185

Allgemeine Theorie der Umhüllungsflächen und einige damit zusammenhängende Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

Von Professor Dr. **W. Stammer**, Oberlehrer.

1. Wenn man in der Gleichung einer Fläche eine oder mehrere Konstante sich stetig ändern lässt, so erhält man eine ununterbrochene Reihe von Flächen derselben Familie. Die Fläche, welche alle diese unendlich vielen Flächen berührt, so dass sie als der geometrische Ort der Berührungspunkte erscheint, heisst die Umhüllungsfläche gegenüber den eingehüllten Flächen.

Diese Erklärung, welche der von Magnus*) für die Umhüllungskurven aufgestellten nachgebildet ist, entspricht dem Wesen der Umhüllungsflächen besser als die gewöhnliche, die auf der unklaren Vorstellung des Durchschnitts zweier unendlich nahen Flächen beruht.

Enthält die Gleichung der eingehüllten Flächen n Konstante, welche sich stetig ändern (Parameter) und zwischen welchen $n-1$ Gleichungen bestehen, so kann man aus diesen Gleichungen $n-1$ Konstante durch die n^{te} ausdrücken, so dass die gegebene Gleichung der Flächen nur mehr eine willkürliche Konstante enthält, die im Folgenden stets mit α bezeichnet werden soll.

2. Es sei $F(x, y, z, \alpha) = 0$ die gegebene Gleichung der eingehüllten Flächen; dann ist die Aufgabe die, die Gleichung $\Phi(x, y, z) = 0$ einer Fläche zu suchen, welche alle von der ersten Gleichung dargestellten Flächen berührt. Zu dem Ende denken wir uns die beiden Gleichungen in der Form

$$z = f(x, y, \alpha), \quad z = \varphi(x, y) \tag{I}$$

geschrieben. Die diesen beiden Flächen gemeinsamen Punkte werden für jedes α durch die Gleichung

$$f(x, y, \alpha) = \varphi(x, y) \tag{II}$$

*) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene, §. 94.

in Verbindung mit der ersten Gleichung (I) geliefert. Damit aber in diesen Punkten Berührung stattfinde, müssen durch die Koordinaten der Punkte die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{III}$$

befriedigt werden. Diese beiden Gleichungen dienen also zur Bestimmung der Form und der Konstanten der Funktion φ.

3. Schreibt man die Gleichung (II) in der Form

$$\psi\,(x,\,y,\,\alpha) = 0, \tag{IV}$$

so sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Gleichung stellt einen Punkt dar, wenn die linke Seite aus der Summe zweier Quadrate besteht, also das Produkt zweier imaginären Faktoren ist. Die Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen, die gleichzeitig befriedigt werden müssen.

b) Die Gleichung stellt zwar eine cylindrische Fläche dar, aber ihre Verbindung mit (I) führt zu Fall *a*).

c) Keiner dieser Fälle tritt ein.

Der erste Fall liefert für jedes α bestimmte Werte für x, y, z, so dass also jede der eingehüllten Flächen mit der Umhüllungsfläche nur einen oder mehre getrennte Punkte gemein hat. Eliminiert man α zwischen der Gleichung $z = f\,(x,\,y,\,\alpha)$ und den beiden Gleichungen, in welche die Gleichung (IV) zerfällt, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z für den geometrischen Ort der Punkte, welche die Umhüllungsfläche mit den eingehüllten Flächen gemein hat. Dieser Ort ist demnach eine Linie und nicht die Umhüllungsfläche selbst, wie in (1) verlangt wird. Das Gleiche gilt für den zweiten Fall, so dass also nur der dritte Fall zu berücksichtigen ist.

4. Die Gleichung (IV) liefert y als Funktion von x und α. Da diese beiden Veränderlichen von einander unabhängig sind, so ergiebt die Differenziation nach allem α:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0.$$

Ersetzt man $\psi\,(x,\,y,\,\alpha)$ durch seinen Wert $f\,(x,\,y,\,\alpha) - \varphi\,(x,\,y)$ und bedenkt man, dass dann in φ nur das α vorkommt, welches in y als Funktion von x und α enthalten ist, so wird die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0;$$

daher, wegen (III),

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{V}$$

Denkt man sich umgekehrt x als Funktion von y und α, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$$

folglich, wegen (V),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

so dass also die beiden Gleichungen (III) zu gleicher Zeit befriedigt werden, d. h. identisch sind.

Durch Elimination von α zwischen der Gleichung (V) und der ersten der Gleichungen (I) erhält man eine Gleichung, welche, da sie von α unabhängig ist, für die Berührungspunkte der Umhüllungsfläche mit sämtlichen eingehüllten Flächen gilt, mithin die Umhüllungsfläche darstellt. Um aber die gesuchte Gleichung zu bilden, ohne erst die gegebene Gleichung $F(x, y, z, \alpha)$ nach z aufzulösen, verfährt man in bekannter Weise, indem man F nach allem α differenziert und dabei z als Funktion von y, x, α, das y aber als Funktion von x und α (wegen Gleichung II) ansieht. Das giebt:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0.$$

Der Koeffizient von $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ist nichts anders als der vollständige Differentialkoeffizient von F nach y, welcher für jedes α verschwindet; ferner ist z nichts anderes als die oben mit f bezeichnete Funktion, so dass $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$. Die Gleichung liefert daher:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Die Gleichung der Umhüllungsfläche wird also erhalten durch Elimination von α zwischen den Gleichungen

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0. \tag{VI}$$

Es ist zu bemerken, dass hiernach nur dann eine Umhüllungsfläche besteht, wenn die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ das α als reelle Funktion von x, y, z bestimmt. Wenn z. B.

$$z = (x + \alpha)^3 + (y - b)^3$$

die Gleichung der eingehüllten Flächen ist, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 3(x + \alpha)^2 + 3(y - b)^2 = 0,$$

eine Gleichung, die nur durch $x = -\alpha$, $y = b$ befriedigt wird, also keine Umhüllungsfläche liefert.

Ebenso giebt es keine Umhüllungsfläche, wenn F eine lineare Funktion von α ist, weil dann $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ kein α mehr enthält.

5. Zur Vervollständigung der Entwickelung bedarf es noch des Beweises, dass die nach Anleitung von (4) gebildete Gleichung auch wirklich die Fläche darstellt, welche die Flächen $z = f(x, y, \alpha)$ einhüllt, d. h. dass sie den Bedingungen

$$f(x, y, \alpha) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{VII}$$

entspricht.

Aus der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ erhält man α als Funktion von x, y, also $\alpha = \vartheta(x, y)$; folglich ist gemäss dem Gesetze für die Bildung von φ diese Funktion nichts andres als $f[x, y, \vartheta(x, y)]$, so dass die erste der Bedingungen jetzt lautet:

$$f(x, y, \alpha) = f[x, y, \vartheta(x, y)],$$

eine Gleichung, welche befriedigt wird durch

$$\alpha = \vartheta(x, y). \tag{VIII}$$

Da nun nach der Voraussetzung α eine reelle Funktion von x, y ist, so giebt es unendlich viele stetig auf einander folgende Werte von x, y, welche α reell machen; mithin ist auch umgekehrt y eine reelle Funktion von α und x, d. h. die Gleichung (VIII), und ebenso die erste der Gleichungen (VII), liefern eine Linie als geometrischen Ort für die Punkte, welche die Flächen F und Φ gemein haben. Substituiert man den aus der ersten der Gleichungen (VII) erhaltenen Wert von α in die zweite, wobei y als Konstante betrachtet wird, so heisst sie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

welche wegen $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ mit der zu erfüllenden Bedingung übereinstimmt. Dasselbe gilt für $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Es werden also die Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ durch alle x, y befriedigt, welche der Gleichung $f = \varphi$ genügen; d. h. in allen Punkten der durch diese Gleichung gegebenen Linie findet Berührung der Umhüllungsfläche mit der durch den jedesmaligen Wert von α bestimmten eingehüllten Fläche statt.

6. Bestehen zwischen den n in $F(x, y, z)$ vorkommenden Parametern nur n—2 Gleichungen, so bleiben nach Elimination der übrigen noch 2 von einander unabhängige Konstante in der Gleichung der eingehüllten Flächen, so dass diese heisst:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Man hat auch hier für die der Umhüllungsfläche mit den eingehüllten Flächen gemeinsamen Punkte die Gleichung:

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \varphi(x, y), \text{ oder } \psi(x, y, \alpha, \beta) = 0. \quad \text{(IX)}$$

Hier kann der erste oder zweite der in (3) unterschiedenen Fälle eintreten. Geschieht das nicht, d. h. hat die Umhüllungsfläche mit jeder der eingehüllten Flächen eine Linie gemein, so liefert die letzte Gleichung für jeden Punkt derselben eine Beziehung zwischen α und β, mithin unendlich viele eingehüllte Flächen, die alle die Linie mit der Umhüllungsfläche und mit einander gemein haben; aber jede der eingehüllten Flächen berührt die Umhüllungsfläche in einem andern Punkt der gemeinschaftlichen Linie. Denn fände die Berührung in demselben Punkte der Umhüllungsfläche statt, so berührten sich in diesem Punkte die unendlich vielen eingehüllten Flächen untereinander, was nur in ganz besondern Fällen (singulären Punkten) stattfinden kann. Es liegt das darin, dass die beiden Gleichungen

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nicht mehr identisch sind mit $f = \varphi$ und darum für jedes x, y bestimmte Werte für α, β liefern. Hiernach ist in jedem Falle sowohl das x wie das y jedes Berührungspunktes, d. h. jedes Punktes der Umhüllungsfläche, eine Funktion der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen α, β. Nimmt man β als konstant an und lässt nur α sich ändern, so erhält man ähnlich wie oben:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0;$$

also $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$.

Ebenso beweist man, dass auch $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$.

Verfährt man weiter nach Anleitung von (4), so erkennt man, dass die Gleichung der Umhüllungsfläche erhalten wird durch Elimination von α und β zwischen den drei Gleichungen

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Da aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$$

für jedes Paar Werte von α und β bestimmte Werte von x und y hervorgehn, so erkennt man, dass in der That die gefundene Umhüllungsfläche von jeder der eingehüllten Flächen nur in einzelnen Punkten berührt wird.

7. Die Entwickelungen lehren uns, dass es zweierlei Arten von Umhüllungsflächen giebt, von denen die eine als der geometrische Ort der Berührungslinien, die andere der Berührungspunkte erscheint.

Die Bildung der Gleichungen der beiden Arten hat auch eine geometrische Bedeutung. Ist die Funktion $F(x, y, z, \alpha)$ in Bezug auf α vom m^{ten} Grade, so liefert die Gleichung $F(x, y, z, \alpha) = 0$ für jeden Punkt x, y, z im Raume m Werte von α, welche allerdings nur innerhalb gewisser Grenzen reell sind, so dass also innerhalb dieser Grenzen durch jeden Punkt m eingehüllte Flächen gehn. Da aber für die Punkte der Umhüllungsfläche ausserdem noch die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ besteht, so sind für jeden dieser Punkte zwei Werte von α gleich; d. h. die Umhüllungsfläche hat die Eigenschaft, dass von den m eingehüllten Flächen, welche durch jeden ihrer Punkte gehen, immer zwei zusammenfallen.

Ähnlich verhält es sich mit den Flächen

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

8. Zwei einfache Beispiele mögen zur Erläuterung des Gesagten dienen.

Die eingehüllten Flächen sind Kugeln mit dem Radius ρ, deren Mittelpunkt die Peripherie des Kreises

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

bilden. Sind a und b die Koordinaten des Mittelpunktes einer der Kugeln, so ist ihre Gleichung

$$F = z^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 - \rho^2 = 0,$$

wo a und b durch die Gleichung

$$a^2 + b^2 = r^2$$

verbunden sind.

a) Die Kugeln werden sämtlich berührt, also scheinbar umhüllt, von jeder Kugel, deren Gleichung

$$(z - g)^2 + x^2 + y^2 - (\sqrt{g^2 + r^2} \pm \rho)^2 = 0$$

ist, wo g den beliebigen Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Ebene des Kreises bedeutet.

Die Elimination von z zwischen den beiden Gleichungen liefert:

$$(ax + by - r^2 \mp \rho\sqrt{g^2 + r^2})^2 + g^2[(x - a)^2 + (y - b)^2 - \rho^2] = 0.$$

Versucht man die linke Seite dieser Gleichung als Produkt zweier linearen Faktoren $(ux + vy - 1)(u'x + v'y - 1)$ darzustellen, so findet man für die Konstanten u, v, u', v' komplexe Ausdrücke, und die Gleichung wird

$$[(ax + by - r^2)\sqrt{r^2 + g^2} \mp \rho r^2]^2 + g^2(bx - ay)^2 = 0.$$

Wenn g nicht Null ist, so müssen also gleichzeitig die beiden Gleichungen befriedigt werden:

$$(ax + by - r^2)\sqrt{r^2 + g^2} \mp \rho r^2 = 0, \quad bx = ay.$$

Sie liefern für die Berührungspunkte:

$$x = a\,\frac{\sqrt{r^2 + g^2} \pm \rho}{\sqrt{r^2 + g^2}}, \quad y = b\,\frac{\sqrt{r^2 + g^2} \pm \rho}{\sqrt{r^2 + g^2}}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der eingehüllten Kugeln ein, so erhält man:

$$z = \mp\,\frac{g\,\rho}{\sqrt{r^2 + g^2}}.$$

Da diese Gleichung nicht mehr a und b enthält, so gilt sie für alle Kugeln und liefert demnach den geometrischen Ort für die Punkte, in welchen die beiden einhüllenden Kugeln die eingehüllten berühren, nämlich zwei Kreise.

Wir haben also hier ein Beispiel des ersten der drei in (3) aufgeführten Fälle.

b) Ist dagegen $g = 0$, so haben wir nur die eine Gleichung

$$ax + by - r\,(r \pm \rho) = 0, \tag{X}$$

welche eine auf der Ebene des Kreises senkrechte Ebene darstellt. Eliminirt man y aus dieser Gleichung und der der eingehüllten Kugeln, so erhält man

$$b^2\,z^2 + [rx - a\,(r \pm \rho)]^2 = 0.$$

Es muss also zugleich

$$z = 0 \text{ und } x = \frac{a\,(r \pm \rho)}{r}.$$

Das ist der zweite Fall der Nr. 3. Die Gleichung (X) stellt die Tangentialebenen in den Berührungspunkten der Flächen dar.

c) Um nach Anleitung von (4) die Gleichung der wirklichen Umhüllungsfläche zu bilden, muss zuerst in der Gleichung der eingehüllten Kugeln b durch $\sqrt{r^2 - a^2}$ ersetzt werden. Man kann aber auch $\frac{\partial F}{\partial a}$ bilden, indem man b als Funktion von a betrachtet und $\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{a}{b}$ benutzt. Das a hat die Bedeutung des frühern α. Dadurch erhält man für die Umhüllungsfläche die Gleichung

$$\Phi\,(x, y, z) = z^2 + x^2 + y^2 + r^2 - \rho^2 - 2r\,\sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

welche, wie vorauszusehen war, den **Wulst** darstellt, der durch Rotation des Kreises

$$z^2 + (x - r)^2 = \rho^2$$

um die zAxe entsteht.

Die Elimination von z zwischen den Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ liefert

$$ay - bx = 0,$$

also eine Ebene, welche durch die zAxe und den Mittelpunkt der Kugel (a, b) geht, mithin den grössten Kreis bestimmt, in dem die Kugel vom Wulste berührt wird. Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

heissen jetzt beide

$$a^2y^2 - b^2x^2 = 0,$$

sind also mit $f(x, y) = \varphi(x, y)$ identisch.

9. Ein Beispiel der zweiten Art von Umhüllungsflächen liefern die Kugeln vom Radius ρ, deren Mittelpunkte die **Oberfläche** der Kugel

$$z^2 + x^2 + y^2 = r^2$$

bilden, deren Gleichung also ist:

$$F = (z - c)^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 - \rho^2 = 0,$$

wo

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2,$$

mithin

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{a}{c}, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{b}{c}.$$

Für die Umhüllungsfläche erhält man die Gleichung

$$\Phi = x^2 + y^2 + z^2 - (r \pm \rho)^2 = 0,$$

wie vorauszusehn war.

Eliminiert man z zwischen den beiden Gleichungen, so kommt:

$$[ax + by - r(r \pm \rho)]^2 + c^2[x^2 + y^2 - (r + \rho)^2] = 0.$$

Verfährt man wie in (8, a.), so findet man für diese Gleichung die Form:

$$[r(ax + by) - (a^2 + b^2)(r \pm \rho)]^2 + c^2(bx - ay)^2 = 0.$$

Es muss also gleichzeitig

$$r(ax + by) = (a^2 + b^2)(r \pm \rho), \quad bx - ay = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen stellt wieder die Ebene dar, welche durch die zAxe und den Mittelpunkt der Kugel (a, b) geht.

Aus den beiden Gleichungen erhält man

$$x = \frac{a\,(r \pm \rho)}{r},\ y = \frac{b\,(r \pm \rho)}{r} \text{ und ferner } z = \frac{c\,(r \pm \rho)}{r}$$

als Koordinaten der Berührungspunkte der Umhüllungsfläche mit jeder der eingehüllten Kugeln.

10. Wenn die Gleichung $F\,(x, y, z, \alpha) = 0$ oder $F\,(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ vom ersten Grade in Bezug auf x, y, z ist, so stellt $\Phi = 0$ die Fläche dar, welche von allen durch $F = 0$ dargestellten Ebenen berührt wird. In diesem Falle sagt man gewöhnlich umgekehrt, die Fläche Φ werde von ihren Tangentialebenen eingehüllt, so dass hier die Begriffe von Umhüllungsfläche und eingehüllter Fläche willkürlich verwechselt werden.

Wir schreiben die Gleichung der Ebene in der Form

$$F\,(x, y, z) = ux + vy + wz - 1 = 0$$

oder

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Zwischen den Konstanten bestehen die Beziehungen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Die Konstanten sind Funktionen entweder einer Veränderlichen oder zweier von einander unabhängigen Veränderlichen.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall, so kann man zwischen den drei Gleichungen, welche die Abhängigkeit der u, v, w von dem veränderlichen Parameter ausdrücken, diesen eliminieren, wodurch man zwei Gleichungen zwischen u, v und w erhält. Diese beiden Gleichungen stellen zwei Flächen in Plankoordinaten dar. Die Umhüllungsfläche wird also durch Ebenen erzeugt, welche zwei Flächen gleichzeitig berühren. Ihre Gleichung $\Phi = 0$ wird erhalten, indem man den Parameter α aus

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x \frac{\partial u}{\partial \alpha} + y \frac{\partial v}{\partial \alpha} + z \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

bestimmt und in $F(x, y, z, \alpha) = 0$ einsetzt. Dadurch erscheint α als Funktion von x und y, und die Differenziation von Φ einmal nach allem x und das anderemal nach allem y ergiebt:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u + w \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v + w \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

also, wegen $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$,

$$u + w \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad v + w \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Eliminiert man α zwischen diesen Gleichungen, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \vartheta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

d. h. die Differenzialgleichung der abwickelbaren Flächen. Hierdurch ist bewiesen, dass die Ebenen, deren Gleichung nur einen veränderlichen Parameter enthält, eine abwickelbare Fläche umhüllen, was übrigens schon aus der Bemerkung am Ende der Nr. 5 hervorgeht, insofern diese Art von Flächen dadurch gekennzeichnet ist, dass sie von jeder Tangentialebene längs einer Linie berührt werden, die nicht notwendig gerade zu sein braucht.

Wenn dagegen die Konstanten der Ebene Funktionen von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen α, β sind, so sind die Umhüllungsflächen nicht abwickelbare Flächen. Nur von solchen soll im Folgenden die Rede sein.

Eliminiert man α und β aus den drei Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Konstanten u, v, w von α und β ausdrücken, die beiden letztern, so erhält man eine Gleichung zwischen u, v, w, welche eine dieser Konstanten als Funktion der beiden andern, die dann als die veränderlichen Parameter auftreten, liefert. Diese Gleichung ist zugleich die Gleichung der Umhüllungsfläche in Plankoordinaten und kann daher schon an und für sich dazu dienen, manche Eigenschaften dieser Fläche zu finden, ohne erst ihre Gleichung in Punktkoordinaten zu entwickeln.

Dieses Mittel ist namentlich dann vorzuziehen, wenn es sich um Flächen handelt, deren Gleichung in Plankoordinaten man kennt, wie die folgenden Beispiele lehren, in denen das Gesetz, nach welchem die sich bewegende Ebene sich ändert, durch Beziehungen zwischen ihren Abständen von festen Punkten gegeben sein soll. Nimmt man nur zwei feste Punkte an, so entsteht selbstverständlich eine Rotationsfläche, deren Eigenschaften mit denen der rotierenden Kurve übereinstimmen und daher kein Interesse bieten. Wir nehmen darum drei feste Punkte an und wählen ihre Ebene zur Ebene der xy.

11. Die veränderliche Ebene soll der Bedingung unterworfen sein, dass die Summe der Quadrate ihrer Abstände von drei festen Punkten konstant bleibt.

Ist die Gleichung der Ebene:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p,$$

wo selbstverständlich α und β nicht mehr die Bedeutung von unabhängigen Parametern zu haben brauchen, und bezeichnet man die Koordinaten der drei festen Punkte mit $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$, so wird die vorgeschriebene Bedingung durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p)^2 + (x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta - p)^2 \\ + (x_3 \cos\alpha + y_3 \cos\beta - p)^2 = k^2\end{aligned} \tag{XI}$$

oder (10)

$$\begin{aligned}(ux_1 + vy_1 - 1)^2 + (ux_2 + vy_2 - 1)^2 + (ux_3 + vy_3 - 1)^2 \\ = k^2(u^2 + v^2 + w^2)\end{aligned}$$

ausgedrückt. Entwickelt man die Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned}u^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - k^2) + v^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - k^2) - w^2 k^2 \\ + 2uv(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - 2u(x_1 + x_2 + x_3) \\ - 2v(y_1 + y_2 + y_3) + 3 = 0.\end{aligned} \tag{XII}$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, bringt man zuerst die Koeffizienten von $2u$ und $2v$ zum Verschwinden. Zu dem Ende braucht man nur den Anfangspunkt der Koordinaten auf den

Schwerpunkt des von den drei festen Punkten gebildeten Dreiecks zu legen.

Da bis jetzt die Richtung der Koordinatenaxen willkürlich geblieben ist, so kann man sie so wählen, dass auch der Koeffizient von uv verschwindet. Dass dies immer möglich ist, lässt sich beweisen, indem man bei festliegenden Koordinatenaxen das Dreieck so lange um seinen Schwerpunkt dreht, bis der Koeffizient gleich Null wird. Denkt man sich das Dreieck durch seine Schwerpunktstransversalen q, r, s gegeben, so sind folgende Gleichungen aufzulösen:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{4}{9} q^2,$$
$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{4}{9} r^2,$$
$$x_3^2 + y_3^2 = \frac{4}{9} s^2.$$

Man kann aber auch als Unbekannte den Winkel ϑ ansehn, den die durch einen der festen Punkte gehende Schwerpunktstransversale mit der xAxe bildet, und dabei den Satz benutzen, dass die Schwerpunktstransversalen den *Sinus* der von ihnen eingeschlossenen Winkel proportional sind, insofern die Lage der Axen für alle unter einander ähnliche Dreiecke dieselbe ist. Auf beiden Wegen gelangt man zu Ausdrücken, welche für jede der Unbekannten zwei reelle Werte, in der That aber nur eine Lösung, liefern, da es sich dabei nur um eine Vertauschung der Koordinatenaxen handelt. Allein die erhaltenen Ausdrücke sind zu verwickelt, um eine einfache geometrische Deutung zuzulassen. Aus dieser Entwickelung geht hervor, dass sich die Gleichung (XII) auf die Form bringen lässt:

$$P u^2 + Q v^2 - k^2 w^2 + 3 = 0,$$

welche eine stets reelle Fläche zweiter Klasse, also auch zweiter Ordnung, darstellt, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten ist. Die Art der Fläche hängt von der gegenseitigen Lage der festen Punkte und dem Werte von k ab.

Wegen $p_1 + p_2 + p_3 = 3\,p,$
also
$$2\,(p_1\,p_2 + p_2\,p_3 + p_3\,p_1) = 9\,p^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$
entsteht dieselbe Fläche, wenn die Bedingung lautet, dass die doppelte Summe der Produkte von je zwei Senkrechten dem neunfachen Quadrate des Abstandes der Ebene vom Schwerpunkte, vermindert um eine Konstante, gleich sein soll.

Am einfachsten gestaltet sich die Aufgabe, wenn die drei festen Punkte ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Die Bedingung
$$x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 = 0$$
wird dann dadurch befriedigt, dass man eine der Koordinatenaxen auf die Höhe des Dreiecks legt, die andere also parallel zur Grundlinie annimmt. Ist dann a die Grundlinie und h die Höhe des Dreiecks, so wird die Gleichung der Fläche:
$$\frac{1}{9}\,u^2\,(3\,k^2 - 2\,h^2) + \frac{1}{6}\,v^2\,(2\,k^2 - a^2) + \frac{1}{3}\,k^2\,w^2 = 1,$$
welche je nach den Werten von a, h und k sämtliche Mittelpunktsflächen darstellen kann.

Wenn $2\,k^2 = a^2$ oder $3\,k^2 = 2\,h^2$, so artet die Fläche in eine Kurve aus, welche in der Ebene der xz, beziehungsweise der yz, liegt. Wenn dagegen das Dreieck gleichseitig ist, werden die Koeffizienten von u^2 und v^2 gleich, die Fläche also je nach dem Werte von k entweder ein Rotations-Ellipsoid oder ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid, welche beide die zAxe zur Rotationsaxe haben.

Bedenkt man, dass der geometrische Ort für die Punkte im Raume, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von drei festen Punkten konstant sein soll, eine Kugelfläche ist, die den Schwerpunkt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks zum Mittelpunkt hat, so heisst der gefundene Satz: Wenn man von allen Kugeln, welche die Ecken eines Dreiecks zu Mittelpunkten haben, immer je drei zusammenstellt, die sich auf der Oberfläche einer festen um den Schwerpunkt des Dreiecks beschriebenen Kugel, schneiden, so umhüllen die den drei Kugeln gemeinsamen Tangentialebenen eine Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der festen Kugel zusammenfällt.

Wenn man die Bedingung der Aufgabe dahin ändert, dass die Summe der Quadrate der drei Abstände nicht gleich einer Konstanten, sondern gleich dem $n$fachen Quadrate des Abstandes der Ebene vom Schwerpunkte des Dreiecks sein soll, so wird die Gleichung (XII) zu

$$u^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + v^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = n - 3,$$

was für $n > 3$ eine Ellipse in der Ebene des Dreiecks darstellt.

12. Umgekehrt lassen sich aus der Gleichung der Mittelpunktsflächen in Plankoordinaten Eigenschaften ihrer Tangentialebenen in Bezug auf deren Abstände von festen Punkten ableiten. Der Einfachheit wegen soll nur das Ellipsoid

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = 1$$

betrachtet werden. Für die übrigen Flächen ergeben sich die Eigenschaften durch Änderung der Vorzeichen von b^2 und c^2.

Auf jeder der drei Axen sind zwei Punkte im gleichen Abstande vom Mittelpunkte gegeben. Die Abstände dieser Punkte von der Tangentialebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p, \text{ oder } ux + vy + wz = 1$$

sind:

$$\begin{aligned} p_1 &= \pm (p - x_1 \cos \alpha), & p_1' &= \pm (p + x_1 \cos \alpha), \\ p_2 &= \pm (p - y_2 \cos \beta), & p_2' &= \pm (p + y_2 \cos \beta), \\ p_3 &= \pm (p - z_3 \cos \gamma), & p_3' &= \pm (p + z_3 \cos \gamma). \end{aligned}$$

Setzt man fest, dass die 6 Punkte zugleich auf derselben Seite der Tangentialebene liegen sollen, so ist:

$$p_1 - p_1' = \mp 2 x_1 \cos \alpha = \mp 2 x_1 pu,$$

$$p_2 - p_2' = \mp 2 y_1 pv, \quad p_3 - p_3' = \mp 2 z pw.$$

Setzt man hieraus die Werte für u, v, w in die Gleichung der Fläche ein, so erhält man:

$$\frac{a^2 (p_1 - p_1')^2}{x_1^2} + \frac{b^2 (p_2 - p_2')^2}{y_2^2} + \frac{c^2 (p_3 - p_3')^2}{z_3^2} = 4 p^2.$$

Wählt man die festen Punkte so, dass

$$x_1 = a, \quad y_2 = b, \quad z_3 = c,$$

so heisst die Gleichung:

$$(p_1 - p_2')^2 + (p_2 - p_2')^2 + (p_3 - p_3')^2 = 4\, p^2,$$

welche den Satz liefert:

Fällt man von den Endpunkten der Axen eines Ellipsoids Senkrechte auf jede Tangentialebene, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen von je zwei Senkrechten, die von den Endpunkten derselben Axe gefällt werden, gleich dem Quadrate des doppelten Abstandes der Ebene vom Mittelpunkte.

13. Statt der sechs Punkte auf den drei Axen sollen nur vier auf den Axen der x und y angenommen werden.

Wegen $$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{p^2}$$

lässt sich die Gleichung des Ellipsoids schreiben:

$$u^2\,(a^2 - c^2) + v^2\,(b^2 - c^2) = 1 - \frac{c^2}{p^2}.$$

Setzt man hierein für u und v die in der vorigen Nummer gefundenen Werte, so erhält man:

$$\frac{(a^2 - c^2)}{4\,x_1^{\,2}}(p_1 - p_1')^2 + \frac{b^2 - c^2}{4\,y_2^{\,2}}(p_2 - p_2')^2 = p^2 - c^2. \quad \text{(XIII)}$$

Wählt man jetzt die festen Punkte so, dass

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - c^2},$$

so kommt:

$$(p_1 - p_1')^2 + (p_2 - p_2')^2 = p^2 - c^2;$$

d. h.: Wenn man von den vier Punkten, welche in den durch die dritte Axe eines Ellipsoids gelegten Hauptschnitten die Abstände der Brennpunkte vom Mittelpunkte halbieren, Senkrechte auf jede Tangentialebene fällt, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen je zweier von derselben Axe ausgehenden Senkrechten gleich dem Quadrate des Abstandes der Ebene vom Mittelpunkte, vermindert um das Quadrat der halben dritten Axe. Ähnliche Sätze erhält man, wenn man die Punkte auf der ersten und dritten oder auf der zweiten und dritten Axe annimmt, ähnliche auch für die andern Mittelpunktsflächen.

Benutzt man die Beziehungen:

$$2\,p = p_1 + p_1' = p_2 + p_2',$$
$$4\,p = p_1 + p_1' + p_2 + p_2',$$

so wird die Gleichung (XIII):

$$\frac{a^2 - c^2}{4\,x_1^{\,2}}\,(p_1 - p_1')^2 + \frac{b^2 - c^2}{4\,y_2^{\,2}}\,(p_2 - p_2')^2 =$$
$$\frac{1}{16}\,(p_1 + p_1' + p_2 + p_2')^2 - c^2.$$

Setzt man jetzt

$$x_1 = 2\,\sqrt{a^2 - c^2}, \quad y_2 = 2\,\sqrt{b^2 - c^2},$$

so erhält man

$$(p_1 - p_1')^2 + (p_2 - p_2')^2 = (p_1 + p_1' + p_2 + p_2')^2 - 16\,c^2,$$

oder

$$4\,p_1\,p_1' + 4\,p_2\,p_2' + 2\,(p_1 + p_1')\,(p_2 + p_2') = 16\,c^2.$$

Daraus:

$$p_1\,p_1' + p_2\,p_2' = 4\,c^2 - 2\,p^2;$$

d. h.: Wenn die vier Punkte des vorigen Satzes vom Mittelpunkte um die doppelten Excentricitäten entfernt sind, so ist die Summe der Produkte von je zwei von derselben Axe ausgehenden Senkrechten gleich dem Quadrate der dritten Axe, vermindert um das doppelte Quadrat des Abstandes der Tangentialebene vom Mittelpunkte.