+ 2802'' .0649	+ 2799'' .6767	+ 2798'' .6686
$lg \sin \delta$	9.5146007	9 5143908	9 5141806
$lg b \sin B = lg \sin \delta \cos f$	9 5100792	9 5098283	9 5095774
$lg b \cos B = lg \sin f$	9 1570087 n	9 1559479 n	9 1608516 n
$lg tg B$	0 3530705 n	0 3508504 n	0 3487258 n
B	113°55'8'' .54	114°1'34'' .72	114°7'55'' .89
$lg \sin B$	9 9610029	9 9606413	9 9602827
$lg b$	9 5490763	9 5491870	9 5492947
$lg c \sin C = lg \sin \delta \sin f$	8 6716094 n	8 6733387 n	8 6750322 n
$lg c \cos C = lg \cos f$	9 9954785	9 9954375	9 9953968
$lg tg C$	8 6761309 n	8 6779012 n	8 6796354 n
C	357°17'2'' .44	357°16'22'' .56	357°15'43'' .34
$lg \cos C$	9 9995118	9 9995079	9 9995039
$lg c$	9 9959667	9 9959296	9 9958929
$lg(H - P)$	3 5586186	3 5587518	3 5588825
$lg \cos \delta$	9 9754367	9 9754618	9 9754869
$lg A$	3 5340553	3 5342136	3 5343694
$lg \cos f - lg b$	0 4464022	0 4462505	0 4461021
$lg B$	6 8877836	6 8874987	6 8872196
$lg C = lg \sin f - lg n$	0 5711056 n	0 5726881 n	0 5742839 n
$lg c - lg n$	1 4100636	1 4096698	1 4093252
$lg D$	4 9686822	4 9684216	4 9682077

Sonnenfinsterniss am 28^{sten} Juli 1851.

3h	4h	5h Wahre Zeit = $\frac{1}{5} \tau$
+ 2063'' . 3677	+ 2061'' . 1690	+ 2064'' . 7315 $x'' - x$
- 303'' . 3500	- 304'' . 7873	- 306'' . 1780 $y'' - y$
3 3145766	3 3147453	3 3148636 $lg(x'' - x')$
2 4819410 _n	2 4839968 _n	2 4859710 _n $lg(y'' - y')$
5 2676062	5 2676062	5 2676062 $Comp. lg(\tau'' - \tau')$
7 7495502 _n	7 7516030 _n	7 7535802 _n $lg n \sin f$
8 5821825	8 5823515	8 5824698 $lg n \cos f$
9 1673674 _n	9 1692515 _n	9 1711104 _n $lg tg f$
351°38'11'' . 27	351°36' 2'' . 22	351°33'54'' . 38 f
9 9953565	9 9953166	9 9952768 $lg \cos f$
8 5888262	8 5870319	8 5871930 $lg n$
2 7165539	3 4122971	3 6672845 $lg x'$
8 5821828	8 5823515	8 5824698 $lg n \cos f$
4 1313711	4 8299155	5 0818117 $lg(\tau' - T)$
+ 3°47' 6'' . 08	+ 18°46'39'' . 83	+ 33°46' 6'' . 73 $x' - T$
37 30 0 . 00	52 30 0 . 00	67 30 0 . 00 x'
33°42'53'' . 92	33°43' 20'' . 17	33°43' 53'' . 27 T
2 7165539	3 4122971	3 6672845 $lg x$
9 1673674 _n	9 1692515 _n	9 1711104 _n $lg tg f$
1 8839213 _n	2 5815186 _n	2 8383949 _n $lg(y' - \eta)$
- 76'' . 5458	- 381'' . 5475	- 689'' . 2787 $y' - \eta$
+ 2722'' . 4592	+ 2419 . 1092	+ 2114 . 3219 y'
+ 2799'' . 0050	+ 2800'' . 6567	+ 2803'' . 6006 η
9 5139701	9 5137591	9 5135483 $lg \sin \delta$
9 5093267	9 5090760	9 5088251	$lg \sin \delta \cos f = lg b \sin B$
9 1627240 _n	9 1645681 _n	9 1663872 _n $lg \sin f = lg b \cos B$
0 3466027 _n	0 3445079 _n	0 3424379 _n $lg tg B$
114°14'12'' . 74	114°20'25'' . 74	114°26'35'' . 51 B
9 9599263	9 9595719	9 9592189 $lg \sin B$
9 5494004	9 5495041	9 5496062 $lg b$
8 6766941 _n	8 6783275	8 6799355 _n	$lg \sin \delta \sin f = lg c \sin C$
9 9953565	9 9953166	9 9952768 $lg \cos f = lg c \cos C$
8 6813375 _n	8 6830109 _n	8 6846587 _n $lg tg C$
357°15'4'' . 69	357°14'26'' . 55	357°13'48'' . 85 C
9 9995001	9 9994962	9 9994923 $lg \cos C$
9 9958565	9 9958204	9 9957845 $lg c$
3 5590108	3 5591367	3 5592601 $lg(H - P)$
9 9755121	9 9755372	9 9755624 $lg \cos \delta$
3 5345229	3 5346739	3 5348225 $lg \mathcal{A}$
0 4459562	0 4458125	0 4456706 $lg \cos f - lg b$
6 8869454	6 8868758	6 8864105 $lg \mathcal{B}$
0 5758978 _n	0 5775332 _n	0 5791942 _n $lg \sin f - lg n = lg \mathcal{C}$
1 4090303	1 4087855	1 4085915 $lg c - lg n$
4 9680411	4 9679222	4 9678516 $lg \mathcal{D}$

Man hat daher folgende Täfelchen, um die Werthe f , $lg n$, T und η ; für den ganzen Verlauf der Finsterniss zu bestimmen:

Tafel enthaltend die Werthe f .

$\frac{1}{15} \tau$	f	1ste Dif.	2te Dif.	3te Dif.
0 ^h	351° 44' 47".66	— 133".90	+	
1	351 42 33.76	— 132 .05	+ 1".85	— 0".24
2	351 40 21.71	— 130 .44	+ 1 .61	— 0 .22
3	351 38 11.27	— 129 .05	+ 1 .39	— 0 .18
4	351 36 2.22	— 137 .84	+ 1 .21	
5	351 33 54.38			

Tafel enthaltend die Werthe $lg n$.

$\frac{1}{15} \tau$	$lg n$	1ste Dif.	2te Dif.	3te Dif.
0 ^h	8.5859031	+ 3567		
1	8.5862598	+ 3079	— 488	— 6
2	8.5865677	+ 2585	— 494	— 4
3	8.5868262	+ 2087	— 498	— 8
4	8.5870349	+ 1581	— 506	
5	8.5871930			

Tafel enthaltend die Werthe T .

$\frac{1}{15} \tau$	T	1ste Dif.	2te Dif.	3te Dif.	4te Dif.
0 ^h	33° 44' 20".55	— 68".63			
1	33 43 11.92	— 24 .85	+ 43".78	— 12".08	
2	33 42 47.07	+ 6 .85	+ 31 .70	— 12 .30	— 0".22
3	33 42 53.92	+ 26 .25	+ 19 .40	— 12 .55	— 0 .25
4	33 43 20.17	+ 33 .10	+ 6 .85		
5	33 43 53.27				

Tafel enthaltend die Werthe η .

$\frac{1}{15} \tau$	η	1ste Dif.	2te Dif.	3te Dif.
0 ^h	2802".0649	— 2".3882		
1	2799.6767	— 1.0081	+ 1".3801	— 0".0356
2	2798.6686	+ 0.3364	+ 1.3445	— 0.0292
3	2799.0050	+ 1.6517	+ 1.3153	— 0.0231
4	2800.6567	+ 2.9439	+ 1.2992	
5	2803.6006			

Auf ähnliche Weise sind auch die Werthe B , $lg b$, C , $lg c$, $lg A$, $lg B$, $lg C$ und $lg D$ zusammengestellt worden:

Tafel enthaltend die Werthe B .

$\frac{1}{15} \tau$	B	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.	3 ^{te} Dif.
0^h	113 ^o 55' 8".54			
1	114 1 34 .72	+ 386".18	— 5".01	
2	114 7 55 .89	+ 381 .17	— 4 .32	+ 0".69
3	114 14 12 .74	+ 376 .85	— 3 .85	+ 0 .47
4	114 20 25 .74	+ 373 .00	— 3 .23	+ 0 .62
5	114 26 35 .51	+ 369 .77		

Tafel enthaltend die Werthe $lg b$.

$\frac{1}{15} \tau$	$lg b$	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.
0^h	9.5490763		
1	9.5491870	+ 1107	— 30
2	9.5492947	+ 1077	— 20
3	9.5494004	+ 1057	— 20
4	9.5495041	+ 1037	— 16
5	9.5496062	+ 1021	

Tafel enthaltend die Werthe C .

$\frac{1}{15} \tau$	C	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.	3 ^{te} Dif.
0^h	357 ^o 17' 2".44			
1	357 16 22 .56	— 39".88	+ 0".66	— 0".09
2	357 15 43 .34	— 39 .22	+ 0 .57	— 0 .06
3	357 15 4 .69	— 38 .65	+ 0 .51	— 0 .07
4	357 14 26 .55	— 38 .14	+ 0 .44	
5	357 13 48 .85	— 37 .70		

Tafel enthaltend die Werthe $lg c$.

$\frac{1}{15} \tau$	$lg c$	1 ^{ste} Dif.	2 ^{te} Dif.
0^h	9.9859667		
1	9.9959296	— 371	+ 4
2	9.9958929	— 367	+ 3
3	9.9958565	— 364	+ 3
4	9.9958204	— 361	+ 2
5	9.9957845	— 359	

Tafeln enthaltend die Werthe $\lg \mathfrak{A}$, $\lg \mathfrak{B}$, $\lg \mathfrak{C}$, $\lg \mathfrak{D}$.

$\frac{1}{15} \tau$	$\log \mathfrak{A}$	1ste Dif.	2te Dif.	$\frac{1}{15} \tau$	$\log \mathfrak{B}$	1ste Dif.	2te Dif.
0 ^h	3.5340553			0 ^h	6.8877836		
1	3.5342136	+ 1583	- 25	1	6.8874987	- 2849	+ 58
2	3.5343694	+ 1558	- 23	2	6.8872196	- 2791	+ 49
3	3.5345229	+ 1535	- 25	3	6.8869454	- 2742	+ 46
4	3.5346739	+ 1510	- 24	4	6.8866758	- 2696	+ 43
5	3.5348225	+ 1486		5	6.8864105	- 2653	

$\frac{1}{15} \tau$	$\log \mathfrak{C}$	1ste Dif.	2te Dif.	$\frac{1}{15} \tau$	$\log \mathfrak{D}$	1ste Dif.	2te Dif.
0 ^h	0.5711056 _n			0 ^h	4.9686822		
1	0.5726881 _n	+ 15825	+ 133	1	4.9684216	- 2606	+ 467
2	0.5742839 _n	+ 15958	+ 181	2	4.9682077	- 2139	+ 473
3	0.5758978 _n	+ 16139	+ 215	3	4.9680411	- 1666	+ 477
4	0.5775332 _n	+ 16354	+ 256	4	4.9679222	- 1189	+ 483
5	0.5791942 _n	+ 16610		5	4.9678516	- 706	

Mit Hülfe der so eben gegebenen kleinen Tafeln, für die Werthe von f , n , T , η ; B , b , C , c ; \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , wird es nun leicht sein, alle auf diese Finsterniss bezüglichen Aufgaben mit Bequemlichkeit aufzulösen; bemerkt man nun zuerst, dass $\eta \cos f$ sehr nahe = 2769''.2; und dass $\Pi - P$ sehr nahe = 3621''.5, so sieht man hieraus sogleich; dass $\eta \cos f < \Pi - P$ sein wird, woraus alsdann unmittelbar folgt, dass diese Finsterniss eine centrale sein muss, und da nun ferner nach Seite 189. der scheinbare Mondshalbmesser grösser als der scheinbare Sonnenhalbmesser ist, oder $\rho > r$, so sieht man, dass diese centrale Finsterniss zugleich auch eine totale sein wird. Wir wollen daher, zuerst damit anfangen die Grenzparallelen zu bestimmen, zwischen welchen die Finsterniss central werden kann, und dazu hat man bei Vernachlässigung der Erdabplattung nach §. 179. Seite 153, die Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} M &= \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin B} \\ \sin(\varphi \pm M) &= \frac{\eta \cos f}{\Pi - P} \end{aligned}$$

Nun ist aber für $\frac{1}{15} \tau = 2^h$ wahre Greenwicher Zeit:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \delta &= 9.53869 & \lg \eta &= 3.44695 \\ \lg \sin B &= 9.96028 & \lg \cos f &= 9.99540 \\ \lg \operatorname{tg} M &= 9.57841 & C \lg (H - P) &= 6.44112 \\ M &= 20^\circ 44' 8'' & \lg \sin (\varphi \pm M) &= 9.88347 \\ & & \varphi \pm M &= 49^\circ 52' 6'' \end{aligned}$$

$$M = 20 \ 44 \ 8$$

$$\varphi = 70^\circ 37' 4'' \text{ für die nörd. Grenze}$$

$$\varphi = 29 \ 7 \ 8 \text{ für die südl. Grenze}$$

Aus diesen beiden Grenzwerten für φ , könnte man nun leicht, mittelst der Formeln §. 180. Seite 154. die zugehörigen Stundenwinkel und geographischen Längen der betreffenden Orte ableiten, es genügt jedoch hier, da die vollständige Berechnung der Curve der Centralität später folgen wird, bei der Bestimmung der Grenzparallelen selbst stehen zu bleiben, weil man nun schon a priori weiss, zwischen welchen Grenzen die Rechnung zur Bestimmung der Werthe von k , g , L und l zu führen sein wird, um alle auf die Centralität und die inneren Berührungen bezüglichen Fragen zu lösen. Zur Bestimmung der Werthe k , g , L und l , wird man sich am bequemsten der auf Seite 184. gegebenen Formeln bedienen können, nämlich:

$$k = \mathfrak{A}. A \sin \varphi - \eta$$

$$g = \mathfrak{B}. \frac{k}{B \cos \varphi}$$

$$L = \mathfrak{T} + \mathfrak{C}. k$$

$$l = \mathfrak{D}. B \cos \varphi$$

und zwar wird es am besten sein die Rechnung bei $\varphi = 72^\circ$ anzufangen, und bis $\varphi = 28^\circ$, von Grad zu Grad der geographischen Breite fortzuführen, indem man hierbei zu setzen hat; $A \sin \varphi = \alpha \sin \varphi$ und $B \cos \varphi = \beta \cos \varphi$, wo also die Erdabplattung $= \frac{1}{300}$ angenommen wird, und die Werthe

$\alpha \sin \varphi$ und $\beta \cos \varphi$ aus Tafel III. unmittelbar mit φ als Argument gefunden werden können. Nimmt man nun zuerst die Werthe von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} und \mathfrak{D} aus den obigen Tafeln auf Seite 196, für 0^h in Greenwich, so wird man folgendes Rechnungsschema haben:

Geographische Breite = φ ...	72°	71°	70°
$lg \mathfrak{A}$	3.531055	3.531055	3.531055
$lg \alpha \sin \varphi$ aus Tafel III.....	9.976617	9.974066	9.971366
$lg \mathfrak{A} \cdot \alpha \sin \varphi$	3.510672	3.508121	3.505421
$\mathfrak{A} \cdot \alpha \sin \varphi$	3240'' 95	3221'' 97	3202'' 00
η	2802 06	2802 '06	2802. 06
k	+438'' 89	+419'' 91	+399'' 94
$lg \mathfrak{B}$	6.88778	6.88778	6.88778
$lg k$	2.64236	2.62316	2.60199
$C. lg \beta \cos \varphi$ aus Taf. III.....	0.50871	0.48606	0.46467
$lg g$	0.03885	9.99700	9.95414
η	+1.09358	+0.99312	+0.90041
$lg \mathfrak{C}$	0.57111 <i>n</i>	0.57111 <i>n</i>	0.57111 <i>n</i>
$lg k$	2.64236	2.62316	2.60199
$lg \mathfrak{C} \cdot k$	3.21347 <i>n</i>	3.19127 <i>n</i>	3.17310 <i>n</i>
$\mathfrak{C} \cdot k$	— 0° 27' 15"	— 0° 26' 4"	— 0° 24' 50"
\mathfrak{E}	33 44 21	33 41 21	33 44 21
\mathfrak{E}	33° 17' 6"	33° 18' 17"	33° 19' 31"
$lg \mathfrak{D}$	4.96898	4.96868	4.96868
$lg \beta \cos \varphi$ aus Tafel III.....	9.49129	9.51394	9.53533
$lg l$	4.45997	4.48262	4.50101

Auf dieselbe Weise und mit denselben Werthen von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} und \mathfrak{D} , wurde nun die Rechnung bis $\varphi = 28^\circ$ fortgesetzt, und alsdann nach beendigter Rechnung die Werthe von k , g , L und $log l$, in den folgenden Tafeln zusammengestellt. Darauf wurden dieselben Rechnungen von 4 zu 4 Grad der geographische Breite mit denjenigen Werthen von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} und \mathfrak{D} wiederholt, welche in den auf Seite 196. gegebenen Tafeln, für die Greenwicher Zeiten 1^h , 2^h , 3^h , 4^h und 5^h gelten, und alsdann endlich die von der Zeit abhängigen Correctionen der Werthe k , g , L und $lg l$ für jeden Grad der geographischen Breite durch Interpolation bestimmt, und ebenfalls in den auf S. 199—202. gegebenen Tafeln aufgeführt.

Tafel enthaltend die Werthe von k .

p	k		$0h$	$1h$	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$
72 ⁰	+ 438 ⁰⁰ .89		+0 ⁰⁰ .00	+3 ⁰⁰ .57	+5 ⁰⁰ .73	+6 ⁰⁰ .54	+6 ⁰⁰ .02	+4 ⁰⁰ .19
71	+ 419 ¹⁸ .91	18 ⁰⁰ .98	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .56	5 ⁰⁰ .72	6 ⁰⁰ .52	5 ⁰⁰ .99	4 ⁰⁰ .15
70	+ 399 ¹⁹ .94	19 ⁰⁰ .97	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .55	5 ⁰⁰ .70	6 ⁰⁰ .50	5 ⁰⁰ .96	4 ⁰⁰ .12
69	+ 378 ²⁰ .99	20 ⁰⁰ .95	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .54	5 ⁰⁰ .69	6 ⁰⁰ .48	5 ⁰⁰ .93	4 ⁰⁰ .09
68	+ 357 ²¹ .07	21 ⁰⁰ .92	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .53	5 ⁰⁰ .67	6 ⁰⁰ .45	5 ⁰⁰ .90	4 ⁰⁰ .05
67	+ 334 ²² .18	22 ⁰⁰ .89	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .52	5 ⁰⁰ .66	6 ⁰⁰ .43	5 ⁰⁰ .87	4 ⁰⁰ .01
66	+ 310 ²³ .31	23 ⁰⁰ .84	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .51	5 ⁰⁰ .64	6 ⁰⁰ .40	5 ⁰⁰ .83	3 ⁰⁰ .96
65	+ 285 ²⁴ .55	24 ⁰⁰ .79	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .51	5 ⁰⁰ .62	6 ⁰⁰ .38	5 ⁰⁰ .80	3 ⁰⁰ .92
64	+ 259 ²⁵ .81	25 ⁰⁰ .74	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .50	5 ⁰⁰ .60	6 ⁰⁰ .35	5 ⁰⁰ .76	3 ⁰⁰ .87
63	+ 233 ²⁶ .14	26 ⁰⁰ .67	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .49	5 ⁰⁰ .58	6 ⁰⁰ .32	5 ⁰⁰ .73	3 ⁰⁰ .83
62	+ 205 ²⁷ .54	27 ⁰⁰ .60	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .48	5 ⁰⁰ .55	6 ⁰⁰ .29	5 ⁰⁰ .69	3 ⁰⁰ .78
		28 ⁰⁰ .52						
		0 ⁰⁰ .90						
61	+ 177 ²⁹ .02	29 ⁰⁰ .42	+0 ⁰⁰ .00	+3 ⁰⁰ .47	+5 ⁰⁰ .54	+6 ⁰⁰ .26	+5 ⁰⁰ .65	+3 ⁰⁰ .73
60	+ 147 ³⁰ .60	30 ⁰⁰ .32	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .46	5 ⁰⁰ .52	6 ⁰⁰ .23	5 ⁰⁰ .61	3 ⁰⁰ .68
59	+ 117 ³¹ .28	31 ⁰⁰ .21	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .45	5 ⁰⁰ .50	6 ⁰⁰ .20	5 ⁰⁰ .57	3 ⁰⁰ .63
58	+ 86 ³² .07	32 ⁰⁰ .09	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .44	5 ⁰⁰ .48	6 ⁰⁰ .17	5 ⁰⁰ .52	3 ⁰⁰ .57
57	+ 53 ³² .98	32 ⁰⁰ .95	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .43	5 ⁰⁰ .46	6 ⁰⁰ .14	5 ⁰⁰ .48	3 ⁰⁰ .52
56	+ 21 ³³ .63	33 ⁰⁰ .81	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .42	5 ⁰⁰ .43	6 ⁰⁰ .10	5 ⁰⁰ .43	3 ⁰⁰ .46
55	+ 12 ³⁴ .78	34 ⁰⁰ .66	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .41	5 ⁰⁰ .40	6 ⁰⁰ .06	5 ⁰⁰ .38	3 ⁰⁰ .40
54	+ 47 ³⁵ .44	35 ⁰⁰ .50	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .39	5 ⁰⁰ .38	6 ⁰⁰ .02	5 ⁰⁰ .33	3 ⁰⁰ .33
53	+ 82 ³⁶ .33	36 ⁰⁰ .33	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .38	5 ⁰⁰ .36	5 ⁰⁰ .98	5 ⁰⁰ .28	3 ⁰⁰ .27
52	+ 119 ³⁷ .27	37 ⁰⁰ .14	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .36	5 ⁰⁰ .33	5 ⁰⁰ .94	5 ⁰⁰ .22	3 ⁰⁰ .20
51	+ 156 ³⁷ .94	37 ⁰⁰ .94	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .35	5 ⁰⁰ .30	5 ⁰⁰ .90	5 ⁰⁰ .17	3 ⁰⁰ .13
		0 ⁰⁰ .50						
50	+ 194 ³⁸ .74	38 ⁰⁰ .74	+0 ⁰⁰ .00	+3 ⁰⁰ .31	+5 ⁰⁰ .28	+5 ⁰⁰ .86	+5 ⁰⁰ .12	+3 ⁰⁰ .07
49	+ 233 ³⁹ .51	39 ⁰⁰ .51	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .33	5 ⁰⁰ .25	5 ⁰⁰ .82	5 ⁰⁰ .07	3 ⁰⁰ .01
48	+ 272 ⁴⁰ .28	40 ⁰⁰ .28	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .31	5 ⁰⁰ .22	5 ⁰⁰ .78	5 ⁰⁰ .01	2 ⁰⁰ .94
47	+ 312 ⁴¹ .88	41 ⁰⁰ .03	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .30	5 ⁰⁰ .19	5 ⁰⁰ .74	4 ⁰⁰ .95	2 ⁰⁰ .87
46	+ 353 ⁴¹ .77	41 ⁰⁰ .77	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .28	5 ⁰⁰ .16	5 ⁰⁰ .69	4 ⁰⁰ .89	2 ⁰⁰ .79
45	+ 395 ⁴² .50	42 ⁰⁰ .50	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .26	5 ⁰⁰ .13	5 ⁰⁰ .65	4 ⁰⁰ .83	2 ⁰⁰ .72
44	+ 438 ⁴³ .21	43 ⁰⁰ .21	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .24	5 ⁰⁰ .10	5 ⁰⁰ .60	4 ⁰⁰ .77	2 ⁰⁰ .64
43	+ 481 ⁴³ .92	43 ⁰⁰ .92	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .23	5 ⁰⁰ .07	5 ⁰⁰ .55	4 ⁰⁰ .71	2 ⁰⁰ .57
42	+ 525 ⁴⁴ .61	44 ⁰⁰ .61	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .21	5 ⁰⁰ .04	5 ⁰⁰ .50	4 ⁰⁰ .65	2 ⁰⁰ .49
41	+ 569 ⁴⁵ .26	45 ⁰⁰ .26	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .20	5 ⁰⁰ .01	5 ⁰⁰ .45	4 ⁰⁰ .59	2 ⁰⁰ .41
40	+ 615 ⁴⁵ .94	45 ⁰⁰ .94	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .18	4 ⁰⁰ .97	5 ⁰⁰ .40	4 ⁰⁰ .52	2 ⁰⁰ .33
		0 ⁰⁰ .65						
39	+ 661 ⁴⁶ .59	46 ⁰⁰ .59	+0 ⁰⁰ .00	+3 ⁰⁰ .17	+4 ⁰⁰ .91	+5 ⁰⁰ .35	+4 ⁰⁰ .45	+2 ⁰⁰ .25
38	+ 707 ⁴⁷ .22	47 ⁰⁰ .22	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .15	4 ⁰⁰ .90	5 ⁰⁰ .30	4 ⁰⁰ .38	2 ⁰⁰ .17
37	+ 754 ⁴⁷ .83	47 ⁰⁰ .83	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .13	4 ⁰⁰ .87	5 ⁰⁰ .25	4 ⁰⁰ .31	2 ⁰⁰ .09
36	+ 802 ⁴⁸ .44	48 ⁰⁰ .44	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .11	4 ⁰⁰ .83	5 ⁰⁰ .20	4 ⁰⁰ .24	2 ⁰⁰ .00
35	+ 851 ⁴⁹ .02	49 ⁰⁰ .02	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .10	4 ⁰⁰ .80	5 ⁰⁰ .15	4 ⁰⁰ .18	1 ⁰⁰ .92
34	+ 900 ⁴⁹ .60	49 ⁰⁰ .60	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .08	4 ⁰⁰ .76	5 ⁰⁰ .10	4 ⁰⁰ .11	1 ⁰⁰ .83
33	+ 949 ⁵⁰ .15	50 ⁰⁰ .15	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .06	4 ⁰⁰ .73	5 ⁰⁰ .05	4 ⁰⁰ .04	1 ⁰⁰ .74
32	+ 999 ⁵⁰ .70	50 ⁰⁰ .70	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .04	4 ⁰⁰ .69	4 ⁰⁰ .99	3 ⁰⁰ .97	1 ⁰⁰ .65
31	+ 1050 ⁵¹ .22	51 ⁰⁰ .22	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .03	4 ⁰⁰ .66	4 ⁰⁰ .94	3 ⁰⁰ .90	1 ⁰⁰ .56
30	+ 1101 ⁵¹ .74	51 ⁰⁰ .74	0 ⁰⁰ .00	3 ⁰⁰ .01	4 ⁰⁰ .62	4 ⁰⁰ .89	3 ⁰⁰ .83	1 ⁰⁰ .47
29	+ 1153 ⁵² .23	52 ⁰⁰ .23	0 ⁰⁰ .00	2 ⁰⁰ .99	4 ⁰⁰ .59	4 ⁰⁰ .84	3 ⁰⁰ .76	1 ⁰⁰ .38
		0 ⁰⁰ .46						
28	+ 1205 ⁵² .88	52 ⁰⁰ .88	+0 ⁰⁰ .00	+2 ⁰⁰ .97	+4 ⁰⁰ .55	+4 ⁰⁰ .78	+3 ⁰⁰ .68	+1 ⁰⁰ .29

Tafel enthaltend die Werthe von g .

g	g	$0h$	$1h$	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	
72 ⁰	+1 09358		+0	+816	+1284	+1417	+1218	+695
71	+0.99312	10046	0	778	1223	1350	1163	668
70	+0.90041	9271	0	742	1168	1289	1113	643
69	+0.81438	8603	0	710	1117	1234	1067	620
68	+0.73402	8036	0	680	1071	1184	1025	599
67	+0.65864	7538	0	653	1029	1139	987	580
66	+0.58762	7102	0	628	991	1098	953	563
65	+0.52038	6724	0	606	956	1060	922	548
64	+0.45649	6380	0	585	924	1026	894	534
63	+0.39555	6094	0	566	894	994	869	522
62	+0.33724	5831	0	548	867	965	846	511
		5597						
61	+0.28127	5386	+0	+532	+842	+938	+825	+502
60	+0.22741	5198	0	518	820	914	805	493
59	+0.17543	5029	0	505	799	892	787	486
58	+0.12514	4878	0	493	779	872	771	479
57	+0.07636	4739	0	481	761	853	755	473
56	+0.02897	4614	0	470	744	834	740	467
55	-0.01717	4502	0	459	728	816	726	461
54	-0.06219	4402	0	449	713	799	713	456
53	-0.10621	4309	0	439	698	784	700	451
52	-0.14930	4225	0	430	685	770	689	446
51	-0.19155	4150	0	422	672	758	680	443
		69						
50	-0.23305	4081	+0	+415	+661	+746	+671	+441
49	-0.27386	4019	0	408	650	735	663	439
48	-0.31405	3962	0	402	641	725	655	437
47	-0.35367	3911	0	395	632	715	648	435
46	-0.39278	3866	0	389	623	705	641	433
45	-0.43144	3824	0	383	614	696	635	431
44	-0.46968	3787	0	377	606	688	629	430
43	-0.50755	3755	0	372	599	680	624	430
42	-0.54510	3726	0	368	593	673	620	430
41	-0.58236	3701	0	364	587	667	616	429
40	-0.61937	3678	0	360	581	661	612	429
		19						
39	-0.65615	3659	+0	+356	+575	+656	+608	+430
38	-0.69274	3643	0	353	569	651	604	431
37	-0.72917	3629	0	350	564	647	600	432
36	-0.76546	3618	0	347	559	643	597	433
35	-0.80164	3610	0	344	555	639	595	434
34	-0.83774	3605	0	342	551	636	594	435
33	-0.87379	3602	0	339	548	632	592	436
32	-0.90981	3601	0	337	545	629	591	437
31	-0.94582	3602	0	334	542	626	589	438
30	-0.98184	3604	0	332	539	623	588	440
29	-1.01788	3609	0	329	537	620	586	441
		7						
28	-1.05397		+0	+327	+535	+617	+585	+443

Tafel enthaltend die Werthe von *L*.

φ	<i>L</i>				0h	1h	2h	3h	4h	5h
72°	33°	17'	6"	71	— 0"	— 88"	— 127"	— 129"	— 108"	— 71"
71	33	18	17	74	0	88	127	129	106	73
70	33	19	31	78	0	87	126	128	105	71
69	33	20	49	82	0	87	125	127	104	69
68	33	22	11	85	0	87	125	126	102	68
67	33	23	36	89	0	86	124	125	101	66
66	33	25	5	92	0	86	123	124	100	64
65	33	26	37	96	0	86	122	122	98	62
64	33	28	13	99	0	85	122	121	96	60
63	33	29	52	103	0	85	121	120	95	58
62	33	31	35	106	0	84	120	119	93	56
61	33	33	21	110	— 0	— 84	— 119	— 117	— 91	— 54
60	33	35	11	113	0	84	118	116	90	52
59	33	37	4	116	0	83	117	115	88	49
58	33	39	0	119	0	83	116	113	86	47
57	33	40	59	123	0	82	115	112	84	44
56	33	43	2	126	0	82	114	111	82	42
55	33	45	8	129	0	81	113	109	80	39
54	33	47	17	133	0	81	112	107	78	37
53	33	49	30	135	0	80	111	106	76	34
52	33	51	45	138	0	80	110	104	74	31
51	33	54	3	142	0	79	109	102	71	28
50	33	56	25	144	— 0	— 79	— 108	— 101	— 69	— 25
49	33	58	49	147	0	78	107	99	67	22
48	34	1	16	150	0	77	106	97	64	19
47	34	3	46	153	0	77	105	95	62	16
46	34	6	19	155	0	76	103	93	59	13
45	34	8	54	159	0	76	102	92	57	10
44	34	11	33	161	0	75	101	90	54	7
43	34	14	14	163	0	74	100	88	52	3
42	34	16	57	167	0	74	98	86	49	— 0
41	34	19	44	168	0	73	97	84	46	+ 3
40	34	22	32	171	0	72	95	82	43	+ 7
39	34	25	23	174	— 0	— 72	— 94	— 80	— 41	+ 10
38	34	28	17	176	0	71	93	77	38	+ 14
37	34	31	13	178	0	70	91	75	35	+ 18
36	34	31	11	180	0	69	90	73	32	+ 21
35	34	37	11	183	0	69	88	71	29	+ 25
34	34	40	14	185	0	68	87	69	26	+ 29
33	34	43	19	186	0	67	85	67	23	+ 33
32	34	46	25	189	0	67	84	64	20	+ 36
31	34	49	34	191	0	66	82	62	17	+ 40
30	34	52	45	193	0	65	81	60	14	+ 44
29	34	55	58	194	0	64	79	57	11	+ 48
28	34	59	12		— 0	— 63	— 78	— 55	— 7	+ 52

Tafel enthaltend die Werthe von $\log l$.

q	$\log l$		0h	1h	2h	3h	4h	5h
72 ⁰	4.45997	2265	— 0	— 26	— 47	— 61	— 76	— 83
71	4.48262	2139						
70	4.50401	2026						
69	4.52427	1923						
68	4.54350	1829						
67	4.56179	1741						
66	4.57920	1662						
65	4.59582	1587						
64	4.61169	1519						
63	4.62688	1454						
62	4.64142	1395						
61	4.65537	1337	— 0	— 26	— 47	— 61	— 76	— 83
60	4.66874	1284						
59	4.68178	1235						
58	4.69393	1188						
57	4.70581	1143						
56	4.71724	1100						
55	4.72824	1061						
54	4.73885	1022						
53	4.74907	985						
52	4.75892	951						
51	4.76843	917						
50	4.77760	885	— 0	— 26	— 47	— 61	— 76	— 83
49	4.78645	854						
48	4.79499	825						
47	4.80324	796						
46	4.81120	769						
45	4.81889	743						
44	4.82632	716						
43	4.83348	692						
42	4.84040	668						
41	4.84708	645						
40	4.85353	623						
39	4.85976	600	— 0	— 26	— 47	— 61	— 76	— 83
38	4.86576	579						
37	4.87155	559						
36	4.87714	538						
35	4.88252	519						
34	4.88771	499						
33	4.89270	481						
32	4.89751	462						
31	4.90213	441						
30	4.90657	427						
29	4.91084	409						
28	4.91493		— 0	— 26	— 47	— 61	— 76	— 83

Die Einrichtung der soeben gegebenen Tafeln ist nun eine solche, dass man daraus für irgend eine gegebene geographische Breite, die zwischen 72° und 28° fällt, und für irgend ein beliebiges Zeit-Moment, während der Dauer der Finsterniss, sogleich die zugehörigen Werthe von k , g , L und $lg\ l$ mit Leichtigkeit erhalten kann; so hat man zum Beispiel für $\varphi = 72^{\circ}$ und für 0^h wahre Zeit in Greenwich die entsprechenden Werthe:

$$k = +438''.89; g = +1.09358; L = 33^{\circ} 17' 6''; lg\ l = 4.45997$$

dagegen wird für dieselbe Breite, aber für 2^h wahre Zeit in Greenwich:

+ 438''.89	+ 1.09358	33° 17' 6''	4.45997
Correc. + 5.73	1284	— 2 7	— 47

$$k = 444''.62; g = +1.10642; L = 33^{\circ} 14' 59''; lg\ l = 4.45950$$

Nach dieser Vorschrift wird es nun leicht sein, die Werthe von k , g , L und $lg\ l$ für irgend eine andere geographische Breite und für irgend eine andere Zeit aus den auf Seite 199—202 gegebenen Tafeln zu berechnen.

Es wird nunmehr von Interesse sein, die Zeiten des frühesten Anfanges und spätesten Endes der Finsterniss auf der Erde überhaupt, sowie die Zeiten des frühesten Anfanges und spätesten Endes der centralen Finsterniss zu bestimmen; dazu hat man bekanntlich nach §. 176. Seite 151, mit einstweiliger Vernachlässigung der Erdabplattung:

$$\sin(V - f) = \frac{\eta \cos f}{\Pi - P + D}$$

$$\sin \varphi = \sin V \cos \delta$$

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

wobei für den Anfang und das Ende der Finsterniss überhaupt $D = r + \varrho$; dagegen für den Anfang und das Ende der centralen Verfinsternung $D = 0$ zu setzen ist, die geographische Länge λ der betreffenden Orte, wird alsdann folgendermaassen gefunden:

$$\cos \psi = \frac{k \cos f}{D} \left(\frac{\sin(B+t)}{g} - 1 \right)$$

$$\tau = L - l \sin(C-t) + \frac{D}{n} \sin \psi$$

$$\lambda = t - \tau$$

wo $\sin \psi$ für den Anfang der Finsterniss negativ, dagegen für das Ende derselben positiv zu nehmen ist.

Zur Erläuterung der Formeln zur Berechnung des Anfanges und Endes auf der Erde überhaupt, diene folgendes numerische Beispiel. Man hat nämlich hierzu, wenn man mit den Werthen der Constanten rechnet, wie sie für 2^{te} wahre Greenwicher Zeit gelten:

$$D = r + \varrho = 1935'.63$$

$$II - P = 3621.45$$

$$\eta \cos f = 2769.16 \text{ und}$$

$$II - P + D = 5557.08$$

es wird also:

$$\lg \eta \cos f = 3.44235$$

$$\lg (II - P + D) = 3.74485$$

$$\lg \sin(V-f) = 9.69750; \text{ mithin:}$$

$$V - f = 150^\circ 6'.7 \text{ oder } 29^\circ 53'.3$$

wobei der erste Werth für den frühesten Anfang; der zweite dagegen für das späteste Ende der Finsterniss auf der Erde überhaupt gilt. Der weitere Verlauf der Rechnung ist nun folgender:

	für den Anfang auf der Erde überhaupt	für das Ende auf der Erde überhaupt.
$V - f$	150° 6'.7	29° 53'.3
f	351 40.4	351 40.4
V	141° 47'.1	21° 33'.7
$lg \sin V$	9.79142	9.56526
$lg \cos \delta$	9.97549	9.97549
$lg \sin \varphi$	9.76691	9.54075
Geographische Breite oder φ . .	35° 46'.8	20° 19'.5
$lg \operatorname{tg} (-\varphi)$	9.85775 _n	9.56868 _n
$lg \operatorname{tg} \delta$	9.53869	9.53869
$lg \cos t$	9.39644 _n	9.10737 _n
Wahre Zeit am Orte oder t . .	255° 34'.4	97° 21'.4
B	114° 7'.9	114° 7.9
$B + t$	9° 42'.3	211° 29'.3
C	357° 15'.7	357° 15'.7
$C - t$	101° 41'.3	259° 54'.3
$lg A$	3.53437	3.53437
$lg \sin \varphi$	9.76691	9.54075
$lg A \sin \varphi$	3.30128	3.07512
$A \sin \varphi$	2001.14	1188.83
η	2798.67	2798.67
k	- 797.53	- 1609.84
$lg k$	2.90175 _n	3.20679 _n
$lg B$	6.88722	6.88722
$C \lg \cos \varphi$	0.09084	0.02793
$lg g$	9.87981 _n	0.12194 _n
$lg \sin (B + t)$	9.22679	9.71794 _n
$lg \sin (B + t) - lg g$	9.34698 _n	9.59600
$\frac{\sin (B + t)}{g} - 1$	- 1.22232	- 0.60555
$lg \left(\frac{\sin (B + t)}{g} - 1 \right)$	0.08719 _n	9.78215 _n

$lg \left(\frac{\sin(B+t)}{g} - 1 \right) \dots \dots \dots$	0.08719 _n	9.78215 _n
$lg k \dots \dots \dots$	2 90175 _n	3.20679 _n
$lg \cos f \dots \dots \dots$	9.99540	9.99540
$Comp. lg D \dots \dots \dots$	6.71318	6.71318
$lg \cos \psi \dots \dots \dots$	9.69752	9.69752
$\psi \dots \dots \dots$	-29° 53' 4	+29° 53' 4
$lg \sin \psi \dots \dots \dots$	9.93801 _n	9.93801
$lg D \dots \dots \dots$	3.28682	3.28682
$Comp. lg n \dots \dots \dots$	1.41343	1.41343
$lg \frac{D}{n} \sin \psi \dots \dots \dots$	4.63826 ₃	4.63826
$\frac{D}{n} \sin \psi \dots \dots \dots$	-12° 4' 6	+12° 4' 6
$lg \mathcal{C} \dots \dots \dots$	0.57428 _n	0.57428 _n
$lg k \dots \dots \dots$	2.90175 _n	3.20679 _n
$lg \mathcal{C}.k \dots \dots \dots$	3.47603	3.78107
$\mathcal{C}.k \dots \dots \dots$	+ 0° 49' 9	+ 1° 40' 7
$T \dots \dots \dots$	33 42.8	33 42.8
$L \dots \dots \dots$	34° 32' 7	35° 23' 5
$lg \mathcal{D} \dots \dots \dots$	4.96821	4.96821
$lg \cos \varphi \dots \dots \dots$	9.90916	9.97207
$lg l \dots \dots \dots$	4.87737	4.94028
$lg \sin(C-t) \dots \dots \dots$	9.99090	9.99323 _n
$lg l \sin(C-t) \dots \dots \dots$	4.86827	4.93351 _n
$l \sin(C-t) \dots \dots \dots$	+20° 30' 5	-23° 50' 1
$L \dots \dots \dots$	34 32.7	35 23.5
$L - l \sin(C-t) \dots \dots \dots$	14° 2' 2	59° 13' 6
$\frac{D}{n} \sin \psi \dots \dots \dots$	-12 4.6	+12 4.6
Wahre Greenwicher Zeit oder τ	1° 57' 6	71° 18' 2
$t \dots \dots \dots$	255 34.4	97 21.4
Geographische Länge $\lambda \dots \dots$	253° 36' 8	26° 3' 2

Auf ganz ähnliche Weise, wird man nun auch die Orte auf der Erde finden können, wo die centrale Finsterniss am frühesten anfängt, oder am spätesten endigt; in diesem Falle wird aber $D=0$ und $\sin \psi=0$, so dass alsdann die Berech-

nung von ψ wegfällt, und die wahre Greenwicher Zeit τ , durch folgende Formel gefunden wird:

Wahre Zeit in Greenwich $= \tau = L - l \sin(C - t)$, so dass alsdann:
Geographische Länge $\dots = \lambda = t - \tau$

Die Art und Weise der Berechnung, wird durch folgendes numerische Beispiel deutlicher werden:

$$\begin{aligned} \lg \eta \cos f &= 3.44235 \\ \lg (\Pi - P) &= 3.55888 \\ \lg \sin(V - f) &= 9.88347 \\ V - f &= 130^\circ 7'.4 \text{ oder } 49^\circ 52'.6 \end{aligned}$$

Man hat also:	für den Anfang der centralen Finsterniss	für das Ende der centralen Finsterniss
$V - f$	130° 7'.4	49° 52'.6
f	351 40.4	351 40.4
V	121° 47'.8	41° 33'.0
$\lg \sin V$	9.92938	9.82169
$\lg \cos \delta$	9.97549	9.97549
$\lg \sin \varphi$	9.90487	9.79718
Geographische Breite oder φ	53° 26'.7	38° 49'.2
$\lg (-\lg \varphi)$	0.12992 _n	9.90558 _n
$\lg \lg \delta$	9.53869	9.53869
$\lg \cos t$	9.66861 _n	9.44427 _n
Wahre Zeit am Orte oder t	242° 12'.6	106° 9'.0
C	357 15.7	357 15.7
$C - t$	115° 3'.1	251° 6'.7
$\lg \mathcal{A}$	3.53437	3.53437
$\lg \sin \varphi$	9.90487	9.79718
$\lg \mathcal{A} \sin \varphi$	3.43924	3.33155
$\mathcal{A} \sin \varphi$	2749''.44	2145''.60
η	2798 .67	2798 .67
k	- 49''.23	- 653''.07

$lg k$	1.69223 _n	2.81496 _n
$lg \mathcal{C}$	0.57428 _n	0.57428 _n
$lg \mathcal{C} k$	2.26651	3.38924
$\mathcal{C} k$	3'.1	40'.8
T	33° 42'.8	33° 42'.8
L	33° 45'.9	34° 23'.6
$lg \mathcal{D}$	4.96821	4.96821
$lg \cos \varphi$	9.77495	9.89160
$lg l$	4.74316	4.85981
$lg \sin (C - t)$	9.95709	9.97596 _n
$lg l \sin (C - t)$	4.70025	4.83577 _n
$l \sin (C - t)$	13° 55'.8	-19° 1'.8
L	33 45.9	34 23.6
Wahre Zeit in Greenwich τ	19° 50'.1	53° 25'.4
t	242 12.6	106 9.0
Geographische Länge λ	222° 22'.5	52° 43'.6

Ebenso leicht lässt sich auch der Ort auf der Erde finden, wo die centrale Verfinsternung im Mittage stattfinden wird, denn dazu hat man nach §. 182. Seite 155, mit Vernachlässigung der Erdabplattung:

Wahre Zeit am Orte $t = 0$

$$\sin(\varphi - \delta) = \frac{\eta}{H - P}$$

Wahre Zeit in Greenwich $\tau = L - l \sin(C - t)$

Geographische Länge $\lambda = t - \tau$

also wird:

$lg \eta$	3.44695
$lg (H - P)$	3.55888
$lg \sin(\varphi - \delta)$	9.88807
$\varphi - \delta$	50° 36'.4
δ	19 4.2
Geographische Breite φ	69° 40'.6

$lg A$	3.53437
$lg \sin \varphi$	9.97208
$lg A \sin \varphi$	<u>3.50645</u>
$A \sin \varphi$	3209'.57
η	2798 .67
k	+ 410''.90
$lg k$	2.61374
$lg \mathcal{C}$	<u>0.57428_n</u>
$lg \mathcal{C} k$	3.18802 _n
$\mathcal{C} k$	— 25'.7
T	<u>33° 42'.8</u>
L	33° 17'.1
$lg \mathcal{D}$	4.96821
$lg \cos \varphi$	<u>9.54073</u>
$lg l$	4.50894
$lg (C - t)$	<u>8.67920_n</u>
$lg l \sin (C - t)$	3.18814 _n
$l \sin (C - t)$	— 25'.7
L	33° 17'.1
Wahre Greenwicher Zeit τ	<u>33° 42'.8</u>
t	360 0.0
Geographische Länge λ	<u>326° 17'.2</u>

Bei diesen Beispielen ist nun der Einfluss der Erdabplattung, so wie auch die Vergrößerung des Mondhalbmessers aus vorläufiger Unkenntnis der geographischen Lage der betreffenden Orte auf der Erde, wo die angegebenen Phasen am frühesten anfangen oder endigen sollen, vernachlässigt worden. Ebenso müssten auch, um in aller Strenge zu verfahren, die verschiedenen Constanten, welche von der Zeit abhängen, mit den nunmehr nahezu bekannten Greenwicher Zeiten aus den auf Seite 194—202, gegebenen Tafeln entnommen werden, und alsdann die Rechnung nach den früher in §. 185. Seite 159. gegebenen Vorschriften verbessert werden, es genügt indessen für den vorliegenden Zweck, sich hierbei nicht länger aufzuhalten, sondern die nähere

Ausführung dieses Gegenstandes lieber dem Leser zu überlassen. Man hat daher genähert:

Anfang auf der Erde überhaupt 0^h 7'.8 W. G. Z.
in 253° 36'.8 östlicher Länge von Greenwich
„ 35 46.8 nördlicher Breite.

Anfang der centralen Verfinsterung 1^h 19'.3 W. G. Z.
in 222° 22'.5 östlicher Länge von Greenwich
„ 53 26.7 nördlicher Breite.

Centrale Verfinsterung im Mittage 2^h 14'.9 W. G. Z.
in 326° 17'.2 östlicher Länge von Greenwich
„ 69 40.6 nördlicher Breite.

Ende der centralen Verfinsterung 3^h 33'.7 W. G. Z.
in 52° 43'.6 östlicher Länge von Greenwich
„ 38 49.2 nördlicher Breite.

Ende auf der Erde überhaupt 4^h 45'.2 W. G. Z.
in 26° 3'.2 östlicher Länge von Greenwich
„ 20 19.5 nördlicher Breite.

Um den Verlauf der totalen Verfinsterung näher zu bestimmen, welches wohl für uns zunächst am wichtigsten sein wird, kann nunmehr sogleich zur Berechnung der Curve der Centralität geschritten werden, und zwar wird man sich hierbei der Formeln in §. 180. Seite 154. zu bedienen haben; nämlich:

$$\sin(B + t) = g$$

$$\text{Wahre Zeit in Greenwich } \tau = L - t \sin(C - t)$$

$$\text{Geographische Länge } \lambda = t - \tau$$

wo die Werthe g , L und $lg l$ mit der geographischen Breite φ als Argument aus den Tafeln auf Seite 199—202 zu entnehmen sind. Man fängt die Rechnung nämlich bei irgend einer geographischen Breite φ an, die eine runde Zahl von ganzen Graden beträgt und in der Nähe des frühesten Anfanges der centralen Finsterniss liegt, und schreitet dann regelmässig von 2 zu 2 Grad oder von Grad zu Grad der geographischen Breite bis zum spätesten Ende der centralen Finsterniss fort; folgendes Rechnungs-Schema, wird dieses besser erläutern, wobei die Werthe von g , L und $lg l$ aus den Tafeln auf Seite 200—202, für 2^h wahre Greenwich-Zeit entnommen wurden:

Geographische Breite φ	54°	56°	58°
g aus der Tafel auf Seite 200.....	-0 05506	+0.03641	+0.13293
$lg g = lg \sin (B + t)$	8.74084 <i>n</i>	8.56122	9 12362
$B + t$	356° 50.6	2° 5.2	7° 38.3
B	114 7.9	114 7.9	114 7.9
t	242° 42.7	247° 57.3	253° 30.4
C	357 15 7	357 15 7	357 15 7
$C - t$	114° 33.0	109° 18.4	103° 45.3
$lg \sin (C - t)$	9 95885	9.97486	9.98736
$lg l$ aus der Tafel auf Seite 202.....	4 73838	4 71677	4.69346
$lg l \sin (C - t)$	4 69723	4.69163	4.68082
$l \sin (C - t)$	+13° 50.0	+ 13° 39.3	+13° 19.2
L aus der Tafel auf Seite 201.....	33 45 4	33 41 2	33 37.1
Wahre Zeit in Greenwich = τ	19° 55.4	20° 1.9	20° 17.9
Wahre Zeit am Orte = t	242 42 7	247 57.3	253 30 4
Geographische Länge = λ	222° 47.3	227° 55.4	233° 12.5
Greenwich östlich von Ferro.....	17 39.6	17 39.6	17 39 6
Oestliche Länge von Ferro.....	240° 26.9	245° 35.0	250° 52.1
Wahre Zeit am Orte = $\frac{1}{15} t$	16 <i>h</i> 10.8	16 <i>h</i> 31.8	16 <i>h</i> 51.0
Wahre Zeit in Greenwich = $\frac{1}{15} \tau$	1 <i>h</i> 19.7	1 <i>h</i> 20.1	1 <i>h</i> 21.2

Auf dieselbe Weise, wurde nun die Rechnung von 2 zu 2 Grad weiter geführt, und somit wurden endlich die Resultate gewonnen, die man in folgender Tafel zusammen gestellt findet, wobei die östliche Länge von Ferro mit angegeben worden ist, damit man die nachfolgende Curve der Centralität zugleich auch auf deutsche Landkarten auftragen kann.

Curve der Centralität.

Geograph. Breite φ	Oestl. Länge v. Greenwich λ	Oestliche Länge von Ferro	Wahre Zeit am Orte $\frac{1}{15} t$	Wahre Zeit in Greenwich $\frac{1}{15} \tau$
53° 27'	222° 22'	240° 2'	16 ^h 8' .8	1 ^h 19' .3
54 0	222 47	240 27	16 10 8	1 19 .7
56 0	227 55	245 35	16 31 .8	1 20 .1
58 0	233 13	250 52	16 54 .0	1 21 .2
60 0	238 46	256 26	17 18 .0	1 22 .9
62 0	244 46	262 25	17 44 .4	1 25 .4
64 0	251 28	269 8	18 14 .5	1 28 .6
66 0	259 20	277 0	18 50 .2	1 32 .9
68 0	270 20	288 0	19 36 .0	1 38 .7
70 0	284 42	302 22	20 46 .6	1 47 .9
70 57	305 41	323 20	22 23 .5	2 0 7
70 0	326 21	344 1	0 0 .3	2 14 .9
68 0	341 0	358 40	1 6 .9	2 26 .9
66 0	350 14	7 53	1 56 .7	2 35 .8
64 0	357 15	14 55	2 32 .4	2 43 .4
62 0	3 3	20 43	3 2 .5	2 50 .3
60 0	8 5	25 45	3 28 .9	2 56 .6
58 0	12 37	30 17	3 52 .9	3 2 4
56 0	16 50	34 29	4 15 .1	3 7 .8
54 0	20 59	38 39	4 36 .1	3 12 .8
52 0	24 43	42 23	4 56 .2	3 17 .4
50 0	28 36	46 15	5 15 .8	3 21 .5
48 0	32 31	50 11	5 35 .1	3 25 .1
46 0	36 46	54 25	5 55 .2	3 28 .1
44 0	40 29	58 8	6 12 .6	3 30 .7
42 0	45 42	63 21	6 34 .0	3 31 .2
40 0	50 39	68 19	6 54 .8	3 32 .2
38 49	52 43	70 22	7 4 .6	3 33 .7

Trägt man nun die hier berechneten Punkte auf eine Weltkarte auf, so wird man finden, dass die centrale Finsterniss im *stillen Meere* nicht weit von der Nordwest-Küste von *Nord-Amerika* ihren Anfang nimmt, etwa in der Gegend der *Königin Charlotten Inseln* sie schreitet dann ungefähr in nordöstlicher Richtung über den

Grossen Slaven See, Melville Halbinsel und Baffinsland bis nach Grönland fort, dessen Westküste sie etwas nördlich von der *Disco Insel* erreicht, und indem sie nun bei einer Aenderung ihrer Richtung nach südost, bis zur Ostküste von Grönland in 69° nördlicher Breite gelangt, schreitet sie alsdann durch den nördlichen atlantischen Ocean über die *Möven Insel* etwas nördlich von Island bis zur Küste von Norwegen fort, welches von ihr ungefähr in der Gegend von Bergen getroffen wird. Von hier an wird die Curve der Centralität sehr nahe bei folgenden Hauptstädten und Hauptsternwarten vorbeigehen, nämlich nicht weit bei *Christinia* vorbei, bis nach *Gothenburg* und *Carlskrona*, und von da über die *Ostsee*, bis nach *Elbing*, zwischen *Königsberg* und *Danzig*; alsdann zwischen *Warschau* und *Bjalostok* vorbei, über *Bielsk*, bis nach *Kobrin* und *Nowgorod Wolynsk*. Von dort zwischen *Lemberg* und *Kiew* vorbei, und alsdann zwischen *Jekaterinoslaw*, *Nicolaew* und *Cherson* hindurch, nach *Mariopol* und dem *Azowschen Meere*, bis nach *Jekaterinodar* am *Kuban*; und von da endlich über den *Elburz* nach *Tiflis* bis nach *Baku* an der Westküste des *Caspischen Meeres*; die Curve der Centralität geht dann über das *Caspische Meer* hinweg und endigt ihren Lauf an der Ostküste des *Caspischen Meeres* in $38\frac{1}{2}^{\circ}$ nördlicher Breite, womit die Erscheinung der centralen Verfinsterung geschlossen ist.

Um nun zu erfahren, zwischen welchen Grenzen die Finsterniss total werden kann, wird es nöthig sein, die Curven für die inneren Berührungen zu berechnen, weil dadurch die Zone der Totalität vollkommen bestimmt wird; dazu hat man nun nach §. 175. Seite 148. die Formeln:

$$\sin(B + t) = \left(1 \pm \frac{D}{k \cos f}\right) \cdot g$$

Wahre Zeit in Greenwich oder $\tau = L - l \sin(C - t)$

Geographische Länge oder $\lambda = t - \tau$

wo $D = \varrho - r = 42''.63$ zu setzen ist, und $+\frac{D}{k \cos f}$ für die erste innere Berührung, dagegen $-\frac{D}{k \cos f}$ für die zweite innere Berührung genommen werden muss. Berechnet man sich zuerst den nahezu constanten Werth $\log \frac{D}{\cos f}$ für 2^h W. G. Z., so wird:

$$\begin{aligned} \log D &= 1.62972 \\ \log \cos f &= 9.99540 \\ \log \frac{D}{\cos f} &= 1.63432 \end{aligned}$$

und alsdann wird es am Besten sein die Rechnung ungefähr bei 52° nördlicher Breite anzufangen, und darauf ganz ähnlich wie bei der Berechnung der Curve der Centralität von 2 zu 2 Grad der geographischen Breite bis zum Ende der Curven fortzuschreiten. Zur Berechnung der Curven für die inneren Berührungen, wird man alsdann folgende Rechnungs-Schemata haben, wo die Werthe k , g , L und $\log l$ unmittelbar aus den Tafeln auf Seite 199–202, für 2^h W. G. Z. entnommen werden können, und ferner zu bemerken ist, dass überall für $\frac{D}{k \cos f}$, der Buchstabe m gesetzt worden ist:

Geographische Breite = φ	52°	54°	56°	58°
$\lg D - \lg \cos f$	1 63432	1 63432	1.63432	1 63432
$\lg k$	2 05667 n	1 62387 n	1.42259	1 96186
$\lg m$	9.57765 n	0 01045 n	0 21173	9 67246
m	-0.37814	-1.02436	+1.62830	+0.47039
$l + m$	+0 62186	-0 02436	+2 62830	+1.47039
$l - m$	+1 37814	+2.02436	-0.62830	+0.52961
$\lg (l + m)$	9.79369	8.38668 n	0 41968	0.16743
$\lg (l - m)$	0 13929	0 30630	9.79817 n	9 72396

Berechnung der Curve für die erste innere Berührung:

Geographische Breite = φ ..	52°	51°	56°
$lg(1+m)$	9.79369	8.38668 n	0.41968
$lg g$	9.15366 n	8.74084 n	8.56125
$lg \sin(B+t)$	8.94735 n	7.12752	8.98093
$B+t$	354° 55'.1	0° 4'.6	5° 29'.5
B	114 7.9	114 7.9	114 7.9
t	240° 47'.2	245° 56'.7	251° 21'.6
C	357 15.7	357 15.7	357 15'.7
$C-t$	116° 28'.5	111° 19'.0	105° 54'.1
$lg \sin(C-t)$	9.95189	9.96922	9.98306
$lg l$	4.75845	4.73838	4.71677
$lg l \sin(C-t)$	4.71034	4.70760	4.69983
$l \sin(C-t)$	+ 14° 15'.6	+ 14° 10'.1	+ 13° 55'.0
L	33 49.9	33 45.4	33 41.2
r	19° 31'.3	19° 35'.3	19° 46'.2
t	240 47.2	245 56'.7	251 21.6
Geographische Länge = λ ..	221° 12'.9	226° 21'.4	231° 35'.4
Greenwich östlich von Ferro	17 39.6	17 39.6	17 39.6
Länge von Ferro	238° 52'.5	244° 1'.0	249° 15'.0
Wahre Zeit am Orte $\frac{1}{15} t$..	16h 3'.1	16h 23'.8	16h 45'.4
Wahre Zeit in Greenwich $\frac{1}{15} t$	1h 18'.3	1h 18'.4	1h 19'.1

Berechnung der Curve für die zweite innere Berührung:

Geographische Breite = φ ..	51°	56°	58°
$lg(1-m)$	0.30630	9.79-17 n	9.72396
$lg g$	8.74084 n	8.56125	9.12362
$lg \sin(B+t)$	9.04714 n	8.35942 n	8.84758
$B+t$	353° 36'.0	358° 41'.3	4° 2'.2
B	114 7.9	114 7.9	114 7.9
t	239° 28'.1	244° 33'.4	249° 51'.3
C	357 15.7	357 15.7	357 15.7
$C-t$	117° 47'.6	112° 42'.3	107° 21'.4
$lg \sin(C-t)$	9.94676	9.96496	9.97976
$lg l$	4.73838	4.71677	4.69346
$lg l \sin(C-t)$	4.68514	4.68173	4.67322
$l \sin(C-t)$	13° 27'.2	13° 20'.9	13° 5'.4
L	33 45.4	33 41.2	33 37.1
r	20° 18'.2	20° 20'.3	20° 31'.7
t	239 28.1	244 33.4	249 51.3
Geographische Länge = λ ..	219° 9'.9	224° 13'.1	229° 22'.6
Greenwich östlich von Ferro	17 39.6	17 39.6	17 39.6
Länge von Ferro	236° 49'.5	241° 52'.7	247° 2'.2
Wahre Zeit am Orte $\frac{1}{15} t$..	15h 57'.9	16h 18'.2	16h 39'.6
Wahre Zeit in Greenwich $\frac{1}{15} t$	1h 21'.2	1h 21'.4	1h 22'.1

Diese Rechnungen wurden nun bis zum Ende der Curven fortgeführt, und somit wurden endlich die folgenden Resultate erhalten; bei denen der Einfluss der Erdabplattung ganz vollständig, die Vergrößerung des Mondshalbmessers jedoch, noch nicht berücksichtigt worden ist:

Südliche Grenze der Zone der Totalität

oder

Curve für die erste innere Berührung.

Geograph. Breite φ	Oestl. Länge v. Greenwich λ	Oestliche Länge von Ferro	Wahre Zeit am Orte $\frac{1}{15} t$	Wahre Zeit in Greenwich $\frac{1}{15} \tau$
52° 0'	221° 13'	238° 53'	16 ^h 3'.1	1 ^h 18'.3
54 0	226 21	244 1	16 23.8	1 18.4
56 0	231 35	249 15	16 45.4	1 19.1
58 0	237 1	254 41	17 8.6	1 20.4
60 0	242 48	260 28	17 33.8	1 22.4
62 0	249 7	266 47	18 1.9	1 25.4
64 0	256 20	273 59	18 34.4	1 29.2
66 0	264 59	282 39	19 14.4	1 34.6
68 0	276 54	294 33	20 9.2	1 41.6
69 54	305 49	323 29	22 23.5	2 0.2
68 0	334 4	351 43	0 37.8	2 21.5
66 0	345 8	2 47	1 32.4	2 31.9
64 0	353 1	10 41	2 12.4	2 40.3
62 0	359 19	16 59	2 45.0	2 47.7
60 0	4 41	22 21	3 13.2	2 54.4
58 0	9 26	27 6	3 38.4	3 0.7
56 0	13 47	31 27	4 1.5	3 6.4
54 0	17 53	35 33	4 23.2	3 11.6
52 0	21 50	39 30	4 43.8	3 16.5
50 0	25 44	43 23	5 3.8	3 20.8
48 0	29 36	47 15	5 23.2	3 24.8
46 0	33 48	51 27	5 43.3	3 28.1
44 0	37 49	55 28	6 2.2	3 30.9
42 0	42 32	60 12	6 22.0	3 31.9
40 0	47 18	64 58	6 42.5	3 33.3
38 0	52 34	70 14	7 4.1	3 33.8

Nördliche Grenze der Zone der Totalität
 oder
 Curve für die zweite innere Berührung

Geograph. Breite φ	Oestl. Länge v. Greenwich λ	Oestliche Länge von Ferro	Wahre Zeit am Orte $\frac{1}{15} t$	Wahre Zeit in Greenwich $\frac{1}{15} \tau$
54° 0'	219° 10'	236° 50'	15 ^h 57'.9	1 ^h 21'.2
56 0	224 13	241 53	16 18.2	1 21.4
58 0	229 23	247 2	16 39.6	1 22.1
60 0	234 44	252 24	17 2.4	1 23.5
62 0	240 27	258 7	17 27.4	1 25.6
64 0	246 44	264 24	17 55.3	1 28.4
66 0	253 51	271 31	18 27.4	1 32.0
68 0	262 41	280 21	19 7.5	1 36.8
70 0	274 36	292 15	20 1.9	1 43.5
72 0	303 33	321 13	22 14.3	2 0.1
72 1	305 32	323 12	22 23.5	2 1.3
72 0	307 31	325 11	22 32.6	2 2.5
70 0	335 50	353 29	0 45.4	2 21.7
68 0	347 2	4 41	1 39.4	2 31.3
66 0	355 4	12 44	2 19.5	2 39.3
64 0	1 21	19 1	2 51.6	2 46.2
62 0	6 44	24 24	3 19.6	2 52.6
60 0	11 29	29 9	3 44.5	2 58.5
58 0	15 50	33 29	4 7.3	3 4.0
56 0	19 54	37 34	4 28.7	3 9.1
54 0	23 49	41 29	4 49.1	3 13.8
52 0	27 41	45 22	5 8.8	3 18.1
50 0	31 32	49 12	5 28.0	3 21.9
48 0	35 33	53 12	5 47.6	3 25.2
46 0	39 46	57 27	6 7.0	3 27.9
44 0	43 59	61 39	6 26.1	3 30.1
42 0	49 1	66 40	6 46.4	3 30.3
40 0	54 13	71 52	7 47.7	3 30.9

Da bei der Berechnung der eben gegebenen Curven der Centralität und der ersten und zweiten inneren Berührung der Ränder, die Tafeln auf Seite 199–202 benutzt worden sind, so ist auch der Einfluss der Erdabplattung vollständig berücksichtigt. Wollte man jedoch ganz scharf rechnen, so

wäre die Berechnung der Curven der Centralität mit denjenigen Werthen von k , g , L und $lg l \dots$ u. s. w. zu wiederholen, welche für die nunmehr bekannten wahren Greenwicher Zeiten $\frac{1}{15} \tau$ gelten. Bei der Berechnung der Curven für die inneren Berührungen der Ränder, wäre noch ausserdem auf die Wirkung der Parallaxe im Mondshalbmesser oder auf die sogenannte Vergrösserung des Mondshalbmessers Rücksicht zu nehmen; alle diese Rechnungen sind jedoch so einfach, und vermöge der von mir auf Seite 194–202 gegebenen Tafeln und Rechnungs-Schemata, so leicht zu bewerkstelligen, dass es keines Rechnungsbeispielles hierzu bedarf. Die drei hier gegebenen Curven sind für diese interessante Finsterniss unstreitig am wichtigsten, weil man daraus sogleich beurtheilen kann, an welchen Orten auf der Erde die Finsterniss gewiss vollständig total werden wird. Um Raum zu sparen ist die Berechnung der Curve für die äusseren Berührungen der Ränder nicht hergesetzt worden, sollte es aber für den Leser von Interesse sein, auch diese kennen zu lernen, so wird derselbe, die eben auf Seite 215, gegebenen Rechnungen, nur mit dem Werthe $D = r + \rho = 1935''.63$ statt $D = \rho - r = 42.63$, und unter Zuziehung der Tafeln auf Seite 194–202 zu wiederholen haben, um die Curven für die äusseren Berührungen sogleich zu erhalten. Ebenso einfach wird es auch sein die Curven beim Aufgange und Untergange, vermöge der Vorschriften in §. 177. Seite 152. herzuleiten; denn dazu hat man die Formel: $\cos t = -tg \varphi tg \delta$ wo t der Stundenwinkel beim Aufgange oder Untergange der Sonne sein wird. Nimmt man nun für φ eine runde Zahl von ganzen Graden an, und schreitet dann von 2 zu 2 Grad in der Breite φ fort, so wird man vermöge der Formeln (K) und (L) in §. 171. Seite 141. die geographischen Längen finden, welche den Orten auf dem gegebenen Breiten-Parallele angehören, wo die gegebene Phase beim Aufgange oder Untergange der Sonne anfängt oder endigt.

Berechnung des Anfanges und Endes der Finsterniss für einen Ort auf der Erde, dessen geographische Lage gegeben ist.

Wir wollen jetzt noch die Berechnung der Zeit des Anfanges und Endes der Finsterniss, so wie die Zeit der grössten Phase für irgend einen Ort auf der Erde, dessen geographische Lage gegeben ist, hersetzen, wobei man am besten, das zwar indirecte, aber ganz vorzügliche Verfahren von Gauss anwenden kann. Man nimmt nämlich hierzu, um den Anfang zu berechnen, einen Stundenwinkel t an, der 1^h bis 2^h vor der Conjunctionszeit stattfindet, und ebenso zur Vorausberechnung des Endes einen Stundenwinkels t , der 1^h bis 2^h nach der Conjunctionszeit stattfindet; alsdann berechnet man sich mit Hülfe dieses hypothetischen Stundenwinkels, und mit der gegebenen geographischen Breite g , unter Berücksichtigung der Erdabplattung und mit gehöriger Vergrösserung des Mondshalbmessers unter der Bemerkung, dass $D = r + \rho$ zu setzen ist, eine hypothetische Länge, durch folgende Formeln:

$$\cos \psi = \frac{k \cos f}{D} \cdot \left(\frac{\sin(B + t)}{g} - 1 \right)$$

$$\text{Wahre Zeit in Greenwich } \tau = L - t \sin(C - t) + \frac{D \sin \psi}{n}$$

$$\text{Geographische Länge } \lambda = t - \tau$$

wo $\sin \psi$ für den Anfang negativ, und also ψ selbst für den Anfang im 3^{en} oder 4^{en} Quadranten zu nehmen ist, dagegen $\sin \psi$ für das Ende positiv, oder ψ selbst, für das Ende im 1^{sten} oder 2^{en} Quadranten zu nehmen ist.

Die so gefundene hypothetische Länge, wird nun von der gegebenen mehr oder weniger abweichen; nimmt man daher für t einen anderen, etwas grösseren oder kleineren Werth an, und wiederholt die Rechnung noch einmal,

so wird man leicht durch die *Regula falsi* bestimmen können, um wie viel und in welchem Sinne der Stundenwinkel t zu ändern sein wird, um die aus der Rechnung resultirende Länge, mit der gegebenen zur genauesten Uebereinstimmung zu bringen; und zwar werden wenige Versuche hierzu genügen. Will man die Zeiten für die erste und zweite innere Berührung berechnen, so bleibt das ganze Verfahren dasselbe, man hat alsdann nur darauf zu achten, dass $D = \varrho - r$ oder $r - \varrho$ zu setzen ist, und zwar gilt der erste Werth für totale und der zweite für ringförmige Finsternisse.

Der Uebersetzer glaubt, dass folgende Modification des eben auseinandergesetzten Gaussischen Verfahrens, vielleicht noch bequemer für die Rechnung sein dürfte; setzt man nämlich $t = \lambda + \tau$, so wird man haben:

$$\cos \psi = \frac{k \cos f}{D} \cdot \left(\frac{\sin(B + \lambda + \tau)}{g} - 1 \right) \dots \dots \dots (1)$$

welche Gleichung man auch so schreiben kann:

$$\cos \psi = \frac{b n}{c D} \cdot l \sin(B + \lambda + \tau) - \frac{k \cos f}{D} \dots \dots \dots (1^*)$$

$$L = \tau + l \sin(C - \lambda - \tau) - \frac{D}{n} \cdot \sin \psi \dots \dots \dots (2)$$

wo k , g , L und lg l mit der gegebenen geographischen Breite φ und der genähert bekannten Greenwicher Zeit $\frac{1}{15} \tau$ aus den Tafeln auf Seite 199–202, und ebenso die Werthe f , B und C aus den Tafeln auf Seite 194–195 mit $\frac{1}{15} \tau$ als Argument bestimmt werden können; es werden also die sämtlichen Grössen in den Gleichungen (1), (1*) und (2) mit Ausnahme der unbekanntnen Grösse τ , nahezu bekannt sein. Berechnet man also aus der Gleichung (1) oder (1*), für irgend ein gegebenes D , den Werth von ψ und damit aus der Gleichung (2) den Werth von L , so wird die Uebereinstim-

mung dieses Werthes, mit dem gegebenen zeigen, ob der angenommene Werth von τ noch bedeutend zu ändern sein wird. Um nun die etwaige Correction, ohne Hülfe der Regula falsi zu berechnen, deren Anwendung ich immer ermüdend und zeitraubend gefunden habe, kann folgendermaassen verfahren werden. Da nämlich die wahre Greenwicher Zeit $\frac{1}{15} \tau$ immer schon so nahe vorausbekannt sein wird, dass man die Werthe f, B, C, k, g, L und $lg l$ scharf genug erhalten kann, so wird die Aenderung, welche L erleidet, wenn man τ variirt, hauptsächlich von der directen Einwirkung von τ herrühren; man kann diese daher leicht bestimmen, wenn man die Gleichungen (1) und (2), ganz einfach nach τ differenziirt, ohne auf die kleine Aenderung, welche f, B, C, k, g, L und $lg l$ durch die Aenderung von τ erleiden, Rücksicht zu nehmen. Man wird also haben:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{k \cos f}{D} \cdot \frac{\cos(B + \lambda + \tau)}{g \sin \psi}, \text{ und}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 1 - l \cos(C - \lambda - \tau) - \frac{D}{n} \cos \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

mithin wird auch, wenn alles in Bogensecunden ausgedrückt wird:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 1 - l \sin 1'' \cdot \cos(C - \lambda - \tau) + \frac{k \cos f \sin 1''}{g n} \cdot \cotg \psi \cos(B + \lambda + \tau)$$

Da aber nach Seite 175:

$$l \cdot g = \frac{c k \cos f}{b n}, \text{ so ist auch:}$$

$$\frac{k \cos f}{g n} = \frac{b \cdot l}{c},$$

mithin wird man endlich folgende Gleichung haben:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 1 - l \sin 1'' \cdot \cos(C - \lambda - \tau) + \frac{b}{c} \cdot l \sin 1'' \cdot \cotg \psi \cos(B + \lambda + \tau)$$

Setzt man also:

$$p = l \sin 1'' \cdot \cos(C - \lambda - \tau), \text{ und}$$

$$q = \frac{b}{c} l \sin 1'' \cdot \cotg \psi \cos(B + \lambda + \tau), \text{ so wird endlich}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 1 - p + q$$

und also auch:

$$\partial \tau = \frac{1}{1 - p + q} \cdot \partial L$$

Bezeichnet man nun den wahren Werth von τ durch τ_0 ; berechnet man sich alsdann für irgend einen hypothetischen Werth von τ , den zugehörigen Werth von L und bezeichnet man endlich den gegebenen wahren Werth von L durch L_0 , so wird der wahre Werth von:

$$\tau_0 = \tau + \partial \tau$$

wo $\partial \tau$ aus dem folgenden Ausdrücke leicht gefunden werden kann:

$$\partial \tau = \frac{L_0 - L}{1 - p + q} \dots \dots \dots (3)$$

wo $p = l \sin 1'' \cdot \cos(C - \lambda - \tau)$ und

$$q = \frac{b}{c} l \sin 1'' \cdot \cotg \psi \cos(B + \lambda + \tau)$$

Diese Ausdrücke sind leicht zu berechnen, indem man die Logarithmen der darin vorkommenden Grössen schon

grösstentheils stehen hat, und $lg \cos(C - \lambda - \tau)$; $lg \cos(B + \lambda + \tau)$ gleichzeitig mit $lg \sin(C - \lambda - \tau)$; $lg \sin(B + \lambda + \tau)$ aufgeschlagen werden können. In der Praxis kann nun τ immer schon so nahe der Wahrheit angenommen werden (ungefähr bis auf 10^0), dass man mit einer zweimaligen Anwendung dieser Formel vollkommen ausreicht, ja sogar mit einer einmaligen, wenn man sich bei der Berechnung der Zeit des Anfanges und Endes mit einer Genauigkeit von 1–2 Zeitminuten begnügen will; diese Methode ist daher unbedenklich derjenigen vorzuziehen, welche in §. 186. Seite 160. gelehrt worden ist, so wie man auch in der Praxis finden wird, dass sie etwas schneller zum Ziele führt, als der von Gauss eingeschlagene Weg.

Berechnung der Zeit der grössten Phase, sowie die Grösse dieser Phase.

Um die Zeit der grössten Phase, so wie die Grösse dieser Phase, für irgend einen Ort auf der Erde, dessen geographische Lage gegeben ist, zu finden, wird man sich am bequemsten, ebenfalls eines indirecten Verfahrens bedienen können. Zur Zeit der grössten Phase wird nämlich immer $\sin \psi = 0$, und also die wahre Zeit in Greenwich $\tau = L - l \sin(C - t)$. Nun ist aber immer $t = \lambda + \tau$, also auch: $\tau = L - l \sin(C - \lambda - \tau)$, und daher endlich:

$$L = \tau + l \sin(C - \lambda - \tau) \dots \dots \dots (A)$$

wo L , l , C und λ gegebene Grössen sind, und τ leicht durch Versuche, vermöge eines Verfahrens von Gauss in der *Theoria motus corporum coelestium* §. 11. Seite 11, gefunden werden kann; indem der Werth von t und also auch von τ schon sehr nahezu durch die Vorausberechnung des Anfanges und Endes für den gegebenen Ort bekannt sein wird. Die grösste Phase wird nämlich zu einer Zeit stattfinden müssen,

die sehr nahe in der Mitte liegen muss, zwischen den Zeiten des Anfanges und Endes; hat man diese also schon berechnet, so wird der Werth von t und also auch von τ sehr nahezu bekannt sein, und man wird dann leicht durch die angegebene Auflösung der Gleichung (A), alles genau bestimmen können.

Will man bei der Aufsuchung von τ , sich lieber des auf Seite 220–223, gezeigten Verfahrens bedienen, so wird man sich zuerst mit einem hypothetischen Werthe von τ , die Werthe:

$$L = \tau + l \sin(C - \lambda - \tau) \text{ und} \\ p = l \sin 1'' \cdot \cos(C - \lambda - \tau)$$

berechnen, und dann wird endlich:

$$\text{Zeit der grössten Phase} = \tau_0 = \tau + \frac{L_0 - L}{1 - p} \dots \dots \dots (B)$$

wo man für den Fall, dass τ_0 und τ zu sehr verschieden ausfallen, die Berechnung zu wiederholen haben wird.

Um endlich die Grösse der grössten Phase selbst zu bestimmen, wird man in der Gleichung (1*) auf Seite 220, für $\cos \psi$, ± 1 zu setzen haben und alsdann wird:

$$\text{Die grösste Phase} \pm D = \frac{bn}{c} \cdot l \sin(B + \lambda + \tau) - k \cos f$$

wo τ nunmehr durch die vorhergehende Rechnung bekannt ist.

Will man diese Phase in sogenannten Zollen ausgedrückt haben, so wird vermöge des §. 172, Seite 143:

$$D = q' - \left(\frac{m-6}{6}\right) \cdot r, \text{ und folglich}$$

$$m = 6 + 6 \times \frac{q' - D}{r}$$

wo m die Zolle der Verfinsternung bedeuten.

Um diese Formeln durch ein Rechnungs-Beispiel zu erläutern, wollen wir die Zeit des Anfanges und des Endes der Finsterniss, so wie die Zeit der grössten Phase für Königsberg vorausberechnen.

Man hat nun nach dem Nautical Almanac auf das Jahr 1851 für Königsberg:

Geographische Breite $\varphi = 54^{\circ} 42' 50''.0$ nördlich
 Geographische Länge $\lambda = 20^{\circ} 30' 7''.5$ östlich v. Greenwich.

Geht man nun in die Tafel für die Curve der Centralität auf Seite 212. ein, so findet man, dass auf 54° nördlicher Breite und 21° östliche Länge von Greenwich die Finsterniss sehr nahezu um $3^h 13'$ wahre Greenwicher Zeit central sein wird. Da nun diese geographische Lage sehr nahe mit der von Königsberg übereinstimmt, so sieht man hieraus sogleich, dass die Finsterniss für Königsberg total werden muss, und dass ferner die Zeit der grössten Phase für Königsberg sehr nahe um $3^h 13'$ W. G. Z. stattfinden wird. Um nun den Anfang der Finsterniss für Königsberg genähert zu bestimmen, muss man die Geschwindigkeit des Mondscentrums in seiner relativen Bahn, zu Hülfe nehmen, welche in §. 167. Seite 137 mit n bezeichnet worden ist; bedenkt man nämlich, dass $D = r + \rho$ die Chorde ist, welche das Mondscentrum bei einer nahezu centralen Verfinsterung, von der ersten äusseren Berührung bis zur totalen Verfinsterung oder von der totalen Verfinsterung bis zur letzten äusseren Berührung zu durchlaufen hat, so wird $\frac{D}{n}$ sehr nahezu gleich der Zeit sein müssen, die vom Anfange der Verfinsterung bis zur totalen Verfinsterung oder von der totalen Verfinsterung bis zum Ende verstrichen ist. Nun ist für unsere Finsterniss D sehr nahe $= 1935''.63$ und $\lg n = 8.58657$, es wird also:

$$\frac{D}{n} = 50148'' \text{ in Bogen} = 0^h 55' 43'' \text{ in Zeit.}$$

Da nun die Zeit der grössten Phase für Königsberg nach dem obigen, sehr nahe $3^h 13'$ W. G. Z. ist, so wird der Anfang der Finsterniss für Königsberg, genähert um $3^h 13' - 0^h 56' = 2^h 17'$ W. G. Z., und ebenso das Ende der Finsterniss für diesen Ort sehr nahe um $3^h 13' + 0^h 56' = 4^h 9'$ W. G. Z. stattfinden müssen.

Man hat also nunmehr zur Berechnung des Anfanges:
 $\frac{1}{15} \tau = 2^h 17'$, und also:

$$\tau = 34^{\circ} 15'.0$$

$$\lambda = 20 \quad 30 \quad .1$$

$$t = 54^{\circ} 45'.1$$

Interpolirt man sich nun für die geographische Breite von Königsberg $\varphi = 54^{\circ} 42' 50''$ und $\frac{1}{15} \tau = 2^h 17'$, aus den Tafeln auf Seite 199–202, die entsprechenden Werthe von k , L und $lg l$, so wird man, mit vollständiger Berücksichtigung der Gestalt der Erde erhalten:

$$k = -17''.06$$

$$L = 33^{\circ} 43' 53''$$

$$lg l = 4.73079.$$

Berechnet man sich ferner die Vergrößerung des Mondshalbmessers, so wird man dazu haben:

$$\cos z = \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta,$$

und der vergrösserte Mondshalbmesser wird alsdann:

$$\rho' = \rho + (\pi - \rho) \rho \sin 1'' \cos z,$$

also hat man:

8.3807, es wird also:

$lg \cos \varphi = 9.76168$	$lg (\pi - p) = 3.55791$
$lg \cos \delta = 9.97549$	$lg \varrho = 2.99525$
$lg \cos t = 9.76128$	$lg \sin 1'' = 4.68557$
$lg \cos \varphi \cos \delta \cos t = +9.49845$	$lg (\pi - p) \varrho \sin 1'' = 1.23873$
$lg \sin \varphi = 9.91183$	$lg \cos z = 9.76476$
$lg \sin \delta = 9.51418$	$lg (\varrho' - \varrho) = 1.00349$
$lg \sin \varphi \sin \delta = +9.42601$	$\varrho' - \varrho = 10''.08$
$\sin \varphi \sin \delta = +0.26669$	$\varrho = 989.17$
$\cos \varphi \cos \delta \cos t = +0.31510$	$\varrho' = 999''.25$
$\cos z = +0.58179$	
$lg \cos z = 9.76476$	

und da ferner $r = 946''.50$, so wird $D = r + \varrho' = 1945''.75$ werden; man hat aber dann nach den Tafeln auf Seite 194—195:

$B = 114^\circ 9'.5$	$B + \lambda + \tau = 168^\circ 54'.6$
$C = 357 15.6$	$C - \lambda - \tau = 302 30.5$
$f = 351 39.8$	$lg b = 9.54932$
$lg n = 8.58663$	$lg c = 9.99588$

und daher endlich nach Seite 220, Formel (1*) und (2):

$lg b - lg c = 9.55344$	$lg k = 1.23198$
$lg n - lg D = 5.29754$	$lg \cos f = 9.99539$
4.85098	$lg k \cos f = 1.22737$
$lg l = 4.73079$	$lg D = 3.28909$
$lg \frac{b n}{c D} l = 9.58177$	$= 7.93828_n$
$lg \sin (B + \lambda + \tau) = 9.28410$	Zahl . . . -0.008675
8.86587	
Zahl . . . $+0.073430$	$lg \frac{D}{n} = 4.70246$
$+0.008675$	
$\cos \psi = +0.082105$	$lg \sin \psi = 9.99853_n$
$\cos \psi = 8.91437$	$lg \frac{D}{n} \sin \psi = 4.70099_n$
$\psi = 274^\circ 42'.6$	
$lg \sin \psi = 9.99853_n$	$\frac{D}{n} \sin \psi = 13^\circ 57' 13''$

Man hat also:

$\begin{aligned} \lg l &= 4.73079 \\ \lg \sin(C-\lambda-\tau) &= 9.92599_n \\ \lg \sin(C-\lambda-\tau) &= 4.65678_n \\ \sin(C-\lambda-\tau) &= -12^\circ 36' 11'' \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tau &= +34^\circ 15' 0'' \\ \sin(C-\lambda-\tau) &= -12 \ 36 \ 11 \\ -\frac{D}{n} \sin \psi &= +13 \ 57 \ 13 \\ L &= 35^\circ 36' 2'' \\ L_0 &= 33 \ 43 \ 53 \\ L_0 - L &= -1^\circ 52' 9'' \\ L_0 - L &= -6729'' \end{aligned}$
--	--

Um mittelst dieses Werthes von $L_0 - L = -6729''$, die zugehörige Correction von τ zu erhalten, wird man sich die Werthe p und q berechnen müssen, indem man sich dazu der Formeln auf Seite 222 bedient, und dann steht die Rechnung so:

$\begin{aligned} \lg l &= 4.73079 \\ \lg \sin 1'' &= 4.68557 \\ \lg l \sin 1'' &= 9.41636 \\ \lg \cos(C-\lambda-\tau) &= 9.73032 \\ \lg p &= 9.14668 \\ p &= +0.14018 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg l \sin 1'' &= 9.41636 \\ \lg b - \lg c &= 9.55344 \\ \lg \frac{b}{c} \sin 1'' &= 8.96980 \\ \lg \cotg \psi &= 8.91584_n \\ \lg \cos(B+\lambda+\tau) &= 9.99181_n \\ \lg q &= 7.87745 \\ q &= +0.00754 \\ p &= +0.14018 \end{aligned}$
--	--

Es wird also:

$1 - p + q = +0.86736; \text{ mithin } \lg(1 - p + q) = 9.93820$	$\begin{aligned} \lg(L_0 - L) &= 3.82795_n \\ \lg \partial \tau &= 3.88975_n \\ \text{also } \partial \tau &= -2^\circ 9' 18'' \\ \tau &= 34 \ 15 \ 0 \\ \tau_0 &= 32^\circ 5' 42'' \end{aligned}$
--	--

Führt man nun mit diesem Werthe von $\tau = 32^\circ 5' 42''$ die Rechnung von neuem durch, so wird:

$\tau = 32^\circ 5' 7$	$lg l = 4.73079$
$\lambda = 20 30.1$	$lg \sin(C + \lambda - \tau) = 9.91514_n$
$\tau + \lambda = 52^\circ 35' 8$	$lg l \sin(C - \lambda - \tau) = 4.64593_n$
$B + \lambda + \tau = 166 45.3$	$l \sin(C - \lambda - \tau) = 12^\circ 17' 32''$
$C - \lambda - \tau = 304 39.8$	Es ist aber:
$lg \frac{b n}{c D} l = 9.58177$	$\tau - \frac{D}{n} \sin \psi = 46 1 52$
$lg \sin(B + \lambda + \tau) = 9.36006$	$L = 33 44 20$
8.94183	$L_0 = 33 43 53$
Zahl . . . + 0.087464	$L_0 - L = -27''$
auf Seite 227. . + 0.008675	Man hat daher endlich:
$\cos \psi = + 0.096139$	$lg(L_0 - L) = 1.43136_n$
$lg \cos \psi = 8.98290$	$lg(1 - p + q) = 9.93820$
$\psi = 275^\circ 31'.0$	$lg \partial \tau = 1.49316_n$
$lg \sin \psi = 9.99798_n$	$\partial \tau = -31''$
$= 4.70246$	$\tau = 32^\circ 5' 42''$
$lg \frac{D}{n} \sin \psi = 4.70044_n$	$\tau_0 = 32^\circ 5' 11''$
$\frac{D}{n} \sin \psi = -13^\circ 56' 10''$	$\frac{1}{15} \tau_0 = 2^h 8' 20''.7$

Da nun die östliche Länge Königsbergs von Greenwich $= 1^h 22' 0''.5$ in Zeit ist, so wird der Anfang der Finsterniss für Königsberg stattfinden müssen, um:

$$3^h 30' 21''.2 \text{ wahre Königsberger Zeit}$$

und da der Ort des Anfanges vom Nordpunkte der Sonnenscheibe abgerechnet, bekanntlich $= \vartheta = \psi - f$ ist, so wird in diesem Falle:

$$\text{Ort des Anfanges oder } \vartheta = \psi - f = 283^\circ 51'.2$$

Auf dieselbe Weise wird man auch das Ende für Königsberg vorausberechnen können; indem man zuerst nach Seite 226, für $\frac{1}{15}\tau$ genähert $4^h 9'$ annimmt, alsdann wird:

$$t = 62^\circ 15' \text{ und } t = \lambda + \tau = 82^\circ 45'.1.$$

Man hat aber für $\varphi = 54^\circ 42' 50''$ und $\frac{1}{15}\tau = 4^h 9'$ nach den Tafeln auf Seite 199–202, und ebenso nach den Tafeln auf Seite 194–195:

$k = -17'' 53$	$B = 114^\circ 21'.4$	$B + \lambda + \tau = 197^\circ 6'.5$
$L_0 = 33^\circ 44' 31''$	$C = 357 14.3$	$C - \lambda - \tau = 274 29.2$
$l = 4.73054$	$lgb = 9.54952$	
	$lgc = 9.99581$	
	$lgn = 8.58706$	
	$f = 351^\circ 35'.7$	$lg \cos f = 9.99531$

Um die Vergrößerung des Mondshalbmessers zu finden, hat man:

$lg \sin \varphi = 9.91183$	$lg (\pi - p) = 3.55791$
$lg \sin \delta = 9.51373$	$lg \varrho = 2.99525$
$lg \sin \varphi \sin \delta = 9.42556$	$lg \sin 1'' = 4.68557$
$\sin \varphi \sin \delta = + 0.26642$	$lg (\pi - p) \varrho \sin 1'' = 1.23873$
$lg \cos \varphi = 9.76168$	$lg \cos z = 9.52544$
$lg \cos \delta = 9.97554$	$lg (\varrho' - \varrho) = 0.76417$
$lg \cos t = 9.10096$	$\varrho' - \varrho = + 5''.81$
$lg \cos \varphi \cos \delta \cos t = 8.83818$	$\varrho = 989.72$
$\cos \varphi \cos \delta \cos t = + 0.06889$	$\varrho' = 995.53$
$\sin \varphi \sin \delta = + 0.26642$	
$\cos z = + 0.33531$	
$lg \cos z = 9.52544$	

Es wird also $\varrho' = 995''.53$ und da $r = 946''.50$, so wird $D = 1942''.03$, also $lg D = 3.28826$ und damit hat man ferner:

$lg b - lg c = 9.55371$	$lg \sin \psi = 9.99765$
$lg n - lg D = 5.29880$	$lg D - lg n = 4.70120$
$lg \frac{bn}{cD} = 4.85251$	$lg \frac{D}{n} \sin \psi = 4.69885$
$lg l = 4.73054$	$\frac{D}{n} \sin \psi = + 13^{\circ} 53' 6''$
$lg \sin (B + \lambda + \tau) = 9.46862_n$	
9.05167_n	
Zahl. . . -0.112634	$lg l = 4.73054$
$lg k = 1.24378_n$	$lg \sin (C - \lambda - \tau) = 9.99867_n$
$lg \cos f - lg D = 6.70705$	$lg l \sin (C - \lambda - \tau) = 4.72921_n$
7.95083_n	$l \sin (C - \lambda - \tau) = - 14^{\circ} 53' 26''$
Zahl. . . 0.008930	Es ist aber:
$\cos \psi = - 0.103704$	$\tau - \frac{D}{n} \sin \psi = 48^{\circ} 21' 54''$
$lg \cos \psi = 9.01580_n$	$L = 33^{\circ} 28' 28''$
$\psi = 95^{\circ} 57'.2$	$L_0 = 33 \ 44 \ 31$
$lg \sin \psi = 9.99765$	$L_0 - L = + 0^{\circ} 16' 3''$
	$L_0 - L = + 963''$

Um die Werthe p und q zu bestimmen, hat man:

$lg l = 4.73054$	$lg l \sin 1'' = 9.41611$
$lg \sin 1'' = 4.68557$	$lg b - lg c = 9.55371$
$lg l \sin 1'' = 9.41611$	$lg \frac{b}{c} l \sin 1'' = 8.96982$
$lg \cos (C - \lambda - \tau) = 8.89336$	$lg \cotg \psi = 9.01815_n$
$lg p = 8.30947$	$lg \cos (B + \lambda + t) = 9.98034_n$
$p = + 0.02039$	$lg q = 7.96831$
	$q = + 0.00930$

$$1 - p + q = + 0.98891 \dots \quad lg = 9.99516$$

$$lg (L_0 - L) = 2.98363$$

$$lg \delta \tau = 2.98847$$

$$\delta \tau = + 0^{\circ} 16' 14''$$

$$\tau = 62 \ 15 \ 0$$

$$\tau_0 = 62^{\circ} 31' 14''$$

Wiederholt man nun die Rechnung mit diesem Werthe von τ_0 , so findet man:

$$B + \tau + \lambda = 197^\circ 22'.7$$

$$C - \tau - \lambda = 274 \quad 13.0$$

und damit wird:

$$\lg \sin(B + t) = 9.47521_n$$

$$\lg \frac{b n}{c D} \cdot l = 9.58305$$

$$\hline 9.05826_n$$

$$\text{Zahl} \dots - 0.114355$$

$$\hline + 0.008930$$

$$\cos \psi = -0.105425$$

$$\lg \cos \psi = 9.02294_n$$

$$\psi = 96^\circ 3'.1$$

$$\lg \sin \psi = 9.99757$$

$$\lg D - \lg n = 4.70120$$

$$\lg \frac{D}{n} \sin \psi = 4.69877$$

$$\frac{D}{n} \sin \psi = +13^\circ 52' 57''$$

$$\lg l = 4.73054$$

$$\lg \sin(C - \lambda - \tau) = 9.99882_n$$

$$\lg l \sin(C - \lambda - \tau) = 4.72936_n$$

$$l \sin(C - \lambda - \tau) = -14^\circ 53' 44''$$

Man hat also:

$$\tau = 62^\circ 31' 14''$$

$$l \sin(C - \lambda - \tau) = -14 \quad 53 \quad 44$$

$$- \frac{D}{n} \sin \psi = -13 \quad 52 \quad 57$$

$$L = 33^\circ 44' 33''$$

$$L_0 = 33 \quad 44 \quad 31$$

$$L_0 - L = -2''$$

Für diesen übrigbleibenden Fehler in L oder $-2''$, wird für die neue Verbesserung von τ , den Werth $\delta \tau = -2''$ erhalten, so dass also hiermit der wahre Werth von $\tau_0 = 62^\circ 31' 12''$ folgen wird; man hat daher $\frac{1}{15} \tau_0 = 4^h 10' 4'' 8$ in Zeit, womit also für das Ende der Finsterniss in Königsberg, folgen wird:

5^h 32' 5''.3 wahre Königsberger Zeit

und der Ort des Endes auf der Sonnenscheibe, vom Nordpunkte derselben ausgezählt, wird sein:

$$g = \psi - f = 104^\circ 27'.4$$

Um endlich die Zeit der grössten Phase sowie die Grösse dieser Phase für Königsberg vorzuberechnen, kann man nach Seite 226, $\frac{1}{15} \tau = 3^h 13'$ oder $\tau = 48^{\circ} 15'$ annehmen, wodurch also $t = \tau + \lambda = 68^{\circ} 45'.1$ werden wird. Bedient man sich alsdann bei dieser Rechnung der auf Seite 224 gegebenen Formeln, sowie der Tafeln auf Seite 194—202, so folgt: $L = 33^{\circ} 44' 3''$, $lg l = 9.73065$ und $C = 357^{\circ} 14'.9$, so dass also $C - \lambda - \tau = 288^{\circ} 29'.8$; und damit wird endlich:

$lg l = 4.73065$	$lg l \sin 1'' = 9.41622$
$lg \sin(C - \lambda - \tau) = 9.97699_n$	$lg \cos(C - \lambda - \tau) = 9.50140$
$lg l \sin(C - \lambda - \tau) = 4.70764_n$	$lg p = 8.91762$
$l \sin(C - \lambda - \tau) = -14^{\circ} 10' 8''$	$p = 0.08272$
$\tau = 48 \ 15 \ 0$	$1 - p = 0.91728$
$L = 34^{\circ} 4' 52''$	$lg(1 - p) = 9.96250$
$L_0 = 33 \ 44 \ 3$	$lg(L_0 - L) = 3.09656_n$
$L_0 - L = -20' 49''$	$lg \partial \tau = 3.13406_n$
$L_0 - L = -1249''$	$\partial \tau = -1362''$

$\tau = 48^{\circ} 15' 0''$	
$\partial \tau = -0 \ 22 \ 42$	
$\tau_0 = 47^{\circ} 52' 18''$	
$\tau + \lambda = 68 \ 22 \ .4$	
$C - \lambda - \tau = 288 \ 52 \ .5$	

$lg l = 4.73065$	
$lg \sin(C - \lambda - \tau) = 9.97600_n$	
$lg l \sin(C - \lambda - \tau) = 4.70665_n$	
$l \sin(C - \lambda - \tau) = -14^{\circ} 8' 12''$	
$\tau = 47 \ 52 \ 18$	
$L = 33^{\circ} 44' 6''$	
$L_0 = 33 \ 44 \ 3$	
$L_0 - L = -3''$	

Hieraus folgt die neue Correction $-3''$, und der wahre Werth von $\tau = 47^{\circ} 52' 15''$, und damit wird:

$$\pm D = \frac{b}{c} n l \sin(B + \lambda + \tau) - k \cos f$$

$\tau = 47^{\circ} 52' 3''$	$lg b = 9.54942$
$\lambda = 20 30 .1$	$lg c = 9.99585$
$\lambda + \tau = 68^{\circ} 22' .4''$	$lg b - lg c = 9.55357$
$B = 114 15 .4$	$lg n = 8.58687$
$B + \lambda + \tau = 182^{\circ} 37' .8''$	$lg l = 4.73065$
$lg k = 1.22401_n$	$lg \frac{b c}{n} l = 2.87109$
$lg \cos f = 9.99535$	$lg \sin(B + \lambda + \tau) = 8.66168_n$
$lg k \cos f = 1.21936_n$	$lg \frac{b c}{n} l \sin(B + \lambda + \tau) = 1.53277_n$
$k \cos f = -16'' .57$	$\frac{b c}{n} l \sin(B + \lambda + \tau) = -34'' .10$
$D = -34 .10$	
$D = +17'' .53$	
$lg \cos \varphi = 9.76168$	$lg (\pi - p) = 3.55791$
$lg \cos \delta = 9.97549$	$lg q = 2.99525$
$lg \cos t = 9.56644$	$lg \cos 1'' = 4.68557$
9.30361	$lg (\pi - p) \sin 1'' = 1.23873$
$lg \sin \varphi = 9.91183$	$lg \cos z = 9.67013$
$lg \sin \delta = 9.51418$	$lg (q' - q) = 0.90886$
9.42601	$q' - q = + 8'' .11$
$+ 0.26669$	$q = 989.46$
$+ 0.20119$	$q = 997.57$
$\cos z = + 0.46788$	$D = + 17.53$
$lg \cos z = 9.67013$	$q - D = 980.04$
$lg (q - D) = 2.99125$	
$lg 6 = 0.77815$	
$lg 6 (q - D) = 3.76940$	
$lg r = 2.97612$	
$lg \frac{6 (q - D)}{r} = 0.79328$	
$6 \frac{(q - D)}{r} = 6.2$	

Grösste Phase oder $m = 12.2$ Zoll.

Die grösste Phase wird hiernach also für Königsberg 12.2 Zoll betragen können, und zwar wird sie um $4^h 33' 29''.5$ wahre Königsberger Zeit stattfinden müssen; die Finsterniss wird also an diesem Orte gewiss total sein.

Bei der vorhergehenden Berechnung des Anfanges der Finsterniss für Königsberg auf Seite 230, wurde der Werth von τ zuerst hypothetisch = $34^\circ 15'$ angenommen, und dadurch sogleich der nahezu wahre Werth von τ , oder $\tau_0 = 32^\circ 5' 42''$ gefunden; es könnte daher scheinen, dass diese schnelle Aproximation nur deswegen erfolgte, weil der zuerst angenommene hypothetische Werth von τ , schon bis auf $2\frac{1}{4}^\circ$ mit der Wahrheit übereinstimmend, vorausgesetzt wurde. Der Uebersetzer hält es daher nicht für überflüssig, jetzt zu zeigen, dass eine beinahe ebenso schnelle Approximation bei der auf Seite 220–223 auseinander gesetzten Methode stattfinden wird, wenn man auch dabei den anfänglichen Werth von τ um mehr als dreizig Grad falsch voraussetzt. Wir wollen zum Beispiel annehmen, dass wir bei der Berechnung des Anfanges zuerst $\tau = 0^\circ$ angenommen hätten, alsdann würde man haben:

$$B + \lambda + \tau = 134\ 39'.6; \quad C - \lambda - \tau = 336\ 45'.5$$

$\lg \frac{b n}{c D} l = 9.58177$	$\lg l = 4.73079$
$\lg \sin(B + \lambda + \tau) = 9.85205$	$\lg \sin(C - \lambda - \tau) = 9.59617_n$
$\frac{b n}{c D} l \sin(B + \lambda + \tau) = 9.43382$	$\lg l \sin(C - \lambda - \tau) = 4.32696_n$
$+ 0.27153$	$l \sin(C - \lambda - \tau) = -5^\circ 53' 50''$
$+ 0.00867$	$\lg \frac{D}{n} = 4.70246$
$\cos \psi = +0.28020$	$\lg \sin \psi = 9.98225_n$
$\lg \cos \psi = 9.44747$	$\lg \frac{D}{n} \sin \psi = 4.68471_n$
$\psi = 286\ 16.3$	$\frac{D}{n} \sin \psi = -13^\circ 26' 24''$
$\lg \sin \psi = 9.98225_n$	

$$\tau = 0^{\circ} 0' 0''$$

$$l \sin (C - \lambda - \tau) = -5\ 53\ 50$$

$$-\frac{D}{n} \sin \psi = +13\ 26\ 24$$

$$L = 7^{\circ} 32' 34''$$

$$L_0 = 33\ 43\ 53$$

$$L_0 - L = +26^{\circ} 11' 19''$$

$$L_0 - L = +94279''$$

$$lg\ l\ \sin\ 1'' = 9.41636$$

$$lg\ l\ \sin\ 1'' = 8.96980$$

$$lg\ \cos (C - \lambda - \tau) = 9.96324$$

$$lg\ \cos (B + \tau + \lambda) = 9.84689_n$$

$$lg\ p = 9.37960$$

$$lg\ \cotg\ \psi = 9.46522_n$$

$$lg\ q = 8.28191$$

$$1 + q = +1.01914$$

$$p = +0.23966$$

$$1 - p + q = +0.77948$$

$$lg (1 - p + q) = 9.89181$$

$$lg (L_0 - L) = 4.97442$$

$$lg\ \partial\ \tau = 5.08261$$

$$\partial\ \tau = 120950''$$

$$\partial\ \tau = +33^{\circ} 35' 50''$$

$$\text{also } \tau_0 = 33^{\circ} 35' 50''$$

welcher Werth von τ schon bis auf $1\frac{1}{2}^{\circ}$ oder 6 Zeit-Minuten mit der Wahrheit übereinstimmt, so dass man bei einer nochmaligen Anwendung des obigen Verfahrens den ganz scharfen Werth von τ erhalten würde. Auf die nämliche Weise wie es hier gezeigt worden ist, wird man auch die Berechnung für irgend einen anderen Ort, dessen geographische Lage gegeben ist, durchführen können; der Uebersetzer glaubt daher hiermit die Berechnung der Finsterniss schliessen zu können, weil jede andere sich hierauf beziehende Aufgabe nach den auf Seite 189–236 gegebenen Rechnungsbeispielen, leicht zu bewerkstelligen sein wird.

Bestimmung der geographischen Länge durch Mondsculminationen.

187. Die nahezu centralen Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, liefern das beste allgemeine Mittel zur Längenbestimmung, welches für diejenigen Beobachter ganz besonders wichtig ist, denen die Apparate zu einer festen Aufstellung ihrer Instrumente fehlen. Aber diese Erscheinungen, ereignen sich nicht häufig genug, und der Reisende wird daher oft genöthigt sein, seine Zuflucht zu anderen Methoden zu nehmen; die bequemste unter diesen, besteht nun in der Beobachtung der geraden Aufsteigung des Mondes und heisst die Methode der Mondsculminationen.

Die gerade Aufsteigung des Mondes verändert sich so rasch, dass im Laufe zweier Zeitminuten, sie sich beinahe um $1'$ in Bogen ändert; wenn daher die geraden Aufsteigungen des Mondes an zwei verschiedenen Meridianen beobachtet werden, so wird man aus dem Unterschiede dieser geraden Aufsteigungen leicht auf die geographische Längendifferenz dieser beiden Meridiane schliessen können. Wir haben früher gesehen, dass die AR eines jeden Gestirnes gleich der Sternzeit beim Eintritte dieses Gestirnes in den Meridian ist, und dass man zur bequemsten Bestimmung dieser Zeit sich des Durchgangsinstrumentes bedient; stellt man es also im Meridiane auf, und beobachtet darauf die Zeit des Durchganges des Mondesrandes und eines Sternes, so kann man den Unterschied der Sternzeiten bei den Eintritten dieser beider Gestirne in den Meridian berechnen, und wenn man diesen Unterschied zur bekannten AR des Sternes zulegt, im Falle, dass der Stern dem Monde voranging, oder ihn von der AR des Sternes abzieht, wenn dieser später als der Mond

folgte, so erhält man die *AR* des Mondes. Damit aber die Instrumental-Fehler keinen merklichen Einfluss auf diese Bestimmung haben können, so wählt man zur Vergleichung mit dem Monde gewöhnlich einen ihm nahen Stern; die unbekannt kleinen Fehler des Instrumentes, verursachen alsdann beinahe ganz denselben Einfluss auf die beobachteten Zeiten des Durchganges des Mondes und des Sternes, so dass der aus diesen Beobachtungen berechnete Unterschied der Durchgänge beider Gestirne durch den Meridian, immer sehr wenig von den constanten Fehlern des Instrumentes abhängen wird. Im Berliner Astronomischen Jahrbuche und im Nautical Almanac wird der Ort des Mondes und die Oerter der in seiner Nähe gelegenen Sterne, für jeden Tag an welchem es möglich ist den Mond zu beobachten, angegeben; solche Sterne selbst, heissen *Mondssterne*, und meistens werden viere in den Ephemeriden so aufgeführt, dass zwei dem Mondsrande vorangehen, und zweier später als der Mond folgen, ausserdem haben zwei noch gewöhnlich eine etwas grössere Declination, und die übrigen zwei eine etwas kleinere, als der Mond. Der Zweck dieser Anordnung besteht darin, hierdurch wo möglich, den Einfluss der Instrumental-Fehler und die Unsicherheit im Gange der Uhr, auf die endliche Ableitung der *AR* des Mondes, so viel wie möglich zu verkleinern.

*Von der Art und Weise diese Beobachtungen anzustellen
und von der Berechnung der Fädenintervalle.*

188. Man berichtigt das Instrument sehr sorgfältig, wobei man es ganz fest und so nahe wie möglich, in der Ebene des Meridianes selbst aufstellt, und darauf:

1^{stens} Bestimmt man die Lage des Instruments mit Hülfe des Niveaus und beobachtet nach Umständen, zwei Funda-

mental-Sterne, von denen einer nahe am Pole des Aequators, der andere aber eine kleine Declination hat; oder zwei Circumpolar-Sterne in entgegengesetzten Culminationen; es müssen überhaupt hierbei alle Vorschriften befolgt werden, die wir früher bei Gelegenheit der Zeitbestimmung durch das Durchgangsinstrument erwähnt haben; ausserdem aber muss man dafür sorgen, dass diese Beobachtungen nicht gar zu lange vor dem Durchgange des Mondes durch den Meridian selbst, angestellt werden.

2^{tes} Muss man ohne die Lage des Instruments zu ändern, die dem Monde vorangehenden Sterne, den Mondrand selbst, und endlich die nachfolgenden Monds-Sterne beobachten.

3^{tes} Hierauf wird man ohne die Lage des Instrumentes zu ändern, das Niveau ablesen, und bald nach der Meridianpassage des Mondes, ein neues Paar Sterne ähnlich wie in (1) beobachten.

Den Collimationsfehler muss man entweder vor oder nach allen hier erwähnten Beobachtungen erforschen; ist aber der Beobachter überzeugt, dass sein Instrument längere Zeit denselben Collimationsfehler beibehält, so kann er zur Reduction der Beobachtungen den Collimationsfehler brauchen, welcher sich aus den Beobachtungen am vorhergehenden und folgenden Tage ableiten lässt.

Der Gang der Uhr, mit welchem man die beobachteten Zwischenzeiten in Sternzeit-Intervalle verwandeln kann, lässt sich sehr bequem aus den beobachteten Intervallen derselben Sterne einen Tag vor und einen Tag nach der Mondsbeobachtung ableiten.

Durch eine solche Anordnung der Beobachtungen, erhält man nicht allein alles was zur Berechnung der Mondsculmination nöthig ist, sondern auch alles, wodurch man die Unveränderlichkeit des Instrumentes während der Beobachtungen beurtheilen kann, welches eine der Hauptbedingungen für die Zuverlässigkeit des gesuchten Resultates ist.

Wir haben schon einige Male erwähnt, dass Fernröhre von verschiedener optischer Kraft, den Werth des Mondshalbmessers auch verschieden darstellen; bei der Berechnung aber braucht man immer denjenigen Werth des Mondshalbmessers, den man in der Ephemeride findet; und deswegen wird man bei der Ableitung der Länge aus Mondsculminationen stets einen unvermeidlichen Fehler begehen; man muss nun um genauere Resultate zu erhalten, eine solche Beobachtungsreihe vollenden, dass dieser Fehler zuweilen auf der einen, und zuweilen auf der entgegengesetzten Seite wirkt; und dieses dadurch erreichen, dass man beide Ränder des Mondes beobachtet, oder Beobachtungen vor und nach dem Neumonde anstellt. Ferner muss der Beobachter seine ganze Sorgfalt darauf lenken, dass der scheinbare Werth des Mondshalbmessers, nicht noch etwa durch eine in optischer Beziehung mangelhafte Berichtigung des Fernrohres vergrößert wird; man hat nämlich darauf zu achten, dass das Ocular ganz genau auf dem Focus gestellt wird, damit im Gesichtsfelde des Fernrohres, der Mond und die Fäden, sich vollkommen deutlich und scharf begrenzt darstellen. *)

189. Wir haben in §. 115—121. Seite 314—331. Band I die Methode angegeben, wie man aus der beobachteten Meridianpassage eines Sternes seinen Durchgang durch den Meridian selbst ableiten kann, und wollen nun hier zeigen wie man die Beobachtungen des Mondes auf den Meridian reduciren kann, wobei aber angenommen werden soll, dass das Instrument sehr nahe in dieser Ebene aufgestellt ist.

Diese Beobachtungen des Mondes bestehen darin, die Zeiten zu notiren, wenn der eine oder der andere seiner Ränder an die verschiedenen Fäden des Instrumentes tritt; der west-

*) Anwendung des Durchgangs-Instrumentes, für die geographische Ortsbestimmung von T. G. W. Struve. St. Petersburg. 1833.

liche (oder I^{te}) Rand geht dabei früher, der östliche (oder II^{te}) Rand aber, später als das Mondscentrum durch die Ebene des Meridianes. Es sei l die Reduction eines Seitenfadens auf den Mittelfaden in Sternzeitsecunden ausgedrückt; f das entsprechende Fädenintervall, ebenfalls in solchen Secunden ausgedrückt; δ die wahre Declination des Mondscentrums, und z, z' , die wahre und scheinbare Zenithdistanz des Mondscentrums, dann haben wir nach §. 110. Seite 303–305. Band I:

$$l = (1 + \lambda') \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot f \sec \delta,$$

wo λ' die in Zeitsekundenbruch ausgedrückte Zunahme der wahren geraden Aufsteigung des Mondscentrums im Laufe einer Chronometersecunde bedeutet.

Nach dieser Formel kann man nun jeden einzelnen Faden auf den Mittelfaden reduciren und das arithmetrische Mittel aus allen so reducirten Antritten des Mondes, auf den Mittelfaden, giebt uns die wahrscheinliche Zeit des Antrittes des Randes an diesen Fäden. Wenn übrigens die Beobachtungen an allen Fäden angestellt werden, und diese Fäden in gleicher Zahl symmetrisch zu beiden Seiten des Mittelfadens gelegen sind, so kann man alsdann die wahrscheinliche Zeit des Durchganges des Mondsrandes durch den Mittelfaden mit genügender Genauigkeit erhalten, wenn man das arithmetische Mittel aus den Antritten an allen Fäden nimmt, und hierzu die Correction zulegt, welche von der ungleichen Entfernung der Fäden untereinander abhängt, ebenso wie wir es in §. 112. Seite 310. Band I. erläutert haben.

Wir wollen nun zeigen wie man die auf den Mittelfäden gebrachten Antritte des Mondsrandes auf den Meridian selbst reducirt. Es sei dazu der Stand des Instrumentes, durch die Werthe M, N und C , deren Bedeutungen schon oben in §. 108. Seite 298. Band I. erklärt wurden, bestimmt, und es

seien α und δ , die wahren, α' und δ' die scheinbaren geraden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondscentrums zur Sternzeit s , in welcher der Mondsrnd an den Mittelfaden trat; es sei π die Aequatorial-Parallaxe des Mondes, h der wahre oder geocentrische, und h' der scheinbare Halbmesser des Mondes; d und d' die liniären Entfernungen des Mondscentrums von Erdsentrum, und vom Orte des Beobachters. Nahe am Meridiane sind M , N und C sehr kleine Bögen, deren Cosinusse wir also gleich $= 1$ setzen können; anstatt ihrer Sinusse, wollen wir aber die Bögen selbst nehmen; verwandeln wir alsdann α , s , M , N und C in Zeit, so erhalten wir die Bögen $M = 15 m$, $N = 15 n$, $C = 15 c$, und haben dann nach §. 110. Seite 301. Band I:

$$\frac{d'}{d} \left(c \pm \frac{h'}{15} \right) = -n \sin \delta + n \sin \pi \sin \varphi' - (m + s - \alpha) \cos \delta + \\ + m \sin \pi \cos \varphi' \dots \dots \dots (\text{C})$$

wo φ' die geocentrische Breite des Ortes ausdrückt, und bei h' , alsdann (+) gebraucht wird, wenn der westliche oder (I^{te}) Rand, dagegen (−) wenn der östliche oder (II^{te}) Rand beobachtet wurde. Aus den früher erhaltenen Gleichungen §. 110. Seite 301. Band I. erschen wir, dass:

$$\frac{d'}{d} \sin \delta' = \sin \delta - \sin \pi \sin \varphi',$$

und ebenso hat man ferner in der Nähe des Meridianes, wenn $s^0 - \alpha^0$ und $s^0 - \alpha^0$ sehr kleine Bögen sind §. 110. Seite 301:

$$\frac{d'}{d} \cos \delta' = \cos \delta - \sin \pi \cos \varphi';$$

Nun wissen wir aber nach §. 10. Seite 21. Band I. dass $h : h' = d' : d$; folglich erhält man aus der obigen Gleichung (C):

$$\frac{d'}{d} c \pm \frac{h}{15} = -n \frac{d'}{d} \sin \delta' - m \frac{d'}{d} \cos \delta' - (s - \alpha) \cos \delta;$$

so dass man endlich folgende Gleichung haben wird:

$$\alpha = s \pm \frac{h}{15} \sec \delta + \frac{d'}{d} \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m);$$

Sehr nahe am Meridiane, wird aber $\frac{d'}{d} \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} = 1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta$, oder beinahe $= 1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta'$ sein; folglich:

$$\alpha = s \pm \frac{h}{15} \sec \delta + (1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta') (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m)$$

Dieses ist die wahre AR des Mondcentrums zur Zeit des Antrittes des Mondrandes an den Mittelfaden; um daher α_0 oder die wahre AR des Mondcentrums zur Zeit zu finden, als der Mondrand den Meridian selbst passirte, muss man zu α die Zunahme der AR des Mondes im Laufe der Zeit zulegen, in welcher der Mondrand den östlichen Stundenwinkel zwischen dem Mittelfaden und dem Meridiane beschrieb; bezeichnet man nun der Kürze halber diesen Winkel durch τ , so wird $\tau = \left(\alpha \mp \frac{h}{15} \sec \delta \right) - s$, und wenn λ die in Zeit ausgedrückte Zunahme der geraden Aufsteigung des Mondes in einer Sternzeitsecunde bedeutet, so wird offenbar $\alpha_0 = \alpha + \lambda \tau$, oder:

$$\alpha_0 = s \pm \frac{h}{15} \sec \delta + (1 + \lambda) (1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta') (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m),$$

wo $+h$, sich auf den westlichen beobachteten Mondstrand, und $-h$ sich auf den östlich beobachteten bezieht.

Aus dem eben gesagten, lassen sich nun alle practischen Vorschriften bei der Berechnung ableiten.

Es sei: $\left(\alpha_0 \mp \frac{h}{15} \sec \delta\right) = a$, so wird dieses a die gerade

Aufsteigung des Mondstrand es im Meridiane ausdrücken, oder mit anderen Worten, ist $a =$ *der Sternzeit der Culmination des Mondstrand es*; daher ist auch $a - s$ nichts anderes, als *die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian*; und folglich wird: *diese Reduction für den Mond*

$$= (1 + \lambda)(1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta')(c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m).$$

Legt man diesen Werth zu s oder zur Sternzeit der Beobachtung am Mittelfaden hinzu, so erhält man die gerade Aufsteigung des Mondstrand es zur Zeit seiner Culmination selbst; vernachlässigt man aber bei der Reduction, den Factor $(1 + \lambda)$, so findet man die gerade Aufsteigung des Mondstrand es zur Sternzeit s .

Nimmt man jetzt an, dass t die Zeit der Beobachtung des Mondstrand es nach dem Chronometer ist; und u die Reduction dieser Chronometerzeit auf die Sternzeit s , so dass $s = t + u$, und setzt man:

$$t + (1 + \lambda)(1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta')(c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m) = T;$$

so wird alsdann:

$$a = T + u$$

Bezeichnet man nun durch t_* die Angabe des Chronometers bei der Beobachtung des Mondsternes am Mittelfaden, und durch $u + \Delta u$ die Grösse, welche man zu t_* hinzulegen muss um Sternzeit zu erhalten, so haben wir alsdann:

$$t_* + c \sec \delta_* + n \operatorname{tg} \delta_* + m = T_*$$

und also wird:

$$\alpha_* = T_* + u + \Delta u,$$

wo α_* die gerade Aufsteigung und δ_* die Abweichung des Sternes bezeichnet. Hieraus findet man nun:

$$a = \alpha_* + T - T_* - \Delta u.$$

Hier bezeichnet Δu die Voreilung des Chronometers gegen Sternzeit im Laufe der Zeit $t - t_*$; wenn aber der tägliche Gang des Chronometers bekannt ist, so wird Δu ebenfalls bekannt sein, und hat man alsdann α_* , so kann man die gerade Aufsteigung des Mondsrades finden, ohne irgendwie die Sternzeit der Beobachtung selbst, mehr nöthig zu haben. Berechnet man auf diese Weise a mit Hülfe eines jeden Sternes und nimmt das Mittel aus den erhaltenen Reductionen, so kann man als Endresultat die wahrscheinlichste gerade Aufsteigung des Mondsrades finden.

Berechnung der geographischen Länge aus der Beobachtung von Mondculminationen.

190. Man bestimmt unmittelbar aus den Beobachtungen, welche an irgend zwei Orten der Erde angestellt worden sind, die AR des Mondsrades, um aber die geographische Längendifferenz dieser beiden Orte berechnen zu können, muss man zuerst immer die wahre AR des Mondscentrums für die Zeiten der Beobachtung finden; denn der Unterschied dieser AR hängt nur von der Bewegung des Mondscentrums in AR ab, welche gerade zur Auflösung dieser Aufgabe dient; jener

Unterschied der *AR* des Randes dagegen, hängt noch ausserdem von der Veränderung des Halbmessers des Mondes, und von der Veränderung seiner Declination ab.

Nehmen wir nun an, dass zur Zeit unserer Beobachtung der wahre Winkel-Halbmesser des Mondes = h , die wahre Declination des Mondscentrums aber = δ sei, so findet man, dass:

$$AR \text{ des } \odot \text{ Centrums} = AR \text{ des } \odot \text{ Randes} \pm \frac{h}{15} \sec \delta$$

wo, wie schon oben bemerkt wurde, das Zeichen (+) sich auf den beobachteten westlichen Rand, das Zeichen (-) aber sich auf den Ost-Rand bezieht.

Wenn an dem Tage der Beobachtung, die Culmination des Mondes an keiner guten Sternwarte beobachtet wurde, so muss man alsdann die geographische Länge des Beobachtungsortes mit Hilfe der Mondstafeln ableiten, oder noch bequemer dazu die Tafeln brauchen, welche in dem Berliner Astronomischen Jahrbuche oder in dem Nautical Almanac für die *AR* des Mondscentrums gegeben werden. Hieraus muss man alsdann die mittlere Berliner oder Greenwicher Zeit finden, zu welcher die wahre *AR* des Mondscentrums genau gleich dem aus unseren Beobachtungen gefundenen Werthe war; der Unterschied zwischen dieser mittleren Berliner oder Greenwicher Zeit und der mittleren Zeit unserer Beobachtung, giebt uns alsdann die geographische Länge des Beobachtungsortes von Berlin oder von Greenwich, ausgezählt. Die Fehler der Mondstafeln können jedoch zuweilen ziemlich bedeutende Fehler in der hergeleiteten Länge hervorbringen, und daher wird es, wenn es möglich sein sollte, stets weit besser sein, die Beobachtungen nicht direct mit den Tafeln, sondern mit den Beobachtungen des Mondes zu vergleichen, welche an demselben Tage als jene, an irgend

einem anderen Orte der Erde gemacht wurden, dessen Länge genau bestimmt ist; noch weit vortheilhafter ist es jedoch, mehrere gute gleichzeitige Beobachtungen zu gebrauchen.

Nicolai's Methode. Es seien $\alpha \mathcal{C}$ und α_* die wahre gerade Aufsteigung des Mondscentrums und des mit dem Monde verglichenen Sternes; nimmt man dabei an, dass der Stern um den Zeitraum τ in Sternzeit ausgedrückt, früher durch unseren Meridian als der Mondstrand ging, so erhält man:

$$\alpha \mathcal{C} = A_* + \tau \pm \frac{h}{15} \sec \delta;$$

wo h und δ sich auf die beobachtete Culminationszeit des Mondes beziehen. In einen jeden anderen Meridian, wird der Stern genau um dieselbe Sternzeit A_* eintreten, welche gleich der unveränderlichen geraden Aufsteigung des Sternes ist; aber die Sternzeit des Durchganges des Mondscentrums durch diesen neuen Meridian wird eine andere werden; denn zu Folge der eigenen Bewegung des Mondes in AR, wird er diesen neuen Meridian nicht um das frühere Sternzeit-Intervall τ später als der Stern passiren, sondern um ein anderes Intervall τ' später durch den Meridian gehen; bezeichnet man daher durch $\alpha' \mathcal{C}$, δ' und h' für diesen zweiten Meridian zur Zeit der beobachteten Culmination ganz dasselbe, wie früher durch $\alpha \mathcal{C}$, δ und h für unseren Beobachtungsort, so wird alsdann:

$$\alpha' \mathcal{C} = A_* + \tau' \pm \frac{h' \sec \delta'}{15}$$

Liegt nun der Beobachtungsort westlich vom Orte ab, an welchem die entsprechenden Beobachtungen gemacht wurden, so wird $\alpha \mathcal{C} > \alpha' \mathcal{C}$ und $\tau > \tau'$, setzt man darauf $\alpha \mathcal{C} - \alpha' \mathcal{C} = \Theta$, so wird:

$$\Theta = \tau \pm \frac{h \sec \delta}{15} - \left(\tau' \pm \frac{h' \sec \delta'}{15} \right).$$

Es sei l der gesuchte und in Zeit ausgedrückte Unterschied zwischen den geographischen Längen des 1^{sten} und 2^{ten} Beobachtungsortes; veränderte sich nun die AR des Mondes gar nicht; so würde der Mond vom 1^{sten} Meridiane zum 2^{ten} in einem Sternzeit-Interval $= l$ gelangen, da aber der Mond sich fortwährend von Westen nach Osten bewegt, so wird er den zweiten oder westlicheren Meridian, später als durch die Sternzeit l erreichen, und namentlich um eben so viel als sich seine gerade Aufsteigung vergrößert hat, d. h. der Mond wird an den westlicheren Meridian nach Verlauf des Sternzeit-Intervalles $l + \Theta$ später, als an den ersten oder mehr östlichen Meridian treten. Hieraus sieht man leicht ein, dass Θ die Zunahme der geraden Aufsteigung des Mondes im Laufe der Sternzeitstunden $l + \Theta$ ist; folglich wird k_* oder die Aenderung der AR des Mondes in einer Sternstunde $= \frac{\Theta \cdot 1^h}{(l + \Theta)^h}$ werden. In den astronomischen Ephemeriden, werden jetzt die geraden Aufsteigungen des Mondes durch gleiche mittlere Zeitintervalle angegeben, aber früher wurden sie durch gleiche wahre Zeitintervalle gegeben; es sei daher überhaupt 1 Sternstunde $= \frac{1^h}{w}$ Sonnenzeit, wo $w = 1.00274$, wenn es sich um mittlerer Zeit handelt, und $w = \frac{86400^h + \mu}{86400^h}$ wenn es sich um wahre Zeit handelt, wobei angenommen ist, das μ die Aenderung der geraden Aufsteigung der Sonne in einem wahren Tage bedeutet. Nehmen wir dann an, dass k die Aenderung der geraden Aufsteigung des Mondscentrums in einer Sonnenstunde bezeichnet, und dass diese Stunde genau in die Mitte der Epoche der Beobachtungen am 1^{sten} und 2^{ten} Meridiane

liegt; so erhält man, wenn alles in Secunden ausgedrückt wird:

$$\frac{k}{w} = k_* = \frac{\Theta \cdot 3600''}{(l + \Theta)''}, \text{ woraus folgt, dass}$$

$$l = \Theta \left\{ \frac{3600'' \cdot w}{k} - 1 \right\}$$

Sollten in der astronomischen Ephemeride die geraden Aufsteigungen des Mondes in Graden angegeben sein, so wird der vorhergehende Ausdruck, sich in folgenden verwandeln:

$$l = \Theta \left(\frac{15 \cdot 3600'' \cdot w}{K} - 1 \right)$$

wo K die in Bogensekunden ausgedrückte Veränderung der geraden Aufsteigung des Mondscentrums in einer Sonnenstunde bezeichnet.

Diese Methode ist alsdann sehr bequem zur Berechnung der Länge eines Ortes, wenn diese ganz und gar nicht bekannt ist, oder auch in demjenigen Falle, wenn entsprechende Beobachtungen nur an einem Observatorium gemacht wurden. Aber in dieser Methode liegt eine kleine Ungenauigkeit, denn sie setzt die Bewegung des Mondes in AR als constant voraus und gleich dem Werthe dieser Bewegung in der Mitte des Zeitintervalles, zwischen den Beobachtungen unter den zwei zu vergleichenden Meridianen; wenn jedoch das Zeitintervall sehr gross ist, zum Beispiel 5^h oder 6^h , so wird dieses gewiss einen Fehler hervorbringen. Wir wollen daher hier zeigen, wie dieser Fehler vermieden werden kann. Es seien t und t' die mittleren Zeiten der Beobachtung an zwei Punkten auf der Erde, deren einer die genähert bekannte westliche Länge von Greenwich $= l$ hat, und der andere um die Länge l' westlich von Greenwich gelegen ist; alsdann berechnet

man für die mittleren Greenwicher Zeiten $t + l$ und $t' + l'$ nach strenger Interpolation die geraden Aufsteigungen des Mondes α und α' ; so hat man $k = \frac{\alpha' - \alpha}{t' + l' - (t + l)}$, welches der Werth sein wird, den man statt k in der früheren Formel brauchen muss, um die genaue Ableitung zu erhalten; hierbei ist es aber nöthig, dass der Fehler in der angenommenen Länge l nicht 5 Zeitminuten übersteige.

191. Wünscht man aber bei der Auffindung der Länge eines Ortes alle entsprechenden Beobachtungen, die an verschiedenen guten Sternwarten an demselben Tage mit den unserigen gemacht wurden, zu benutzen, so ist es in diesem Falle viel besser die Rechnung nach Struve's Methode zu führen, die vollkommen genau ist und darin besteht, dass man zuerst den Fehler der Tafeln, mit Hülfe der Beobachtungen, die an guten Sternwarten angestellt wurden, verbessert, und darauf die genaue Länge des zu bestimmenden Ortes sucht, indem die genäherte, immer als bekannt vorausgesetzt wird.

Es ist gleichgültig welche gerade Aufsteigungen der Mondssterne man bei der Berechnung des geographischen Längenunterschiedes anwendet; sie müssen nur nahezu richtig sein, und für jeden einzelnen Stern, muss eine für alle correspondirende Beobachtungsorte gemeinschaftliche AR dieses Sternes gewählt werden; so kann man entweder diejenigen AR der Sterne annehmen, welche im Nautical Almanac und im Berliner Astronomischen Jahrbuche gegeben sind, oder noch besser das Mittel aus den Beobachtungen derselben nehmen, welche am Beobachtungstage an verschiedenen guten Sternwarten gemacht werden. Vergleicht man die angenommene und die beobachtete AR eines jeden Sternes mit einander, so erhält man für jeden Beobachtungsort die entsprechende Abweichung; die Mittelzahl solcher bei verschiedenen

Sternen stattfindenden Abweichungen, an die an jenem Orte beobachtete AR des Mondes mit dem richtigen Zeichen angebracht, wird diejenige AR des Mondes geben, welche im Einklange mit den angenommenen geraden Aufsteigungen der Vergleichssterne ist, und welche bei der Rechnung angewandt werden muss.

Die Längen der verschiedenen Beobachtungsorte, werden wir vom Meridiane der astronomischen Ephemeride abzählen, welche wir bei unserer Berechnung brauchen, und ferner die Länge eines Beobachtungsortes, als positiv annehmen, wenn er westlich vom Meridiane der Ephemeride abliegt. Wir nehmen an, dass τ die verbesserte Sternzeit der Culmination des Mondsrandes ist, und zwar an dem zu bestimmenden Punkte, dessen uns bekannte genäherte Länge; L heissen mag, die genaue gesuchte, soll aber durch $L + x$ bezeichnet werden; es seien ebenso τ' , τ'' . . . die verbesserten Sternzeiten der Culmination des Mondes an verschiedenen Sternwarten, deren genaue Längen wir durch L' , L'' , u. s. w. ausdrücken wollen. Wenn die gebrauchte astronomische Ephemeride, die Oerter des Mondscentrums für verschiedene Epochen der mittleren Zeit giebt, so kann man mit Hülfe der Längen L , L' , L'' , . . . und der erwähnten Sternzeiten τ , τ' , τ'' . . . die mittleren Zeiten T , T' , T'' berechnen, welche unter dem Meridiane der Ephemeride in Momente der Beobachtung des Mondsrands an den gegebenen Orten, gezählt wurden.

Alsdann berechnet man sich für diese Zeiten T , T' , T'' , aus der Ephemeride, die wahren geraden Aufsteigungen des Mondscentrums A , A' , A'' und die wahren Halbmesser des Mondes h , h' und h'' , durch strenge Interpolation bis auf eine Genauigkeit von einigen Hunderttheilen einer Secunde in Bogen; und bestimmt ausserdem noch die entsprechenden wahren Declinationen des Mondscentrums δ , δ' , δ'' , aber nur genähert bis auf ein Zehnteltheil einer Minute, so erhält

man, um den Fehler der vorausgesetzten Länge L zu erforschen, und zur Auffindung des Fehlers der Mondstafeln in AR, folgende Bedingungsgleichungen:

$$A = \tau \pm \frac{h}{15 \cos \delta}; \quad A' = \tau' \pm \frac{h'}{15 \cos \delta'}; \quad A'' = \tau'' \pm \frac{h''}{15 \cos \delta''}$$

wo; A, A', A'' in Zeit ausgedrückt sind; wenn man alles in Bogen haben will, so wird:

$$A = 15\tau \pm \frac{h}{\cos \delta}; \quad A' = 15\tau' \pm \frac{h'}{\cos \delta'}; \quad A'' = 15\tau'' \pm \frac{h''}{\cos \delta''}, \text{ u.s.w.}$$

Die Werthe $A, A', A'' \dots, h, h', h'' \dots$ und $\delta, \delta', \delta'' \dots$ sind aus der Berechnung; die Werthe τ, τ', τ'' dagegen, aus der Beobachtung bekannt. Wenn nun die Mondstafeln, ganz richtig, die geographischen Längen $L, L', L'' \dots$ ganz genau und die Beobachtungen fehlerfrei wären, so würden die vorhergehenden Gleichungen vollständig erfüllt werden, aber dieses wird niemals der Fall sein, und wir werden finden, dass die Grössen A, A', A'' , nicht mit dem zweiten Theile der Gleichung identisch sein werden; um aber diese Gleichheit herbeizuführen, wollen wir anstatt A, A', A'' , die Werthe $A + \delta A, A' + \delta A', A'' + \delta A''$ annehmen, wo $\delta A, \delta A', \delta A''$ die gesuchten Fehler in den Werthen A, A', A'' sind. Da die kleinen Fehler der Beobachtungen nicht weiter zu bestimmen sind und daher als verschwindend angenommen werden müssen, so kann man $\delta A, \delta A', \dots$ als die Tafelfehler des Mondes betrachten. Was aber δA betrifft, so hängt diese Grösse nicht nur davon ab, dass die Tafeln einen Fehler haben, sondern auch davon, dass wir vorher noch nicht die genaue Länge $L + x$ kennen, und bei der Berechnung von A die genäherte Länge L gebraucht haben; dadurch erhält man nämlich den Werth von A nicht für die Mondculmination,

sondern für eine andere Zeit, die von der Culminationszeit um x Secunden in Zeit verschieden ist; bezeichnet man daher die Bewegung des Mondcentrums in AR in einer Sternzeitsecunde durch λ , so wird der von einer unrichtig angenommenen Länge herrührende Fehler in A gleich $\lambda \cdot x$ werden. Wenn die Sternwarten, wo die correspondirenden Beobachtungen angestellt wurden, weder sehr weit von einander, noch von dem zu bestimmenden Beobachtungsorte abliegen, so dass die Längenunterschiede nicht über 2 bis 3 Stunden betragen, dann kann man annehmen, dass der Fehler der Mondstafeln im Laufe dieses kurzen Zeitraumes sehr nahe constant bleibt, und folglich, dass die Mittelzahl aus den Werthen $\partial A'$, $\partial A''$ u. s. w. den wahrscheinlichen Tafelfehler bestimmt, welchen wir durch $\partial \alpha$ bezeichnen wollen; nimmt man nun an, dass $\partial \alpha$ in Zeitsecunden ausgedrückt ist, so erhält man zur Bestimmung des Fehlers in der angenommenen Länge $= x$, folgende Gleichung:

$$\partial A = \lambda \cdot x + \partial \alpha = r \pm \frac{h}{15 \cos \delta} - A;$$

woraus folgt, dass:

$$x = \frac{\left(r \pm \frac{h}{15 \cos \delta} - A \right) - \partial \alpha}{\lambda}$$

ist; alsdann wird die wahrscheinliche Länge des Beobachtungsortes $= L + x$ sein.

Wenn aber die Längen L , L' , L'' , . . . sehr verschieden von einander sind, so darf man nicht annehmen, dass der Fehler der Mondstafeln in allen Beobachtungen constant bleibt; doch kann man in diesem Falle mit hinlänglicher Annäherung annehmen, dass der Tafelfehler im Laufe eines

Tages sich der Zeit proportional ändert, und dass man also den Tafelfehler in der *AR* des Mondes zur Zeit der Beobachtung, an dem zu bestimmenden Orte der Erde, durch Interpolation zwischen den Werthen finden kann, die dieser Tafelfehler einen Tag vor, oder nach der erwähnten Beobachtung und an dem Beobachtungstage selbst hatte.

Beispiel. Am 24^{sten} September 1836, wurde die Culmination des Mondes zu Novotscherkask beobachtet, zu welcher sich entsprechende Beobachtungen in Dorpat und Greenwich finden; hierbei wollen wir noch einige Worte über die Reihenfolge der Beobachtungen sagen.

Die Zeit der Culmination des Mondes zu Novotscherkask war am 24^{sten} September 1836, beinahe um $0^h 8'$ Sternzeit; dem gemäss wurden zwei Sterne α *Pegasi* und γ *Cephei* zur Bestimmung des Standes des Instrumentes gewählt, welche nicht lange von der Culmination des Mondes im Meridian beobachtet wurden; der letztere Stern, hat ungefähr $76^\circ 43'$ nördliche Declination, und konnte daher als ein Polarstern betrachtet werden. Nach der Culmination des Mondes wurde bei ganz derselben Lage des Instrumentes, zuerst β *Ceti* und α *Ursae Minoris* an den drei ersten Fäden des Instrumentes beobachtet, aber darauf umgelegt und α *Ursae Minoris* in dieser neuen Lage des Instrumentes an den beiden letzten Fäden wieder beobachtet; hierdurch wurde der Collimationsfehler abgeleitet; die Angabe des Niveaus an der horizontalen Umdrehungsachse, wurde mehrere Mal abgelesen, so dass folglich der Stand des Durchgangs-Instrumentes vor und nach der Mondsculmination vollkommen bestimmt war. Der Kürze halber wollen wir nicht alle sich hierauf beziehenden Beobachtungen und Berechnungen anführen, sondern gleich die Mittelwerthe geben, wie sie für die Culminationszeit des Mondes, nach den in der Theorie des Passagen-Instrumentes erklärten Methoden gefunden wurden; es fand sich, dass:

$$i = + 0'.30; n = + 2''.00 \text{ und } c = + 0''.14,$$

alles in Zeit, waren.

Die Breite des Beobachtungsortes war $= \varphi = 47^{\circ} 24'.2$; folglich erhält man:

$$m = - n \operatorname{tg} \varphi + i \operatorname{sec} \varphi = - 1'.73 \text{ in Zeit.}$$

Bei den Beobachtungen wurde ein Chronometer gebraucht, welches täglich gegen mittlere Sonnenzeit um $4''.92$ voreilte, oder sich also um $3^h 51''.63 = 231''.63$ Sternsecunden in jedem Tage gegen Sternzeit verspätete; um $11^h 19' 40''.92$ Chronometerzeit, war der Uhrcorrection dieses Chronometers $= + 12^h 48' 24''.19$, welche zu der Chronometerzeit zugelegt werden muss, um die genaue entsprechende Sternzeit zu erhalten.

Wir wollen jetzt die beobachtete Mondsculmination und die Beobachtungen der Mondsterne, mit welchen noch β Ceti verbunden wurde, hier anführen; die Durchgänge dieser Sterne und des Mondes würden an allen 5 Fäden beobachtet, der Raumersparniss wegen, wollen wir jedoch, in der folgenden Tafel, nur den Durchgang der Gestirne durch den Mittelfaden im Mittel angeben.

Gestirne	an dem Mittelfaden nach Chronometerzeit	Reduction auf den Meridian	Uhrfehler bei der Beobachtung am Mittelfaden
p Piscium	$11^h 1' 59''.82$	$- 1'.748$	$+ 12^h 48' 21''.34$
s Piscium	$11 8 38 .66$	$- 1 .825$	$+ 12 48 22 .38$
II ^{ter} Mondstrand	$11 19 40 .68$	$- 1 .758$	$+ 12 48 24 .19$
β Ceti	$11 46 58 .10$	$- 2 .270$	$+ 12 48 28 .54$
δ Piscium	$11 51 45 .72$	$- 1 .357$	$+ 12 48 29 .37$

Die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian, wurde für die Sterne; nach der Formel: $+ c \operatorname{sec} \delta + n \operatorname{tg} \delta + m$ be-

rechnet; was aber die Reduction der Mondsbeobachtung betrifft, so muss bemerkt werden, dass die genäherte östliche Länge des Beobachtungsortes von Greenwich, oder $L = 2^h 40^m 5$ war, und da wir für die mittlere Zeit der Beobachtung des Mondes zu Novotscherkask $11^h 53^m 10^s.8$ erhalten; so wird folglich die entsprechende genäherte Greenwich - Zeit $= 9^h 12^m 40^s.8$ sein; hierfür findet man aus dem Nautical Almanac die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes $0^{\circ} 58'$; und die wahre Declination $= -2^{\circ} 56'$; wo (—) bedeutet, dass die Mondsdeclination südlich, die Breite des Ortes aber nördlich, also ungleichnamig war; die geographische Breite des Beobachtungsortes, ist schon oben angegeben worden $= \varphi = 47^{\circ} 24'.2$; die dieser entsprechende geocentrische Breite des Ortes wird $= \varphi' = 47^{\circ} 13'$, und die wahre Meridian-Zenithdistanz des Mondscentrums vom geocentrischen Zenithe $= z = \varphi' - \delta = 50^{\circ} 9'$; die Höhenparallaxe $= 0^{\circ} 44'$, welche im Meridiane der Parallaxe in Declination gleich wird; folglich die scheinbare Zenithdistanz des Mondscentrums vom geocentrischen Zenithe $= z' = 50^{\circ} 53'$; seine scheinbare Declination $= \delta' = -3^{\circ} 40'$ und endlich λ oder die Zunahme der AR des Mondes in einer Sternzeitsecunde $= 0''.0338$ in Zeit, so dass in unserem Falle:

$$1 + \lambda = 1.0338; \quad \pi = 0^{\circ} 58'; \quad \varphi' = 47^{\circ} 13'; \quad \delta' = -3^{\circ} 40'; \\ c = 0''.14; \quad n = 2''.00; \quad m = -1''.73,$$

also wird die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian $= (1 + \lambda). (1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta'). (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m) = -1''.758$ werden.

Um indessen ein Beispiel zu geben, wie man die Seitenfäden bei der Mondsbeobachtung auf den Mittelfaden reducirt, wollen wir hier aus dem Beobachtungsjournal die folgenden Durchgänge des II^{ten} Mondsrandes, durch alle 5 Fäden anführen:

I	II	III	IV	V	...
18' 58".7	19' 20".8	11 ^h 19' 42".8	20' 4".7	20' 27".5	(A)

Die Fäden - Intervalle, in Chronometer - Zeit - Secunden ausgedrückt, waren im Aequator:

$$f' = 43''.04; f'' = + 21''.14; f^{IV} = - 21''.69; f^V = - 43''.61$$

Das Chronometer ging beinahe nach mittlerer Zeit, und folglich wird λ' oder die Zunahme der AR des Mondes in einer Chronometer-Secunde $= 0''.034$ in Zeit sein; berechnet man nun die Fäden-Reductionen für die verschiedenen Fäden, nach der Formel:

$$(1 + \lambda') \frac{\sin z}{\sin z'} \cdot f \sec \delta,$$

wo $\delta = - 2^\circ 56'$, $z = 50^\circ 9'$ und $z' = 50^\circ 53'$ ist, so erhält man zur Fädenreduction folgende Zahlen:

$$+ 44''.10; + 21''.66; - 22''.21; - 44''.67.$$

Mit Hülfe dieser Zahlen, findet man den Durchgang des Mondsrandes durch den Mittelfaden:

11 ^h 19' 42".80
42 .46
42 .80
42 .49
42 .83
<hr/>
Mittel 11 ^h 19' 42".676

Rechnungsbeispiel für den I^{sten} Faden:

$lg (1 + \lambda')$	= 0.0145
$lg \sin z$	= 9.8852
<hr/>	
Summe	= 9.8997
$lg \sin z'$	= 9.8898
<hr/>	
Unterschied	= 0.0099
$lg f$	= 1.6339
$lg \sec \delta$	= 0.0006
<hr/>	
$lg 44''.10$	= 1.6444

Hier wurden die Beobachtungen an allen Fäden angestellt, und folglich kann man den wahrscheinlichen Durchgang durch den Mittelfaden auch dadurch finden, dass man das arithmetrische Mittel aus den Durchgängen (*A*) an allen Fäden nimmt, wodurch man erhält. = $11^h 19' 42''.900$ und hierzu die Correction für die ungleichen Fädenintervalle oder:

$$\left(\frac{43''.04 + 21''.14 - 21''.69 - 43''.61}{5 \cos \delta} \right) \text{hinzulegt.} = 0''.224$$

wodurch man den gesuchten Durchgang durch den Mittelfaden erhält. = $11^h 19' 42''.676$

Wenn man nun zu den Durchgängen durch den Mittelfaden, die Reductionen auf den Meridian und die Uhr-Correction gegen Sternzeit zulegt, so findet man aus unseren Beobachtungen die geraden Aufsteigungen der Gestirne, welche in folgender Tabelle mit den correspondirenden Beobachtungen in Dorpat und Greenwich zusammengestellt sind.

Beobachtete AR; 1836 am 24^{ten} September:

Benennung der Gestirne	in Novotscherkask	in Dorpat	in Greenwich
<i>p</i> Piscium	23 ^h 50' 19''.41	23 ^h 50' 19''.28	23 ^h 50' 19''.38
<i>s</i> Piscium	23 56 59 .22	23 56 59 .04	23 56 59 .19
II Rand ☾	0 8 5 .11	0 9 57 .06	0 13 41 .40
<i>β</i> Ceti	0 35 24 .37	—	0 35 24 .21
<i>δ</i> Piscium	0 40 13 .73	—	0 40 13 .44

Die geraden Aufsteigungen der Sterne können so angenommen werden, wie sie für Greenwich gegeben sind, denn man findet keine andere gute und vollständige Beobachtung. Vergleicht man also diese mit den Bestimmungen der AR, die an den anderen Orten gemacht wurden, so erhält man folgende Beobachtungsfehler:

Benennung der Gestirne	in Novotscherkask	in Dorpat
ρ Piscium	- 0'' .03	+ 0'' .10
s Piscium	- 0 .03	+ 0 .15
β Ceti	- 0 .16	—
δ Piscium	- 0 .29	—
Mittel	- 0'' .13	+ 0'' .12

Addirt man diese Correctionen, mit ihren Zeichen, zu den oben angegebenen AR des Mondsrandes, so wird die wahrscheinliche AR des II^{ten} Mondsrandes werden:

aus den Beobachtungen zu Novotscherkask = 0^h 8' 4'' .98

„ „ „ „ Dorpat = 0 9 57 .18

„ „ „ „ Greenwich = 0 13 41 .40

Die östliche Länge Novotscherkasks von Greenwich ist genähert = 2^h 40' 31'' .1 die genaue östliche Länge Dorpats von Greenwich aber = 1^h 46' 55'' .5; beide Längen sind östlich, man muss sie daher als negativ betrachten. Der weitere Gang der Berechnung stellt sich in folgender Tafel dar, bei der der Nautical Almanac für 1836 gebraucht wurde.

Sternzeit der Beobachtung des II ^{ten} Mondsrandes	in	in	in
	Novotscherkask	Dorpat	Greenwich
	0 ^h 8' 4'' .98	0 ^h 9' 57'' .18	0 ^h 13' 41'' .40
Länge	- 2 ^h 40' 31'' .10	- 1 ^h 46' 55'' .50	- 0 ^h 0' 0'' .00
entsprechende Sternzeit in Greenwich	21 ^h 27' 33'' .88	22 ^h 23' 1'' .68	0 ^h 13' 41'' .40
Sternzeit im mittleren Mittage zu Greenwich	12 ^h 13' 23'' .46	12 ^h 13' 23'' .45	12 ^h 13' 23'' .46
Verflossene Sternzeit nach diesem Greenwich.Mittage	9 ^h 14' 10'' .42	10 ^h 9' 38'' .22	12 ^h 0' 17'' .94
Reduction auf mittlere Zeit	- 1' 30'' .79	- 1' 39'' .90	- 1' 58'' .00
Mittlere Greenwicher Zeit	9 ^h 12' 39'' .63 = T	10 ^h 7' 58'' .32 = T'	11 ^h 58' 19'' .94 = T''

Für diese Zeiten T , T' , T'' , wurden nun aus dem Nautical Almanac durch strenge Interpolation die wahre AR des Mondscentrums, ebenso die wahren Mondshalbmesser h , h' , h''

und endlich die genäherten wahren Declinationen des Mondcentrums δ , δ' , δ'' abgeleitet; so dass auf diese Weise folgen wird:

für die Zeit in Greenwich	die berechnete AR des \odot Centrums	wahrer Halbmesser des \odot	genäherte Declin. des \odot Centrums
T'	0 ^h 7' 2''.25	15' 49''.06	— 2° 56'.0
T''	0 8 54 .79	15 48 .72	— 2 41 .5
T'''	0 12 38 .94	15 48 .01	— 2 11 .7

Berechnet man aus der Beobachtung die wahre AR des \odot Centrums; so folgt:

aus den Beobachtungen	AR II Rand \odot	$\frac{h}{15 \cos \delta}$	beobachtete AR des \odot Centrums	Unterschied der Berechnung und Beobachtung
in Novotscherkask	0 ^h 8' 4''.98	1' 3''.35	0 ^h 7' 1''.63	-0''.62 $\rightarrow \partial A$
in Dorpat	0 9 57 .18	1 3 .32	0 8 53 .86	-0 .93 $\rightarrow \partial A'$
in Greenwich	0 13 41 .40	1 3 .25	0 12 38 .15	-0 .79 $\rightarrow \partial A''$

Aus den in Dorpat und Greenwich gemachten Beobachtungen, kann man durch ein arithmetisches Mittel den Fehler der Mondstafeln in gerader Aufsteigung ableiten:

$$= \partial \alpha = \frac{-0''.93 - 0''.79}{2} = -0''.86 \text{ in Zeit.}$$

Zur Zeit der Beobachtung in Novotscherkask, am 24^{sten} September 1836 und um 9^h 12''.6 mittlere Zeit, war aber die Zunahme der AR des Mondcentrums in 1 Sternzeitsecunde = 0''.03384 in Zeit; folglich wird man haben:

$$\partial A = -0''.62; \partial \alpha = -0''.86; \lambda = 0.03384;$$

$$\partial A = \lambda \cdot x + \partial \alpha \text{ oder der Fehler der Länge} =$$

$$x = \frac{+0''.24}{0.03384} = +7''.1.$$

Nun liegt Novotscherkask östlich von Greenwich; mithin ist seine Länge negativ; und da wir für diese östliche Länge Novotscherkasks $2^h 40' 31''.1$ angenommen haben, so folgt daraus:

$$\text{genäherte Länge. } L = - 2^h 40' 31''.1$$

$$\text{Correction. } x = \quad \quad \quad + 7''.1$$

$$\text{genaue Länge } L + x = - 2^h 40' 24''.0$$

Längenbestimmung durch Monds-Azimuth.

192. Wenn die Umstände es nicht gestatten den Mond im Meridiane zu beobachten, und der Astronom einen guten Theodoliten oder ein gutes Universal-Instrument hat, so kann er die Länge genügend genau durch die Messung der Azimuth des Mondes und eines ihm nahen Sternes bestimmen. In diesem Falle, besteht die Anordnung der Beobachtungen in Folgendem:

1stens Muss man immer zuerst die Uhr correction des Chronometers bestimmen, welches man auf verschiedene Weise erreichen kann; denn mit Hülfe eines Universal-Instrumentes kann der Beobachter seine Zeit entweder dadurch bestimmen, dass er die Zenithdistanzen irgend eines passenden gut bestimmten Sternes in der Nähe des ersten Verticales misst; oder er kann auch sein Instrument als Durchgangsinstrument gebrauchen. Der Gang der Uhr muss genau bekannt sein.

2^{ten}s Zur Vergleichung mit dem Monde, muss man einen ihm nahen und guten bestimmten Stern, entweder aus dem Nautical Almanac oder aus dem Berliner Astronomischen Jahrbuche entnehmen; man fängt nun an dasjenige Gestirn zu beobachten, welches die kleinere gerade Aufsteigung hat, und dann das andere; indem man sich nach Möglichkeit be-

strebt, die Beobachtungen symmetrisch in gleichen Zeiträumen so anzustellen, dass bei diesen Beobachtungen der Mond und der Stern beinahe gleiche Azimuthe haben. Jedes der beiden Gestirne kann man an allen Fäden beobachten; und sogleich nach dem man die Zeit dieses Durchganges aufgeschrieben hat, muss man das Niveau an der horizontalen Umdrehungsachse ablesen, und darauf das Niveau selbst umlegen; alsdann liest man so scharf als möglich, die Angaben der Verniere am Horizontalkreise ab, und schreibt sich genähert die Ablesung an einem der Verniere (z. B. dem 1^{sten}) am Verticalkreise auf; nachdem dieses geschehen ist, wird genügende Zeit verstrichen sein, damit die Blase des Niveaus, welches wie oben erwähnt, umgelegt wurde, wieder zur Ruhe kommen kann, und nun liest man wieder die Niveau-Angabe ab. Obgleich es eigentlich nicht durchaus nöthig ist, das Vernier am Verticalkreise abzulesen, so kann man sich doch dadurch die spätere Berechnung abkürzen, bei welcher man, wie wir weiter unten sehen werden, die genäherte Zenithdistanz des Gestirnes haben muss; kennt man nun schon den Ort des Zenithes auf dem Verticalkreise, durch die Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes, so kann man leicht aus der oben erwähnten Vernier-Ablesung, die Zenithdistanz des Gestirnes genähert ableiten.

3^{tens} Nach Beendigung einiger Beobachtungen des Mondes und Sternes in einer Lage des Instrumentes, muss man den oberen beweglichen Theil des Instrumentes um beinahe 180° in Azimuth umdrehen, und darauf in dieser zweiten Lage des Instrumentes eine neue Beobachtungsreihe, ganz ebenso der Zahl und Ordnung nach wie vorher, anstellen.

4^{tens} Es ist durchaus nöthig sich durch Hülfe eines sogenannten Versicherungs-Fernrohres, welches auf eine gut sichtbare und feste Marke gerichtet werden muss, zu überzeugen, dass bei jeder Beobachtung der Stand des Instru-

mentes sich nicht verändert hat. Beobachtet man bei Tage so wird es nicht schwer sein, irgend einen Gegenstand zur Errichtung einer Marke zu wählen; des Nachts aber muss man irgend ein schickliches Lichtsignal errichten, durch welches man die Richtung des Fernrohres berichtigen kann.

Berechnung der Beobachtungen.

193. Die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfäden, berechnet man bei der Beobachtung des Sternes nach der Formel:

$$k = \frac{1}{15} (t_1 - t_2) \cdot \lambda = \frac{f \cdot \lambda}{\cos n \cos \delta \cos \left(\frac{t_1 + t_2}{2} + m \right)}$$

§. 110. S. 303. B. I.; hier ist f der Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden in Zeitsecunden ausgedrückt; n der Abstand des grössten Kreises des Instrumentes vom Pole des Aequators, δ die Declination des Sternes, t_1 und t_2 die Stundenwinkel des Sternes bei seinem Antritte an den Mittel- und Seitenfäden; diese Winkel sind genähert aus den Beobachtungen selbst bekannt, und werden nach der Richtung der täglichen scheinbaren Bewegung gezählt; λ ist das Verhältniss einer Sternzeitsecunde zu einer Secunde - Chronometerzeit, der Werth n wird hier als positiv betrachtet, wenn der Stern früher durch den grössten Kreis des Instrumentes, als durch den Declinationskreis ging, welcher vom Pole des Aequators aus nach dem Durchschnittspunkte des grössten Kreises des Instrumentes mit dem Aequator führt. Wenn das Instrument mittelst des Niveaus gut berichtigt ist, so kann man n und m mit hinreichender Annäherung, nach folgenden Formeln berechnen:

$$\sin n = \cos \varphi \cdot \sin a; \quad \sin m = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} n,$$

wo φ die Breite des Beobachtungsortes ist, und a das Azimuth des grössten Kreises des Instrumentes von Norden nach Osten gezählt, bedeutet.

Bei den Beobachtungen des Mondes, lassen sich, wenn sie nicht gar zu weit vom Meridiane angestellt wurden, die Seitenfäden auf den Mittelfaden folgendermaassen reduciren:

$$\text{Reduction} = k = \frac{f \cdot \lambda \zeta \cdot \frac{\sin z}{\sin z'}}{\cos n \cos \delta \zeta \cdot \cos [\frac{1}{2}(t' + t) + m]},$$

wo t' und t die Stundenwinkel des Mondes am Mittel und Seitenfaden sind, welche man aus einer astronomischen Ephemeride und aus den Beobachtungen herleiten kann. $\delta \zeta$ ist die wahre Declination des Mondcentrums, z' die scheinbare und z die wahre Zenithdistanz des Mondcentrums, oder die für Parallaxe verbesserte Zenithdistanz; $\lambda \zeta = \frac{86400'' + \Delta \alpha}{86400''}$, wo $\Delta \alpha$ die Zunahme der AR des

Mondes, in Zeit-Secunden ausgedrückt, im Laufe von 24 Chronometerstunden bedeutet. Die Werthe t' , t , z' , z , n und m , braucht man nur nahezu zu kennen. Wenn der Mond aber, weit vom Meridiane beobachtet wird und seine Declination sich rasch ändert, so muss man zur Fädenreduction die Formel (7) in §. 110. S. 303. B. I. gebrauchen; sind jedoch die Beobachtungen an allen Fäden gemacht worden, so kann man sich bei der Fädenreduction mit obigem Ausdrucke begnügen, weil alsdann seine Ungenauigkeit im mittleren Resultate beinahe verschwinden wird.

Aus dem gefundenen wahrscheinlichen Durchgange des Sternes durch den Mittelfaden, berechnet man ganz genau sein entsprechendes Azimuth, durch die Gleichungen:

$$tg \frac{1}{2}(a - q) = tg \frac{1}{2} t \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta)};$$

$$tg \frac{1}{2}(a + q) = tg \frac{1}{2} t \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta)};$$

wo t der Stundenwinkel des Sternes ist, den man aus der Sternzeit der Beobachtung und der scheinbaren geraden Aufsteigung des Sternes §. 5. S. 13. B. I. ableiten kann; a ist dabei das Azimuth des Sternes, von Süden ausgezählt, und q der parallactische Winkel.

Nehmen wir jetzt an, dass i die Neigung der horizontalen Umdrehungs-Achse des Instrumentes ist, welche mittelst des Niveaus abgelesen wurde; so haben wir schon in §. 66. S. 165. B. I. gesehen, auf welche Weise man die Gradablesungen auf dem Horizontalkreise vom Einflusse dieser Neigung i befreien kann. Legt man dann mit Rücksicht auf die Lage des Sternes, entweder $+a$, oder $-a$, zu der vom Einflusse der Neigung i befreiten Angabe der Verniere am Horizontalkreise hinzu, so erhält man den Ort des Meridianes auf diesem Kreise; wenn nun der Collimationsfehler, welchen wir durch c bezeichnen wollen, gleich Null gewesen wäre, so würde man in beiden Lagen des Instrumentes, den Ort des Meridianes auf dem Horizontalkreise, ganz gleich gefunden haben, denn im Meridiane, würde der Unterschied zwischen den Vernier-Angaben bei der I^{ten} und II^{ten} Lage des Instrumentes genau gleich 180° sein; im entgegengesetzten Falle dagegen, wird jedoch der Ueberschuss über $180^\circ = c \left(\frac{1}{\sin \zeta'} + \frac{1}{\sin \zeta''} \right)$ werden, wo ζ' und ζ'' die Mittelzahlen aus den Zenithdistanzen des Sternes in den Beobachtungen in der I^{ten} und II^{ten} Lage des Instrumentes sind; hieraus kann man nun den Werth von c , der Grösse und dem Zeichen nach bestimmen, so dass man alsdann weiss, wie man c in jedem Falle gebrauchen muss; die Correction, welche

man bei der Ablesung am Horizontalkreise wegen des Collimationsfehlers anbringen muss, wird $= \pm \frac{c}{\sin z'}$ sein, wo z' die scheinbare Zenithdistanz des beobachteten Gestirnes ist, §. 68. Seite 174. Band I.

Wir werden das Azimuth a , je nach den Umständen, von Süden nach Osten und nach Westen zählen; bezeichnet man dann durch O den Südpunkt des Meridianes auf dem Horizontalkreise des Instrumentes, und durch b die Vernier-Ablesung an diesem Kreise bei der Beobachtung des Sternes, welche schon durch die Werthe $\frac{c}{\sin z}$ und $\frac{i}{\operatorname{tg} z}$ für den Collimationsfehler und die Neigung der Umdrehungsachse verbessert ist, so erhält man alsdann ganz genau $O = b \pm a$, wo bei der bereits in §. 66. S. 165. B. I. erwähnten Ordnung der Gradtheilung, man bei östlichen Azimuthen (+), bei westlichen aber (−) nehmen muss.

Hierauf muss man das Azimuth des Mondes berechnen; für's erste wird man die Vernier-Ablesungen am Horizontalkreise, bei der Beobachtung des Mondsrandes, für die Werthe $\frac{c}{\sin z' \text{ C}}$ und $\frac{i}{\operatorname{tg} z' \text{ C}}$ verbessern und dann wird man noch zu ihnen $\pm \frac{r}{\sin z \text{ C}}$ hinzulegen, um die Ablesungen am Horizontalkreise auf das Mondscentrum zu reduciren; r ist hierbei der wahre oder geocentrische Halbmesser des Mondes; $z \text{ C}$ die wahre Zenithdistanz des Mondes vom scheinbaren Zenith und $z' \text{ C}$ seine scheinbare Zenithdistanz auf dasselbe Zenith bezogen; wenn nun der I^{ste} (oder westliche) Rand des Mondes beobachtet wurde, und die Theilung, ebenso wie in §. 66. S. 165. Bd. I. erwähnt wurde, von links nach rechts zunimmt, so muss man bei r , das Zeichen (−) brauchen, dagegen aber das Zeichen (+) wenn der II^e (oder östliche) Rand des Mondes beobachtet wurde; nimmt man nun den

Unterschied zwischen dem Orte O des Südpunktes des Meridianes und der verbesserten Vernierablesung, die sich auf das Mondscentrum bezieht, so erhält man das scheinbare Azimuth des Mondscentrums; und daraus kann man alsdann leicht das wahre Azimuth des Mondscentrums auf das scheinbare Zenith bezogen, nach dem in den Artikeln über Parallaxe gesagten herleiten, denn es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \text{Wahres Axt.} &= \text{Scheinbares Axt.} - \pi \cdot \frac{\nu \sin 1'' \sin a' \zeta}{\sin z \zeta} \\ &= a' \zeta - \xi; \end{aligned}$$

wo $\nu = \mu \frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''}$ ist; ferner bedeutet $a' \zeta$ den Winkelwerth des scheinbaren Azimuthes, welches immer positiv genommen werden soll; π die örtliche Horizontal-Parallaxe des Mondes, μ die Erdabplattung, welche sehr nahe $= \frac{1}{3000}$, φ die geographische Breite des Ortes und ξ die Parallaxe des Mondes in Azimuth.

Wenn man das auf diese Weise gefundene, von Süden ausgezählte wahre Azimuth des Mondscentrums durch $a \zeta$, und den diesem Azimuthe entsprechenden wahren Stundenwinkel durch $t \zeta$ bezeichnet, so kann man zur Berechnung von $t \zeta$ folgende Formel anwenden:

$$\begin{aligned} \sin q &= \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \cdot \sin a \zeta \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} t \zeta &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a \zeta - q) \dots \dots \dots (a) \end{aligned}$$

wo δ die wahre Declination des Mondscentrums ist.

Hat man $t \zeta$ gefunden, so ist die wahre gerade Aufsteigung des Mondscentrums

$$= A = \text{Sternzeit der Beobachtung} \pm \frac{t \zeta}{15};$$

wo (+) dann gebraucht wird, wenn der Mond im Osten, dagegen (−) wenn er im Westen beobachtet wurde. Damit man die einzeln für verschiedene Zeiten so gefundenen Werthe der AR des Mondes, unter einander vergleichen kann, reducirt man sie alle, mit der aus einer astronomischen Ephemeride gefundenen stündlichen Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung, auf eine einzige Zeit-Epoche; und alsdann wird das Mittel aus den erhaltenen Ableitungen die wahrscheinlichste AR des Mondscentrums für diese Epoche sein.

194. Um den Einfluss ermessen zu können, welchen ein Fehler in der, bei der Rechnung angewandten Declination des Mondes, auf die Genauigkeit des Stundenwinkels t und der AR des Mondes, ausüben kann, wollen wir die Gleichung:

$$\sin t \cdot \cotg a = \cos q \cdot \tg \delta - \sin q \cdot \cos t,$$

wo a das Azimuth und δ die Declination des Mondes bezeichnet, in Bezug auf δ und t , differenziiren; dadurch erhält man:

$$\partial t = \frac{\sin t \cdot \partial \delta}{\cos^2 \delta (\cos t \tg \delta - \tg q)} = - \tg q \cdot \sec \delta \cdot \partial \delta,$$

wo q den parallactischen Winkel (auf der westlichen Seite des Meridianes positiv, auf der östlichen negativ), bedeutet. Der Fehler des Stundenwinkels t verschwindet also im Meridiane, und erreicht vom Zeichen abgesehen, den grössten numerischen Werth im ersten Verticale, oder bei $a = \pm 90^\circ$, was jedoch nur dann möglich ist, wenn $\delta > 0$ und $< q$ ist, zugleich aber δ positiv ist. Setzt man z. B. $q = 60^\circ$ und $\delta = +30^\circ$, so hat man im ersten Verticale $\partial t = 0,8 \cdot \partial \delta$ in Bogen. Der Fehler der bei der Berechnung angewandten Declination des Mondes hängt: erstens davon ab, dass man

vorläufig die geographische Länge L des zubestimmenden Punktes nicht genau genug kennt, um eine der Beobachtung entsprechende Zeit des ersten Meridianes zu haben, für welche durch Interpolation die Declination des Mondes gefunden werden muss; zweitens von den Fehler der Mondstafeln in Declination, welcher sich nicht selten bis zu $10''$ erheben kann; diesen letzteren Fehler wird man eliminiren, wenn man entweder gleichzeitige Bestimmungen der Abweichung des Mondes auf guten Sternwarten zur Disposition hat und sie benutzt, oder wenn man die Beobachtungen nahe und sehr symmetrisch um den Meridian herum anstellt.

Hat man aus Azimuth-Beobachtungen die AR des Mondes erhalten, so findet man die geographische Länge des Beobachtungsortes dadurch, dass man aus den astronomischen Ephemeriden durch Interpolation die Zeit des Meridianes der Ephemeride sucht, zu welcher der Mond die erwähnte $AR = A$ hatte. Der Unterschied dieser Zeit und der zugehörigen Zeit der Beobachtung giebt die gesuchte Länge. Wenn es sich trifft, dass am Beobachtungstage die AR des Mondes an einer guten Sternwarte bestimmt war, so wird man den Fehler e der Mondstafeln in AR ermitteln, und auf folgende Weise, nach H. Knorre's Vorschlag, die geographische Länge sehr bequem und genau berechnen können. Es sei L die vorläufig angenommene, $L + x$ die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmende östliche Länge des Beobachtungsortes vom Meridiane der Ephemeride. Hat man die Uhr correction durch Sternbeobachtungen gefunden und ist T die Sternzeit der Beobachtung der AR des Mondes am Beobachtungsorte, so hat man durch strenge Interpolation die gerade Aufsteigung A' in Bogen und die Declination δ des Mondes für die Sternzeit $T - L$ des Meridianes der Ephemeride, und alsdann ebenso auch λ die Veränderung von A' und ν die von δ in einer Sternzeit-Secunde zu bestimmen; legt man dann zu A' die Grösse e mit dem gehörigen

Zeichen hinzu, so wird der Fehler der Mondstafeln in AR eliminiert; bezeichnet man durch f den Fehler dieser Tafeln in Declination, und setzt $\delta + f = \delta' =$ der wahren verbesserten Declination des Mondes, so werden $A' + e - \lambda. x$ und $\delta' - \nu. x$ diejenigen Werthe der geraden Aufsteigung und Abweichung des Mondes sein, welche der Beobachtungszeit wirklich entsprechen. Der Einfluss der Correction $-\nu. x$ auf den, aus dem beobachteten Azimuthe des Mondes berechneten Stundenwinkel t (von Süden nach Westen gezählt) lässt sich leicht nach der Formel:

$$\delta t = -tg q. sec \delta'. \delta \delta,$$

berechnen, wo $-\nu. x$ statt $\delta \delta$ zu setzen ist, und wo q den parallactischen Winkel (auf der westlichen Seite des Meridians positiv, auf der östlichen negativ) bedeutet. Dadurch findet sich der verbesserte Stundenwinkel $= t + \nu. x. tg q. sec \delta$, und die verbesserte gerade Aufsteigung des Mondes $= A - \nu. x. tg q. sec \delta$. Dieser Werth muss aber mit dem obigen; d. h. mit $A' + e - \lambda. x$, identisch sein, wir haben also:

$$A' + e - \lambda. x = A - \nu. x. tg q. sec \delta$$

$$\text{woraus } x = \frac{A' + e - A}{\lambda - \nu. tg q. sec \delta}$$

folgt; hat man $A' + e - A$ und λ in Zeit gefunden, so wird man auch ν erst durch 15 zu dividiren haben.

195. Als Beispiel wollen wir die Beobachtungen berechnen, welche am 20^{sten} August 1842 auf der Sternwarte zu St. Petersburg mittelst eines kleinen Universal-Instrumentes gemacht wurden. Zur Vergleichung mit dem Monde wurde der ihm nahe Stern β *Aquarii* gewählt, und die Beobachtungen wurden mit einer Uhr angestellt, nach welcher:

um $11^h 28' 6''.10$ Uhrzeit, die St. P. Sternzeit = $21^h 23' 18''.63$; der Gang der Uhr war so, dass 1^h Uhrzeit = 1^h Sternzeit + $9''.70$

Eine entfernte Strassen-Laterne diente als nächtliches Signal für die Einstellung des Versicherungs-Fernrohres.

Der Mond sowohl als die Sterne wurde an allen Verticalfäden beobachtet, deren unser Instrument 7 hatte, der Kürze wegen aber wollen wir die schon ganz auf den Mittelfaden, reducirten Durchgänge der Gestirne durch alle Fäden geben. Ebenso führen wir hier nur das Mittel aus den Vernierablesungen am Horizontalkreise an.

Lage des Höhen-Kreises	Gestirne	Durchgang durch den Mittelfaden	Ablesung am Horizontalkreise	Neigung der horiz. Achse = i	Scheinbare Zenithdist. = z'
Im Osten	β Aquarii	$10^h 56' 31''.10$	$125^0 0' 25''$	+3''.20	$66^0 27'$
		11 1 55 .79	126 28 19	+4 .30	66 21
		11 7 17 .60	127 55 49	+4 .25	66 17
	Ister Mondstrand	$11^h 16' 1''.89$	$124^0 54' 28''$	+6''.40	$71^0 27'$
		11 24 19 .32	127 0 10	+4 .20	71 18
		11 32 57 .85	129 11 28	+5 .90	71 11
					360 - z
Im Westen	β Aquarii	$11^h 55' 56''.40$	$320^0 9' 30''$	-2''.75	$293^0 49'$
		12 1 19 .20	322 36 58	-0 .60	293 30
		12 6 26 .37	324 0 2	-3 .60	293 23
	Ister Mondstrand	$12^h 13' 14''.80$	$319^0 24' 50''$	-5''.70	$288^0 56'$
		12 20 18 .70	321 12 28	-0 .90	288 52
		12 27 4 .30	322 55 21	-1 .30	288 45

Die Breite des Beobachtungsortes war = $\varphi = 59^0 56' 30''.5$; die scheinbare Declination des Sternes = $-6^0 15' 24''.8$; seine scheinbare AR = $21^h 23' 18''.64$. Nimmt man nun den Collimationsfehler $c = 0^0 0' 0''$ an, so findet man aus den Beobachtungen des Sternes β Aquarii, dass der Ort des Südpunktes auf dem Horizontalkreise gleich war:

in der Lage I. . . 133° 35' 37".9	in der Lage II. . . 313° 35' 10".8
30 .0	5 .8
36 .8	6 .2
Mittel = 133° 35' 34".9	Mittel = 313° 35' 7".6

Hieraus sieht man, dass der Collimationsfehler c nicht Null sein kann; in unserem Falle ist sein Einfluss $= \frac{1}{2} \cdot 27''.3$ und also c selbst $= \frac{1}{2} \cdot 27''.3 \sin \alpha$, wo α nahezu $= 66^\circ 24'$; folglich wird $c = \pm 12''.5$; wo (+) sich auf die II^{te} und (−) sich auf die I^{ste} Lage des Instrumentes bezieht; alsdann wird der wahre Ort des Meridianes auf dem Horizontalkreise, die Lage haben:

Iste Lage	IIte Lage.
$O = 133^\circ 35' 21''.2$	$O = 313^\circ 35' 21''.2$

Die Uhr ging sehr nahe nach mittlerer Zeit, und bei der Mitte der Beobachtungen war ihr Fehler gegen mittlerer Zeit $= + 1''.00$; welches zu den bemerkten Angaben der Uhr zugelegt werden muss, um die entsprechenden mittleren St. Petersburger Zeiten zu erhalten, zieht man darauf die angenommene östliche Länge St. Petersburgs von diesen Zeiten ab, (nämlich $2^\circ 1' 13$), so erhält man die entsprechenden mittleren Greenwicher Zeiten; für welche man alsdann aus dem Nautical Almanac die wahre Declination des Mondcentrums, den wahren Halbmesser des Mondes $= 14' 43''.2$ und die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe $= 54' 1''.0$ entnimmt; daraus folgt aber die örtliche Horizontal-Parallaxe des Mondes für St. Petersburg $= \pi = 53' 53''.0$; und ferner wird der Unterschied zwischen der geographischen Breite $= \varphi$, und der geocentrischen $= \varphi'$, oder $= \nu = 9' 57''.5$ sein. Die letzte Columnne in der folgenden Tafel giebt uns die Secunden des wahren Mondsazimuthes; die Grade und Minuten sind ganz dieselben, als die, welche zum scheinbaren Azimuthe gehören.

Ablesung am Horizontalkreise	Correctionen			Verbesserte Ablesung = b	Scheinbares Az. $\zeta = \pm(O-b)$	Par. in Azim. = ξ	Secunden des wahren Azimuts
	c $\sin s'$	i $\lg s'$	r $\sin s$				
	-	+	-		Süd-Ost.		
I 124° 54' 28"	13'' 2	2'' 1	15' 36'' 1	124° 38' 40'' 8	8° 56' 40'' 4	-1'' 5	38'' 9
127 0 10	13 2	1 4	15 36 9	126 44 21 3	6 50 59 9	-1 2	58 7
129 11 28	13 2	2 0	15 37 6	128 55 39 2	4 39 42 0	-0 7	41 3
	+	-	-		Süd-West.		
II 319° 24' 50"	13'' 2	1'' 9	15' 38'' 2	319° 9' 23'' 1	5° 34' 1'' 9	-1'' 0	0'' 9
321 12 28	13 2	0 3	15 37 8	320 57 3 1	7 21 41 9	-1 3	40 6
322 55 21	13 2	0 5	15 37 3	322 39 56 4	9 4 35 2	-1 5	33 7

Aus dem Nautical Almanac findet man, dass zur Zeit der Beobachtung, die Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung in 1 Stunde mittlerer Zeit = 110''.725 war; und daher war diese Bewegung in einer Sternzeit-Stunde $\lambda_* = 110''.47$. Indem wir nun alle die gefundenen geraden Aufsteigungen des Mondes auf eine allgemeine Zeitepoche reduciren, zu der wir die Zeit 21^h 45' 34''.6 nehmen wollen, so erhalten wir die folgende Tafel:

Wahres Azimuth des ζ Cent.	Declination des Mondes	Stundenwinkel des ζ in Zeit	Sternzeit der Beobachtung = s	Reduction der AR ζ	wahre AR ζ für 21 ^h 45' 34''.6 Sternzeit
Südöstlich	-10°				
8° 56' 38".9	23' 2".4	+0 ^h 34' 18".52	21 ^h 11' 12".60	+63".26	21 ^h 46' 34".38
6 50 58 .7	21 24 .6	+0 26 14 .96	21 19 31 .31	+48 .02	34 .29
4 39 41 .3	19 29 .0	+0 17 50 .92	21 28 11 .30	+31 .99	34 .22
Südwestl.	-10°				
5° 34' 0''.9	11' 39".6	-0 ^h 21' 17".60	22 ^h 8' 34".60	-42".35	34 .65
7 21 40 .6	10 15 .1	-0 28 9 .77	22 15 39 .73	-55 .40	34 .56
9 4 33 .7	8 54 .4	-0 34 43 .77	22 22 26 .40	-67 .87	34 .76

Mittel = $T = 21^h 45' 34''.60$. AR $\zeta = 21^h 46' 34''.48$

Sobald die wahre AR ζ gefunden ist, so wird der übrige noch übrig bleibende Theil der Rechnung zu Auffindung der Länge des Ortes selbst, ganz ebenso geführt, wie wir es oben gezeigt haben.

Bestimmung der Länge eines Ortes mittelst der Beobachtung der Zenithdistanzen des Mondes.

196. Hier muss man nun ebenso wie vorher die Länge dadurch bestimmen, dass man die gerade Aufsteigung des Mondes herleitet; jedoch um dieses bewerkstelligen zu können, wählt man einen gut bestimmten, dem Monde nahe gelegenen Stern; und beobachtet abwechselnd mit einem Verticalkreise, sowohl Zenithdistanzen des Sternes als auch des Ober- oder Unterrandes des Mondes in beiden Lagen des Instrumentes; indem man sich dabei bemühet die Beobachtungen so symmetrisch als möglich einzurichten; alsdann muss man aber auch den Stand des Barometers und die Temperatur der Luft ganz scharf ablesen, und überhaupt alle Vorschriften befolgen, die wir in dem Artikel über die Messung von Zenithdistanzen und über die Zeitbestimmung mittelst dieser, angegeben haben. Je näher die Gestirne dem 1^{sten} Verticale sein werden, desto grösser wird die Genauigkeit des nachher abgeleiteten Resultates sein.

Kennt man nun die Breite des Beobachtungsortes und die Declination des Sternes, und ebenso auch den Stand und Gang des Chronometers, so wird man aus den Beobachtungen des Vergleichssterne die Uhr correction und den Ort des Zenithes auf dem Instrumente ableiten können.

Nimmt man nun den Unterschied zwischen diesem Orte des Zenithes und den für Niveau schon verbesserten Ableisungen am Verticalkreise, welche bei der Beobachtung des Mondsrandes erhalten wurden, so wird man dadurch die scheinbaren Zenithdistanzen des Mondsrandes, bei den einzelnen Beobachtungen finden. Es sei nun Z' eine solche scheinbare Zenithdistanz, und die dazu gehörige Refraction

sei = ϱ , so wird: $z' = Z' + \varrho$, wo z' die reducirte, aber noch mit Parallaxe behaftete Zenithdistanz des Mondsrandes ist, wobei man zu bemerken hat, dass die Parallaxe in der Ebene wirkt, welche durch's geocentrische Zenith geht; §§ 9—21 Seite 18 — 34 Band I. Nachdem nun z' von dieser Einwirkung befreit worden ist, wird man die wahre Zenithdistanz des Mondsrandes erhalten. Obgleich der Stundenwinkel t des Mondscentrums die gesuchte Grösse ist, so kann man ihn doch immer mit Hülfe einer Ephemeride und der bekannten Sternzeit der Beobachtung vorläufig genähert berechnen, und alsdann das Azimuth des Mondes = a , aus der Gleichung $\sin a = \frac{\sin t \cdot \cos \delta}{\sin z}$ sogleich finden; wo δ die

Declination zur Zeit der Beobachtung bezeichnet, für z aber, kann man ohne merklichen Fehler den Werth $z' + \pi \sin z' \pm r$ setzen, wo π die örtliche Horizontal-Parallaxe des Mondes zur Zeit der Beobachtung, und r der Halbmesser des Mondes ist; (+) wird bei der Beobachtung des oberen Mondsrandes, (—) dagegen bei der des Unterrandes gebraucht. Nun sei endlich φ die geographische, φ' die geocentrische Breite des Beobachtungsortes, ξ die wahre, und ξ' die scheinbare Distanz des beobachteten Mondsrandes vom geocentrischen Zenithe, und ferner werde das Azimuth a von Süden ausgezählt, so kann man mit hinlänglicher Genauigkeit annehmen, dass:

$$\xi' = z' - (\varphi - \varphi') \cos a, \quad \xi = \xi' - p; \quad \sin p = \sin \pi \sin \xi';$$

$$r' = \frac{r \cdot \sin (\xi' \pm r)}{\sin (\xi \pm r)} \quad \text{und} \quad \zeta = \xi \pm r';$$

wo r' der scheinbare Halbmesser des Mondes und ζ die wahre Distanz des Mondscentrums vom geocentrischen Zenithe ist; (—) wird beim Unter-, (+) beim Oberrande gebraucht, so dass man endlich hat:

$$\sin \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (\zeta + \varphi' - \delta) \sin \frac{1}{2} (\zeta - \varphi' + \delta)}{\cos \varphi' \cos \delta}}, \text{ oder:}$$

$$\cos \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi' + \zeta + \delta) \cos \frac{1}{2} (\varphi' - \zeta + \delta)}{\cos \varphi' \cos \delta}}$$

wo t den gesuchten wahren Stundenwinkel des Mondscentrums bedeutet, und alsdann folgt für die aus den Beobachtungen abgeleitete wahre gerade Aufsteigung des Mondscentrums:

$$AR \zeta = \text{Sternzeit der Beobachtung} \pm \frac{t}{15}$$

wo (+) bei den östlichen, und (−) bei den westlichen Stundenwinkeln des Mondes zu nehmen ist.

Die fernere Berechnung um hieraus die Länge des Beobachtungsortes zu finden, wird eben so geführt, wie in den früheren Paragraphen §. §. 192—194. Seite 261—270. gezeigt wurde. Nur muss man hier in dem Ausdrücke von ν , x , wo ν und x die frühere Bedeutung haben, δt oder das Differenzial von t in Bezug auf δ mittelst der weiter unten gegebenen Gleichung ausdrücken.

Die eben auseinandergesetzte Methode kann man mit Vortheil in solchen Gegenden anwenden, deren Breite sehr gering ist; dagegen ist die Methode in hohen Breiten beinahe unbrauchbar.

Unter grossen Breiten nämlich, erreicht der Mond häufig, entweder ganz und gar nicht den ersten Vertical, welches den grössten Vortheil für den Beobachter gewährt, oder wenn er ihn auch erreicht, so geschieht dieses so nahe am Horizonte, dass die Beobachtungen unbrauchbar werden. Bezeichnet man nun durch $\delta \delta$ einen Fehler in der Declination des Mondes, und durch δt den ihm entsprechenden in Stundenwinkel t , so erhält man durch die Differenziation der Gleichung

chung (1) §. 6. Seite 15. Band I., in Bezug auf δ und t , folgende Relation:

$$\partial t = \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t} \right) \cdot \partial \delta; \dots \dots \dots (1)$$

wo t von Süden nach Westen gezählt ist.

Hieraus ist es ersichtlich, dass der Fehler im Stundenwinkel, welcher von einem Fehler in der Declination herrührt, mit der Zunahme der Orts-Breite φ , ebenfalls wächst. Zum Beispiel für $\partial \delta = 10''$ in Bogen und $\varphi = 60^\circ$, wird der Fehler im Stundenwinkel zwischen $17''$ und $21''$ in Bogen betragen können, oder zwischen $1''.1$ bis $1''.4$ in Zeit bei den Beobachtungen des Mondes im ersten Vertical, und bei den Declinationen $\delta = 15^\circ$ und $\delta = 30^\circ$, eingeschlossen sein; welches aber die Länge des Ortes, von $30''$ bis zu $40''$ in Zeit, zweifelhaft machen würde.

197. Man kann die Correction x der angenommenen Länge noch auf folgende Weise finden. Es sei L die angenommene, $L + x$ die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmende östliche Länge des Beobachtungsortes vom Meridiane der Ephemeride. Aus der nahezu richtigen Länge L und der Sternzeit T der Beobachtung, bestimmt man die entsprechende Sternzeit $T - L$ des Meridianes der Ephemeride, verwandelt sie in mittlere Zeit und berechnet damit die dazu gehörige AR und die Declination δ des Mondes; und daraus alsdann den Stundenwinkel t und die Zenithdistanz z des Mondes. Vergleicht man dieses z mit dem aus jeder Beobachtung abgeleiteten Werthe $z \llcorner$ dieser Grösse, so bekommt man eine Gleichung von der Form

$$z \llcorner = z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial L} \dots \dots \dots (Z).$$

wo man am leichtesten $\frac{\partial z}{\partial L}$ erhält, wenn man die Zenith-
 distanzen z und z' für die geographischen Längen L und $L + 10'$
 berechnet; alsdann ist $\frac{\partial z}{\partial L} = \frac{z' - z}{10}$, und die Correction x
 wird in Secunden ausgedrückt. Aus der Gleichung (Z),
 welche für jede Beobachtung besonders gebildet wird, leitet
 man den wahrscheinlichen Werth von x , wie gewöhnlich ab.
 Finden sich correspondirende Meridianbeobachtungen des
 Mondes und der Vergleichs-Sterne, so können diese zur Er-
 mittlung der wahren Positionen des Mondes und des Sternes
 benutzt werden.