Erster Anhang.

BESCHREIBUNG UND GEBRAUCH DES SPIEGEL-SEXTANTEN.

1. Die von uns früher beschriebenen Instrumente erfordern sämmtlich eine ganz feste Aufstellung, und können daher auf dem Meere ganz und gar nicht gebraucht werden; ebensowenig aber sind sie auch für solche Reisende zweckdienlich, die keine ganz sicheren Stative zu ihrer Verfügung haben. Daher braucht man in solchen Fällen bei Winkelmessungen, Reflexionsinstrumente; worunter die vorzüglichsten die Spiegelsextanten von Troughton, der Spiegelkreis von Ertel, der Repetitionskreis von Borda, aber besonders der Steinheilsche Prismenkreis und der Reflexionskreis von Pistor und Martins sind.

Die Reflexions-Instrumente, beruhen alle auf folgender Eigenthümlichkeit eines Planspiegels: es sei DM ein Lichtstrahl (Fig. 43.), welcher von irgend einem Gegenstande D aus nach dem Planspiegel AMB gelangt, so wird derselbe darauf von diesem aus nach der Richtung MR zurückgeworfen werden, wenn man den Spiegel nun so dreht, dass er die Lage $A'MB'$ annimmt, so wird der von dieser neuen Lage des Spiegels reflectirte Lichtstrahl MR von einem anderen Gegenstande E herrühren, und der Winkel

$A' M A$, zwischen den beiden Lagen des Spiegels wird dem halben Winkel $= \frac{1}{2} D M E$, zwischen den von den beiden Gegenständen D und E nach M gehenden Lichtstrahlen gleich sein; um dieses zu erweisen, nehme man an, dass die Linie $C M$ senkrecht auf der Ebene des Spiegels $A M B$ stehe, und dass ebenso $C' M$ senkrecht auf $A' M B'$ sei, so wird wegen der Gleichheit der Ein- und Ausfallswinkel: $D M C = C M R$ und $E M C' = C' M R$; folglich $D M C - E M C' = C M R - C' M R$; es ist aber $D M C = D M E + E M C' - C' M C$, folglich $D M E - C M C' = C M C'$; oder $\frac{1}{2} D M E = C M C' = A M A'$. Bei allen Reflexions-Winkelmess-Instrumenten, wird die Lage des reflectirten Strahles in der Ebene des Instrumentes ebenso sicher beobachtet, als wenn man bei anderen Instrumenten die Niveau-Angaben, oder eine Fernrohr-Marke anwendet.

Es sei $P C A$ (Fig. 44.) ein Kreissector, dessen Bogen $A P$ in Grade, Minuten u. s. w. eingetheilt ist und den sechsten Theil der Kreis-Peripherie oder nicht viel mehr bildet, in Centrum C der Ebene der Kreis-Peripherie, befindet sich der gläserne Spiegel $K C N$, welcher an der Alhidade oder an dem Lineale $N A$ festgemacht ist, und senkrecht auf der Sectorfläche $P C A$ steht. Diese Alhidade geht nach der Richtung der Kreisradien, und bewegt sich mit dem Spiegel fest verbunden, also zusammen mit diesem, um eine Achse herum, welche durch das Centrum C geht, und senkrecht auf der Ebene des Sectors $P C A$ steht; am anderen Ende der Alhidade, welche den Kreisbogen $A P$ beschreibt, befindet sich ein *Nonius*. Auf dem Radius $C P$ im Punkte m denke man sich einen anderen kleineren Glasspiegel $r m s$, der ebenfalls auf der Sectorebene $P C A$ senkrecht steht; jedoch an dem unbeweglichen Halbmesser $C P$, nicht weit vom grossen Spiegel ab, befestigt ist, und dessen untere Hälfte belegt, der obere Theil dieses Spiegels aber aus einem durchsichtigen Plan-Glase besteht; das Fernrohr O, endlich in welchem sich die Gegenstände darstellen, ist unwandelbar mit dem Sector PCA verbunden.

Wir wollen nun annehmen, dass man einen Winkel zwischen zwei Sternen D und E (Fig. 44.) zu messen habe; richtet man dann das Fernrohr O auf den Stern D, welcher links von der Sectorebene abliegt, so wird alsdann irgend ein Lichtstrahl dieses Sternes, durch den unbelegten durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels in das Fernrohr O gelangen, ein anderer wird ebenso auf die Ebene des grossen Spiegels fallen, und wegen der unermesslichen Entfernung der Fixsterne, dem vorhin erwähnten durch den keinen Spiegel gegangenen Strahl parallel sein; stellt man nun den grossen Spiegel, dem kleinen parallel, so wird alsdann dieser Lichtstrahl zuerst vom grossen, und darauf vom kleinen Spiegel reflectirt werden; dann aber mit der Linie mO zusammenfallen, so dass er endlich ebenfalls in's Fernrohr tritt; denn nach dem Gesetze der Reflexion, wird der Winkel $D'CK = mCN$ und $rmC = Oms$; aber wegen des Parallelismus der Spiegel KCN und rms, wird $rmC = mCN$, und wegen des Parallelismus der einfallenden Strahlen Dm und $D'C$ erhält man: $Dmr = D'CK$; mithin $Oms = Dmr$; d. h. mit anderen Worten Om liegt in der Verlängerung der Linie Dm. Auf diese Weise sieht also der Beobachter zwei aufeinanderfallende Bilder des Sternes D, von welchem das Eine, von den Lichtstrahlen herrührt, die vom Sterne aus durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels, direct ins Fernrohr gelangen, das andere aber durch doppelte Reflection entstanden ist. Bemerkt man sich darauf, durch Ablesen des Nonius, den Ort der Alhidade AC auf dem Kreisbogen, bei der parallelen Lage beider Spiegel, und bewegt nun die Alhidade von A nach P, so wird dadurch der grosse Spiegel nach und nach auf andere Gegenstände die rechts vom Sterne abstehen gerichtet werden. Hält man dann den Sextanten so, dass die beiden zu beobachtenden Gegenstände

D und *E* mit seiner Ebene zusammenfallen, richtet nun das Fernrohr *O* auf den Stern *D*, und bewegt die Alhidade bis zu dem Punkte *B* auf dem Kreisbogen *A P*, so dass die Lichtstrahlen des Sternes *E*, welche zuerst auf den Grossen-, nachher aber auf den Kleinen-Spiegel und dann in's Fernrohr fallen, dieselbe Richtung als die direct vom Sterne *D* in's Fernrohr einfallenden Lichtstrahlen annehmen, so wird man alsdann nothwendigerweise die Bilder der beiden Sterne in Coincidenz sehen; ausserdem aber wird der doppelte Bogen *A B*, welcher den Unterschied der beiden Noniusablesungen in *A* und *B* bildet, alsdann den gesuchten Winkel *D C E* ausdrücken. Ganz ebenso misst man auch den Winkel zwischen zwei gegebenen Gegenständen *D* und *E* die sich nicht in unendlicher Entfernung vom Beobachter befinden; man richtet nämlich das Fernrohr zuerst auf den links liegenden Gegenstand und bewegt die Alhidade so, dass die directe Erscheinung dieses Gegenstands *D* mit dem von beiden Spiegeln reflectirten Bilde zusammenfällt; man liest nun die Nonius-Angabe ab, und bewegte darauf die Alhidade so weit, dass das directe Bild des Gegenstandes *D* mit dem zwei mal reflectirten Bilde des Gegenstandes *E* zusammenfällt; und alsdann wird der doppelte Bogen, welchen die Alhidade beschrieben hat, den gesuchten Winkel zwischen beiden Gegenständen und dem Auge des Beobachters ausdrücken; denn obgleich nun der grosse Spiegel dem kleinen bei dem Zusammenfallen beider Bilder des Gegenstandes *D*, des directen, sowohl als gespiegelten, nicht mehr parallel sein wird, so wird man dennoch in diesem Falle, den Winkel *D C E* ebenso wie früher messen können; nur muss man diesen Winkel von derjenigen Lage der Alhidade abzählen, bei welcher das directe und gespiegelte Bild des Gegenstandes *D*, der direct bei der Messung beobachtet wurde, zusammenfällt. Damit man nun nicht jedes Mal den gemessenen Winkel zu verdoppeln braucht, so sind die Sextanten gewöhnlich so eingerichtet, dass ein Bogen von 60° bei ihnen in 120 Theile eingetheilt ist, und daher bei diesen die halben Graden, als ganze gezählt werden.

2. In (Fig. 45. Taf. II.) ist ein Sextant in $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ seiner natürlichen Grösse abgebildet; seine einzelnen verschiedenen Theile werden meistens aus Messing ausgeführt; *A P* ist ein Kreisbogen, in welchen ein feiner silberner Streifen eingelassen ist, auf dem sich die Gradtheilung selbst befindet. Dieser Kreisbogen *A P* ist nun mit dem Centrum der Sectorebene, durch Stäbe oder Platten fest verbunden; und damit die Durchbiegung soviel wie möglich beseitigt wird, macht man diese Stäbe wenigstens 4 Linien hoch und ebenso dick. In den englischen Sextanten von Troughton sind alle Stäbe des Sextanten, sowie auch der Limbus doppelt angebracht, und durch Quer-Pfeiler mit einander verbunden, damit das Instrument noch fester wird. Im Centrum ist eine Röhre aus Glockenmetall, senkrecht in die Ebene des Sextanten eingelassen, welche oben und unten innerlich etwas konisch zuläuft, und in dieser befindet sich die stählerne Umdrehungsachse der Ahidade. Diese Achse ist mit einer dicken kreisförmigen Platte verbunden, welche auf der Ebene des Sextanten aufliegt, diese ist ferner in die Alhidade eingelassen und durch drei Schrauben daran befestigt. Auf der Mittelpunktsplatte ist nun der Rahmen des grossen Spiegels *L G* durch die drei Schrauben α, α, und α festgemacht, so dass sich also der grosse Spiegel mit der Alhidade zusammen, um die Umdrehungsachse herum bewegen lässt. Dieser Spiegel wird nun mittelst der Schrauben α, α, α senkrecht auf die Ebene des Sextanten aufgestellt; der Spiegel selbst aber berührt seine Einfassung nur an drei Punkten, damit keine Durchbiegung stattfinden kann, welche sonst die ganze Gestalt des Spiegels ändern könnte. Manche Sextanten von Troughton haben bis zu 10 englische Zoll im Halbmesser; die meisten Sextanten sind aber kleiner.

Auf dem Ende der Alhidade *CD*, welches dem Bogen *A P* zunächst liegt, befindet sich ein *Nonius D*, welche der Bewegung einer feinen Micrometerschraube *F* folgen muss; unter diesem Ende der Alhidade ist eine Druckschraube angebracht, und wenn man diese Schraube löst, so kann die Alhidade *C D* sehr leicht mit der Hand bewegt werden; zieht man sie aber fest an, so kann man alsdann die Alhidade nur mittelst der Micrometerschraube *F* bewegen. An der Alhidade *C D* befindet sich ein Microscop oder Vergrösserungsglas *M*, welches zur genauen Ablesung des Nonius *D* und des Bogens *A P* dient; und welches man mittelst des Stiels *H M* frei um den Stift *H* bewegen kann; der auf der Alhidade *C D* befestigt ist.

Nicht weit vom grossen Spiegel *L G* ab, ist der unbewegliche kleine Spiegel *N* befestigt, seine untere Hälfte ist mit Quecksilber belegt und bildet daher einen wirklichen Spiegel, seine obere Hälfte aber, ist von durchsichtigem Glase; hinter diesem Spiegel befindet sich in den meisten Sextanten eine Schraube, um den kleinen Spiegel senkrecht auf die Ebene des Sextanten aufstellen zu können. Gegen die Richtung dieses kleinen Spiegels, schief aufgestellt, befindet sich nun ein Fernrohr *O*, welches sich parallel der Ebene des Sextanten in den Ring *K K* einschrauben lässt, und mit einer Schraubenvorrichtung versehen ist, um die Absehenslinie des Fernrohres mit der Ebene des Sextanten genau parallel stellen zu können; der Ring selbst hat nun einen Griff, welcher aus einem ziemlich langen Parallelipipedon besteht. Dieses Parallelipipedon lässt sich nun ganz frei in einer dazu passenden Fassung, welche unwandelbar an dem Sextanten angebracht ist, mittelst einer unter dieser Fassung befindlichen Schraube, zusammen mit dem Fernrohre *O* so auf und nieder bewegen, dass dadurch das Fernrohr seinen Parallelismuss mit der Sextanten-Ebene nicht ändert. Wenn die beobachteten Gegenstände an Helligkeit gleich sind, so muss man alsdann das Fernrohr so stellen, dass die Linie, welche den belegten Theil des kleinen Spiegels vom durchsichtigen trennt, der Linie correspondirt, welche das Objectiv des Fernrohres in zwei gleiche Hälften theilt. Wenn dagegen die zu beobachtenden Gegenstände verschiedene Helligkeit haben, so stellt man den grössten Theil des Objectives demjenigen Theile des kleinen Spiegels gegenüber, durch welchen direct, oder von welchem reflectirt die Lichtstrahlen des schwach erleuchteten Gegenstandes in's Fernrohr gelangen. Zwischen dem grossen und kleinen Spiegel, befinden sich die drei gefärbten Blend-Gläser *Q*, welche verschiedene Dunkelheit haben und auf Scharnieren angebracht sind, so dass man sie entweder beliebig zurückschlagen, oder zwischen beiden Spiegeln aufstellen kann, wie es bei Sonnen-Beobachtungen nöthig ist, um die ausserordentliche Lichtstärke, der vom grossen Spiegel reflectirten Sonnenstrahlen, zu mildern. Ganz zu demselben Zwecke befinden sich gleich hinter dem kleinen Spiegel drei andere farbige Blend-Gläser *P* so angebracht, dass wenn man sie hinter den kleinen Spiegel stellt, das Sonnenlicht, welches durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels direct hindurchgeht, dem Auge des Beobachters nicht beschwerlich fällt. Ausserdem ist aber noch beim Oculare ein besonderes kleines Blendglas, welches nur bei der Messung von Sonnenhöhen gebraucht wird; in diesem Falle, müssen die oben erwähnten Farbengläser weg, oder seitwärts von Spiegel geschoben werden. Der hölzerne Griff *E* dient dazu, den Sextanten bequem in der Hand halten zu können; übrigens hat man auch bei vielen Sextanten besondere Stative, auf welche man den Sextanten, mittelst einer Schraubenmutter, die sich bei der Mitte des Handgriffes *E* befindet, aufschrauben kann; alsdann kann man mit Hülfe einer passenden Vorrichtung am Stative, die Ebene des Sextanten in jede beliebige Lage einstellen, und bequem nach allen Seiten drehen.

Das Fernrohr an grösseren Troughton'schen Sextanten hat ungefähr $\frac{3}{4}$ Zoll Objectivöffnung, $6\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite und vergrössert wohl 15 Mal; in seiner Ocularröhre sind vier Drähte oder Haare, in einem besonderen Diaphragma aufgespannt, welches in einer auf der Achse des Fernrohres senkrechtstehenden Ebene liegt, und durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt der Objectiv- und Ocular-Linse geht. Zwei von diesen Drähten, müssen mit der Ebene des Sextanten parallel gestellt werden, und zweie stehen auf der Richtung dieser Ebene senkrecht. Dadurch wird nun im Fernrohre ein Rechteck gebildet, in dessen Mitte man stets die Coincidenz, oder auch den Contact der Bilder der zu messenden Gegenstände beobachten muss. Früher wurden die englischen Sextanten, besonders die Troughton'schen, am meisten geschätzt; aber gegenwärtig werden auch in Deutschland vorzügliche Sextanten, so wie auch andere ganz ausgezeichnete Reflexions-Mess-Apparate angefertigt.

3. Zur genauen Winkelmessung ist es unumgänglich nöthig, dass

1stens beide Spiegel vollkommen senkrecht auf der Ebene des Sextanten stehen; dass

2tens die Absehens-Linie des Fernrohres mit dieser Ebene parallel ist; dass

3tens das Centrum der Umdrehungs-Achse des grossen Spiegels mit dem Centrum des in Graden eingetheilten Bogens zusammenfällt; dass

4tens die Theilungen auf diesem Gradbogen und dem Nonius richtig sind; dass

5tens die den Spiegel begränzende Flächen, genaue Ebenen, und diese Ebenen selbst untereinander parallel sind, und dass

6tens endlich die Blend-Gläser, welche man gebraucht, wenn der Winkel zwischen der Sonne und irgend einem anderen Objecte gemessen werden soll, nicht prismatisch sind.

Correction des grossen Spiegels.

4. Um sich zu überzeugen, ob der grosse Spiegel ganz ebene Flächen hat, wendet man den Spiegel gegen irgend einen gut sichtbaren, und recht scharf begrenzten irdischen Gegenstand, indem man alsdann ein anderes, nicht zum Sextanten gehöriges, aber recht kräftiges Fernrohr auf das Bild des Gegenstandes im Spiegel richtet, zeigt sich dieses alsdann ganz fehlerfrei, d. h. so, wie es erscheinen würde, wenn man das Fernrohr direct auf den Gegenstand richtete, so dass alle geraden und krummen Linien, aus welchen der Gegenstand besteht, in beiden Fällen ohne Verzerrung, ganz in der nämlichen Gestalt sich zeigen, (findet dieses also wirklich statt) so wird der Spiegel eben sein. Ebenso kann man auch den kleinen Spiegel untersuchen; jedoch giebt es noch ein anderes Mittel beide Spiegel auf einmal in dieser Beziehung zu prüfen; man stellt nämlich das Sextanten-Fernrohr ganz genau auf den Focus, und schraubt ein Blend-Glass vor das Ocular; beobachtet man darauf das von beiden Spiegeln reflectirte Bild der Sonne, und bemerkt man alsdann, dass das Sonnenbild ganz vollkommen scharf begrenzt und regelmässig rund ist; so kann man annehmen, dass alle begrenzenden Oberflächen der Spiegel eben sind.

Ob der grosse Spiegel auf der Ebene des Sextanten auch wirklich senkrecht steht, kann man auf verschiedene Weisen untersuchen; die einfachste Methode ist die folgende, Man stellt die Alhidade $C\ D$ (Fig. 45.), beinahe auf die Mitte des Sextanten-Limbus und alsdann hält der Beobachter sein Auge etwas schief so an den Rand des grossen Spiegels, dass er einen Theil des Limbusbogens zugleich mit dem im Spiegel reflectirten Bilde desselben, sehen kann; zeigt's sich alsdann, dass der unmittelbar gesehene Theil des Bogens mit seinem gespiegelten Theile, ohne die geringste Abweichung, eine einzige Ebene bildet, oder beide wie gegenseitige Verlängerungen erscheinen, so ist diess ein Zeichen, dass der grosse Spiegel auf der Sextanten-Ebene senkrecht steht; bilden dagegen der reflectirte Bogen und der direct gesehene einen Winkel unter einander, so dass zum Beispiel der reflectirte Bogen höher als der wirkliche erscheint, so wird in diesem Falle die vordere Spiegelfläche mit der Sextanten-Ebene nach vornen einen spitzen Winkel bilden; d. h. weniger wie 90° gegen die Sextanten-Ebene nach vornen geneigt sein; wenn aber im entgegengesetzten Falle, der reflectirte Bogen niedriger als der wirkliche erscheint, so wird der Spiegel vom Auge des Beobachters abgerechnet nach hinten gegen die Ebene des Instrumentes geneigt sein. Man kann nun das Instrument in mehreren Lagen des Spiegels prüfen, und zu seiner Berichtigung die Schrauben α, α, α (Fig. 45.) brauchen. Im Nothfalle, kann man unter die Grenzschrauben zwei kleine, gleich-dicke Stückchen Papier unterlegen, wenn nämlich der Spiegel zu sehr nach vornen geneigt ist; oder unter die mittlere Schraube ein solches Stückchen anbringen, wenn er zu sehr nach hinten geneigt sein sollte.

Die eben von uns beschriebene Correction des grossen Spiegels, kann man auch mit Hülfe von zwei gleich hohen Visiren (*a* und *b*. Fig. 46.) machen, übrigens lässt sich auch die Neigung des Spiegels, oder derjenige Winkel selbst messen, welchen die Spiegelebene eigentlich mit seiner Umdrehungsachse bildet; es giebt hierzu, eine sehr einfache Methode, welche von dem Astronomen Preuss in Dorpat herrührt, und die wir hier hersetzen wollen.

Auf einer festen Unterlage, stellt man ein Lineal $A\,a\,b\,B$, (Fig. 47) an welches die 4 senkrechten kleinen Stäbe $A\,A'$, $a\,a'$, $b\,b'$ und $B\,B'$; angebracht sind, horizontal auf, der äusserste von ihnen $B\,B'$ ist seiner Länge nach in sehr kleine Theile,

z. B. halbe Linien eingetheilt und an allen Stäben befinden sich bewegliche Diopter, von welchen die beiden bei A' und B' kleine Kreislöcher haben, die beiden anderen bei a' und b' aber bestehen aus einem kleinen Rahmen, in welchem ein Faden eingespannt ist. Man nimmt nun das Fernrohr vom Sextanten ab, und stellt den Sextanten so auf die Mitte des horizontalen Lineales auf, dass sein grosser Spiegel gerade in derselben Linie und in gleicher Höhe mit den Dioptern ist; darauf wendet man den Spiegel gegen die Diopter A' und a', hält das Auge an die Oeffnung bei A', und stellt die Diopter auf solche Weise, dass der Faden des Diopters a' mit seinem im Spiegel reflectirten Bilde zusammenfällt, und ebenso zu gleicher Zeit, die vom Spiegel reflectirte Oeffnung des Diopters A' von dem Faden des Diopters a' in der Mitte durchschnitten wird. Bemerkt man darauf den Ort auf der Unterlage, wo der Fuss des Sextanten sich befand, durch einen Schnitt, so kann man ihn alsdann wegnehmen, und darauf die Diopter b' und B' in eine gerade Linie mit den Diopteru a' und A' stellen, so dass, wenn man durch die Oeffnung des Diopters B' durchsieht, die beiden Fäden b' und a' zusammenfallen, und die Oeffnung des Diopters A' in der Mitte zu durchschneiden scheinen werden; man liest nun den Theilstrich auf welchen das Diopter B' steht ab, stellt alsdann den Fuss des Sextanten genau auf seinen früheren Ort auf der Unterlage auf, und dreht darauf den Sextanten um 180° auf seinem Fusse herum, so dass nunmehr die Lage des grossen Spiegnls um 180° von der früheren verschieden, und folglich nach den Diopteru b' und B' gewendet ist, und bewegt das Diopter in B' so lange auf und nieder, wobei b' nicht angerührt wird, bis das Auge, welches an der Oeffnung bei B' sich befindet, ganz scharf bemerkt, dass der Faden des Diopters b' das reflectirte Bild der Oeffnung in B' in der Mitte schneidet. Wenn man alsdann wiederum auf dem Stabe B' den Theilstrich abliest, welcher dem Orte des Diopters B' entspricht, so wird der Unterschied zwischen dieser Ablesung und der vorher gemachten, uns zur Bestimmung der Neigung des Spiegels verhelfen, es sei dieser Unterschied $=\beta$: alsdann die Entfernung, zwischen den Diopteru b' und B', in demselben Maasse als β ausgedrückt $=d$, und die gesuchte Neigung des Spiegels, oder der Winkel, den die Ebene des Spiegels mit seiner Umdrehungsachse bildet $=x$, so hat man alsdann:

$$sin\,x = \frac{\beta}{2d}, \text{ oder sehr nahe } x = \frac{\beta}{2d\,sin\,1''};$$

und um so grösser d ist, desto genauer wird man x finden.

Stellung des kleinen Spiegels.

5. Wenn der grosse Spiegel schon auf die Ebene des Sextanten senkrecht aufgestellt ist, so ist es leicht den kleinen Spiegel ebenso aufzustellen; weil man hierzu nur den kleinen Spiegel dem grossen, parallel zu stellen braucht. Man beobachtet nämlich einen deutlichen und sehr entfernten irdischen Gegenstand, oder noch besser irgend einen hellen Stern oder die Sonne; bewegt man nun die Alhidade um den Nullpunkt herum, und lässt sich alsdann dadurch die Coincidenz des directen und gespiegelten Bildes des Gegenstandes genau herbeiführen; so ist dieses ein sicherer Beweis, dass der kleine Spiegel dem grossen parallel ist, und folglich auch auf der Ebene des Sextanten senkrecht steht. Wenn aber die beiden Bilder auf keine Weise durch eine blosse Bewegung der Alhidade zusammenfallen können, so muss man alsdann zuerst durch eine passende Bewegung der Alhidade beide Bilder einander so nahe wie möglich bringen, und darauf sie dadurch genau zur Coincidenz

bringen, dass man eine besondere dazu bestimmte Schraube dreht, welche sich am kleinen Spiegel befindet, und auf die Neigung seiner Ebene wirkt; alsdann wird der kleine Spiegel die richtige Stellung haben.

Stellung des Fernrohres.

6. Um sich zu versichern, ob das Fernrohr richtig gestellt ist, stellt man den Sextanten horizontal auf einen festen Tisch, oder auf ein anderes gutes Stativ auf, und setzt auf dem Limbus des Sextanten zwei gleich hohe Diopter auf (Tab. II. Fig. 46.), welche aus rechtwinklicht gebogenen Messingplatten bestehen. Die Vertical-Seite jedes Diopters bildet einen Rahmen, in welchem ein horizontaler Faden aufgespannt ist, und zugleich so, dass jeder der Fäden sich in gleicher Höhe über dem Limbus des Sextanten befindet; diese Diopter bestimmen nun eine Linie, welche mit der Richtung des Fernrohres parallel werden muss, und visirt man nun mit dem Auge genau an den Fäden der beiden Diopter vorbei, nach einen Punkte eines entfernten irdischen Gegenstandes, welcher auch durch's Fernrohr sichtbar ist, so werden alsdann die Lichtstrahlen, welche von diesem bestimmten Punkte nach dem Auge des Beobachters gehen, der Ebene des Sextanten parallel sein, und wenn daher bei unveränderter Lage des Instrumentes der Beobachter durch's Fernrohr sieht, und der vorher beobachtete Punkt in der Mitte des Raumes im Fernrohre erscheint, der zwischen den horizontalen Fäden im Fernrohre liegt, so kann man sicher sein, dass das Fernrohr mit der Ebene des Instrumentes parallel ist. Im entgegengesetzten Falle aber, muss man die Lage des Fernrohres berichtigen, welches durch gewisse dazu bestimmte Schrauben geschieht; in den Troughton'schen und manchen anderen englischen Instrumenten, sind diese Schrauben sehr klein und

befinden sich an dem Ringe, in welchen das Fernrohr eingeschraubt wird; in diesem Ringe *a b c d* (Fig. 48.) sind kleine Spitzen *a* und *c* angebracht, welche in die ihnen entsprechenden Vertiefungen in dem Kreis-Umfange *A B C D* einpassen und das Fernrohr unterstützen; *a* und *c* liegen in einer Linie die mit der Ebene des Sextanten parallel ist, um welche herum man das Fernrohr etwas bewegen kann, indem man eine der Schrauben *d* oder *b* löst, und die andere anzieht. In den Gambey'schen Sextanten ist eine andere Vorrichtung angebracht, welche weit bequemer ist und deren nähere Wirkung beim ersten Blicke auf das Instrument von selbst klar wird.

Bestimmung des Anfanges der Theilung oder des Index-Fehlers.

7. Hierzu richtet man das Fernrohr auf einen recht deutlichen entfernten Gegenstand, z. B. auf einen hellen Stern, und stellt die Alhidade sehr nahe auf 0° 0′, indem man sie darauf mit Hülfe der Micrometer-Schraube in diejenige Lage bringt, bei welcher das directe und reflectirte Bild dieses Gegenstandes genau zusammenfällt: liest man alsdann die Angabe der Theilung durch den Nonius ab, so wird diese den Anfang der Theilung auf dem Limbus bestimmen, von welchem aus man alle gemessenen Winkel auf dem Sextanten abzählen muss. Aber der Limbus auf dem Sextanten, wird gewöhnlich von rechts aus nach links eingetheilt, und die Künstler bezeichnen den wahren Anfang der Theilung sehr nahe mit 0° 0′; auf der rechten Seite dieses 0° 0′ ist ebenfalls eine kleine Theilung angebracht*),

*) Die Engländer nennen diesen Theil des Gradbogens *the excedent Limb*, oder *the arc of excess.*

welche man also negativ zählen muss, wenn man diejenige auf der linken Seite fortlaufende als positiv annehmen will. Wenn es sich nun ereignen sollte, dass der wahre Anfang der Theilung, oder die ihm entsprechende Zahl von Minuten und Secunden, sich auf der negativen Selte des Bogens befindet, so muss man um die wahren gemessenen Winkel zu erhalten, zu allen Ablesungen auf dem Limbus des Sextanten, die erwähnte Zahl zulegen; denn alsdann hat der Künstler $0^0 0'$ zu weit nach links angebracht, und folglich werden die unmittelbar abgelesenen Winkel zu klein werden. Wenn dagegen den wahren Anfang der Theilung auf dem Limbus nach rechts von $0^0 0'$ abliegt, so muss man von allen Ablesungen des Sextanten diese Zahl abziehen. Diese Zahl, welche man entweder zu den Ablesungen zuzulegen oder von ihnen abzuziehen hat, heisst der Index- oder Collimations-Fehler des Instrumentes; im ersten Falle ist er positiv, im anderen negativ.

Man kann nun den Index-Fehler sehr bequem durch Beobachtungen der Sonne bestimmen. Man stellt nämlich entweder das Blendglass vor das Ocular, oder die Farbengläser vor die beiden Spiegel, bringt darauf den rechten Rand des directen Sonnenbildes, mit dem linken Rande des reflectirten Bildes in Berührung, und liest die Angabe des Nonius ab; alsdann lässt man, durch eine Bewegung der Alhidade, vermittelst der Micrometerschraube die beiden Sonnenbilder übereinander gehen, bringt sie ferner auf der anderen Seite zur Berührung und liest am Nonius wieder ab; es sei die erste Ablesung $= + O'$; die zweite $= + O''$; so wird alsdann der Index-Fehler $O = - \frac{1}{2}(O' + O'')$; hierbei muss man aber bemerken auf welcher Seite von $0^0 0'$ sich die Ablesungen O' und O'' befinden; denn hiervon hängt es ab, ob der Index-Fehler wirklich positiv oder negativ genommen werden muss. Der halbe Unterschied der

Werthe O' und O'' bestimmt den scheinbaren Durchmessser der Sonne.

Beispiel. Bei der Berührung der entgegengesetzten Ränder beider Sonnenbilder, wurde auf dem Verniere abgelesen

bei der Berührung *diesseits* des Nullpunktes	$O' = +\,0^{0}\,25'\,15''$	+, weil die Theilung auf der linken Seite von 0^{0} war
bei der Berührung der anderen beiden Ränder, oder *jenseits* des Nullpunktes	$O'' = -\,0^{0}\,38'\,0''$	—, weil die Theilung rechts von $0^{0}\,0'$ ablag *)

Index-Fehler . . $= +\,0^{0}\;6'\,22''.5 = -\,\frac{1}{2}\,(O' + O'')$;
halber Unterschied $= +\,0^{0}\,31'\,37''.5 = +\,\frac{1}{2}\,(O' - O'') =$ dem scheinbaren Durchmesser der Sonne.

Auf ganz ähnliche Weise, kann man auch den Index-Fehler aus der Beobachtung eines entfernten irdischen Gegenstandes ableiten, wenn jedoch dieser Gegenstand nicht sehr weit entfernt ist, so wird man eine etwas andere Grösse finden, wie wir schon in §. 1. S. 302. erwähnt haben. Misst man den Winkel zwischen einem terrestrischen Gegenstande und der Sonne mit Hülfe eines Sextanten, so muss man

---

*) In diesem Falle wurde auf dem Nonius unmittelbar $22'\,0''$ abgelesen; da aber die Theilung auf der negativen Seite des Limbus des Sextanten von $0^{0}\,0'$ rechts lag, während die Theilung auf dem Nonius immer nach links zunimmt, so bedeutet eigentlich diese Ablesung, dass der Nullpunkt des Vernieres, um $22'\,0''$ vom Theilstriche von $60'$, oder von 1^{0}, auf dem Theile des Limbus, welcher sich auf der rechten Seite des Nullpunktes des Limbus befindet, entfernt war; daher war in diesem Falle die Entfernung des Nullpunktes des Vernieres vom Nullpunkte des Sextanten auf der rechten Seite des letzteren $= 60' - 22'\,0''$ oder $38'\,0''$.

stets zu dem unmittelbar abgelesenen Winkel denjenigen Index-Fehler mit dem passenden Zeichen hinzulegen, welcher aus der Beobachtung des Gegenstandes abgeleitet wird, welcher bei der Winkelmessung direct, oder unmittelbar durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels gesehen wurde.

Von der Excentricität des Sextanten.

8. In den meisten Sextanten bringt die Excentricität vielleicht die bedeutendsten Fehler hervor; welcher überhaupt davon herrührt, dass die Umdrehungsachse des grossen Spiegels nicht mit dem Centrum des eingetheilten Gradbogens zusammenfällt; wir haben jedoch schon in §. 84. Seite 217. Bd. I. gesehen, welchen Einfluss die Excentricität auf jeden mit Hülfe eines Kreisbogens gemessenen Winkels ausüben kann. Um diesen Fehler nun bei einem Sextanten zu bestimmen, misst man, nachdem er gut berichtigt, zwei genau bekannte Winkel; die Unterschiede der beobachteten und wahren Werthe, zeigen uns den Einfluss der Excentricität, auf diese Winkel, und alsdann kann man nach der in §. 84. S. 217. Bd. I. angegebenen Methode, sich leicht eine kleine Tafel anfertigen, welche die Correctionen für alle möglichen Winkel enthält. Wir wollen also hier nur darüber ausführlicher sprechen, wie man die Fehler eines, mit dem Sextanten gemessenen Winkels untersuchen kann.

Mit einem guten Theodoliten misst man zwei oder mehrere horizontale Winkel, welche zwischen irgend welchen deutlichen terrestrischen Gegenstande eingeschlossen sind, und beobachtet zugleich ihre Zenithdistanzen. Es sei Z (Fig. 53.) das Zenith, A und B irdische Objecte, zwischen welchen man, mit einem Theodoliten den horizontalen Winkel γ gemessen hat, und es seien ihre Zenithdistanzen $ZA = 90^0 - h$, und $ZB = 90^0 - H$. Nun beobachtet man mit einem

Sextanten den Winkel in der Ebene, welche durch das Centrum des Instrumentes und die Objecte A und B selbst geht, und um nun den mit Hülfe des Sextanten gemessenen Winkel $A\,B = s$ mit dem durch den Theodoliten gemessenen $A'\,B' = \gamma$ vergleichen zu können, muss man den Winkel γ mittelst der gemessenen Höhen $A\,A' = h$, und $B\,B' = H$, auf die Ebene der Objecte reduciren. Da aber h und H immer sehr klein sein werden, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass:

$$s = \gamma + \left(\frac{h - H}{2}\right)^2 \sin 1'' \; cotg \tfrac{1}{2}\gamma - \left(\frac{h + H}{2}\right)^2 \sin 1'' \; tg \tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, wo h und H in Secunden ausgedrückt werden müssen. *)

Vergleicht man nun den aus den Beobachtungen mit Hülfe eines guten Theodoliten gefundenen Werth von s, mit seinem Werthe, wie er mit dem Sextanten gefunden wurde, so findet man dadurch den Einfluss der Excentricität auf den Winkel s.

---

*) Aus dem sphärischen Dreiecke $Z\,A\,B$ folgt sogleich:

$$\cos s = \sin h \sin H + \cos h \cos H . \cos \gamma$$

$$\cos s - \cos \gamma = \sin h \sin H - 2 \cos \gamma \left(\sin^2 \tfrac{1}{2} h + \sin^2 \tfrac{1}{2} H - . .\right)$$

wegen der Kleinheit von h und H, kann man jedoch annehmen, dass:

$$\sin h = h \sin 1'', \ \sin H = H \sin 1'', \text{ folglich:}$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - s) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + s) = h . H . \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2} \cos \gamma \,(h^2 + H^2) \sin^2 1''.$$

$$= h . H . \sin^2 1'' (\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma + \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\sin^2 1''}{2}(h^2 + H^2)(\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= \frac{\sin^2 1''}{2}(h + H)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\sin^2 1''}{2}(h - H)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma;$$

nun ist aber $\sin \frac{1}{2}(s + \gamma)$, beinahe gleich $\sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma$, und $2 \sin \frac{1}{2}(\gamma - s)$, beinahe $= (\gamma - s) \sin 1''$; dividirt man daher alsdann beide Seiten der Gleichung durch $\sin \gamma . \sin 1''$, so erhält man den im Texte angegebenen Ausdruck.

9. Es giebt noch andere Methoden um die Richtigkeit zu untersuchen, mit welcher die Winkel mittelst der Sextanten gemessen werden.

1stens Man wählt einen hinreichend grossen freien Raum in der Ebene, und stellt im Umfange eines Kreises herum, dessen Radius wenigstens 700 Fuss lang ist, gleich weit von einander drei Signale auf; in dem Centrum dieses Kreises misst man mit einem Sextanten, die Winkel, welche zwischen diesen Signalen enthalten sein werden; jeder aus ihnen, wird sehr nahe 120°, die Summe aller drei aber, genau gleich 360° werden müssen; findet dieses nicht statt, so wird die Abweichung dieser Summe von 360°, gleich dem dreifachen Fehler des Winkels von 120° werden. Stellt man nun darauf am Umfange dieses Kreises herum 4, 6 oder 8 u. s. w. Signale auf, so kann man ganz ähnlich die Fehler der Winkel 90° oder 60°, oder 45° u. s. w. bestimmen. Bei der Beobachtung der Winkel muss man den Sextanten auf ein Stativ befestigen, und sorgfältig darauf achten, dass der Fuss des grossen Spiegels, durch welchen seine Umdrehungsachse durchgeht, immer ein und demselben constanten Punkte entspricht; ferner muss man ebenso darauf achten, dass die beobachteten Punkte der Signale in einem Niveau liegen

2tens In einer heiteren Nacht, misst man mittelst eines Sextantens, die Winkel zwischen einigen gut bestimmten, sehr hellen Sternen, und schreibt hierbei den Stand des Barometers und Thermometers auf, sowie auch die Zeit der Beobachtung nach einem Chronometer, dessen Uhrcorrection gegen Sternzeit nahezu bekannt ist; alsdann kann man daraus mit Hülfe der Breite des Ortes, der Sternzeit der Beobachtung, der Declination, und der geraden Aufsteigung der Gestirne, zuerst die wahren, darauf aber die scheinbaren Höhen h und H, der beiden beobachteten Sterne und ebenso ihre Azimuthe berechnen; alsdann kann man, ähnlich wie bei der Berechnung von Mondsdistanzen, von welchen unten die Rede sein wird, den scheinbaren Winkelstand dieser Sterne von einander bestimmen.

Vergleicht man die berechnete scheinbare Winkelentfernung mit der wirklich beobachteten, so wird man aus dem Unterschiede beider, den Fehler des Sextanten, bei dem entsprechenden Winkel erhalten.

Obgleich es nun zur Bestimmung der Excentricität des Instrumentes genügend ist, nur zwei zwischen einander hinlänglich verschiedene Winkel zu beobachten, so ist es doch besser, viele verschiedene Winkel, deren genauer Werth bekannt ist, mit Hülfe des Sextanten zu untersuchen, und die Excentricität nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Hat man die gemessenen Winkel vom Einflusse der Excentricität befreit, so kann man alsdann mit Hülfe ihrer entsprechenden wahren Werthe, auf den Grad der Genauigkeit der Theilung selbst schliessen. Um die Richtigkeit des Nonius zu prüfen, muss man seinen Nullpunkt immer ganz genau auf die Theilstriche 0°, 10°, 20° u. s. w. des Sextantenlimbus einstellen, und darauf jedesmal das andere Ende ablesen. Nimmt man dann Rücksicht auf die Wirkung der Excentricität bei 0°, 10°, 20° u. s. w. und auf ihre Wirkung auf den Bogen, bei welchem sich das Ende des Nonius befindet, so erhält man viele Bestimmungen für den Werth des Noniusbogens, deren Mittelzahl uns dann seinen wahrscheinlichsten Werth giebt.

Untersuchung der gefärbten Gläser.

10. Wenn diese Gläser nicht von parallelen Ebenen begrenzt sind, so werden die auf sie einfallenden Lichtstrahlen mit den ausfallenden nicht mehr parallel; da aber diese Gläser ihre Lagen gegen die durch sie gehenden Strahlen niemals ändern, so muss die prismatische Gestalt der gefärbten

Gläser einen constanten Fehler, sowohl bei der Bestimmung des Indexfehlers, als auch bei der Messung irgend eines Winkels hervorbringen. Wenn man also Sonnenhöhen beobachtet, so ist es nur nöthig, vermittelst derselben gefärbten Gläser den Indexfehler zu untersuchen, vermittelst welcher man die Sonnenhöhen misst; alsdann hat die Unrichtigkeit dieser Gläser keinen Einfluss auf die aus solcher Beobachtungen abgeleitete Höhe der Sonne. Im Falle aber, wo Winkel zwischen der Sonne und dem Monde, oder einem irdischen Gegenstand gesucht werden, ist eine solche Elimination nicht mehr möglich, weil man in diesem Falle nur die von der Sonne herkommenden Strahlen durch die gefärbten Gläser gehen lassen darf, und daher entweder die Gläser P (Fig. 45.), oder die Gläser Q allein vorschieben muss, je nachdem man die Sonne direct, oder an beiden Spiegeln doppelt reflectirt beobachtet. Bei solchen Messungen ist es also wichtig, die Richtigkeit der gefärbten Gläser zu prüfen; die Mittel dazu werden wir, kurz nach der Anleitung Bohnenbergers, hier anführen.

Am bequemsten lässt sich der Fehler der gefärbten Gläser entdecken und bestimmen, wenn die Gläser in ihren Fassungen um ihre Mittelpunkte gedreht, oder mit ihrer Fassung umgelegt werden können, so dass der obere Theil derselben nach unten kommt, und der rechte links, wie es bei den Borda'schen, Ertel'schen und anderen Instrumenten leicht zu machen ist. Die Gläser werden dann vermittelst viereckiger Zapfen in Fassungen eingesteckt, welche auf dem Körper des Instrumentes angebracht sind. Wenn man den Indexfehler vermittelst der Sonne bestimmt hat, und alsdann die Gläser, wie gesagt, umgekehrt hat, so wird der von den gefärbten Gläsern herrührende Fehler auf die andere Seite fallen; bestimmt man also den Index-Fehler noch einmal, so muss er eben so viel grösser oder kleiner herauskommen, als er anfangs zu klein oder zu gross war; der halbe Unterschied beider Angaben giebt sogleich den Fehler der gefärbten Gläser *).

Wenn man die Gläser nicht umkehren kann, so muss man ihre Fehler auf folgende Art zu bestimmen suchen. Zuerst bestimme man vermittelst des Mondes den Index-Fehler ohne alle gefärbten Gläser; alsdann suche man denselben, nachdem man das hellste grüne Glass bei dem kleinen Spiegel, und hernach bei dem grossen vorgeschoben hat; so bekommt man nach und nach die Fehler dieser Gläser. Ebenso verfahre man mit den anderen etwas dunkleren grünen Gläsern. Wenn man nun den Fehler jedes einzelnen Glases auf diese Art gefunden hat, so suche man den Index-Fehler vermittelst der Sonne, indem man die dunkelen braunen und die hellsten grünen Gläser gebraucht. Dieser Index-Fehler mit dem verglichen, den man ohne die gefärbten Gläser, vermittelst des Mondes gefunden hat, giebt den Fehler der beiden Gläser zusammen. Da man aber den Fehler der grünen Gläser schon kennt, so kann man auch den Fehler der dunkelen Gläser bestimmen.

Vom Einflusse der unrichtigen Aufstellung des Fernrohres und des Spiegels auf die mit Hülfe eines Sextanten gemessenen Winkel.

11. Bohnenberger war der erste, welcher diesen Einfluss sorgfältig und umständlich untersucht hat; später ist jedoch

*) Wenn die gefärbten Gläser umzukehren sind, so kann man den Einfluss der Unrichtigkeit dieser Gläser noch folgendermaassen wegschaffen. Man beobachtet den Winkel zwischen der Sonne und dem Monde, oder einem irdischen Gegenstande, erst bei einer Lage der gefärbten Gläser; alsdann

noch eine vollständigere und allgemeinere Behandlung desselben Gegenstandes von Encke bekannt gemacht worden. Bemerkt man, dass es sich hier, sowie in allen anderen Fällen, nicht darum handelt die absolute Lage der Linien oder Ebenen im Raume, sondern nur ihre Richtungen zu bestimmen; so wird man leicht einsehen, dass diese Richtungen am bequemsten ausgedrückt werden, wenn man einen beliebigen Punkt als Centrum einer Kugel annimmt, und diese Kugel mit einem willkührlichen Radius beschrieben denkt. Die den gegebenen Linien parallelen Radien, werden alsdann unter einander dieselben Winkel, wie die Linien selbst bilden. Die Bögen der grössten Kreise, welche zwischen den Endpunkten solcher Radien liegen, bestimmen das Maass der zu untersuchenden Winkel. Ebenso werden auch die Bögen, welcher zwischen Radien enthalten sind, die auf gegebenen Ebenen senkrecht stehen, wiederum die Neigung dieser Ebenen gegen einander messen. Hieraus sieht man, dass alle gesuchten Winkel sehr leicht durch die sphärische Trigonometrie zu berechnen sein werden; eine sehr elegante und ganz strenge Auflösung der Aufgabe die Fehler eines mit einem Sextanten gemessenen Winkels zu berechnen, welche von der unrichtigen Stellung der beiden Spiegel und des Fernrohres herrühren, hat Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1830 gegeben; anstatt dieser analytischen Auflösung hat Struve aber eine andere, auf mehrere Constructionen beruhende, sehr einfache geometrische Auflösung vorgeschlagen.

Wir werden hier aber, mit Hülfe nur, von einer einzigen Construction die Sache noch einfacher darstellen, wo-

---

kehrt man die Gläser um, und wiederholt ebensoviele Beobachtungen bei dieser neuen Lage der Gläser; das Mittel aus solchen Beobachtungen, wird von der Unrichtigkeit der Gläser frei sein, nur muss man dabei den Index-Fehler gebrauchen, welcher zugleich unabhängig davon bestimmt ist.

bei wir einen für die Praxis vollkommen hinreichenden Grad der Genauigkeit im Auge behalten werden.

Es sei O der Punkt, welcher dem Centrum des Sextanten entspricht (Fig. 49.) und um welchen, eine Kugel mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben ist; die Ebene, in welcher sich der Limbus des Sextanten befindet, bilde mit dieser Kugel bei ihrem Durchschnitte irgend einen grössten Kreis $U P C Q$. Wenn nun das Fernrohr und beide Spiegel richtig stehen, so werden alle Radien, welche den Lichtstrahlen parallel laufen, die von dem beobachteten Gegenstande ausgehen, sich in der Ebene des grössten Kreises $U P C Q$ befinden. Wir wollen aber zuerst den Fall untersuchen, wenn die Spiegel zwar senkrecht auf der Ebene des Instrumentes stehen, die Gesichtslinie oder die Achse des Fernrohres jedoch mit dieser letzteren Ebene nicht parallel ist. Alsdann wird der Radius, welcher von O, aus der Richtung der Gesichtslinie parallel läuft, die Oberfläche der Kugel in irgend einem Punkte A' treffen, ausserhalb der Ebene des grössten Kreises $U P C Q$; der Bogen $A A' = i$, welcher senkrecht auf letzterem Kreise steht, drückt alsdann die Neigung der Gesichtslinie gegen die Ebene des Sextanten aus. Es sei der Punkt p auf der Kugeloberfläche, der Pol der Ebene, welche dem kleinen Spiegel parallel ist, und es entspreche dieser Pol der Rückseite (d. h. der dem direct gesehenen Gegenstande zugekehrten Seite) des kleinen Spiegels und ebenso sei P der Pol der mit dem grossen Spiegel parallelen Ebene; und zwar der Pol, welcher der reflectirenden Fläche entspricht. Beide Punkte p sowohl als P, werden nach unserer Annahme inder Ebene des grössten Kreises $U P C Q$ liegen, und der Kürze halber, wollen wir p, den Pol des kleinen, P aber den Pol des grossen Spiegels nennen.

Der Bogen $p A'$ misst alsdann den Winkel zwischen der Gesichtslinie und der senkrechten auf dem kleinen Spiegel; wenn wir nun diesen Bogen nach der entgegengesetzten Seite von p aus, verlängern und $p\,B' = p\,A'$ machen, ferner B' und P durch den Bogen $B'P$ verbinden und ihn soweit verlängern bis $P\,C' = B'\,P$, so muss C' der Durchschnittspunkt der Kugeloberfläche mit demjenigen Radius, sein, welcher der Gesichtslinie parallel ist, welche vom Gegenstande ausgehend, auf den grossen Spiegel fällt und alsdann mittelst doppelter Reflexion in das Gesichtsfeld des Fernrohres gebracht wird; denn der Einfalls-Winkel dieses Lichtstrahles ist gleich dem Bogen $P\,C'$; und da nun $P\,B' = P\,C'$ ist, so wird B' die Lage des Strahles, nach seiner Reflexion im grossen Spiegel, bestimmen; alsdann wird dieser Strahl auf den kleinen Spiegel unter einem Winkel einfallen, der gleich dem Bogen $B'p$ ist und endlich von diesem wiederum unter einen Winkel zurückgeworfen werden, der gleich dem Bogen $p\,A' = B'p$ ist. Auf diese Weise stellen also A' und C' die entsprechenden Oerter der Gegenstände auf der Kugelfläche dar, von denen der eine den direct erblickten, der andere aber den durch gedoppelte Reflexion gesehenen, bezeichnet; auf diese Weise muss also der Bogen $A'\,C' = x$ den wahren Winkel zwischen beiden Gegenständen ausdrücken; während der mit Hülfe des Sextanten beobachtete gleich dem doppelten Bogen $P\,p$, oder dem doppelten Winkel gleich ist, welchen die Ebenen beider Spiegel mit einander bilden. Aus den Punkten A', B' und C', fälle man die senkrechten Bögen $A\,A'$, $U\,B'$ und $C\,C'$ auf die Ebene des Sextanten, und setze $2\,P\,p = s$; $A\,p = \beta$; so hat man aus der Congruenz der sphärischen Dreiecke $p\,A\,A'$ und $p\,B'\,U$, sogleich $B'\,U = A\,A' = i =$ der Neigung des Fernrohres gegen die Ebene des Sextanten und ebenso $U\,p = A\,p = \beta =$ dem Winkel, welcher zwischen der Senkrechten auf dem kleinen Spiegel und der Richtung des Fernrohres enthalten sein würde, wenn letzteres mit der Ebene des Sextanten wirklich parallel wäre. Aber $P\,A$

$= p\,P - p\,A = \frac{1}{2}\,s - \beta$ und die beiden rechtwinklichten sphärischen Dreiecke $U\,B'\,P$ und $P\,C\,C'$ sind congruent, folglich $i = B'\,U = C\,C'$; $C\,P = U\,P = A\,p + p\,P = \beta + \frac{1}{2}\,s$; und $A\,C = A\,P + C\,P = s$. Nimmt man nun an, dass R der geometrische Pol des grössten Kreises $U\,P\,C\,Q$, oder der Sextantenebene $U\,P\,C\,Q$ ist; so werden die durch A' und R, C' und R durchgelegten grössten Kreise $A'\,R$ und $C'\,R$ auf dem Kreise $U\,P\,C\,Q$ senkrecht stehen, und ihn in den Punkten A und C schneiden; folglich hat man dann $A\,R = C\,R = 90^0$, $A'\,R = C'\,R = 90^0 - i$ und der Winkel $A\,R\,C$ wird gleich dem Bogen $A\,C = s$; so dass aus der Auflösung des Dreieckes $A'\,C'\,R$, in welchem $A'\,C' = x$, sogleich folgt:

$$cos\,x = sin^2\,i + cos^2\,i\;cos\,s = cos\,s + 2\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,s\;sin^2\,i;$$

da nun i immer ein sehr kleiner Winkel sein wird, so kann man statt dieser Gleichung mit genügender Genauigkeit folgende annehmen:

$$x - s = -\,i^2.\,sin\,1''.\,tg\,\tfrac{1}{2}\,s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A);$$

hieraus sieht man, dass der Fehler welcher von der Neigung des Fernrohres gegen die Ebene des Sextanten herrührt, zugleich mit dem gemessenen Winkel wächst, und da immer $\frac{1}{2}\,s < 90^0$ ist, so wird der wahre Winkel immer zu klein gemessen. Bei $i = 10' = 600''$ und $s = 140^0$; wird der Fehler sehr nahe $= -\,4.''8$ werden; für kleinere Winkel wird er noch kleiner, und da in der Praxis i selten grösser als $4'$ ist, so ist der Einfluss eines solchen Werthes von i verschwindend.

Wir wollen jetzt die Aufgabe allgemeiner fassen, und annehmen, dass das Fernrohr gegen die Ebene des Sextanten um den Winkel $= i$ geneigt ist; dass ferner der grosse Spiegel gegen die Linie, welche senkrecht auf der Ebene des Sextanten steht, um den Winkel $= l$ geneigt, und endlich der kleine Spiegel von der senkrechten Lage gegen die Sextanten-

Ebene um den Winkel $= k$ abweicht. Bei jedem Sextanten werden diese Winkel sehr klein sein, und um daher unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir dieses durchweg in den folgenden Untersuchungen annehmen.

Man denke sich nun wieder eine Kugel mit beliebigem Halbmesser um das Centrum unseres Instrumentes beschrieben, und bilde sich eine Figur, welche derjenigen ähnlich ist, die wir schon oben erwähnt haben. Es seien p' und P' (Fig. 50.) die entsprechenden Pole des kleinen und grossen Spiegels auf der Kugelfläche, A' der direct gesehene Gegenstand in der Richtung der Absehenslinie des Fernrohres, und es sei der grösste Kreis MAL in der Ebene des Sextanten gelegen, wobei wir ausserdem noch annehmen wollen, dass die drei Punkte p' A' und P' über der Ebene des Sextanten MAL liegen.

Man denke sich nun, dass die Bögen $p\,p'$, $A\,A'$ und $P\,P'$ auf dieser Ebene senkrecht stehen, so wird $A\,A' = i$ $=$ der Neigung des Fernrohres, $P\,P' = l =$ der Neigung des grossen Spiegels und endlich $p\,p' = k =$ der Neigung des kleinen Spiegels gegen die Senkrechte auf der Ebene des Sextanten sein. Um den Punkt C', oder den Punkt auf der Kugeloberfläche zu finden, welcher dem Orte des durch doppelte Reflexion gesehenen Gegenstandes entspricht, nehme man auf der Verlängerung von $p'\,A'$ den Bogen $p'\,B' = p'\,A'$, und verbinde darauf B' und P' durch den Bogen $P'\,B'$ indem man auf dessen Verlängerung den Bogen $P'\,C' = B\,P'$ macht; alsdann wird C' der gesuchte Punkt sein, und ferner drückt der Bogen $A'\,C' = x$, den wahren Winkel, zwischen den im directen und reflectirten Bilde beobachteten Gegenständen aus; der Winkel s aber, der mit Hülfe des Sextanten bestimmt wurde, ist gleich dem doppelten Bogen $P\,p$. Nun sei $p\,P = \alpha$, oder $2\,\alpha = s$; und um x mit Hülfe von s zu bestimmen, wollen wir zuerst den Bogen $p'\,P' = \alpha'$ mit Hülfe von $\frac{1}{2}\,s$ oder α berechnen. Nimmt man dazu an, dass

R der geometrische Pol der Sextantenebene, oder des grössten Kreises MAL ist, so wird $pR = PR = 90^0$; $p'R = 90^0 - k$, $P'R = 90^0 - l$, und Winkel $p'RP' = pP = \alpha$, folglich erhält man aus dem sphärischen Dreiecke $p'RP'$:

$$\cos p'P' = \cos\alpha' = \sin k \sin l + \cos k \cos l \cos\alpha;$$

aber wegen der Kleinheit der Winkel k und l, kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\sin k = k \sin 1''$; $\sin l = l \sin 1''$; $\cos k = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 1''$; $\cos l = 1 - \frac{1}{2} l^2 \sin^2 1''$; vernachlässigt man nun das Glied $\frac{1}{4} k^2 l^2 \sin^4 1''$, so kömmt:

$$\cos\alpha' = k\,l \sin^2 1'' + \cos\alpha - \tfrac{1}{2}(k^2 + l^2)\sin^2 1'' \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha' - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')$$
$$= k\,l \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}(k^2 + l^2)\sin^2 1'' \cos\alpha.$$

Da nun α' sehr nahe an α ist, so kann man annehmen, dass $2 \sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = (\alpha - \alpha')\sin 1''$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha)' = \sin\alpha$; folglich

$$\alpha' - \alpha = \left(\frac{k^2}{2} + \frac{l^2}{2}\right)\frac{\sin 1''.\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{k\,l \sin 1''}{\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (B).$$

Zieht man aus A', den Bogen $NA' = \eta$ senkrecht auf $p'P'$, so bezeichnet η die Neigung des Fernrohres gegen den grössten Kreis $Mp'P'L$, und der Bogen $A'C' = x$ (Fig. 50.) wird sich in derselben Abhängigkeit zu $pP' = \alpha'$ und $A'N = \eta$ befinden; wie sich in (Fig. 49.) Seite 322. der Bogen $A'C' = x$ zum Bogen pP und zu AA' befand; aber dort bezeichneten wir durch s den doppelten Bogen $pP = \alpha$ (Fig. 49.); folglich müssen wir die auf Seite 324. gefundene Formel (A), in unserem Falle so umändern, dass $2\alpha'$ jetzt für s, und η für i gesetzt wird, wodurch also:

$$A'C' - 2P'p' = x - 2\alpha' = -\eta^2 \sin 1''.\,tg\,\alpha'.$$

Aber wegen der sehr geringen Neigung der Kreise $M p' P'$ und $M p P$ gegen einander, wird ein Bogen der auf einem dieser Kreise senkrecht steht, es sehr nahe auch auf dem anderen sein; bezeichnet man nun $A A'$ und $N A'$ nach dem früheren, durch i und η, und den senkrechten Bogen $A N$ auf $p P$, durch ξ, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\eta = N A' = N A - A A' = \xi - i$ (Fig. 50). Nimmt man nun an, dass $p A = \beta$ und $p P = \alpha$ und ferner noch $M p = z$, so erhält man aus den sphärischen Dreiecken $M p p'$, $M P P'$ und $M A N$:

$$cotg\, M = cotg\, k . sin\, z = cotg\, l . sin\, (z + \alpha) = cotg\, \xi . sin\, (z + \beta),$$

so dass folglich auch:

$$tg\, z = \frac{tg\, k . sin\, \alpha}{tg\, l - tg\, k\, cos\, \alpha} = \frac{tg\, k . sin\, \beta}{tg\, \xi \quad tg\, k\, cos\, \beta}.$$

Vernachlässigt man die kleinen Werthe 3ter Ordnung, so kann man statt der Tangenten von k, l und ξ die entsprechenden Bögen selbst setzen; wodurch

$$\frac{k\, sin\, \alpha}{l - k\, cos\, \alpha} = \frac{k\, sin\, \beta}{\xi - k\, cos\, \beta};$$

$$\xi = \frac{1}{sin\, \alpha} [l\, sin\, \beta + k\, sin\, (\alpha - \beta)]$$

und da $\eta = \xi - i$, so hat man ferner:

$$\eta = \frac{1}{sin\, \alpha} [l . sin\, \beta + k . sin\, (\alpha - \beta) - i . sin\, \alpha].$$

Nun ist α sehr nahezu $= \alpha'$, folglich kann man $x - 2\alpha' = - \eta^2\, sin\, 1''\, tg\, \alpha$ setzen und dann ist ferner: $x - 2\, \alpha = 2\alpha' - \eta^2\, sin\, 1''\, tg\, \alpha - 2\, \alpha$; setzt man statt $2\, \alpha' - 2\, \alpha$ seinen Werth aus Gleichung (B), so erhält man:

$$x - 2\alpha = (k^2 + l^2)\frac{\sin 1'' \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2kl\sin 1''}{\sin\alpha}$$

$$- [l.\sin\beta + k.\sin(\alpha - \beta) - i.\sin\alpha]^2 \frac{\sin 1''}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Der Winkel x ist der gesuchte genaue Winkel; $2\alpha = s$ aber, ist der unmittelbar aus den Beobachtungen gefundene Werth desselben, also wird der Fehler in s gleich:

$$x - s = [(k^2 + l^2)\cos\tfrac{1}{2}s - 2kl]\frac{\sin 1''}{\sin\frac{1}{2}s} -$$

$$- [l.\sin\beta + k.\sin(\tfrac{1}{2}s - \beta) - i\ \sin\tfrac{1}{2}s]^2 \frac{2\sin 1''}{\sin s} \ .\ .\ (C).$$

Diese Formel stimmt, in den Grenzen der von uns angenommenen Näherung, mit dem genauen Ausdrucke überein; welchen Encke im Anhange zum Berliner astronomischen Jahrbuche für 1830 angegeben hat.

Die Werthe i und k sind constante Winkel für einen bestimmten Sextanten, wenn aber die Umdrehungsachse der Alhidade und der grosse Spiegel nicht senkrecht auf der Ebene des Sextanten steht, so wird der Werth l für jeden gemessenen Winkel ein anderer sein; die Künstler aber verwenden alle mögliche Sorgfalt darauf um die Umdrehungsachse senkrecht auf die erwähnte Ebene zu machen; verlässt man sich darauf, so wird man die kleine Veränderlichkeit von l vernachlässigen können.

Es ist bekannt, dass die leichteste Berichtigung des Sextanten darin besteht, den kleinen Spiegel dem grossen vollkommen parallel zu stellen, (Seite 310. und 311.); in diesem Falle, hat man $k = l$ und dann findet man aus der Gleichung (C):

$$x - s = -2\,tg\,\tfrac{1}{4}s\,[l^2 +$$

$$+ \sec\tfrac{1}{2}s\,(l.\cos(\tfrac{1}{4}s - \beta) - i.\cos\tfrac{1}{4}s)^2]\sin 1''\ .\ .\ (D).$$

Wenn $i = o$ und $l = o$, so hat man endlich aus der Gleichung (C):

$$x - s = k^2 \sin 1'' \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} s}{\sin \frac{1}{2} s} - \frac{2 \sin^2 (\frac{1}{2} s - \beta)}{\sin s} \right\};$$

$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} [\cos^2 \tfrac{1}{2} s - \sin^2 (\tfrac{1}{2} s - \beta)];$$

$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} [\cos^2 \tfrac{1}{2} s - \sin^2 \tfrac{1}{2} s \cos^2 \beta - \cos^2 \tfrac{1}{2} s \sin^2 \beta$$

$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} s . \sin \beta \cos \beta];$$

$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} \left\{ \cos^2 \beta \cos s + \tfrac{1}{2} \sin s \sin 2 \beta \right\};$$

oder endlich wird man haben:

$$x - s = 2 k^2 \sin 1'' \cos^2 \beta . \operatorname{cotg} s + k^2 \sin 1'' . \sin 2 \beta .$$

Das letzte Glied im zweiten Theile dieser Gleichung ist für jeden Winkel s, eine **constante** Grösse, und ist daher schon folglich in der Bestimmung des Index-Fehlers miteinbegriffen, da aber die abgelesenen Winkel für diesen Index-Fehler verbessert werden, so muss man bei der Berechnung eines jeden gemessenen Winkels s, nur den im ersten Gliede des zweiten Theiles der Gleichung abgeleiteten Ausdruck berücksichtigen, so dass alsdann:

$$x - s = 2 k^2 \sin 1'' . \cos^2 \beta \operatorname{cotg} s .$$

In vielen Sextanten ist $\beta = 17^0$ oder 15^0; nimmt man an, dass $k = 1' = 60''$, und $s = 0^0\ 30'$, so wird der Fehler im Winkel s kleiner als $4''$ werden, beim Wachsen der Winkel nimmt dieser Fehler rasch ab, und verschwindet beinahe gänzlich bei grossen Winkeln.

Practische Bemerkungen über die Bestimmung der Fehler des Sextanten.

12. Um die numerischen Werthe einiger von den erwähnten Fehlern des Sextanten bequem finden zu können, muss man die Winkel-Entfernung der Fäden kennen, welche im Brennpunkte des Sextanten-Fernrohres aufgespannt sind. Annährend findet man den Faden-Abstand, wenn man das Fernrohr auf die Sonne richtet, und durch Schätzung ermittelt um wie viel dieser Abstand grösser oder kleiner ist, als der Sonnendurchmesser. Um diese Entfernung genauer zu bestimmen, stellt man den Sextanten auf ein passendes Stativ fest auf, und dreht das Ocular so, dass zwei Fäden nach dem Augenmasse senkrecht auf der Ebene des Sextanten stehen, richtet darauf das Fernrohr auf einen recht deutlichen entfernten terrestrischen Gegenstand, und bringt endlich das directe Bild dieses Gegenstandes mit einem der beiden Fäden in Berührung, indem man dabei die Angabe des Nonius, welche diesem Stande der Alhidade entspricht, abliest: sie sei $= c$. Indem man nun das directe Bild des Gegenstandes mit demselben Faden in Berührung lässt, bringt man durch eine Drehung der Micrometerschraube das reflectirte Bild des Gegenstandes an den zweiten Faden, und liest wiederum die Angabe des Nonius ab, und sie sei $= s$; so wird alsdann: *die gesuchte Entfernung der Fäden* $= s - c$; wobei man übrigens darauf zu achten hat, ob die Ablesungen s und c sich beide auf derselben Seite von $0^0\ 0'$, oder auf entgegengesetzten Seiten des Nullpunktes des Limbus befinden; denn hiervon hängt es ab, ob die Werthe von s und c positiv oder negativ sein werden. Man wird den Fadenabstand noch besser folgendermaassen bestimmen können; man bringe zuerst das directe Bild des erwähnten Gegenstandes

auf einen Faden, und zugleich das doppelt-reflectirte Bild desselben Gegenstandes auf den andern Faden; die abgelesene Angabe des Nonius heise $s_{,}$, negativ genommen, wenn sie auf den Excedens (rechts von 0^{0} des Limbus) fällt. Dann vertausche man die Bilder, und bringe das directe Bild auf den Faden, wo früher das reflectirte war, und das reflectirte wo sich früher das directe befand. Die jetzt abgelesene Angabe des Nonius sei $s_{,,}$. Wenn alsdann das beobachtete irdische Object sehr entfernt ist, so wird der Fadenabstand sehr nahezu $= \frac{1}{2}(s_{,} - s_{,,})$ sein.

Die Neigung der Absehenslinie des Fernrohres gegen die Ebene des Sextanten, kann man mit Hülfe zweier Diopter finden, welche wir schon erwähnt haben, als wir auf Seite 311. von der Stellung des Fernrohres sprachen; dreht man darauf die Ocularröhre so, dass die darin sich befindenden Fäden mit der Ebene des Sextanten parallel sind, und stellt die Diopter so auf, wie wir es auf Seite 311. gezeigt haben, indem man einen entfernten terrestrischen Gegenstand durch die Diopter und durch's Fernrohr beobachtet; so wird alsdann die Gesichtslinie, welche durch's Diopter geht, wegen ihrer gleichen Erhebung über der Ebene des Sextanten, mit dieser letzteren parallel sein, und wenn man bemerkt, dass das Bild des Gegenstandes sich genau in der Mitte des Raumes, zwischen den Fäden sich befindet, so wird alsdann $i = o$ sein; im entgegengesetzten Falle, kann man nach dem Augen-Maasse bestimmen, wie weit entfernt das Bild des Gegenstandes von der erwähnten Mitte, im Vergleich zur Fäden-Entfernung, absteht; diese Entfernung in derselben Einheit, wie der Fäden-Abstand ausgedrückt, giebt uns i. Versetzt man die Diopter so, dass das vordere nach hinten und das hintere nach vornen kommt, und wiederholt die erwähnten Beobachtungen noch einmal, so wird man im Mittel auf die Neigung i schliessen können, unabhängig von den Fehlern der Diopter.

Man kann übrigens i auch ohne Diopter, wie folgt, bestimmen, jedoch weniger genau. Es sei das Fäden-Intervall $= m$; man stellt nun die Fäden mit der Ebene des Sextanten parallel, und misst einen sehr grossen Winkel, nahe an 120^0 oder 130^0; welcher zwischen zwei irdischen Gegenständen enthalten ist; darauf beobachtet man die Coincidenz oder den Contact der Bilder dieser Gegenstände zuerst an dem einen Faden und nachher an dem anderen, indem man dabei jedes Mal die Angabe des Nonius abliest; sucht man darauf den Index-Fehler, so kann man die beiden erwähnten Ablesungen von diesem befreien, und wenn man dann annimmt, dass die aus der ersten Beobachtung erhaltene, schon corrigirte Ablesung $= s'$, die andere aber ebenfalls für Index-Fehler verbesserte Ablesung $= s''$ ist; so erhält man, wenn die Neigung des Fernrohres $= i$ ist, bei der ersten Beobachtung die Neigung der Gesichtslinie gegen die Sextanten-Ebene $= i + \frac{m}{2}$, bei der zweiten aber, diese Neigung $i - \frac{m}{2}$, oder auch umgekehrt, und folglich haben wir nach dem was auf Seite 324. gezeigt wurde:

$$s' - s'' = \sin 1'' \left\{ \left(i + \frac{m}{2}\right)^2 tg \frac{s'}{2} - \left(i - \frac{m}{2}\right)^2 tg \frac{s''}{2} \right\}$$

Wegen des geringen Unterschiedes zwischen s' und s'', kann man im zweiten Theile der Gleichung s' statt s'' setzen, und alsdann wird:

$$s' - s'' = 2\, i.\, m.\, \sin 1''.\, tg \frac{s'}{2};$$

und daher die gesuchte Neigung der optischen Achse des Fernrohres $=$

$$= i = \frac{s' - s''}{2 \sin 1''.\, m\, tg \frac{1}{2} s'}$$

der kleinere der gemessenen Winkel s' und s'' bezieht sich immer auf die Beobachtung desjenigen Fadens, welcher weniger als der andere gegen die Ebene des Sextanten geneigt ist. Hat man gefunden, dass das Fernrohr eine Neigung hat, so wird man am besten thun, die Neigung wegzuschaffen durch eine Drehung des Ringes, in welchem das Sextanten-Fernrohr eingeschraubt ist, um die beiden Spitzen. Ist aber keine Vorrichtung zur Correction der Neigung vorhanden, so muss man sich die Stelle im Gesichtsfelde, wo man beobachten muss, durch einen neuen Faden, oder durch Schätzung gegen den Abstand der vorhandenen Fäden bemerken.

Bei der Aufstellung des grossen Spiegels in die senkrechte Lage auf die Ebene des Sextanten, nach der auf Seite 308. angegebenen Methode, ist es kaum möglich einen grösseren Fehler als 3 bis 4 Minuten zu begehen; nimmt man nun an, dass der kleine Spiegel, diesem durch das Fernrohr vollkommen parallel gestellt worden ist (Seite 310.), so dass also seine Neigung gegen die Sextanten-Ebene genau der des grossen Spiegels gleich ist, so findet man aus der Formel (*D*) Seite 328., dass sogar für einen Winkel von 140° bei $l = 3'$ oder $4'$, dieser Fehler ungefähr $0''.3$ ist; bei allen anderen Winkeln wird er noch kleiner werden, und verschwindet meistentheils beinahe gänzlich.

Wir haben gesehen auf welche Weise man den kleinen Spiegel aufstellt, und ebenso haben wir auf Seite 329. gesehen, dass die Ungenauigkeit seiner Aufstellung wenig Einfluss hat, und nur bei sehr kleinen Winkeln in Betracht kömmt. Misst man daher mit Hülfe eines Sextanten den scheinbaren Durchmesser der Sonne, und vergleicht den so gefundenen, mit seinem genau bekannten Werthe, so kann man aus dem Unterschiede beider, auf die Neigung des kleinen Spiegels zurückschliessen.

Um die Fehler nach den auf Seite 328. angegebenen Formeln berechnen zu können, muss man den Winkel β

messen, welcher von der Senkrechten auf den kleinen Spiegel und der optischen Achse des Fernrohres gebildet wird. Hierzu giebt es nun eine sehr bequeme Methode von Gauss. Indem man nun wieder auf (Fig. 44.) Seite 300. zurückkehrt, wird man bemerken, dass der grosse Spiegel *KCN* einen auf ihn einfallenden Lichtstrahl beständig nach derselben Richtung *Cm* zurückwirft, welche also mit der Senkrechten auf den kleinen Spiegel *rms* einen constanten Winkel β bildet, wobei wir die Richtung der Linie von *m* nach *C* nach der Seite von *O* zählen wollen. Der Strahl *mO* vom kleinen Spiegel ab reflectirt, geht alsdann in die Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohres *O*, und bildet mit dem erwähnten Perpendikel ebenfalls ganz denselben Winkel β, jedoch auf der entgegengesetzten Seite dieses Perpendikels; folglich wird der Winkel $CmO = 2\beta = D'Cm$, weil die Linie $D'C$ mit mO parallel ist. Wenn man darauf die Alhidade so bewegt, dass der grosse Spiegel sich auf die Linie *PC* stellt, so wird der Strahl eines entfernten Gegenstandes *k*, welcher in der Verlängerung von *PC* liegt, auf den kleinen Spiegel fallen, ohne irgendwie verändert zu werden, und alsdann von diesem aus in's Fernrohr zurückgeworfen werden; folglich wird der Winkel $D'Ck = 180^0 - D'Cm = 180^0 - 2\beta$ werden, und mithin der äusserste Grenzwinkel werden, den man überhaupt noch mit dem Sextanten messen kann. Man muss dabei indessen bemerken, dass die Dicke des grossen Spiegels und seine Fassung allemal den erwähnten Strahl verhindern wird, den kleinen Spiegel zu erreichen; es wird also in diesen kleinen Spiegel ein Lichtstrahl von einem Gegenstande einfallen, welcher etwas zur linken von *k* abliegt; dieser Strahl wird daher gegen den kleinen Spiegel weniger geneigt sein, und folglich mit dem Perpendikel auf diesen, einen gewissen Winkel $\beta + n$ bilden, welcher grösser als β ist. Der Strahl wird dann vom kleinen Spiegel aus reflectirt, und in das Fernrohr eintreten, wobei er auf der linken Seite des Gesichtsfeldes ein Bild hervorbringt, welches von der Mitte des Gesichtsfeldes um den Winkel n abstehen wird, welchen man alsdann nach Augenmaass schätzen kann, indem man ihn mit dem bekannten Intervalle der Fäden vergleicht. Misst man den Winkel, zwischen dem vom Gegenstande, auf den kleinen Spiegel einfallenden Strahle, und dem von ihm reflectirten in's Fernrohr einfallenden Strahle, so wird dieser $= 2\beta + 2n$ werden; und diesen Werth wird er haben, wenn man ihn vom kleinen Spiegel aus nach dem Gegenstande und nach dem Fernrohre zählte, zählt man dagegen die Richtung des einfallenden Strahles vom Gegenstande aus bis zu der Richtung des in's Fernrohr eintretenden, wie man gewöhnlich bei Winkelmessungen zählt, so wird der Winkel $= 180^0 - 2\beta - 2n$ werden. Man kann nun noch den grossen Spiegel durch eine kleine Bewegung der Alhidade ein wenig von P nach A zurückdrehen, und dieses wird den Lichtstrahl vom Gegenstande, der sich links von k befindet nicht verhindern, den kleinen Spiegel zu erreichen, aber alsdann wird mit diesem Strahle parallel, noch ein zweiter Strahl vom grossen Spiegel aus reflectirt werden, welcher von einem Gegenstande ausgeht, der mehr noch als derjenige Gegenstand zur linken von k liegt, dessen Lichtstrahlen direct auf den kleinen Spiegel fallen. Auf diese Weise kann man nun die Berührung der Bilder beider Gegenstände auf der linken Seite des Gesichtsfeldes beobachten; von denen der eine einmal, der andere aber zweimal reflectirt wird; der Winkel, welcher aber zwischen diesen Gegenständen enthalten ist, wird dem Unterschiede zwischen $180^0 - 2\beta - 2n$ und $s - c$ gleich werden, wo s die Ablesung ist, welche unmittelbar auf dem Nonius bei der Berührung der beiden Bilder beobachtet wurde, und c der Index-Fehler ist, so dass also $s - c$ die Ablesung bezeichnet, welche vom wahren Nullpunkte des Sextanten-Limbus abgezählt wurde. Daher muss man endlich, um β finden zu können, auf die gewöhnliche Weise den Winkel zwischen den beiden erwähnten Gegenständen messen; und es sei dieser Winkel $= s' - c$, wo s' die unmittelbare Noniusablesung bei der Messung dieses Winkels bedeutet; folglich wird dann:

$$s' - c = 180^0 - 2\beta - 2n - (s - c); \text{ oder}$$
$$\beta = 90^0 - n - \tfrac{1}{2}(s + s' - 2c).$$

Bei dieser Beobachtung muss man den Sextanten beinahe horizontal auf ein Stativ aufstellen; die zu dieser Bestimmung passenden Gegenstände werden sich irgendwo am Horizonte befinden. Ausserdem ist es auch gut hinter dem kleinen Spiegel ein Blendglas oder irgend etwas anderes aufzustellen, damit das fremde Licht, welches durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels eindringt, sich nicht mit den matten Strahlen des einfach und des doppelt reflectirten Bildes, der beobachteten Gegenstände vermischt.

Herr Knorre hat zur Bestimmung von β folgendes Verfahren vorgeschlagen. Man nimmt den grossen Spiegel ganz ab; hat das Fernrohr nur zwei Parallelfäden, so stellt man dieselben nach dem Augenmaasse der Ebene des Sextanten senkrecht, richtet das Fernrohr bei horizontaler Lage des Instrumentes auf einen Gegenstand D (Fig. 44.), so dass dieser genau in der Mitte zwischen den Fäden erscheint, und bemerkt den Punkt des Horizontes k der durch den Reflex des kleinen Spiegels mit D zusammenfällt. Findet sich dort kein leicht zu beobachtender Gegenstand, so kann man einen solchen durch einen Gehülfen aufstellen lassen. Man wählt alsdann einen, etwa in der Mitte zwischen D und k liegenden Gegenstand E, und misst die Winkel zwischen D und E, und zwischen E und k. Die halbe Summe dieser Winkel ist das Complement von β. Will man sehr genau verfahren, so sind die Winkel auf den Punkt m (Mitte des kleinen Spiegels) zu reduciren, darauf der Versuch, nachdem man das Ocular um 180° gedreht hat, nochmals zu wiederholen, und aus den beiden für β erhaltenen Werthen das Mittel zu nehmen.

Von dem Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des grossen Spiegels herrührt.

13. Wir wollen zuerst annehmen, dass dieser Spiegel von parallelen Ebenen begränzt sei, und uns eine Ebene denken, welche durch den Strahl $J\,P$, der vom Punkte J (Fig. 51.) auf den Spiegel fällt, und durch die Senkrechte $R\,P\,Q$ auf dem Spiegel, geht; diese Ebene wird alsdann die erste und zweite (oder belegte) Seite des Spiegels in den parallelen Linien $B\,A$ und $b\,a$ schneiden; beim Eintritte des Strahles $J\,P$ aus der Luft in das Glas, wird er gebrochen werden und die Richtung $P\,D$ annehmen, welche mit der Senkrechten $R\,P\,Q$ einen Winkel $Q\,P\,D$ bildet, der kleiner als der Winkel $J\,P\,R$ ist, den der einfallende Strahl mit eben demselben Perpendikel macht. Der gebrochene Strahl $P\,D$ erreicht darauf in D die belegte Fläche des Spiegels $a\,b$, und wird von dieser unter dem Winkel $LDM = PDQ$ zurückgeworfen, gelangt darauf zur ersten oder durchsichtigen Fläche des Spiegels $B\,A$, im Punkte L, und tritt nun endlich wieder in die Luft aus dem Glase heraus, wobei er wiederum gebrochen wird und die Richtung der Linie $L\,S$ annimmt, welche mit dem Perpendikel MLN einen grösseren Winkel $N\,L\,S$ bildet, als der Winkel $D\,L\,M$ ist. Aus der Gleichheit der Winkel $Q\,P\,D$ und $D\,L\,M$ folgt nach einem bekannten Gesetze der Brechung, dass die Winkel JPR und $N\,L\,S$ ebenfalls einander gleich sein müssen, und daher wird der Strahl $L\,S$ unter eben derselben Neigung gegen den Spiegel austreten, als wenn gar keine Brechung statt-

gefunden hätte; der ganze Unterschied besteht nur darin, dass der Strahl nicht von D, sondern so gut wie von C aus zurückgeworfen wird, und nicht von der Linie $a\ b$ aus, sondern von der Linie $n\ C n$, welche zwischen $A B$ und $a b$ parallel mit dieser Linie läuft. Man muss ferner bemerken, dass nicht alle Strahlen, welche von irgend einem Gegenstande auf $A B$ einfallen, aus der Luft in das Glas eindringen; denn einige von ihnen, (übrigens nicht viele) werden von der Fläche $A B$ zurückgeworfen und bringen dann ein schwaches Bild des Gegenstandes hervor; ein anderes weit stärkeres Bild, rührt von der Reflexion auf der belegten Fläche $a b$ des Spiegels her; wenn nun der Gegenstand sehr weit entfernt ist, so werden seine Strahlen unter sehr nahezu parallelen Richtungen auf den Spiegel fallen, so dass alsdann diese beiden Bilder zusammenfallen werden; und folglich die Beobachtungen auf keine Weise beeinträchtigen können.

Aber ganz das Gegentheil wird in demjenigen Falle stattfinden, wenn der Spiegel eine prismatische Gestalt hat; d. h. wenn die erste und zweite Ebene des Spiegels sich unter irgend einem Winkel schneiden; diese Durchschnittslinie heisst die Kante des Prismas und kann gegen den Sextanten sehr verschiedene Lagen haben. Wir wollen nun annehmen, dass $a\ A\ B$ (Fig. 52.) eine Ebene darstellt, welche senkrecht auf der Kante des Prismas steht und durch den Strahl $i P$ gelegt ist, der im Punkte P auf die obere Fläche des Spiegels $A B$ einfällt; alsdann wird dieser Strahl bei seinem Eintritte aus der Luft in's Glas im Punkte P, gebrochen werden, und nimmt man nun an, dass die Linie $R\ P\ Q$ auf der Ebene $A B$ senkrecht steht; so wird dieser Strahl nach der Brechung näher an dieses Perpendikel kommen; alsdann nach D gelangen und hier reflectirt werden unter dem Winkel $P D Q = L D M$; nun erreicht der Strahl wiederum die erste Fläche im Punkte L, und tritt aus dem Glase in die Luft, unter der gebrochenen Richtung LS, welche mit dem Einfallsperpendikel NLM auf der Fläche AB den Winkel SLN bildet, welcher grösser als DLM ist. Hieraus folgt, dass bei der prismatischen Gestalt des Glasspiegels, der Lichtstrahl aus dem Spiegel an seinem breiten Theile aB, näher an der Fläche AB austritt, als in demjenigen Falle, wenn beide Flächen des Spiegels einander parallel sind*).

*) Bezeichnet man nämlich das constante Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels beim Eintritte des Lichtstrahles aus Luft in Glas durch μ und nimmt an, dass der Winkel des Prismas $BAa = A$ und der Winkel $PDQ = LDM = D$ (Fig. 52.) so erhält man nach einem bekannten Gesetze der Brechung:

$$\sin SLN = \mu \sin DLM; \text{ aber } DLM + D = 90^0 + A;$$
$$\sin RPi = \mu \sin QPD; \qquad QPD + D = 90^0 - A;$$
folglich: $$QPD = DLM - 2A.$$

Der Unterschied $SLN - RPi = x$ zeigt den Einfluss der prismatischen Gestalt des Spiegels; wenn der Spiegel von parallelen Ebenen begrenzt ist, so ist alsdann $SLN = RPi$, oder $x = o$; wenn A ein sehr kleiner Winkel ist, so wird x ebenfalls ein kleiner Winkel werden, und daher kann man in diesem Falle ohne merklichen Fehler annehmen, dass: $\sin A = A \sin 1''$ und $\sin SLN - \sin RPi = x \sin 1'' \cos \frac{1}{2} (SLN + RPi)$, oder sehr nahe $x \sin 1'' \cos SLN = \mu (\sin DLM - \sin QPD) = \mu \sin DLM - \mu \sin (DLM - 2A)$ oder $\frac{1}{2} x \cos SLN = \mu . A \sqrt{1 - \frac{\sin^2 SLN}{\mu\mu}}$.

Aber aus Versuchen hat man den Brechungsindex aus Luft in Glas $\mu = \frac{3}{2}$ gefunden; folglich ist:

$$\frac{1}{2} x = \frac{3}{2} A \sec SLN \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 SLN},$$

d. h. x ist ein Werth, welcher sich zusammen mit dem Winkel SLN, oder der Neigung des Strahles gegen den Spiegel ändert.

Offenbar muss die ganze Wirkung der Strahlenbrechung in der Ebene $A\,B\,a$, welche senkrecht auf der Kante des Prismas steht geschehen, und wenn daher diese Kante mit der Ebene des Sextanten parallel ist, so wird der Lichtstrahl, welcher aus dem prismatischen Spiegel austritt gegen die Ebene des Sextanten geneigt sein, so dass er sich um etwas erhebend, oder umgekehrt zu jener Ebene nieder sinkend, laufen wird, jedoch wird dieses auf den gemessenen Winkel wenig Einfluss haben. Wenn aber die Kante des Prismas senkrecht auf der Sextanten-Ebene steht, so wird alsdann ein Strahl, welcher aus dem Prisma ausfährt in der Ebene des Sextanten selbst liegen, aber in dieser seitlich von der wahren Richtung abweichen, und diese Abweichung wird unmittelbar einen entsprechenden Fehler auf den gemessenen Winkel zur Folge haben. Bei anderen Lagen der Kante muss etwas, was zwischen den erklärten beiden Fällen liegt, geschehen. Der Fehler ist in solchen Fällen demjenigen zu vergleichen, welcher stattfinden würde, wenn der Spiegel zwar ganz richtig wäre, aber unabhängig von der Beweguug der Alhidade, noch eine schlotternde oder eine besondere Bewegung hätte, welche sich zusammen mit dem beobachteten Winkel änderte. Ausserdem wird noch bei einer prismatischen Gestalt des grossen Spiegels, das matte Bild, welches von den vor der vorderen Fläche des grossen Spiegels zurückgeworfenen Strahlen gebildet wird, niemals mit dem viel helleren zusammenfallen können, welches von der Reflexion des Lichtes an der belegten Fläche des Spiegels abhängt; es werden also diese beiden Bilder in einander greifen, und zusammen ein undeutliches Bild hervorbringen; wodurch folglich die Genauigkeit der Beobachtungen beeinträchtigt werden muss.

Die Strahlen, welche von dem grossen Spiegel zurückgeworfen werden, fallen immer unter demselben Winkel auf den kleinen Spiegel ein, und daher wird der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des kleinen Spiegels herrührt auf alle beobachteten Winkel und auch auf den Index-Fehler einen constanten Einfluss haben; da man aber nun die Winkel dadurch bestimmt, dass man von der unmittelbar erhaltenen Noniusablesung auf dem Sextanten-Limbus, den Index-Fehler abzieht, so wird der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des kleinen Spiegels herrührt, keinen Einfluss auf den abgeleiteten, wahren Winkel haben. Die prismatische Gestalt des kleinen Spiegels schadet insofern dadurch, dass alsdann zwei Bilder des beobachteten Gegenstandes durch Reflexion entstehen werden, und also auch wegen verzerrter Bilder des Gegenstandes die Genauigkeit der Beobachtungen leiden muss.

Aus dem Vorhergehenden wird es nun leicht sein die Regeln aufzustellen, aus welchen man beurtheilen kann, ob der grosse Spiegel prismatisch gestaltet ist. Wenn er nämlich von vollkommen parallelen Ebenen begränzt ist, so wird man, wenn man ihn gegen die Sonne oder den Mond richtet, nur ein einziges Bild sehen, sollte er aber prismatisch geformt sein, so werden zwei Bilder erscheinen, oder sogar noch mehrere, welche von den inneren und äusseren Reflexionen herrühren. Um so schräger die Strahlen auf den Spiegel fallen, um so weiter werden diese Bilder von einander sein. Mit Hülfe eines Fernrohres kann man diesen Versuch noch weit genauer anstellen.

Das zuverlässigste Mittel den Fehler in den gemessenen Winkeln zu bestimmen, welcher von der prismatischen Gestalt des grossen Spiegels herrührt, besteht in folgendem. Man berichtigt den Sextanten so genau wie möglich, misst mehrere Winkel und nachdem man den grossen Spiegel aus seinem Rahmen herausgenommen hat, setzt man ihn wieder auf umgekehrte Weise ein; d. h. so, dass der frühere obere Rand des Spiegels jetzt zu unterst liegt. Hierauf stellt man von neuem den grossen Spiegel senkrecht auf die Ebene des Sextanten, und beobachtet noch einmal alle früheren Winkel; findet man nun einen Unterschied zwischen den ersteren und letzteren Bestimmungen, so kann man diesen Unterschied halbiren, und erhält dadurch die Correction für jeden beobachteten Winkel; vermittelst, einer passenden Interpolation kann man hierauf diese Correction für die anderen Winkel genähert finden.

Allgemeine Vorschriften zur Messung von Winkeln mittelst des Sextanten.

14. Bei diesen Messungen kann man, den Sextanten entweder in der Hand halten, oder ihn auch auf ein Stativ befestigen; meistens ist ersteres weit bequemer als letzteres; wenn jedoch das Stativ gut ist, und der Sextant auf ihm in allen Lagen in gleicher Aufstellung bleibt, so kann man ein solches Stativ mit Vortheil gebrauchen, besonders wenn sehr genaue Messungen verlangt werden.

Man muss das Ocular auf den Focus einstellen, und die Ocularröhre so drehen, dass die beiden in ihr aufgespannten Fäden, mit der Ebene des Sextanten parallel sind; darauf richtet man das Instrument so, dass die beiden Gegenstände, zwischen denen man den Winkel messen will, genau in seiner Ebene liegen. Beobachtet man mit der Hand, ohne Stativ, so hält man gewöhnlich den Sextanten mit der rechten Hand und bewegt die Alhidade mit der linken. Wenn der zu messende Winkel genähert bekannt ist, so bringt man den Nonius auf diejenige Stelle der Theilung, welche diesem Winkel entspricht, und beobachtet darauf die genauen Coincidenz der Bilder des Gegenstandes, oder die Berührung der Ränder; wenn aber der zu messende Winkel ganz unbekannt ist, so stellt man die Alhidade auf den Nullpunkt des Limbus, indem man das Fernrohr auf den rechts liegenden

Gegenstand richtet, und erblickt dadurch zwei Bilder dieses rechts liegenden Gegenstandes, ein directes und ein doppelt reflectirtes; bewegt man nun die Alhidade nach links, so kann man durch eine passende Bewegung des ganzen Instrumentes nach der linken, das gespiegelte Bild des nach rechts liegenden Gegenstandes immer im Gesichtsfelde des Fernrohres behalten. Setzt man diese Bewegung der Alhidade immer weiter fort, indem man das Bild des nach rechts liegenden Gegenstandes immer festhält, und indem man darauf achtet, dass zugleich der links liegende Gegenstand in der Ebene des Sextanten bleibt, so wird endlich das directe Bild des nach links liegenden Gegenstandes selbst, durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels in's Fernrohr fallen, und dadurch dem Beobachter im Gesichtsfelde erscheinen. Bringt man darauf beide Bilder nahe an einander und zieht die Druckschraube an, so kann man alsdann mit der Micrometer-Schraube beide genau in Berührung bringen und alsdann die entsprechende Nonius-Angabe auf dem Sextanten-Limbus in Graden, Minuten und Secunden ablesen *). Dieses Zusammenfallen der Bilder oder ihre Berührung selbst, muss man in der Mitte des Raumes beobachten, der im Gesichtsfelde des Fernrohres zwischen den beiden Fäden enthalten ist, die der Ebene des Sextanten parallel sind; denn sonst würde man einen Fehler begehen, wegen der Neigung der Visirlinie gegen die Ebene des Sextanten.

---

*) Für solche Beobachter, welche noch keine Uebung im Beobachten mit dem Sextanten haben, wird es bequemer sein das Fernrohr erst aus seiner Ringfassung herauszuschrauben, und alsdann durch die Ringöffnung, in der das Fernrohr sich befand, die Bilder beider Gegenstände zur Deckung zu bringen; setzt man alsdann das Fernrohr wieder an seine Stelle, so kann man die Beobachtung so beendigen, wie wir oben angegeben haben.

Auf ganz ähnliche Weise beobachtet man mit dem Sextanten, wenn man ein Stativ benutzt; wenn einer von den beobachteten Gegenständen die Sonne ist, so kann man den Schatten des Instrumentes dazu benutzen, um den Sextanten richtig zu stellen; wenn nämlich die Sonne in der Ebene des Instrumentes liegen soll, so wird man den Sextanten so stellen müssen, dass der Schatten des Sextanten-Bogens sich wie eine gerade Linie darstellt.

Man kann auch noch die Art zu Beobachten umkehren, indem man den oberen Theil des Sextanten, auf welchem sich die Gradtheilung und das Fernrohr befindet, nach unten zu kehrt; aber alsdann wird der direct gesehene Gegenstand rechts ab vom anderen beobachteten Gegenstande liegen; diese Art zu beobachten ist aber weniger bequem, als die andere.

Wenn die scheinbare Grösse der zu beobachtenden Gegenstande bedeutend ist, so muss man anstatt der Deckung beider Bilder dieser Gegenstände, die gegenseitige Berührung sowohl ihrer nächsten als entferntesten Ränder beobachten, und daraus den Winkel zwischen den Mittelpunkten beider Bilder herleiten. Bei der Messung einer Distanz zwischen Mond und Sonne, bestimmt man immer den Winkel, zwischen ihren nächsten Rändern, weil der entgegengesetzte Rand des Mondes gewöhnlich nicht zu sehen ist.

Man muss sorgfältig darauf achten, dass beide Bilder einerlei Lichtstärke haben, sollte sich der direct gesehene Gegenstand heller als der andere zeigen, so bringt man das Fernrohr ein wenig herunter mit Hülfe der Schraube, welche sich unter dem Träger des Fernrohres befindet; wenn dagegen das gespiegelte Bild mehr Lichtstärke als das directe hat, so muss man das Fernrohr ein wenig höher schrauben; in beiden Fällen bleibt das Fernrohr mit der Ebene des Sextanten parallel. Nach dem Ende der Beobachtungen oder auch vor ihrem Anfange, muss man den Index-Fehler suchen; wie wir schon auf Seite 312—315. näher erläutert haben.

Von der Messung horizontaler Winkel zwischen terrestrischen Gegenständen.

15. Solche Winkel sind zur Bildung eines trigonometrischen Dreiecks-Netzes, sowie auch zur Land- oder Küsten-Aufnahme, u. s. w., nöthig; aber mit Hülfe eines Sextanten, misst man diese Winkel nicht in der Ebene des Horizontes, sondern in derjenigen Ebene, welche durch das Centrum des Instrumentes und durch beide zu beobachtende Gegenstände durchgeht, und welche also gegen den Horizont geneigt sein kann; man muss also alle gemessenen Winkel erst auf den Horizont reduciren, wie wir auf Seite 316. gezeigt haben. Hierzu muss man aber die Höhen der Gegenstände wissen; sind diese nun sehr klein, wie es gewöhnlich bei den Höhen irdischer Gegenstände stattfindet, so kann man sie nicht durch den Sextanten beobachten, sondern sie müssen mit Hülfe eines anderen Instrumentes bestimmt werden; es ist genügend die Höhen nur genähert zu wissen, und um dieses zu erreichen, giebt es viele Methoden, siehe: Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung von Bohnenberger.

Von der Messung der Höhe eines Gestirnes.

16. Diese Höhenmessungen macht man auf verschiedene Weisen, je nachdem sich der Beobachter auf dem Festlande oder auf dem Meere befindet. Auf dem Festlande bedient man sich dazu eines künstlichen Horizontes, der meistens aus einem hölzernen Kasten besteht, welcher ungefähr 6 Zoll lang, 3 Zoll breit und $\frac{1}{3}$ Zoll tief ist; in diesen giesst man reines Quecksilber; dessen Oberfläche nimmt von selbst eine horizontale Lage an, und bildet einen Spiegel.

Damit das Quecksilber aber nicht vom Winde bewegt wird, bedeckt man den Kasten mit einem besonderen Dache, welches aus zwei Platten von Marinenglas oder auch aus gewöhnlichem Glas besteht, doch müssen in diesem Falle die beiden Flächen eines jeden Glases genau eben und untereinander parallel sein, damit die Strahlen durch die Brechung im Glase keine Abweichung von der frühere Richtung bekommen. Dieses Dach ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundflächen rechtwinkelichte Dreiecke sind. Das Gefäss mit Quecksilber muss so gestellt sein, dass dessen längere Seite nach dem Augenmaasse in die Verticalebene gebracht wird, in welcher man beobachten will, was bei den Sonnenbeobachtungen durch den Schatten des Gefässes angezeigt wird. Das Dach wird über das Gefäss so gesetzt, dass der rechte Winkel gegen den Scheitelpunkt gekehrt ist; die beiden Grundflächen aber mit der erwähnten Verticalebene parallel sind.

Darauf wird sich nun das Gestirn in dem Quecksilber, spiegeln, und ein Lichtstrahl welcher vom Gestirne auf diesen Quecksilber-Spiegel einfällt, wird mit dessen Ebene einen Winkel bilden, der gleich der Höhe des Gestirnes über dem Horizonte sein muss; da aber der einfallende Strahl mit dem aus diesen Spiegel ausfallenden, in derselben Vertical-Ebene sein wird, und der Einfallswinkel dem Ausfallswinkel gleich ist, so wird der ausfallende Strahl mit der Spiegelebene ebenfalls einen Winkel bilden, der gleich der Höhe des Gestirnes über dem Horizonte ist, aber an der entgegengesetzten Seite, so dass also der Beobachter das Bild des Gestirnes im Quecksilber um ebensoviel unter dem Horizonte sehen wird, als es wirklich darüber liegt. Hieraus erhellt es nun, dass, wenn man den Winkel misst, der zwischen dem Bilde des Gestirnes im Quecksilber-Horizonte und dem Gestirne selbst eingeschlossen ist, man dadurch ganz einfach die doppelte Höhe des Gestirnes über dem Horizonte finden wird. Misst man nun diesen Winkel durch einen Sextanten, so muss man das gespiegelte Bild des Gestirnes im künstlichen Horizonte, direct durch den durchsichtigen Theil des kleinen Sextanten-Spiegels beobachten, das durch beide Sextanten-Spiegel doppelt reflectirte Bild des wirklichen Gestirnes aber, mit diesem in Coincidenz oder in Berührung bringen. Das Bild des Gestirnes im künstlichen Horizonte, muss man so nahe wie möglich in der Mitte des Quecksilbers beobachten; denn gegen die Mitte zu, wird dieses wirklich einen Planspiegel bilden, an den Rändern aber, wegen Capillarität eine convexe Gestalt annehmen, und dadurch verzerrte Bilder geben.

Wenn man die Sonne beobachtet, so muss man statt der vollständigen Deckung beider Sonnenbilder, welche nicht mit Genauigkeit wahrgenommen werden kann, die oberen oder unteren Ränder der Bilder in Berührung bringen, so dass man also dann, die Höhe des Ober- oder Unterrandes der Sonne beobachtet. Zieht man darauf den Sonnenhalbmesser von der Höhe des Oberrandes ab, oder legt ihn zur Höhe des Unterrandes hinzu, so erhält man alsdann die Höhe des Sonnencentrums; um aber die Beobachtungen unabhängig von der Genauigkeit des angenommenen Halbmessers reduciren zu können, so misst man gewöhnlich sowohl die Höhe des Unterrandes als auch die des Oberrandes; und nimmt dann das arithmetische Mittel aus beiden Messungen, wodurch man dann ebenfalls die Höhe des Sonnencentrums findet. Bei der Beobachtung des Mondes misst man immer die Höhe seines sichtbaren Randes, welcher je nach den Umständen zuweilen der obere, zuweilen aber auch der untere sein wird.

Wenn die Höhe eines Gestirnes 70° übersteigt, so kann sie mit Hülfe des Sextanten und eines künstlichen Horizontes nicht mehr gemessen werden. Auf dem Meere misst man überhaupt keine Höhen die nahe an 90° sind.

Wenn die Glasplatten des Daches eine prismatische Gestalt haben, so wird die Richtung des Strahles, welcher durch sie hindurchgeht, geändert werden und alsdann in der Höhenbestimmung ein mehr oder weniger merklicher Fehler stattfinden. Es ist jedoch leicht sich vom Einflusse dieses Fehlers frei zu machen; denn hat man einige Beobachtungen in einer Lage des Daches angestellt, so braucht man dieses darauf nur umzustellen, so dass die Seite, welche vorher nach vornen gewendet war, darauf nach hinten gewendet wird, und dann stellt man wiederum eben so viele Beobachtungen bei dieser entgegengesetzten Lage des Daches an; das Mittel, welches aus allen diesen Beobachtungen hergeleitet wird, wird von der fehlerhaften Gestalt der Dachgläser gänzlich unabhängig sein. Um die beiden Seiten des Daches zu unterscheiden, macht man auf ihren entgegengesetzten Seiten, beliebige Bezeichnungen; zum Beispiel auf der einen Seite *A*, und alsdann auf der anderen Seite *B*.

Anstatt des Quecksilbers kann man zur Bildung eines künstlichen Horizontes, Baumöl oder anderes Oel brauchen; alsdann macht man aber den Kasten aus Blech und streicht ihm mit schwarzer Farbe an; dieser Horizont wird in so fern bequemer als ein Quecksilber-Horizont sein, dass bei ihm, die Flüssigkeit nicht so leicht in eine wellenförmige Bewegung geräth; doch wird auf der Quecksilber Fläche das Licht am stärksten gespiegelt, und daher das Bild am glänzendsten sein; bei Sonnen-Beobachtungen hat dieses keinen Nachtheil, weil das Sonnenlicht, ohnedem sehr geschwächt werden muss; bei der Beobachtung von Sterns-Höhen dagegen, ist der Unterschied sehr merklich. Zuweilen benutzt man auch ebenso einen gläsernen Horizont; er besteht aus einer polirten und sehr genau-ebenen Glasplatte, welche auf ihrer unteren Fläche aber matt geschliffen ist; diese Platte stellt man alsdann horizontal auf, durch ein empfindliches Niveau, welches mit Füsschen von Elfenbein versehen ist, die man auf die gläserne Platte setzt. Diese letztere ruht nun auf drei Schrauben, die in eine Marmorplatte oder in eine andere ähnliche Unterlage eingelassen sind; ist das Niveau berichtigt, so setzt man das Niveau auf der Glassplatte erst nach der Richtung der zwei Fussschrauben der Platte, und bringt durch Drehen der Schrauben das Niveau zum Einspielen, und dann setzt man das Niveau senkrecht zu seine erste Richtung, und bringt es wieder zum Einspielen, so wird man dadurch die gläserne Platte horizontal aufstellen können.

Beispiel. Bei 30.0 englische Zoll Barometer Höhe und bei $+ 17^{0}.0$ Reomur am äusseren Luftthermometer, wurde die doppelte Höhe des Sonnenunterrandes mit Hülfe eines Sextanten und künstlichen Horizontes $= 98^{0}\ 40'\ 50''$ unmittelbar auf dem Nonius gefunden; der Indexfehler war $+ 5'\ 8''$, wo $+$ deswegen gebraucht wird, weil der wahre Nullpunkt der Theilung, sich zur Rechten von $0^{0}\ 0'$ auf dem Sextanten-Bogen befand; der Radius und die Horizontal-Parallaxe der Sonne, wurden für den Beobachtungstag aus den astronomischen Ephemeriden entnommen. Es war nun:

Limbusablesung	$= 98^{0}\ 40'\ 50''$
Indexfehler	$= \quad + 5\ \ 8$
Scheinbare-doppelte Höhe des ⊙-Unterrandes .	$= 98^{0}\ 45'\ 58''$
Scheinbare Höhe des Sonnen-Unterrandes .	$= 49\ \ 22\ \ 59$
Zugehörige Höhen-Parallaxe	$= \ + \ 0\ \ 5$
Zugehörige Strahlenbrechung	$= \ - \ 0\ \ 48$
Sonnenhalbmesser	$= \ + 15\ \ 46$
Wahre Höhe des Sonnencentrums	$= 49^{0}\ 38'\ \ 2''$

Zur Bestimmung der Höhe der Sonne über dem Meere, misst man die Winkel-Entfernung des Ober- oder Unterrandes der Sonne von demjenigen Punkte der Grenze des Meeres-

Horizontes, der sich in einem Vertikalkreise und zugleich am nächsten an der Sonne befindet; auf diese Weise erhält man die Höhe des beobachteten Sonnenrandes direct. Die Grenze des scheinbaren Horizontes auf dem Meere, stellt sich als ein Kreis dar, in welchem der Himmel das Meer zu berühren scheint, und in dessen Centrum der Beobachter sich befindet.

Da der Beobachter sich aber gewöhnlich höher als der Meeresspiegel befindet, so wird die Gesichtslinie, welche vom Beobachter nach der Grenze des Meeres-Horizontes geht, vom Auge des Beobachters nach unten gerichtet sein, und eine Tangente an die Erdoberfläche bilden; folglich muss diese Gesichtslinie überall unter der Horizontal-Linie liegen, welche durch das Auge des Beobachters geht, und zwischen diesen beiden Linien endlich wird ein Winkel enthalten sein, den man die Kimmtiefe (Dépression de l'horizon) nennt. Es wird daher auf dem Meere die Höhe des Gegenstandes etwas zu gross gemessen, um aber die wirkliche Höhe zu finden, muss man von der gemessenen stets die Kimmtiefe abziehen; übrigens wird die wahre Erniedrigung des Horizontes etwas kleiner als der erwähnte Winkel sein, weil ein Lichtstrahl, der von der Grenze des Horizontes ausgeht, durch Luftschichten von verschiedener, mit Annäherung zum Erdboden zunehmender Dichtigkeit durchgehen muss und daher so gebrochen wird, dass diese Grenze des Horizontes höher erscheint als sie wirklich ist, und folglich wird der richtige Ausdruck für die Kimmtiefe:

$$\partial = \frac{0.92}{sin\,1''}\sqrt{\frac{2\,h}{R}}$$

werden, wo h die Höhe des Beobachters über dem Meeresspiegel in einem gewissen Maasse ausgedrückt bedeutet (z. B. englische Fuss); R ist der Halbmesser der Erde, in demselben Längenmaasse wie h ausgedrückt. Die Strahlenbrechung, ändert sich jedoch so sehr, durch die Verschiedenheit in der Temperatur der Luft und des Meeres, dass die nach der vorhergehenden Formel berechnete Kimmtiefe, zuweilen 2 bis 3 Minuten in Bogen fehlerhaft sein kann.

Zeit-Bestimmung mittelst des Sextanten.

17. Hierzu muss man Höhen weit ausserhalb des Meridianes beobachten, und sie so berechnen, wie wir erwähnt haben in §. 100. Seite 278. Band I. Will man die Zeit aus absoluten Höhenmessungen bestimmen und dabei nicht für einzelne Höhen besonders rechnen, so würde es ungenau sein, wenn man das arithmetische Mittel der Höhen als entsprechend dem Mittel aus den Zeiten betrachten wollte. Man muss alsdann nach der Regel rechnen, welche auf Seite 122. der neuen Ausgabe der Schumacher'schen Hülfstafeln gegeben ist; diese Regel wird übrigens weiter unten §. 19. S. 362. näher erklärt werden. Jedoch braucht man meistens hierzu die Methode der correspondirenden Sonnenhöhen, über welche wir schon in §. 104. Seite 290. Bd. I. gesprochen haben. Am besten ist es, die Beobachtungen um den ersten Vertikal herum anzustellen; wobei man aber gar zu kleine Höhen vermeiden muss; meistens fängt man die Beobachtungen etwa 3 Stunden, höchstens aber um 2 Stunden vor dem Mittage an; und bedient sich bei diesen Beobachtungen eines künstlichen Horizontes, indem man auf folgende Weise verfährt. Man stellt die Alhidade genau auf eine runde Zahl von Graden und Zehner von Minuten, liest diese Angabe ab, und wartet den Augenblick ab, wenn der Ober-Rand der Sonne mit seinem entsprechenden im Quecksilber abgebildeten Rande im Gesichtsfelde des Fernrohres in Berührung kommt; im Augenblicke wo dieses statt-

findet, schreibt man die Chronometer-Zeit auf; alsdann rückt man die Alhidade um 20′ genau auf dem Limbus weiter, und stellt eine ähnliche Beobachtung wie früher an, hat man auf diese Weise einige Höhen des Oberrandes beobachtet, so ist es gut, auf dieselbe Weise eben so viele Höhen des Unterrandes eben so zu beobachten. Nachmittages fängt man die Beobachtungen mit derselben Höhe und demselben Rande der Sonne an, mit welcher man die vormittägige Beobachtungsreihe beendigt hatte. Legt man darauf zu der genäherten Zeit des Chronometers im wahren Mittage, die Zahl von Stunden und Minuten, welche seit den vormittägigen Beobachtungen und diesem Chronometer-Mittage verflossen sind hinzu, so erhält man nahezu die Chronometerzeiten, wo der Sonnenrand dieselben Höhen, wie des Vormittages haben wird, und nun stellt man die Beobachtungen eben so wie des Vormittages an, indem man die Alhidade jedesmal auf die frühere Anzahl von Graden und Minuten stellt, und auch denselben Rand wie früher beobachtet.

Will man sehr genau beobachten, so muss man noch den vormittägigen und nachmittägigen Stand des Barometers und Thermometers ablesen, um das Resultat vom Einflusse der Veränderung der Strahlenbrechung in der Zwischenzeit zu befreien. Wenn die Beobachtungen der correspondirenden Höhen mit einem künstlichen Horizonte angestellt werden, so muss man das Glasdach, mit welchem man ihn bedeckt, immer so stellen, dass ein und dieselbe Seite (zum Beispiel die mit *A* bezeichnete des Vormittages und Nachmittages dem Beobachter zugewendet sein wird; denn alsdann wird eine Unrichtigkeit der Glastafeln, welche in dem Dache befestigt sind, immer auf derselben Seite wirken, und also die Gleichheit der correspondirenden Höhen nicht beeinträchtigen.

Beispiel. Zu Novotscherkask, dessen nördliche Breite $= 47^{\circ} 24'$, und östliche Länge von Greenwich $= 2^h\, 40'\, 30''$

ist, wurden am 20sten September 1836 folgende correspondirende Sonnenhöhen beobachtet:

Ablesung am Sextanten oder unverbesserte doppelte Höhe:	Entsprechende Angabe des Chronometers, welches sehr nahe nach mittlerer Zeit ging:		Unverbesserter Mittag:
Oberrand	*Vormittags*	*Nachmittags*	
51° 0′ . . .	$19^h\ 49'\ 16''.0$ . . .	$2^h\ 48'\ 58''.5$ . . .	$23^h\ 19'\ 7''.25$
20 . . .	50 24 .0 . . .	47 49 .5 . . .	6 .75
40 . . .	51 32 .0 . . .	46 41 .0 . . .	6 .50
52 0 . . .	52 41 .0 . . .	45 33 .0 . . .	7 .00
20 . . .	53 49 .5 . . .	44 25 .0 . . .	7 .25
Unterrand			
52°20′ . . .	$19^h\ 57'\ 27''.5$ . . .	$2^h\ 40'\ 48''.0$ . . .	$23^h\ 19'\ 7''.75$
40 . . .	58 36 .0 . . .	39 39 .0 . . .	7 .50
53 0 . . .	59 46 .0 . . .	38 30 .0 . . .	8 .00
20 . . .	20 0 55 .5 . . .	37 21 .0 . . .	8 .25
40 . . .	2 3 .0 . . .	36 10 .0 . . .	6 .50
		Mittel . . .	$23^h\ 19'\ 7''.27$

Aus den Nautical Almanac für 1836 findet man am 20sten September für den wahren Mittag in Novotscherkask die Declination der Sonne $= \delta = + 1^0\ 1'.7$, wo das Zeichen (+) hier gebraucht wird, weil die Declination nördlich war; vom 19ten bis 21sten September war die Abnahme der Declination $= 2802''$; folglich $\mu = - 2802''$; die mittlere Zeit im wahren Mittage zu Novotscherkask war $= 23^h\ 53'\ 20''.38$. Das halbe Zeitintervall zwischen der Mitte der vormittägigen und nachmittägigen Beobachtungen war gleich $3^h\ 23'\ 34'' = t$ und das Chronometer ging sehr nahe nach mittlerer Zeit, folglich braucht man keine Correction an t anzubringen. Berechnet man mit diesem Werthe von t, die schon in §. 104.

S. 292. Bd. I. erklärten Werthe von A und B, oder entnimmt man sie auch aus Schumacher's Hülfstafeln, so findet man:

$lg\,A = 7.7834-10$	$lg\,B = 7.5832-10$	I. Theil der Correct.
$lg\,tg\,\varphi = 0.0365$	$lg\,tg\,\delta = 8.2540$	$= +18''.51$
$lg\,(-\mu) = 3.4475$	$lg(-\mu) = 3.4475$	II. Theil $= -\ 0\ .19$
$lg\,18.51 = 1.2674$	$lg\ 0.19 = 9.2847-10$	$\mathrm{I} + \mathrm{II} = +18''.32$

Unverbesserter Mittag . . . . $= 23^h\ 19'\ 7''.27$

Correction . . . . $= \quad +18\ .32$

Wahrer Mittag nach dem Chronometer . . $= 23^h\ 19'\ 25''.59$

Mitt. Zeit im wahren Novotscher. Mittag . . $= 23\ \ 53\ \ 20\ .38$

Chronometer zu spät gegen mittlere Zeit um $0^h\ 33'\ 54''.79$

Man kann auch noch den entsprechenden Chronometer-Fehler gegen die wahre Mitternacht bestimmen. Hierbei beobachtet man zuerst das Abends und darauf die gleichen correspondirenden Höhen, am Vormittage des folgenden Tages. Um die Regel für diese Berechnung aufzustellen, muss man bemerken, dass die Stundenwinkel der Sonne von Mittag zu Mittag, von 0^h bis 24^h oder auch von 0^0 bis 360^0 fortgezählt werden. Setzt man nun die nachmittägige Sonnenhöhe $= h$, und den dazu gehörigen Stundenwinkel $= t$; so würde, wenn die Sonnendeclination sich nicht änderte, dieses Gestirn am folgenden Morgen dieselbe Höhe h erreichen, wenn der Stundenwinkel der Sonne $= 360^0 - t$ wäre; wenn aber mit der Zunahme der Zeit die positive Declination wächst, oder die negative abnimmt, so wird die Sonne die Höhe h früher erreichen, als bei dem Stundenwinkel $= 360^0 - t$; wir wollen daher annehmen, dass diese Höhe von der Sonne erreicht wird bei einem Stundenwinkel $= 360^0 - t - y$. Es sei die Declination der Sonne bei der nachmittägigen Beobachtung $= \delta - \frac{1}{2}x$; bei der folgenden vormittägigen aber $= \delta + \frac{1}{2}x$, wo x ein positiver

Werth ist; bezeichnet man alsdann die Polhöhe des Ortes durch φ, so erhält man:

$$\cos h = \sin\varphi \sin(\delta - \tfrac{1}{2}x) + \cos\varphi \cos(\delta - \tfrac{1}{2}x)\cos t$$
$$= \sin\varphi \sin(\delta + \tfrac{1}{2}x) + \cos\varphi \cos(\delta + \tfrac{1}{2}x)\cos(360^0\text{-}t\text{-}y);$$

vernachlässigt man bei dieser Berechnung diejenigen Potenzen von x und y die höher als die ersten sind, und entwickelt ebenso, wie wir es in §. 104. Seite 290. Band I. gezeigt haben, so folgt:

$$y = \frac{x\, tg\, \varphi}{\sin t} - x\, cotg\, t.\, tg\, \delta.$$

Bezeichnet man nun durch U und U' die Chronometer-Zeiten bei der vorhergehenden nachmittägigen und nachfolgenden vormittägigen Beobachtung der gleichen Sonnenhöhen, so kann man auf ähnliche Weise wie in §. 104. Seite 292. Band I. zeigen, dass die Chronometer-Zeit in der wahren Mitternacht:

$$= \tfrac{1}{2}(U + U') + \mu.\, A.\, tg\, \varphi - \mu.\, B.\, tg\, \delta$$

ist, wo δ die Declination der Sonne in der Mitternacht bedeutet, positiv, wenn sie dasselbe Zeichen oder dieselbe Benennung mit der Polhöhe hat; μ die Zunahme der Grösse von δ in 48 Stunden, von der beobachteten vorhergehenden Mitternacht bis zur nachfolgenden; A und B haben ähnliche Bedeutungen wie in §. 104. Seite 292. Band I. gezeigt wurde; d. h. wenn wir durch $T = 2\tau$ die Zwischenzeit, zwischen beiden correspondirenden Beobachtungen in wahrer Sonnenzeit ausdrücken, so dass $\frac{15}{2}T$ oder 15τ genähert $= 180^0 - t$, oder dem halben Unterschiede der Stundenwinkel in Graden gleich ist, so wird:

$$A = \frac{\tau}{720 \sin 15\,\tau}\,;\ B = \frac{\tau}{720\, tg\,(180^0 - 15\,\tau)} = -\frac{\tau}{720\, tg\, 15\,\tau}.$$

Um diese A und B zu berechnen kann man die Tafel für die Mittagsverbesserung benutzen. Da nämlich $\sin t = \sin(180^0 - t)$, $tg\, t = -tg\,(180^0 - t)$ und $\tau = \frac{1}{2}\, T$ ist, so kann man:

$$A = \frac{(12^h - \frac{1}{2}\, T).\, f}{720.\, \sin 15\,(12^h - \frac{1}{2}\, T)}$$

$$B = \frac{(12^h - \frac{1}{2}\, T).\, f}{720.\, tg\, 15\,(12^h - \frac{1}{2}\, T)},\ \text{wo}\ f = \frac{\frac{1}{2}\, T}{12^h - \frac{1}{2}\, T}$$

setzen; weil nun hier $\frac{1}{2}\, T$ immer grösser als 6 Stunden ist, so wird man immer mit dem Argumente $12^h - \frac{1}{2}\, T$, die $lg\, A$ und $lg\, B$ aus den Tafeln für die Mittagsverbesserung nehmen können; alsdann ist die Mitternachtsverbesserung:

$$f.\, \mu.\, A.\, tg\, \varphi - f.\, \mu.\, B.\, tg\, \delta,$$

wobei das Argument von f die halbe Zwischenzeit $= \frac{1}{2}\, T$, jenes von A und B aber das Supplement dieser halben Zwischenzeit zu 12 Stunden ist. Die $lg\, f$ sind in der neuen Sammlung der Schumacher'schen Hülfstafeln, Altona 1845, auf den Seiten 105 — 107. gegeben.

Wenn die Uhr nahe nach mittlerer Zeit geht, so kann man die halbe Zwischenzeit nach dieser Uhr für $\frac{1}{2}\, T$ annehmen; weicht aber der Uhrgang gar zu sehr von wahrer Sonnenzeit ab, so muss man das beobachtete Zeitintervall in ein wahres Sonnenzeitintervall verwandeln, und um die Uhrcorrection für das Moment der Mitternacht zu haben, muss man auch die unmittelbar berechnete Mitternachts-Verbesserung, die in wahren Sonnenzeit-Secunden ausgedrückt ist, in Uhrsecunden verwandeln. Bezieht man aber die Uhrcorrection auf das Mittel der Beobachtungszeiten, so wird es nicht nöthig sein, wie H. Knorre: Astronomische Nachrichten Band IX. Seite 176 bemerkt hat, die berechnete Mittags- oder Mitternachts-Verbesserung in Chronometer-Secunden zu reduciren.

Bestimmung der Breite eines Ortes.

18. Die bequemste Methode die Polhöhe durch den Sextanten zu bestimmen, besteht in der Beobachtung der circummeridian Höhen der Sonne oder eines sehr hellen Sternes, wobei die Zeit der Beobachtung als bekannt vorausgesetzt wird. Wenn man die Sonne, beobachtet, so ist es vortheilhaft gleich viele Höhen, sowohl des Ober- als auch Unterrandes zu messen. Vor dem Anfange oder nach der Beendigung der Beobachtungen muss man den Indexfehler suchen, und ebenfalls den Stand des Barometers und die Temperatur der Luft aufschreiben. Gebraucht man einen künstlichen Horizont, so muss man darauf achten, dass man immer abwechselnd einige Höhen bei einer Lage des Daches, welches den künstlichen Horizont bedeckt, und dann wieder eben so viele in der entgegengesetzten Lage des Daches messen muss.

Aus diesen Beobachtungen leitet man alsdann, wie wir es schon §. 16. Seite 349. gezeigt haben, die scheinbaren Höhen des Centrums des Gestirnes her, und aus diesen letzteren berechnet man sich wiederum die Breite des Ortes nach den in §§. 94. 95. und 96. Seite 251 — 260. Band I. angegebenen Methoden.

Bestimmung der Breite eines Ortes und der Zeit der Beobachtung mit Hülfe zweier verschiedenen ausserhalb des Meridianes gemessenen Höhen.

19. Beobachtet man des Nachts und auf dem Festlande, so wird man niemals, die hier weiter unten beschriebene Methode nöthig haben; wenn die Beobachtungen aber bei Tage angestellt werden, und vorzüglich zur See, so wird diese Methode zuweilen sehr nützlich sein. Hierzu misst man gewöhnlich Sonnenhöhen, und wir wollen zuerst diesen Fall näher in's Auge fassen, weil er der wichtigste in der Praxis ist.

Man bestimmt nämlich unmittelbar aus den Beobachtungen, die Höhen des Ober- oder Unterrandes der Sonne; mit Hülfe dieser genäherten Höhen und dem aufgeschriebenen Stande des Barometers und Luft-Thermometers, sucht man alsdann die Strahlenbrechung, und zieht sie von den beobachteten Höhen ab, legt man dann endlich die entsprechende Höhen-Parallaxe hinzu, so erhält man somit die wahren Höhen des Ober- oder Unterrandes, legt man nun hierzu den scheinbaren Halbmesser der Sonne hinzu, oder zieht man ihn davon ab, je nachdem der Unter- oder Oberrand der Sonne beobochtet wurde, so erhält man die wahren Höhen des Sonnencentrums. Vermittelst des bekannten Ganges der Uhr, kann man das zwischen beiden Beobachtungen verflossene Zeitintervall, leicht in wahre Sonnenzeit, und darauf auch in Grade verwandeln, wovon 15 auf 1 Stunde gehen. Dadurch erhält man, entweder den Unterschied der Stundenwinkel der Sonne, wenn beide Beobachtungen auf einer Seite des Meridianes angestellt wurden, oder auch ihre Summe, wenn die Sonne auf verschiedenen Seiten desselben beobachtet wurde.

Es sei Z das Zenith (Fig. 54.), P der sichtbare Pol des Aequators, S und S' die wahren Oerter des Sonnencentrums bei der ersten und zweiten Beobachtung; kennt man alsdann die genäherte Zeit der Beobachtung und die genäherte Länge des Beobachtungsortes, so wird man aus den astronomischen Ephemeriden die entsprechenden Declinationen der Sonne δ und δ' finden. Nennt man h und h' die wahren Sonnenhöhen, δ und δ' die entsprechenden Declinationen, t und t' die Stundenwinkel, $\frac{1}{15}T$ die Zwischenzeit der Beobachtungen, in wahrer Sonnenzeit ausgedrückt, so kömmt $t' \mp t = T$ und in den sphärischen Dreiecken werden die Seiten $PS = 90^0 - \delta, PS' = 90^0 - \delta', ZS = 90^0 - h, ZS' = 90^0 - h,$ und Winkel $SPS' = T$, welcher wie oben bemerkt wurde gleich der Summe oder dem Unterschiede der Stundenwinkel ist, bekannt sein; gesucht aber wird die Seite $ZP = 90^0 - \varphi$, wo φ die Breite des Beobachtungsortes ist, und der Winkel $ZPS' = t'$ oder der Stundenwinkel in der Beobachtung, welche zum Beispiel am nächsten an Mittag liegt. Diese Aufgabe lässt sich nun auf verschiedene Weisen auflösen; die folgende Methode scheint sehr bequem zu sein.

Setzt man den Bogen $SS' = u$, so erhält man aus dem sphärischen Dreiecke SPS':

$$\cos u = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos T \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$
$$\cos u = \cos (\delta' - \delta) - 2 \cos \delta \cos \delta' \sin^2 \tfrac{1}{2} T$$

Da nun die Zwischenzeit der Beobachtungen selten 3 oder 4 Stunden übersteigen wird, so wird in diesem Zeitraume, selbst zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen, die Declination der Sonne sich nur 3' bis 4' ändern können, und folglich $\cos (\delta' - \delta)$ sehr nahe $= 1$ sein; alsdann wird aber:

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \sin \tfrac{1}{2} T \sqrt{\cos \delta \cos \delta'}$$

oder sehr nahezu:

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \sin \tfrac{1}{2} T . \cos \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Aus dem Dreiecke $P S S'$ folgt weiter, wegen der Kleinheit von $\delta' - \delta$, wenn die Winkel $S' S P = c$, $S S' P = c'$, gesetzt werden, dass:

$$tg \tfrac{1}{2} (c' + c) = \frac{cotg \tfrac{1}{2} T}{\sin \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta)}; \; \tfrac{1}{2} (c' - c) = \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) . \frac{cotg \tfrac{1}{2} T}{\cos \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta)} \; . \; (b)$$

Setzt man nun . . . . $u + h' + h = 2 p$ . . . . (c)
so erhält man aus dem Dreiecke $Z S S'$, wo der Winkel $S S' Z$ durch b' bezeichnet werden soll:

$$\sin \tfrac{1}{2} b' = \sqrt{\frac{\cos p . \sin (p - h)}{\sin u \cos h'}}, \text{ oder}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} b' = \sqrt{\frac{\cos (p - u) \sin (p - h')}{\sin u \cos h'}} \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Ist darauf b' und c' gefunden, so bestimmt man den Winkel $Z S' P$, in unserer Figur (Fig. 54.) wird $Z S' P = c' - b'$; in anderen Fällen wird man nun auch ebenso $Z S' P = b' - c'$ finden können, aber wie man aus unseren Formeln leicht weiter unten sehen wird, werden diese beiden Fälle keinen Unterschied auf die Auflösung unserer Aufgabe hervorbringen.

Ueberhäupt werden aber beide Fälle dann stattfinden, wenn die Distanz der Sonne vom sichtbaren Pole des Aequators grösser ist, als die Entfernung dieses Poles vom Zenithe, oder wenn auf der nördlichen Halbkugel die Sonne an den

Meridian, südlich vom Zenithe ab, tritt; im entgegengesetzten Falle aber, d. h. wenn die Sonne durch den Meridian zwischen dem Zenithe und dem sichtbaren Pole des Aequators durchgeht, wird $Z\,S'\,P = b + c$, oder auch $360 - (b + c)$: diese beiden letzteren Fälle bringen ebenfalls keinen Unterschied auf die Rechnung hervor. Da die Breite des Ortes immer ungefähr auf 1^0 oder 2^0 vorläufig bekannt sein wird, so wird man unter den verschiedensten Umständen, nie im Zweifel sein können, ob man den Unterschied oder die Summe der Winkel b' und c' zu nehmen hat, um den Winkel $Z\,S'\,P = v$ zu finden. Aus dem sphärischen Dreiecke $Z\,P\,S'$, findet man endlich:

$$\sin\varphi = \sin h' . \sin\delta' + \cos h' \cos\delta' . \cos v,$$

oder setzt man:

$$\cos v \operatorname{cotg} h' . = tg\, f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

so hat man:

$$\sin\varphi = \frac{\sin h' . \sin(\delta' + f)}{\cos f} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f)$$

Sobald die Breite φ bekannt ist, kann man den Stundenwinkel t' berechnen, nach der Formel;

$$\sin t' = \frac{\cos h' . \sin v}{\cos\varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g)$$

oder nach anderen bekannten Formeln. Am besten ist es, wenn eine Beobachtuug nahe am Meridiane, die andere aber nahe am ersten Verticale angestellt wird.

Gewöhnlich wird man rasch hinter einander, auf ein Mal, mehrere Höhen messen, aber selten wird man ihr

Mittel als dem Mittel der dazugehörigen Zeiten entsprechend annehmen können, und besonders wird der Fehler namhaft werden, wenn die Beobachtungen nahe am Meridiane angestellt sind, es ist also nöthig, entweder das Mittel der Höhen, oder das Mittel der Zeiten zu verbesseren, und wir wollen auseinandersetzen, wie man diese Verbesserung bequem zu berechnen hat. Bezeichnet man nun durch H, die aus den Beobachtungen zu bestimmende Höhe, die dem Mittel der beobachteten Zeiten $= \tau_0$ entspricht, durch t den dazu gehörigen Stundenwinkel der Sonne, und durch H' irgend eine andere Höhe die wirklich zur Zeit τ', welche nahe am τ_0 ist, beobachtet wurde; so wird alsdann die gesuchte Höhe H nur wenig von dem Mittel aus den gemessenen Höhen verschieden sein. Kennt man den Gang des Chronometers, so kann man den kleinen Zeitraum $\tau_0 - \tau'$ in Secunden der wahren Zeit ausdrücken, und es sei $\tau_0 - \tau' = \triangle \tau'$. Da die Höhenmessungen selten länger als 20 Zeitminuten dauern werden, so kann man hinreichend genau, in Folge des Taylor'schen Lehrsatzes annehmen, dass:

$$h = h' + \frac{\partial h}{\partial t} . (15 \triangle \tau') + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} . \sin 1'' . (15 \triangle \tau')^2 .$$

Differentiirt man alsdann die Gleichung:

$$\sin h = \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta$$

in Bezug auf h und t, so erhält man $\frac{\partial h}{\partial t}$, und differentiirt man $\frac{\partial h}{\partial t}$, so bekommt auch $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$; auf diese Weise wird man leicht finden, dass:

$$H = H' + A . 15 \triangle \tau' + \tfrac{1}{2} B . \sin 1'' . (15 \triangle \tau')^2$$

ist, wo

$$A = -\cos\varphi \cos\delta \sin t . \sec H$$
$$B = A^2 . tg\, H + A . cotg\, t,$$

sind. Es sei das Azimuth $= \alpha$, von Süden nach derselben Richtung wie der Stundenwinkel gezählt, und β der parallactische Winkel; alsdann ist:

$$\sin\alpha = \frac{\sin t . \cos\delta}{\cos H};\ \sin\beta = \frac{\sin t . \cos\varphi}{\cos H}\ .\ .\ .\ .\ .\ (P)$$
$$\cos t = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \sin H;$$

setzt man nun:

$\frac{1}{2} \sin 1''. (15 \triangle \tau)^2$; oder nahezu: $\dfrac{2 \sin^2\left(\dfrac{15 \triangle \tau'}{2}\right)}{\sin 1''} = m'$,

so wird, weil $\cos\alpha \cos\beta = A \sin t\, tg\, H + \cos t$, auch:

$$H = H' + A . 15 \triangle \tau' + A . \frac{\cos\alpha \cos\beta . m'}{\sin t}.$$

Wenn man also die zu den Zeiten $\tau', \tau'' \ldots \tau^{(n)}$ gemessenen wahren Sonnenhöhen durch $H', H'' \ldots H^{(n)}$ bezeichnet und ferner bemerkt, dass $\tau_0 = \dfrac{\tau' + \tau'' + \ldots + \tau^{(n)}}{n}$ gesetzt worden ist, so muss:

$$H = H' + A . 15 \triangle \tau' + A . \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} . m'$$

$$H = H'' + A . 15 \triangle \tau'' + A . \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} . m''$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$H = H^{(n)} + A . 15 \triangle \tau^{(n)} + A . \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} . m''$$

sein, wo m'', m''' . . $m^{(n)}$, ähnliche Bedeutungen wie m' haben. Nimmt man nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen, und achtet darauf, dass $\triangle\tau' + \triangle\tau'' + \ldots + \triangle\tau^{(n)} = 0$ ist, so erhält man:

$$H = \frac{H' + H'' + \ldots + H^{(n)}}{n} + \frac{M}{n} \cdot A. \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin t}$$

wo n die Anzahl der Beobachtungen ausdrückt, und $M = m' + m'' + \ldots + m^{(n)}$ ist. Alsdann wird man H als die zur Zeit τ_0 wirklich stattfindende Höhe betrachten können.

Man kann auch umgekehrt verfahren; man kann nämlich die Höhe $H_0 = \frac{H' + H'' + \ldots + H^{(n)}}{n}$ setzen, und dann die Zeit bestimmen, zu welcher sie gehört. Es sei 15 T der Stundenwinkel, welcher der Höhe H_0 wirklich entspricht und 15 T_0 der Stundenwinkel, welcher im Momente des arithmetischen Mittels der beobachteten Zeiten stattfindet; da $15(T - T_0)$ immer eine sehr kleine Grösse ist, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $T - T_0 = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{(H - H_0)}{15} = \frac{H - H_0}{15\,A}$ ist. Sind also n Höhen genommen und berechnet man das Mittel H_0 aus denselben, so ist der wahre dazugehörige Stundenwinkel in Zeit:

$$T = T_0 + \frac{M}{n} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{15\sin 15\,T_0}$$

Wenn man den Stand des Chronometers nahezu kennt und dabei darauf achtet, auf welcher Seite des Meridianes man beobachtet hat, so wird es leicht sein, aus der Verbesserung des Stundenwinkels die entsprechende Verbesserung der Beobachtungszeit abzuleiten, um die Zeit zu haben welche der Höhe zugehören muss. Die Winkel α und β

werden aus den Gleichungen (P) berechnet. M wird so bestimmt: man zieht die Zeit jeder einzelnen Beobachtung vom Mittel der Beobachtungszeiten ab, und nimmt mit den Differenzen (ohne das Zeichen zu beachten) aus der *Tafel zur Reduction auf den Meridian* (S. 39. der Schumacher'schen Hülfstafeln) das jeder Differenz zugehörige m. Die Summe dieser Zahlen ist M. Das Zeichen von $\cos\alpha . \cos\beta$ lässt sich so bestimmen: man rechnet die Stundenwinkel 15 T oder 15 t nach beiden Seiten des Südpunktes bis 180° und man macht aus $\sin\varphi$ und $\sin\delta$ einen ächten Bruch, also $\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$, wenn $\sin\delta < \sin\varphi$ ist, oder $\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$, wenn $\sin\delta > \sin\varphi$ ist. Ist $\sin H$ grösser als dieser Bruch, so ist das Zeichen der Correction negativ, ist aber $\sin H$ kleiner, so ist das Zeichen der Correction positiv. Wenn die Declination δ negativ ist, so ist auch die Correction immer negativ. Diese Regeln folgen unmittelbar aus der Bedeutung der Winkel: α, β und H.

Beispiel. Am 7ten August 1845 wurden auf der St. Petersburger Sternwarte, mehrere doppelte Höhen des Ober- und Unterrandes der Sonne gemessen; aus früheren Beobachtungen war zugleich bekannt, dass die tägliche Voreilung des Chronometers gegen mittlere Zeit $= 11''.0$ war. und am 7ten August 1845 war es ungefähr um 6.5 Minuten zu früh gegen mittlere Zeit. Man erhielt dabei folgende Bestimmungen:

Scheinbare Höhe des ⊙-Centr.	Chronometer Zeit	Barom.-Höhe in engl. Zoll	Thermometer inneres	Thermometer äusseres
28° 3′ 13″	20h 5′ 10.0	30.04	+13.6 Reom.	+15.8 Reom.
45 28 23	23 26 38.7	30.07	+14.5 „	+19.2 „

Die verflossene Zeit zwischen beiden Beobachtungen war $= 3^h\ 21'\ 28''.7$; zieht man hiervon $1''.54$ ab, oder die Voreilung des Chronometers im Zeitraume $3^h\,21'.5$; so wird die verflossene Zeit in mittlerer Zeit ausgedrückt $= 3^h\,21'\,27''.16$; aber am 7ten August 1845 war die tägliche Verspätung der mittleren Zeit gegen wahre Sonnenzeit, oder die tägliche Aenderung der Zeitgleichung $= 7''.35$, folglich im Laufe von $3^h\,21'.5$ mittlere Zeit war die Verspätung $= 1''.02$ und daher die verflossene Zeit zwischen beiden Beobachtungen in wahrer Zeit ausgedrückt $= 3^h\,21'\,28''.18 = T$, oder in Graden $15\,T = 50^0\,22'\,2''.7$; mithin $\frac{15}{2}\,T = 25^0\,11'\,1''.35$.

Die genäherte Uhrcorrection des Chronometers war $= -6'.5$; folglich wird die genäherte mittlere St. Petersburger Zeit bei der 1sten und 2ten Beobachtung $19^h\,58'\,40''$ und $23^h\,20'\,8''.7$ sein; zieht man hiervon die Länge St. Petersburgs von Greenwich ab $= 2^h\,1'\,16''$, so erhält man die mittleren Greenwicher Zeiten $= 17^h\,57'\,24''$ und $21^h\,18'\,52''.7$, die Aenderung der Sonnendeclination in einer mittleren Stunde $= -42''.69$, welche aus der 48-stündigen Aenderung zwischen dem 7ten und 9ten August hergeleitet wurde. Aus dem Nautical-Almanac folgen für die erwähnten Greenwicher Zeiten die wahren Declinationen der Sonne: $\delta = +16^0\,12'\,21''.0$ und $\delta' = +16^0\,9'\,57''.5$. Die Horizontal-Parallaxe der Sonne war zu dieser Zeit $= 8''.4$ im Bogen; es folgt also für die

	Iste Beobacht.	IIte Beobacht.
Scheinb. Höhe des ⊙-Centrums	$= 28^0\;3'\;13''.0$ ...	$45^0 28' 23''.0$
Höhen-Parallaxe	$=\quad +7\;.5$ ...	$+5\;.9$
Strahlenbrechung	$= -1\;45\;.3$ ...	$-54\;.5$
Wahre Höhe des ⊙-Centrums:	$h = 28^0\;1'\;35''.2$;	$h' = 45^0 27' 34''.4$

Man hat nun zuerst: $\frac{15}{2}\,T = 25^0\,11'\,1''.35$; $\frac{1}{2}\,(\delta' + \delta) = +16^0\,11'\,9''.25$ und $\frac{1}{2}\,(\delta' - \delta) = -0^0\,1'\,11''.75$, mit welchen Werthen, die Rechnung unter Zuziehung der Formeln (a) und (b) in §. 19. Seite 360. folgendermaassen geführt werden kann:

$lg\ sin\ \frac{1}{2}\ T = 9.628922$	$lg\ cotg\ \frac{1}{2}\ T = 0.327702$
$lg\ cos\ \frac{1}{2}\ (\delta' + \delta) = 9.982435$	$lg\ sec\ \frac{1}{2}\ (\delta' + \delta) = 0.017565$
	$lg\ \frac{1}{2}\ (\delta' - \delta) = 1.855822_n$
$lg\ sin\ \frac{1}{2}\ u = 9.611357$	
$\frac{1}{2}\ u = 24^0\ 7'\ 13''.5$	$lg\ \frac{1}{2}\ (c' - c) = 2.201089_n$
$u = 48\ 14\ 27\ .0$	
	$\frac{1}{2}\ (c' - c) = -\ 0^0\ 2'\ 38''.9$
$lg\ cotg\ \frac{1}{2}\ T = 0.327702$	$\frac{1}{2}\ (c' + c) = +\ 82\ 31\ 57\ .1$
$lg\ sin\ \frac{1}{2}\ (\delta' + \delta) = 9.445222$	
$lg\ tg\ \frac{1}{2}\ (c' + c) = 0.882480$	$c' = 82^0 29'\ 18''.2$
$\frac{1}{2}\ (c' + c) = 82^0 31'\ 57''.1$	$c = 82\ 34\ 36\ .0$

Hierauf hat man vermittelst der Formeln (c), (d) **und** (e):

$p = 60^0 51'\ 48''.3$	$b' = 90^0 31'\ 39''.0$
$p - u = 12\ 37\ 21\ .3$	$c' = 82\ 29\ 18\ .2$
$p - h' = 15\ 24\ 13\ .9$	$v = b' - c' = 8^0\ 2'\ 20''.8$
$lg\ cos\ (p - u) = 9.989374$	$lg\ cos\ v = 9.995711$
$lg\ sin\ (p - h') = 9.424263$	$lg\ cotg\ h' = 9.993033$
$comp\ lg\ sin\ u = 0.127290$	
$comp\ lg\ cos\ h' = 0.154026$	$lg\ tg\ f = 9.988744$
$\text{Summe} = 19.694953$	$f = +\ 44^0\ 15'\ 27''.1$
$lg\ cos\ \frac{1}{2}\ b' = 9.847477$	$\delta' = +\ 16\ \ 9\ 57\ .5$
$\frac{1}{2}\ b' = 45^0\ 15'\ 49''.5$	$f + \delta' = 60^0\ 25'\ 24''.6$

und endlich findet man mit Hülfe von (f) **und** (g):

$lg\ sin\ h' = 9.852941$	$lg\ sin\ v = 9.145660$
$comp\ lg\ cos\ f = 0.144959$	$lg\ cos\ h' = 9.845974$
$lg\ sin\ (\delta' + f) = 9.939368$	$comp\ lg\ cos\ \varphi = 0.300243$
$lg\ sin\ \varphi = 9.937268$	$lg\ sin\ t' = 9.291877$
$\text{Breite} = \varphi = 59^0\ 56'\ 24''.1$	$t' = 11^0\ 17'\ 35''.5$
	$\text{oder in Zeit}: t' = 0^h\ 45'\ 10''.4$

Wir haben daher jetzt für die gesuchte Breite des Ortes

$59^{\circ}\,56'\,24''.1$; der östliche Stundenwinkel der Sonne in der zweiten Beobachtung war $= t' = 0^h\,45'\,10''.4$; mithin:

wahre Zeit der Beobachtung	$= 23^h\,14'\,49''.6$	am 7. August 1845
Zeit-Gleichung.	$= \quad +5\;\;22\;\;.4$	
mittlere Zeit der Beobacht.	$= 23^h\,20'\,12''.0$	
Chronometer-Zeit	$= 23\;\;26\;\;38\;\;.7$	
Chron. zu früh gegen mittl. Zeit . .	$6'\,26''.7$	

Die Gaussische Methode die Polhöhe, die Uhrcorrection und den Fehler des Instrumentes aus den Zeiten abzuleiten, wo drei verschiedene Sterne einerlei Höhe erreichen.

20. Jede Beobachtungs-Methode ist desto vorzüglicher, je sicherer bei derselben die Ungenauigkeiten der Messapparate beseitigt werden, was von besonderer Wichtigkeit ist, wenn man mit einem so schwachen Instrumente, wie der Sextant beobachtet, welcher vielen Fehlern unterworfen ist, die schwer wegzuschaffen, oder genau zu bestimmen sind. Eine solche Methode zur Polhöhen- und Zeitbestimmung, hat der berühmte Gauss in der Monatlichen Correspondenz von Zach. 1808. Band XVIII. Seite 277—293. vorgeschlagen; später schrieb Oriani darüber in dem Anhange zu der Effemeridi di Milano 1810, so wie auch H. Knorre in einer vortrefflichen, in russischer Sprache im Jahre 1832 zu Nicolaef erschienenen Abhandlung, die Gauss'sche Methode näher erläutert und eine besondere Rechnungsart gegeben hat, welche mit Vortheil gebraucht werden kann, wenn mehr als drei Sterne beobachtet werden sollten.

Die Gauss'sche Methode besteht darin, dass man die Zeiten bemerkt, wo drei beliebige Sterne, in Verticalkreisen, die am Zenithe nicht zu spitze Winkel machen, einerlei, (übrigens willkührliche), Höhe erreichen, welche selbst nicht bekannt zu sein braucht. Die Positionen der Sterne, der Uhrgang und der Stand des Barometers und Thermometers werden als gegeben vorausgesetzt.

21. Hat man nur so viel beobachtet, als zur Auflösung der Aufgabe durchaus nöthig ist, und ist zugleich die Polhöhe und die Uhrcorrection noch nicht mit ziemlicher Annäherung im Voraus bekannt, so wird folgende, von Gauss ursprünglich gegebene Berechnungsart, jedenfalls die bequemste sein.

Es sei nämlich:

φ die gesuchte Polhöhe;

AR, AR', AR'' die bekannten geraden Aufsteigungen der drei Sterne;

δ, δ', δ'' die bekannten Declinationen der drei Sterne, wo südliche Declinationen als negativ betrachtet werden, wenn die Polhöhe eine nördliche ist;

Θ, Θ', Θ'' die drei bekannten Uhrmomente, als diese Sterne einerlei wahre Höhe h erreicht hatten;

K die gesuchte Uhrcorrection gegen Sternzeit, für ein beliebig zu wählendes Zeitmoment T an der Uhr geltend; z. B. für die Uhrangabe, welche ungefähr in der Mitte der Zeiten Θ, Θ', Θ'' liegt; wobei K als positiv betrachtet wird, wenn die Uhrangabe kleiner ist, als die entsprechende Sternzeit;

k die Retardation gegen Sternzeit in einer beliebigen Zeiteinheit, z. B. während einer Minute, wenn die Zeitintervalle $\Theta - T$, $\Theta' - T$, $\Theta'' - T$ in Minuten ausgedrückt werden;

t, t', t'' die drei, in Bogen verwandelte, Stundenwinkel der Sterne, vom Süden nach Westen gerechnet; so dass man hat:

$$\tfrac{1}{15}\, t = \Theta + K + k\,(\Theta - T) - AR;$$
$$\tfrac{1}{15}\, t' = \Theta' + K + k\,(\Theta' - T) - AR;$$
$$\tfrac{1}{15}\, t'' = \Theta'' + K + k\,(\Theta'' - T) - AR.$$

Wenn man also:

$$15\,K = x;\ \Theta + k\,(\Theta - T) - AR = \tfrac{1}{15}\,\lambda;$$
$$\Theta' + k\,(\Theta' - T) - AR' = \tfrac{1}{15}\,\lambda';\ \Theta'' + k\,(\Theta'' - T) - AR'' = \tfrac{1}{15}\,\lambda'',$$

setzt; so ist $t = \lambda + x$, $t' = \lambda' + x$; $t'' = \lambda'' + x$, und man hat alsdann die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta.\ \cos(\lambda + x) \ldots (1)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta'.\ \cos(\lambda' + x) \ldots (2)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta''.\cos(\lambda'' + x) \ldots (3)$$

Zieht man (1) von (2) ab, und dividirt den Rest durch $\cos\varphi$, so kömmt:

$$tg\,\varphi\,(\sin\delta' - \sin\delta) = \cos\delta \cos(\lambda + x) - \cos\delta' \cos(\lambda' + x)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos\delta - \cos\delta')\,[\cos(\lambda' + x) + \cos(\lambda + x)]$$
$$- \tfrac{1}{2}(\cos\delta + \cos\delta')\,[\cos(\lambda' + x) - \cos(\lambda + x)];$$

$$tg\,\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) =$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \cos[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x]$$
$$+ \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x],$$

$$tg\,\varphi = tg\,\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \cos[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x]$$
$$+ cotg\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x]$$

Man bestimme $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ auf solche Weise, dass:

$$\mathfrak{A}' \sin\mathfrak{B}' = \sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda).\ cotg\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$
$$\mathfrak{A}' \cos\mathfrak{B}' = \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda).\ tg\,\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta),$$
$$\mathfrak{C}' = \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) - \mathfrak{B}'$$

wird; alsdann verwandelt sich die Gleichung für $tg\,\varphi$ in folgende:

$$tg\,\varphi = \mathfrak{A}' \cos(\mathfrak{C}' + x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Völlig auf gleiche Weise wird man aus den Gleichungen (1) und (3), einen ähnlichen Ausdruck für $tg\,\varphi$ bekommen. Wenn man nämlich:

$$\mathfrak{A}'' \sin \mathfrak{B}'' = \sin \tfrac{1}{2}(\lambda'' - \lambda).\, cotg\, \tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta),$$
$$\mathfrak{A}'' \cos \mathfrak{B}'' = \cos \tfrac{1}{2}(\lambda'' - \lambda).\, tg\, \tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta),$$
$$\mathfrak{C}'' = \tfrac{1}{2}(\lambda'' + \lambda) - \mathfrak{B}''.$$

setzt, so erhält man:

$$tg\,\varphi = \mathfrak{A}''.\cos(\mathfrak{C}'' + x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Also: $\mathfrak{A}'.\cos(\mathfrak{C}' + x) = \mathfrak{A}''.\cos(\mathfrak{C}'' + x)$;

$$(\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}')\,[\cos(\mathfrak{C}'' + x) + \cos(\mathfrak{C}' + x)] =$$
$$= (\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}')\,[\cos(\mathfrak{C}' + x) - \cos(\mathfrak{C}'' + x)];$$
$$\frac{\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'}.\, cotg\, \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}') = tg\,[x + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}')].$$

Setzt man nun:

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}''} = tg\, z, \text{ wodurch}$$
$$\frac{\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'} = tg\,(45^0 - z),$$

wird, und bestimmt einen Hülfswinkel ψ durch folgende Gleichung:

$$tg\,(45^0 - z)\, cotg\, \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}') = tg\,\psi,$$

so hat man:

$$x = \psi - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}'),$$

und nachher φ durch die Gleichung (4) oder (5). Aus der gefundenen Polhöhe φ und den Stundenwinkeln $\lambda + x$, $\lambda' + x$, $\lambda'' + x$, kann man durch eine der Formeln (1), (2) und (3), oder durch eine passende Transformation einer dieser Formeln die wahre Höhe h finden. Wenn man sich bei der Beobachtung der Sternshöhen eines künstlichen Horizontes bedient, so wird der Unterschied zwischen der berechneten $2h + 2r$, (wo r die genaue Refraction ist), und der von dem Indexfehler befreiten und vermittelst des Sextanten gemessenen doppelten scheinbaren Höhe, den Fehler des Sextanten für den Winkel $2h + 2r$ geben.

Die Grössen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ werden stets als positiv betrachtet und $\mathfrak{B}'$ wird in solchen Quadranten genommen, dass $sin\, \mathfrak{B}$ das Zeichen von $sin\, \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) . cotg\, \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$, und dass $cos\, \mathfrak{B}'$ das Zeichen von $cos\, \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) . tg\, \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ hat; eine ähnliche Regel giebt es auch bei der Berechnung des Winkels $\mathfrak{B}''$. Die Zweideutigkeit bei der Bestimmung von ψ durch die Tangente, muss so entschieden werden, dass $tg\, \varphi$ positiv wird; man nimmt also ψ zwischen -90^0 und $+90^0$, vorausgesetzt, dass die Beobachtungen in der nördlichen Hemisphäre gemacht werden. In der südlichen würde es umgekehrt sein.

22. Gewöhnlich werden auf einmal, innerhalb eines Zeitraumes von 10 oder 15 Minuten, mehrere Höhen eines Sternes gemessen, und man wartet die Zeiten ab, wo die anderen Sterne dieselben Höhen erreichen. Da die Beobachtungen eines jeden Sternes kurz auf einander folgen, so kann man bequem die Beobachtungsmomente auf die Zeit reduciren; welche für jeden Stern dem arithmetischen Mittel der gemessenen doppelten Höhen entspricht. Die Reduction lässt sich nach den Regeln berechnen, welche zuerst Soldner in Bode's astronomischem Jahrbuche für 1818 gegeben hat, und welche wir im vorhergehenden Artikel §. 19. Seite 362. erläutert haben. Aehnliche Regeln be-

finden sich auch in der Sammlung der Schumacher'schen Hülfstafeln, neu herausgegeben von Warnstorf; Altona 1845; pag. 122; aber das Zeichen der Correction des westlichen Stundenwinkels muss hier umgekehrt werden; weil nach jenen Regeln das arithmetische Mittel der beobachteten Zeiten unverändert bleibt, und die Correction an den Stundenwinkel angebracht wird, welcher aus dem Mittel der gemessenen Höhen zu berechnen ist; hier aber müssen wir im Gegentheil die Zeit finden, welche der mittleren Höhe entspricht. Sind also n doppelte Höhen gemessen und wird der Stundenwinkel t von der oberen Culmination gegen Westen bis 360° gezählt und ist h die wahre Höhe, welche dem arithmetischen Mittel der gemessenen doppelten Höhen correspondirt, so wird die an das Mittel der Beobachtungszeiten anzubringende Correction

$$= -\frac{M}{15.\,n}.\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin t}$$

sein, wo α und β aus den Gleichungen:

$$\sin\alpha = \frac{\sin t}{\cos h}.\cos\delta;\ \sin\beta = \frac{\sin t}{\cos h}.\cos\varphi,$$

nur auf Minuten berechnet werden; hier ist $M = \Sigma.\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\triangle t}{\sin 1''}$, oder gleich die Summe der Glieder: $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\triangle t}{\sin 1''}$; indem nach und nach für $\triangle t$ der Unterschied jedes einzelnen Beobachtungsmomentes vom Mittel der Beobachtungszeiten gesetzt werden muss. Wenn man sich das sphärische Dreieck, zwischen dem Zenithe, dem Sterne und dem Pole des Aequators denkt, so ist α der Winkel am Zenithe, oder das Azimuth, β aber der Winkel an dem Sterne, oder der parallactische Winkel; so dass also auch:

$$\cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\beta \sin h - \cos t,$$

diese Gleichung entscheidet ob $\cos\alpha . \cos\beta$ positiv oder negativ ist, und dient zugleich zur Controlle der Richtigkeit der berechneten Werthe von α und β.

Wenn bei den Beobachtungen eines Sternes einige der correspondirenden Höhen ausgelassen sind, so muss man die so corrigirte Zeit, wie sie der mittleren Höhe entspricht, auf die Zeit reduciren, welche der definitiv für alle drei Sterne gemeinschaftlich angenommenen und vom Instrumente unmittelbar gemessenen doppelten Höhe gehört. Es sei $2H$ diese doppelte Höhe und γ der Unterschied zwischen $2H$ und dem arithmetischen Mittel aller gemessenen doppelten Höhen; τ der Unterschied zwischen den entsprechenden Stundenwinkeln, oder die gesuchte Reduction. Wenn γ in Bogenminuten, und τ in Zeitsecunden ausgedrückt wird, so ist alsdann nach der Note in § 100. Seite 279. Band I., oder auch mittelst §. 19. Seite 362. Band II.:

$$\tau = p . \gamma - p \sin 15'' \left(\tfrac{1}{2} p \operatorname{cotg} t + \operatorname{tg} h\right) \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\tau = p . \gamma + \tfrac{1}{2} p^2 . \sin 15'' . \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} . \gamma^2,$$

und $p = - \dfrac{2 \cos h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} = + \dfrac{2}{\cos\varphi \sin A}$, wo A das Azimuth bezeichnet, welches dem Stundenwinkel t entspricht, aber von Norden gegen Osten bis 360° gezählt wird.

Man sieht übrigens leicht ein, dass der Ausdruck (a), auch ganz unabhängig von den oben erklärten Regeln, angewandt werden kann, um alle Beobachtungsmomente eines Sternes auf die Zeit zu reduciren, welche der gemeinschaftlichen Höhe entspricht, was besonders bequem ist, wenn die gemessenen doppelten Höhen in gleichen Intervallen auf einander folgen.

23. Sind aber *noch mehr als drei Sterne* beobachtet worden, und werden daraus die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Grössen gesucht, so kann man die Rechnung am sichersten und bequemsten nach folgender, von H. Knorre vorgeschlagenen Methode führen.

Die gemessene doppelte Höhe eines Sternes vom Indexfehler befreit und dann halbirt, giebt die genäherte scheinbare Höhe; zieht man davon die Refraction ab, so hat man die entsprechende wahre Höhe h. Vermittelst der nahezu bekannten Polhöhe φ und Uhrcorrection K kann man den Stundenwinkel t, vom Süden gegen Westen bis 360° gezählt, und das Azimuth A, von Norden gegen Osten ebenfalls bis 360° gezählt, berechnen und dazu die folgenden Formeln benutzen:

$$b = \tfrac{1}{2}(h + 90^0 - \varphi),\quad c = \tfrac{1}{2}(h - 90^0 + \varphi)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}\delta - c)\cos(b + \tfrac{1}{2}\delta)}{\cos\varphi \cos\delta}, \text{ oder:}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin(b - \tfrac{1}{2}\delta)\cos(\tfrac{1}{2}\delta + c)}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(b - \tfrac{1}{2}\delta)\cos(b + \tfrac{1}{2}\delta)}{\cos\varphi \cos h}, \text{ oder:}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}\delta - c)\cos(\tfrac{1}{2}\delta + c)}{\cos\varphi \cos h};$$

der Stundenwinkel t muss genau auf ein Zehntheil einer Bogensecunde, das Azimuth A aber, nur auf Minuten berechnet werden.

Wegen der Ungenauigkeit der bei der Rechnung angewandten Höhe h und Polhöhe φ, wird ein Fehler im Stundenwinkel t entstanden sein; es sei dieser Fehler $= \partial t$; ∂h und $\partial\varphi$, seien aber die Correction, welche zu h und φ zugelegt werden müssen, um den ganzen Complex der Beobachtungen am besten zu genügen. Alsdann erhält man nach §. 91. Seite 244. Band I:

$$\partial h = \cos\varphi \sin A . \partial t + \cos A . \partial \varphi$$

Es sei nun K die nahezu bekannte Uhrcorrection gegen Sternzeit, zu einer beliebigen Uhrangabe T gehörig; ∂K die aus allen Beobachtungen abzuleitende Verbesserung der vorläufig angenommenen Grösse von K; und k der genau bekannte Uhrgang gegen Sternzeit in einer willkührlichen Zeiteinheit, alsdann wird der wahre Stundenwinkel werden:

$$= 15 [\Theta + K + \partial K + k (\Theta - T) - AR] = t + \partial t$$

Hier bedeutet Θ die Zeit an der Uhr, wo der Stern, dessen Declination δ und gerade Aufsteigung AR ist, die wahre Höhe h erreicht. Wenn aber statt t, sein vermittelst der genäherten Werthe von h, φ und K genau berechneter Werth substituirt wird, so erhält man:

$$15 [\Theta + K + k (\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{15} t] + 15 \partial K = \partial t.$$

Dieser Ausdruck von ∂t in die Gleichung für ∂h substituirt, giebt:

$$\partial h = 15 \cos\varphi \sin A [\Theta + K + k (\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{15} t] + \\ + \cos\varphi \sin A . 15 \partial K + \cos A . \partial \varphi.$$

Aehnliche Gleichungen kann man auch aus den Beobachtungen des zweiten, dritten u. s. w. Sternes ableiten, nur muss man statt A, Θ, t, AR, δ respective A', Θ', t', AR', δ'; A'', Θ'', t'', AR'', δ'' u. s. w. schreiben; die Correctionen ∂h, ∂K und $\partial \varphi$ bleiben natürlich für alle Sterne dieselben.

Der Grad der Annäherung in der vorläufig angenommenen Uhrcorrection K ist willkührlich, nur muss die zu bestimmende Verbesserung von K nicht gross sein: man kann also K immer so wählen, dass eine der Grössen

$$\Theta + K + n(\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{15}\,t;$$
$$\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{15}\,t', \text{ u. s. w.}$$

Null wird; die anderen aber bekommen kleine Werthe. Wir wollen z. B. annehmen, dass die erste dieser Grössen Null ist; alsdann erhält man für die Bestimmung von K die Gleichung

$$K = \tfrac{1}{15}\,t + AR + (T - \Theta).k - \Theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Setzt man der Kürze halber:

$$15 \sin \tfrac{1}{2} A'. \cos \tfrac{1}{2} A'. [\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{15} t'] = a'$$
$$15 \sin \tfrac{1}{2} A''. \cos \tfrac{1}{2} A''. [\Theta'' + K + k(\Theta'' - T) - AR'' - \tfrac{1}{15} t''] = a''$$

u. s. w.

so wird man folgende Bedingungsgleichungen bekommen, welche alsdann zur endlichen Bestimmung von ∂h, ∂K und $\partial \varphi$ dienen können:

$$\partial h = \qquad\qquad + \cos\varphi \sin A.\ 15\,\partial K + \cos A.\ \partial\varphi$$
$$\partial h = 2\,a' \cos\varphi + \cos\varphi \sin A'.\ 15\,\partial K + \cos A'.\ \partial\varphi \; . \; . \; (c)$$
$$\partial h = 2\,a'' \cos\varphi + \cos\varphi \sin A''.\ 15\,\partial K + \cos A''.\ \partial\varphi$$

u. s. w.

Sind alle Messungen gleich zuverlässig, so muss jede von diesen Gleichungen mit der Anzahl der ihr entsprechenden Beobachtungen multiplicirt werden; die bekannte Auflösung, nach der Methode der kleinsten Quadranten, giebt dann die wahrscheinlichsten Werthe von $\partial\varphi$, $15\,\partial K$ und ∂h.

Wenn man nur drei Sterne in gleicher Höhe beobachtet hat, so kann man die Gleichungen (c) ebenfalls benutzen, um die entsprechenden Verbesserungen der Polhöhe, Uhrcorrection, und die Correction der angenommenen Höhe h zu bestimmen. Eine leichte Rechnung führt zur folgenden Auflösung:

Es sei:

$$f' = \frac{15 \sin \tfrac{1}{2} A' . \cos \tfrac{1}{2} A' [\Theta' + K + (\Theta' - T) . k - \mathrm{AR}' - \tfrac{1}{15} t']}{\sin \tfrac{1}{2} (A' - A) . \sin \tfrac{1}{2} (A'' - A')}$$

$$f'' = \frac{15 \sin \tfrac{1}{2} A'' . \cos \tfrac{1}{2} A'' [\Theta'' + K + (\Theta'' - T) . k - \mathrm{AR}'' - \tfrac{1}{15} t'']}{\sin \tfrac{1}{2} (A'' - A) . \sin \tfrac{1}{2} (A'' - A')}$$

alsdann ist:

$$\begin{aligned}
15 \, \partial K &= f'' . \sin \tfrac{1}{2} (A' + A) - f' \sin \tfrac{1}{2} (A'' + A) \\
\partial \varphi &= f'' . \cos \varphi \cos \tfrac{1}{2} (A' + A) - f' \cos \varphi \cos \tfrac{1}{2} (A'' + A) \\
\partial h &= f'' . \cos \varphi \cos \tfrac{1}{2} (A' - A) - f' \cos \varphi \cos \tfrac{1}{2} (A'' - A)
\end{aligned}$$

Der Fehler des Instrumentes ist alsdann $= 2 (H + \partial h) - g$, wo H die scheinbare bekannte Höhe, und g die Angabe des Instrumentes ist. Diese Gleichungen sind sehr bequem um die Polhöhe, die Zeit und die Höhe genau zu bestimmen, bei welcher drei verschiedene Sterne beobachtet wurden; man braucht dabei nicht alle Beobachtungsmomente auf die Zeit einer einzigen gemeinschaftlichen Höhe zu reduciren; es müssen nur die Höhen der verschiedenen Sterne ungefähr dieselben sein. Denn man kann immer annehmen, dass der Fehler eines mit dem Instrumente gemessenen Winkels sich nur ganz unbedeutend ändert, wenn der Winkel sich um ein wenig vergrössert oder verkleinert; wenn also die doppelten Höhen der verschiedenen Sterne nur wenige Minuten differiren sollten, so kann man den Fehler des Instrumentes als constant betrachten.

24. Die letzten Gleichungen für $15\,K$ und für $\partial\,\varphi$ dienen auch dazu, um den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Resultate würdigen zu können. Hat man die Zeit bei dem ersten Beobachtungsmomente Θ um $\pm\,\varepsilon$ falsch notirt, so wird dadurch ein Fehler $= \mp\,\varepsilon$ im K entstehen; wenn ausserdem die Beobachtungsmomente Θ' und Θ'' um $\pm\,\varepsilon'$ und $\pm\,\varepsilon''$ Zeitsecunden unrichtig sind, und wir $\pm\,(\varepsilon'-\varepsilon) = \triangle'$, $\pm\,(\varepsilon''-\varepsilon) = \triangle''$ setzen, so werden respective die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\triangle''.\sin A''.\sin\tfrac{1}{2}(A'+A)}{2\sin\tfrac{1}{2}(A''-A)\sin\tfrac{1}{2}(A''-A')} - \frac{\triangle'.\sin A'\sin\tfrac{1}{2}(A''+A)}{2\sin\tfrac{1}{2}(A'-A)\sin\tfrac{1}{2}(A''-A')} \text{ und}$$

$$\frac{15\,\triangle''\sin A''.\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A'+A)}{2\sin\tfrac{1}{2}(A''-A)\sin\tfrac{1}{2}(A''-A')} - \frac{15\,\triangle'.\sin A'\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A''+A)}{2.\sin\tfrac{1}{2}(A'-A)\sin\tfrac{1}{2}(A''-A')}$$

die Fehler in der Bestimmung von $\partial\,K$ und φ ausdrücken. Hieraus sieht man, unter welchen Umständen die Gauss'sche Methode mit der grössten Sicherheit anwendbar ist; man muss nämlich darauf sehen, dass keiner von den Sinussen von $\tfrac{1}{2}(A''-A)$, $\tfrac{1}{2}(A''-A')$, $\tfrac{1}{2}(A'-A)$ zu klein wird, welches man dadurch bewirkt, dass man nur Sterne auswählt, die die Höhe h in sehr ungleichen Azimuthen erreichen; am besten ist es, wenn die Unterschiede der Azimuthe ungefähr 120^0 betragen. Es ist auch klar, dass Sterne, deren Höhe sich langsam ändert, eben so brauchbar sind, als solche, die schnell steigen oder fallen; es kommt bei jenen nicht darauf an, das man den Augenblick, wo sie die verlangte Höhe haben, haarscharf trifft, sondern nur, dass sie in dem Augenblicke, den man dafür annimmt, in der That nicht merklich davon abstehen. Man kann also auch Sterne nahe bei der Culmination, oder auch den Polarstern wählen, und gerade solche sind sehr zweckmässig, weil man da dem eben erwähnten Erfordernisse mit Ruhe Genüge thun kann. Wenigstens einer von den drei Sternen, wird übrigens immer seine Höhe schnell ändern, wenn die Bedingung der ungleichen Azimuthe erfüllt ist. *) Wenn man z. B. den Polarstern beobachten will, so muss einer der übrigen Sterne im südöstlichen, und der andere im südwestlichen Theile des Himmels auf derselben Höhe beobachtet werden. Es versteht sich von selbst, dass, wenn der Beobachtungsort eine sehr bedeutende Polhöhe hat, man den Polarstern (α *Ursae Minoris*) nicht mehr brauchen kann; so z. B. schon in der Polhöhe von 60^0, ist die doppelte Höhe dieses Sternes nahe an 120^0, d. h. nicht mehr weit von der Grenze der Winkel entfernt, welche man mit dem Sextanten messen kann; dabei werden auch ferner, wegen der sehr geneigten Stellung des grossen Spiegels, sehr wenige Lichtstrahlen von diesem Spiegel reflectirt, wodurch die Helligkeit des Sternbildes sehr geschwächt wird.

25. Es müssen überhaupt sehr helle Sterne, also die der 1sten und 2ten Grösse, zu diesen Beobachtungen gewählt werden; in mondlosen Nächten kann man aber auch die Sterne 3ter Grösse gut beobachten. Ehe man die Höhenmessungen vornimmt, ist es nöthig sich darauf vorzubereiten; d. h. eine kleine Tabelle zu berechnen, um die Uhrzeiten auf ein Paar Minuten, anzugeben, wo jeder der gewählten Sternen die verlangte Höhe erreicht. Herr Kapitain Manganari, welcher die Gauss'sche Methode sehr oft und mit dem vorzüglichsten Erfolge bei Küsten-Aufnahmen angewandt hat, hat solche Tabellen für sehr viele Sterne und für die

*) Monatliche Correspondenz, Band XVIII., pag. 287: Gauss. Abhandlung.

Polhöhen seiner Beobachtungsorte entworfen, wo die Höhen, nebst entsprechenden Sternzeiten gegeben waren; was zum Gelingen der Beobachlungen viel beigetragen hat, und es möglich machte, während einer Nacht, zehn und sogar noch mehr Sterne bei einerlei Höhe zu beobachten. Die Höhe, bei welcher die Sterne beobachtet werden, ist willkührlich; man kann z. B. die Höhe von 30° mit Vortheil wählen, oder auch mehr. Doch hängt alles dies davon ab, zu welcher Nachtstunde man beobachten will und welche hinlänglich hellen Sterne in dieser Stunde aufzufinden sind. Um die Verwechselung zu vermeiden, muss man im voraus die Alhidade des Sextanten auf die berechnete Höhe stellen.

Die Sternshöhen kann man aus freier Hand messen; es ist aber sicherer mit einem passenden Stative zu beobachten, weil in diesem Falle die Coinzidenz der Sternbilder sich viel scharfer und besser in der Mitte des Gesichtsfeldes bemerken lässt. In allen Fällen muss das Glasdach jedoch, welches den Quecksilberhorizont gegen den Wind schützt, auf dieselbe Weise bei allen Beobachtungen angewandt werden, d. h. immer mit derselben Seite gegen den Beobachter zugekehrt sein, damit der Fehler der Gläser des Daches bei der Polhöhen und Zeitbestimmung nicht in Betracht kommt.

Wenn die Sterne gehörig gewählt sind, so kann man in einer Stunde, ja sogar in einer Halbenstunde, drei Sterne auf mehreren correspondirenden oder einerlei Höhen beobachten; in so kurzer Zeit wird selten der Zustand der Atmosphäre sich bedeutend ändern. Alsdann braucht man den Barometer-Stand und die Temperatur der Luft nur einmal zu notiren, oder auch am Anfange oder am Ende der Beobachtungen zu bemerken, und daraus das Mittel zu nehmen. Es ist auch sehr leicht auf die Veränderung der Refraction Rücksicht zu nehmen, indem man die genauen Refractionen r, r', r'' für jeden der drei Sterne berechnet, und die Correction der Zeiten bestimmt, welche der Veränderung der doppelten Höhen um $2(\varrho - r)$, $2(\varrho - r')$, $2(\varrho - r'')$, wo $\varrho = \frac{1}{3}(r + r' + r'')$ ist, entspricht.

26. Am passendsten ist es, die Messungen, in gleichen Intervallen der doppelten Höhen auf einander folgen zu lassen; z. B. von 20 zu 20 Bogenminuten, wenn man in der Nähe des ersten Verticales beobachtet; für den Polarstern, oder für die Sterne im Meridiane muss man die Intervalle kleiner machen, und die Messungen auf beiden Seiten der für alle Sterne verlangten gemeinschaftlichen doppelten Höhe symmetrisch fortführen. Will man aber dem Haupterfordernisse der Methode streng Genüge thun und die Resultate ganz unabhängig von den möglichen zufälligen Theilungsfehlern des Gradbogens erhalten, so muss man die doppelten Höhen für alle Sterne bei denselben Theilungsstrichen messen, in diesem Falle wird es nicht gut möglich sein den Polarstern ebenso oft wie die anderen Sterne zu beobachten. Aus diesem Grunde ist es besser, nach Knorre's Vorschlag, statt des Polarsternes den *β Ursae minoris*, oder ähnliche, vom Pole etwas entferntere Sterne, zu benutzen.

Beispiel. Am 18ten Juni 1831, im Taganrog, beobach-Herr M. Manganari, auf dem Quecksilberhorizonte mit einem Sextanten vom Stative aus, die doppelten correspondirenden Höhen der Sternen: *α Bootis*, *β Ursae minoris* und *α Cygni* an einem nahezu nach mittlerer Zeit gehenden Chronometer:

Doppelte Höhe	Zeit für α Bootis	Zeit für β Ur. min.	Zeit für α Cygni	
119° 0′	9h18′ 37″.5	....	11h39′ 58″.0	Barometer = 29. 95 Engl. Z.
118 40	9 20 34 .5	10h58′ 22″.5	11 38 59 .5	Thermom. = + 11°.0 R.
118 20	9 22 11 .5	11 2 0 .0	11 37 57 .5	Tägl. Retardation der Uhr... = 220′.6
118 0	9 23 56 .0	11 5 28 .0	....	Indexfehler = — 0° 1′ 0″.
117 40	9 25 34 .5	11 8 56 .5	11 35 58 .5	

Scheinb. AR	Scheinb. Declin.	Genäherte:
α Bootis.... AR = 14h 7′58″.68	δ = +20° 4′ 6″.5	Polhöhe... = 47° 12′ N.
β Ursae min. AR′ = 14 51 19 .50	δ′ = +74 51 0 .9	Oest. Länge = 2h36′ v. Gr.
α Cygni.... AR″ = 20 35 42 .61	δ″ = +44 40 46 .5	Uhrcorrect. = +5h58′.

Für's Erste müssen wir alle Beobachtungen auf eine gemeinschaftliche Angabe des Instrumentes, nämlich auf $118^0\,20'$, reduciren; diese Angabe, vom Indexfehler befreit, giebt $118^0\,19'$, oder die genäherte scheinbare Höhe ist $= 59^0\,9'.5$; die genaue Refraction ist hier $= 34''.1$; die wahre Höhe ist also nahezu $= 59^0 9' = h$; mit $\varphi = 47^0 12'$, giebt dann eine leichte Rechnung, mit 5- oder 4-stellingen Logarithmen:

	für α *Bootis*		für β *Urs. min.*	
Stundenwinkel $= t$	$18^0\ 4'$		$32^0 38'$	
Azimuth $= A$	214 36		344 5	
$lg\,\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin t}$	0.3839_n		0.0961_n	
$lg\,p$.	0.71462_n		1.03080_n	
$lg\,(\frac{1}{2} p^2 \sin 15''. \cos\alpha\cos\beta\,cosec\,t)$			$7.7183_n - 10$	
Mittel der Zeiten	$9^h\,22'\,10''.80$		$11^h\,3'\,41''.75$	
Mittl. gemess. dopp. Höhen. .	$118^0\,20'\,0''$		$118^0\,10'\,0''$	
Abweich. d. Mitt. der Zeiten von der Zeit der		*m*		*m*
1ten Beobacht. $\frac{1}{15}\,\triangle t =$	$0^h\,3'\,33''.5$	24.8	$0^h\,5'\,19''.25$	55.6
2ten "	1 36 .3	5.1	1 41 .70	5.6
3ten "	0 0 .7	0.0	1 41 .60	6.2
4ten "	1 45 .8	6.1	5 14 .80	54.1
5ten "	3 33 .7	24.9		
$M = \Sigma m$		60.9		121.5

Hier ist $m = \dfrac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \triangle t}{\sin 1''}$, welches aus den Tafeln für die Reduction auf den Meridian (Sammlung Schumacher'scher Hülfstafeln pag. 39.) mit dem entsprechenden Argumente $\triangle t$ in Zeit ausgedrückt, gefunden wird. Man hat also:

	für α *Bootis*	für β *Urs. min.*
Mittel der beobacht. Zeiten .	$9^h\,22'\,10''.80$	$11^h\,3'\,41''.75$
Correction $= -\dfrac{M}{15.n}\,\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin t}$	$+1\ .90$	$+2\ .52$
Red. auf die Inst.-Ang. $118^0 20'$	0.00	$-1\ 46\ .83$
Corrigirte Zeit	$\Theta = 9^h\,22'\,12''.70$	$\Theta' = 11^h\,1'\,57''.44$

Auf dieselbe Weise erhält man die corrigirte Zeit für α *Cygni* gleich $11^h\,37'\,58''.4 = \Theta''$. Wir wollen als Zeitmoment, für welches die Uhrcorrection K gefunden werden muss, die Uhrangabe $T = 11^h\, 0'\, 0''$ nehmen; und da die Uhr in jeder Stunde um $9''.19$, und in jeder Minute um $0''.152$ gegen Sternzeit zurückblieb, so hat man:

	für α *Bootis*	für β *Urs. min.*	für α *Cygni*
$\Theta = \ldots\ldots$	$9h\, 22'\, 12''.7$	$11h\ 1'\, 57''.4$	$11h37'\, 58''.4$
$k(\Theta - T) \ldots\ldots$	$-\ 15\ .0$	$+\ 0\ .3$	$+\ 5\ .8$
AR $\ldots\ldots$	$= 14\quad 7'\, 58\ .7$	$14h51'\, 19''.5$	$20\ 35\ 42\ .6$
$\Theta + k(\Theta - T) - \text{AR}$	$= -\ 4h\, 46'\ 1''.0$	$-\ 3h49'\, 21''.8$	$-\ 8h\, 57'\, 38''.4$
	$\lambda = -\ 71^\circ\, 30'\, 15''$	$\lambda' = -57^\circ 20'\, 27''$	$\lambda'' = -134^\circ 24'\, 35''$

$\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = +\ 7^0\ \ 4'\, 54''.0$	$\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) = -\ 31^0 27'\, 10''.2$
$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = +27\ 23\ 30\ .2$	$\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = -\ 12\ 18\ 23\ .0$
$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = +47\ 27\ 30\ .7$	$\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = +\ 32\ 22\ 23\ .5$
$lg\ tg\ \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = 9.094232$	$lg\ tg\ \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) = 9.786517_n$
$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0.285531$	$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = 0.661241$
$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 9.962684$	$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = 0.197938$
$lg\ tg\ \mathfrak{B}' = 9.342447$	$lg\ tg\ \mathfrak{B}'' = 0.645696_n$
$\mathfrak{B}' = +\ 12^0 24'\, 29''.1$	$\mathfrak{B}'' = -\ \ 77^0 15'\, 34''.4$
$\frac{1}{2}(\lambda' + \lambda) = -\ 64\ 25\ 21\ .0$	$\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda) = -\ 102\ 57\ 25\ .2$
$\mathfrak{C}' = -\ 76^0 49'\, 50''.1$	$\mathfrak{C}'' = -\ 25^0 41'\, 50''.8$
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = +\ 25\ 33\ 59\ .7$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}) = -\ 51\ 15\ 50\ .5$
$lg\ sin\ \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = 9.090907$	$lg\ sin\ \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) = 9.717501_n$
$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0.285531$	$lg\ cotg\ \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = 0.661241$
$comp\ lg\ sin\ \mathfrak{B}' = 0.667817$	$comp\ lg\ sin\ \mathfrak{B}'' = 0.010827_n$
$lg\ \mathfrak{A}' = 0.044255$	$lg\ \mathfrak{A}'' = 0.389569$
$lg\ \mathfrak{A}'' = 0.389569$	$\mathfrak{C}'' = -\ 25^0 41'\, 50''.8$
	$x = +\ 89\ 34\ \ 0\ .7$
$lg\ tg\ z = 9.654686$	$\mathfrak{C}'' + x = +\ 63^0 52'\ \ 9''.9$
$z = 24^0\, 18'\ \ 2''.0$	$lg\ cos\ (\mathfrak{C}'' + x) = 9.643865$
$45^0 - z = 20\ 41\ 58\ .0$	$lg\ \mathfrak{A}'' = 0.389569$
$tg\ \varphi = cotg\ \varphi\ cos\ (\lambda + x)$	$lg\ tg\ \varphi = 0.033434$
$sin\ h = \dfrac{sin\ \varphi\ sin\ (\eta + \delta)}{cos\ \eta}$	$\varphi = \text{Polhöhe} = 47^0 12'\, 11''.8$

$$lg\, tg\, (45^0 - z) = 9.577328$$
$$lg\, cotg\, \tfrac{1}{2}\, (\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}) = 0.320207$$
$$lg\, tg\, \psi = 9.897535$$
$$\psi = +\, 38^0\, 18'\, 10''.2$$
$$\tfrac{1}{2}\, (\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}) = -\, 51\;\, 15\;\, 50\;\, .5$$
$$x = 15\, \boldsymbol{K} = +\, 89^0 34'\;\, 0''.7$$
$$\boldsymbol{K} = \text{Uhrcor.} = +\, 5^h\, 58'\, 16''.05$$
$$\lambda = -\, 71^0 30'\, 15''.0$$
$$x = +\, 89\;\, 34\;\;\, 0\;\, .7$$
$$t = \lambda + x = +\, 18^0\;\, 3'\, 45''.7$$

$$lg\, cotg\, \varphi = 9.966566$$
$$lg\, cos\, (\lambda + x) = 9.978052$$
$$lg\, tg\, \eta = 9.944618$$
$$\eta = 41^0 21'\, 23''.4$$
$$\delta = 20\;\;\, 4\;\;\, 0\;\, .5$$
$$\eta + \delta = 61^0 25'\, 23''.9$$
$$lg\, sin\, (\delta + \eta) = 9.943582$$
$$lg\, sin\, \varphi = 9.865560$$
$$lg\, sec\, \eta = 0.124585$$
$$lg\, sin\, h = 9.933727$$
$$h = 59^0\;\, 8'\, 44''.0$$

Nun ist die Refraction $r = 34''.1$; folglich die berechnete scheinbare Höhe $= h + r = 59^0\, 9'\, 18'' = \boldsymbol{H}$; oder $118^0 18'\, 36'' = 2\, \boldsymbol{H}$ und da die entsprechende Angabe des Instrumentes $= 118^0\, 20'\, 0''$ ist, so giebt das Instrument $1'\, 24''$ zu viel. Man hat also die Polhöhe des Beobachtungsortes $= 47^0\, 12'\, 11''.8$; die Uhrcorrection gegen Sternzeit um 11^h an der Uhr $= 5^h\, 58'\, 16''.05$, und der Fehler des Instrumentes, mitsammt Indexfehler $= 1'\, 24''$ bei einem Winkel von $118^0\, 20'$.

Wir wollen jetzt dasselbe Beispiel nach Knorre's Gleichungen berechnen:

	α Bootis	*β Urs. min.*	*α Cygni*
Angabe des Instr.	$118^0 20'\;\, 0''.0$	$118^0 10'\;\, 0''.0$	$118^0 20'\;\, 0''.0$
Indexfehler	$-\;\, 1\;\;\, 0\;.0$	$-\;\, 1\;\;\, 0\;.0$	$-\;\, 1\;\;\, 0\;.0$
angenom. Höhe . .	$59^0\, 9'\, 30''.0$	$59^0\;\, 4'\, 30''.0$	$59^0\, 9'\, 30''.0$
Refraction r	$34\;.1$	$34\;.2$	$34\;.1$
gen. wah. Höhe h =	$59^0\;\, 8'\, 55''.9$	$59^0\;\, 3'\, 55''.8$	$59^0\;\, 8'\, 55''.9$

damit und mit $\varphi = 47^0\, 12'\, 0''$, hat man nach §. 23. Seite 375:

$$t = +18^0\ 3'40''.1;\quad t' = +32^0 38' 22''.7;\quad t'' = -44^0 50' 12''.6$$
$$\tfrac{1}{15}t = +1^h 12' 14''.68;\quad \tfrac{1}{15}t' = +2^h 10' 33''.5;\quad \tfrac{1}{15}t'' = -2^h 59' 20''.84$$
$$\tfrac{1}{2}A = -72^0 41'.9;\quad \tfrac{1}{2}A' = -7^0 57'.4;\quad \tfrac{1}{2}A'' = +38^0 56'.0$$
$$\Theta = 9^h 22' 12''.7;\quad \Theta' = 11^h 3' 44''.3;\quad \Theta'' = 11^h 37' 58''.44$$
$$k(\Theta - T) = -15.0;\quad k(\Theta' - T) = +0.6;\quad k(\Theta'' - T) = +5'.86$$

wobei $T = 11^h\ 0'\ 0''$ gesetzt worden ist; wenn man alsdann K aus der Beobachtung der Höhe von α ***Bootis***, unter der Annahme von $\varphi = 47^0\ 12'\ 0''$ bestimmt, so kömmt $K = 5^h\ 58'\ 15''.70$; folglich:

$$\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{15}t' = +7''.60;$$
$$\Theta'' + K + k(\Theta'' - T) - AR'' - \tfrac{1}{15}t'' = -1\ .77.$$

Damit ist $lg\, f' = 1.3742_n \quad lg\, f'' = 1.2705_n$

$$+f''\, sin\, \tfrac{1}{2}(A' + A) = +18''.40$$
$$-f'\, sin\, \tfrac{1}{2}(A'' + A) = -13\ .15$$
$$\overline{15\,\partial k \quad = +\ 5''.25}$$
$$\partial k \quad = +\ 0\ .35$$

$$+f''\, cos\,\varphi\, cos\, \tfrac{1}{2}(A' + A) = -\ 2''.05$$
$$-f'\, cos\,\varphi\, cos\, \tfrac{1}{2}(A'' + A) = +13\ .71$$
$$\overline{\partial\varphi = +11''.66}$$

$$+f''\, cos\,\varphi\, cos\, \tfrac{1}{2}(A' - A) = -\ 5''.41$$
$$-f'\, cos\,\varphi\, cos\, \tfrac{1}{2}(A'' - A) = -\ 6\ .19$$
$$\overline{\partial h = -11''.60}$$

Man hat also die Breite des Beobachtungsortes $= \varphi + \partial\varphi = 47^0 12' 11''.66$; die Uhrcorrection um 11 Uhr $= 5^h\ 58' 16''.05$; die wahre Höhe $= h + \partial h = 59^0\ 8'\ 44''.3$; scheinbare Höhe $= h + \partial h + r = H + \partial h = 59^0\ 9'\ 18''.4$; $2(H + \partial h) = 118^0\ 18'\ 36''.8$; Instrumentangabe $= 118^0\ 20'\ 0''$; Fehler des Instrumentes $= 1'\ 23''.2$; alles sehr nahezu, übereinstimmend mit den früheren Resultaten.

Bestimmung des Azimuthes eines terrestrischen Gegenstandes.

27. Hierzu misst man den Winkel zwischen einem Gegenstande und der Sonne, und beobachtet eine gleiche Zahl Abstände des Gegenstandes, von dem ihm zunächst gelegenen und am entferntesten gelegenen Sonnenrande. Bei jeder dieser Beobachtungen schreibt man die zugehörige Chronometerzeit auf, dessen Stand entweder in Bezug auf mittlere oder auch auf Sternzeit als bekannt vorausgesetzt wird; ferner bemerkt man ebenso den Stand des Barometers und der beiden Thermometer. Wenn die Beobachtungen nicht gar zu lange währen, z. B. nicht 10′ in Zeit dauern, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass das arithmetische Mittel der Beobachtungszeiten dem arithmetischen Mittel der gemessenen Winkel entspricht; im entgegengesetzten Falle aber, muss man die Beobachtungen in einzelne Gruppen eintheilen und für jede Gruppe besonders die Rechnung gerade so einrichten, wie wir es jetzt zeigen werden.

Befreit man die Beobachtungen zuerst vom Index-, so wie von anderen bekannten Fehlern, so erhält man die Winkel zwischen dem Gegenstande und einem der beiden Sonnenränder; legt man alsdann den scheinbaren Radius der Sonne zu diesen Winkeln hinzu, wenn der dem Gegenstande nähere Rand beobachtet wurde, oder zieht man ihn ab, wenn der vom Gegenstande entferntere Sonnenrand beobachtet wurde, so erhält man die Winkel zwischen dem Gegenstande und dem Centrum der Sonne.

Es sei Z (Fig. 55.) das Zenith; O und S die scheinbaren Oerter des terrestrischen Gegenstandes und des Sonnencentrums, bezeichnet man nun durch h und H die scheinbaren Höhen der Punkte O und S, durch b aber den Bogen

OS, oder den Winkel zwischem dem irdischen Gegenstande und dem Sonnencentrum, so erhält man aus dem spärischen Dreiecke ZOS, wo $ZO = 90^0 - h$, $ZS = 90^0 - H$ und $OS = b$; ganz leicht den Winkel $OZS = n$, oder den Unterschied der Azimuthe des Gegenstandes und der Sonne, und zwar durch folgende Relation:

$$sin \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{sin \tfrac{1}{2}(b + H - h) \, sin \tfrac{1}{2}(b - H + h)}{cos\, h \, cos\, H}}.$$

Wenn h sehr nahe an Null ist, so wird:

$$cos\, n = \frac{cos\, b}{cos\, H}.$$

Der gesuchte Unterschied der Azimuthe oder n, wird um so genauer erhalten, je näher die Sonne am Horizonte ist, und je mehr sich der Winkel ZOS (Fig. 55.) einem rechten Winkel nähert; man darf jedoch die Sonne nicht beobachten, wenn sie sehr nahe am Horizonte ist; denn in diesem Falle wird das Sonnenbild sehr undeutlich und unruhig sein. Die scheinbare Höhe der Sonne H, leitet man unmittelbar aus Höhenmessungen vor und nach den beobachteten Winkeln zwischen dem Gegenstande und der Sonne ab, aber noch bequemer ist es, diese Höhe vermittelst der astronomischen Ephemeride und der Breite des Beobachtungsortes für die Zeit der Beobachtung zu finden, in diesem Falle wird das Azimuth und die Höhe der Sonne durch folgende einfache Formeln bestimmt:

$$tg\, \omega = \frac{tg\, \delta}{cos\, t};\; tg\, a = \frac{cos\, \omega . tg\, t}{sin(\varphi - \omega)};\; cotg\, H^0 = \frac{tg\,(\varphi - \omega)}{cos\, a},$$

wo φ die Breite des Ortes ist; δ die Declination, t der

Stundenwinkel vom Südpunkt gerechnet; H^0 die wahre Höhe und a das Azimuth der Sonne zur Zeit der Beobachtung, ebenso wie der Stundenwinkel vom Südpunkte abgerechnet; legt man zu H^0 die entsprechende Strahlenbrechung hinzu, und zieht die Höhen-Parallaxe davon ab, so erhält man die scheinbare Höhe H, welche bei der Berechnung des Werthes n gebraucht wird.

Beispiel. In Kronstadt nahe am Ende des Festungs-Walles, unweit des Handelshafens, wurden am 10ten Juni 1843 mehrere Entfernungen der beiden Ränder der Sonne, des zunächst gelegenen und entfernteren Randes, von beiden Rändern des Thurmknopfes der Sternwarte des Steuermannskorps mit einem Sextanten gemessen; und aus diesen Beobachtungen fand man, dass die für Indexfehler schon verbesserte Distanz des Sonnencentrums von der Mitte des Thurmknopfes =

$b = 88^0\,49'\,47''$ um $6^h\,7'\,1''.0$ Chronometerzeit war.

Das Chronometer war gegen Sternzeit um $56''.5$ zu früh und also war die Sternzeit der Beobachtung $= 6^h\,6'\,4''.5$. Die angenommene östliche Länge Kronstadts von Berlin war $= 1^h\,5'\,25''$, und damit findet man aus dem Berliner Astronomischen Jahrbuche, dass am 10ten Juni 1843 die Sternzeit im wahren Mittage zu Kronstadt $= 5^h\,12'\,21''.2$ war, und die stündliche Bewegung der geraden Aufsteigung der Sonne findet man in einer Stunde Sternzeit $= 10''.35$ in Zeit; hieraus folgt aber für die wahre Sonnenzeit der Beobachtung $0^h\,53'\,34''.1$, welches der westliche Stundenwinkel der Sonne in Zeit war; in Graden ausgedrückt, wird dieser Winkel aber $= 13^0\,23'\,31''.5 = t$. Die Breite des Beobachtungsortes $= 59^0\,59'\,30'' = \varphi$; die Declination des Sonnencentrums $= +\,23^0\,0'\,42''.0$; die Höhe der Mitte des Thurmknopfes vom Beobachtungsorte ausgesehen $= 1^0\,23'\,30'' = h$; die Temperatur der Luft war $= + 16^0.0$ Reomur; die Höhe des Barometers $= 30.05$ englische Zoll. Berechnet man jetzt die wahre Höhe und das Azimuth des Sonnencentrums nach den oben angegebenen Formeln, und damit endlich die Strahlenbrechung und Höhen-Parallaxe, so erhält man:

Wahre Höhe. . . . $= H^0 = 50^0 54' 14''$	Nordwestliches Azimuth
Refraction – Paral. $=$ $+41$	der Sonne $= 160^0 14' 30''$
Scheinbare Höhe $\odot = H = 50^0 54' 55''$	oder
Scheinb. H. d. Knop. $= h = 1^0 23' 30''$	Südwestliches Azimuth
Gemess. Abstand $= b = 88^0 49' 47''$	der $\odot = a = 19^0 45' 30''$

$$\tfrac{1}{2}(b+H-h) = 69^0 10' 36'' \ldots lg\ sin = 9.970663$$
$$\tfrac{1}{2}(b-H+h) = 19^0 39' 11'' \ldots lg\ sin = 9.526758$$
$$comp\ lg\ cos\ H = 0.200336$$
$$comp\ lg\ cos\ h = 0.000128$$
$$\text{Summe} = 9.697885$$
$$lg\ sin\ \tfrac{1}{2}n = \text{halbe Summe} = 9.848942$$
$$\tfrac{1}{2}n = 44^0\ 55'\ 42''$$
$$n = 89\ 51\ 24$$

Die Sonne befand sich zur Zeit der Beobachtung südwestlich vom Knopfe:

Azim.-Diff. zw. Knopf-Mitte und $\odot$-Centrum . .	$n = 89^0\ 51'\ 24''$
Südwestl. Azimuth des $\odot$-Centrums.	$a = 19\ 45\ 30$
Südöstl. Azimuth der Mitte des Knopfes. . . .	$= 70^0\ 5'\ 54''$

Den Höhenwinkel eines entfernten irdischen Objectes kann man nicht unmittelbar mit dem Sextanten messen; der Fehler, welcher jedoch in der Bestimmung des Azimuthes wegen der Vernachlässigung dieser Höhe entstehen würde, ist meistens zu bedeutend um unberücksichtigt bleiben zu können; er wird desto grösser, je kleiner der Unterschied zwischen den Azimuthen der Sonne und des Objectes, und um je grösser die Sonnenhöhe ist. Wir müssen also hier die Methode auseinander setzen, wie der Beobachter, welcher nur mit einem Sextanten und Chronometer versehen ist, sowohl das Azimuth, wie auch die Höhe des Objectes finden kann. Diese Methode, auf welche zuerst der Herr Akademiker Wisniewsky *), und nochmals Herr Knorre **) aufmerksam gemacht hat, besteht darin, dass man die Distanzen des Objectes von der Sonne zu zwei verschiedenen Tageszeiten misst und zugleich die entsprechenden Angaben eines, bereits verificirten Chronometers bemerkt. Es wird am besten seyn, wenn nämlich die Lage des Objectes es erlaubt, eine Distanz nahe an der Verticalebene zu messen, in welcher das Object liegt, die andere Distanz aber dann erst zu nehmen, wenn die Sonne in einer bedeutenden Entfernung von dieser Ebene sich befindet; oder wenn das Object an der Mittagsseite des Meridianes liegt, so wird man das Azimuth sehr genau durch die Beobachtungen der correspondirenden und gleichen Distanzen des Objectes von der Sonne, des Morgens und des Abends, ermitteln können. Uebrigens ist die weiter unten auseinandergesetzte Methode ganz allgemein.

Bei der Messung der Sonnendistanzen vom Objecte notirt man auch den Barometer- und Thermometer-Stand um die Refraction berechnen zu können. Es sei Z das Zenith; P (Fig. 54.) das irdische Object, von welchem die Sonnendistanzen $PS = \partial$ und $PS' = \partial'$ gemessen wurden; S und S' die scheinbaren Oerter des Sonnenmittelpunktes. Mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten Polhöhe und Länge des Beobachtungsortes und den bekannten wahren Sonnen-

---

*) Memoires de l'academie de St. Petersbourg 1816.

**) Astronomische Nachrichten Band VII. Seite 264.

zeiten der Beobachtungen, berechnet man erst die wahren Sonnenhöhen, und dann, nach Anbringung der **Refraction minus Parallaxe**, die **scheinbaren** Sonnenhöhen H und H', so wird man alsdann die **scheinbaren** Zenithdistanzen $ZS = 90^0 - H$, und $ZS' = 90^0 - H'$ erhalten; sowie auch den Winkel SZS', oder den Unterschied der nach einer Richtung bis 360^0 fortgezählten Azimuthe der Sonne, welche den beobachteten Zeiten für ∂ und ∂' entsprechen. Alsdann bekommt man aus der Auflösung der sphärischen Dreiecke SZS', $SS'P$ und SZP folgende Formeln:

$$tg\,\Theta = cotg\,H \cos SZS'$$

$$\cos\sigma = \frac{\sin H . \sin (H' + \Theta)}{\cos \Theta};\ \sigma = SS';$$

$$\sin \tfrac{1}{2} ZSS' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(H + \sigma + H') \sin \frac{1}{2}(H + \sigma - H')}{\cos H \sin \sigma}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} S'SP' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\partial + \partial' - \sigma) \sin \frac{1}{2}(\partial' + \sigma - \partial)}{\sin \sigma \sin \partial}}.$$

Unsere Figur setzt voraus, dass die grössere Sonnendistanz ∂ der grösseren Sonnenhöhe H entspreche; in diesem Falle wird der Winkel $ZSP = ZSS' - PSS'$ sein; im entgegengesetzten Falle aber, wird $ZSP = ZSS' + PSS'$ werden, hat man also die Winkel ZSS' und PSS' berechnet, so erhält man leicht den Winkel ZSP. Wenn man nun $ZSP = N$ und

$$tg\,\psi = cotg\,\partial \sec N$$

setzt, wo ψ einen Hülfswinkel bedeutet; so wird endlich:

$$cotg\,PZS = \frac{cotg\,N . \sin (H - \psi)}{\cos \psi},$$

$$\cos ZP = \frac{\cos \partial . \cos (H - \psi)}{\sin \psi};$$

so dass auf diese Weise die Höhe des Objectes $= 90^0 - ZP$ und der Unterschied PZS zwischen dem Azimuthe desselben und dem leicht zu berechnenden Azimuthe der Sonne, bekannt werden wird.

Bestimmung der geographischen Länge durch Messung von Mond-Distanzen.

28. Der Winkel, welcher zwischen zwei Gesichtslinien enthalten ist, die vom Auge eines Beobachters nach dem Monde und der Sonne, oder einem anderen Gestirne gehen, heisst gewöhnlich die Monddistanz, und diese wird sich, wegen der raschen Bewegung des Mondes, sehr schnell ändern. Wenn die Parallaxe und Strahlenbrechung keine Wirkung auf diesen Winkel äusserten, und man an zwei verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche eine und dieselbe Monddistanz gemessen hätte, so würde man, wenn die Beobachtungszeiten bekannt wären, die geographische Längendifferenz dieser beiden Orte ganz direct finden können, weil die Längendifferenz, nur den Unterschied der gleichnamigen Zeiten, (Sonnen- oder Sternzeiten), die an verschiedenen Orten in demselben physischen Momente gezählt werden, ausdrückt. Solche Monddistanzen, die nun vom Einflusse der Parallaxe und Strahlenbrechung befreit sind, heissen wahre*) und in unseren heutigen astronomischen Ephemeriden, werden sie von 3 zu 3 Stunden mittlere Zeit (auf

*) Bezeichnet man durch ∂ die wahre Distanz, zwischen dem Mondscentrum und einem anderen Gestirne, für irgend eine gegebene mittlere Zeit des Haupt- (oder ersten) Meridianes; durch α und A die entsprechenden wahren geraden Aufsteigungen, und durch δ und D die wahren Declinationen

den Meridian der Ephemeride bezogen) für alle Tage im Jahre im voraus angegeben, wenn ihre Benutzung überhaupt möglich ist; um nun den Längenunterschied zu erhalten, so vergleicht man diese Angaben der Ephemeriden mit der wahren Distanz, welche aus den Beobachtungen auf folgende Weise abgeleitet werden kann. Gewöhnlich misst man die Distanzen, zwischen den nächsten Rändern des Mondes und der Sonne; legt man dann zu der gefundenen Distanz dieser Ränder die Summe der scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne hinzu, so erhält man die scheinbare Distanz des Centrums der Gestirne, Es sei nun Z (Fig. 56.) das Zenith des Beobachtungsortes, L' der scheinbare und L der wahre Ort des Mondscentrums, S' und S der scheinbare und wahre Ort der Sonne; nimmt man nun zuerst die Erde als kugelförmig an, so wird L auf der Ebene des Verticalkreises liegen, nämlich auf $Z\,L'$, und ebenso wird S auf der Ebene des Verticalkreises $Z\,S'$ liegen, man kann annehmen, dass L näher am Zenith als L' liegen wird, weil die Parallaxe des Mondes immer grösser als die Strahlenbrechung sein wird; dagegen wird S weiter vom Zenithe abliegen als S', weil die Sonnenparallaxe gewöhnlich kleiner als die Strahlenbrechung ist. Der Bogen $L'\,S' = \partial'$, ist die bekannte scheinbare Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne, mit Hülfe welcher, die wahre Distanz beider $= L\,S = \partial$ berechnet werden muss. Es sei nun: $Z\,L' = 90^0 - h'$; $Z\,L = 90^0 - h$; $Z\,S' = 90^0 - H'$; $Z\,S = 90^0 - H$. Aus der Vergleichung der beiden sphäri-

---

des Centrums dieser Gestirne, für ganz dieselbe obige Zeit berechnet, so folgt alsdann aus dem sphärischen Dreiecke, welches vom Pole des Aequators und den beiden wahren Oertern der Gestirne gebildet wird, sehr einfach:

$$\cos \partial = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A).$$

schen Dreiecke ZLS und $ZL'S'$, in welchen der Winkel $LZS = L'ZS'$, hat man nun sogleich:

$$\frac{\cos\partial - \sin h \sin H}{\cos h \cos H} = \frac{\cos\partial' - \sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'},$$

mithin auch durch eine einfache Transformation:

$$\frac{\cos\partial + \cos(h+H)}{\cos h \cos H} = \frac{\cos\partial' + \cos(h'+H')}{\cos h' \cos H'} \ldots (A)$$

Setzt man nun: $\partial' + h' + H' = 2p$, so hat man alsdann:

$$\cos\partial' + \cos(h'+H') = 2\cos p \cos(p-\partial');$$
$$\cos\partial = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\partial;$$
$$\cos(h+H) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(h+H) - 1.$$

Folglich erhält man:

$$\frac{2\cos^2\frac{1}{2}(h+H) - 2\sin^2\frac{1}{2}\partial}{\cos h \cos H} = \frac{2\cos p \cos(p-\partial')}{\cos h' \cos H'},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\partial = \cos^2\tfrac{1}{2}(h+H) - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'}\cos p \cos(p-\partial').$$

Da nun $\sin^2\frac{1}{2}\partial$ stets ein positiver Werth sein muss, so wird das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung kleiner als das erste werden müssen, und folglich wird man stets einen Hülfswinkel M so nehmen können, dass:

$$\sin M = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(h+H)}\sqrt{\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'}\cos p \cos(p-\partial')} \ldots (B)$$

alsdann wird aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}\partial = \cos\tfrac{1}{2}(h+H)\cos M \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Diese beiden letzten Gleichungen bilden die Auflösung der Aufgabe; sie wurden zuerst in dieser Gestalt von Borda entwickelt und sind zur Rechnung sehr bequem. Wenn drei Beobachter mit drei Instrumenten beobachten, so kann man die scheinbaren Höhen h' und H' zu gleicher Zeit, mit der Monddistanz messen, worauf man dann mit Hülfe dieser Höhen, der Horizontalparallaxen und des beobachteten Barometer- und Thermometer-Standes die wahren Höhen h und H sogleich finden kann. Gewöhnlich wird man jedoch h, h', H und H' lieber durch eine directe Berechnung bestimmen. Kennt man nämlich die Breite des Beobachtungsortes, die Zeit der Beobachtung und ebenso die genäherte Länge des Ortes, so sucht man alsdann aus der astronomischen Ephemeride, die wahren geraden Aufsteigungen, Abweichungen, Parallaxen und Halbmesser der Gestirne für das Beobachtungsmoment; alsdann giebt uns der Unterschied zwischen der Sternzeit der Beobachtung und den entsprechenden geraden Aufsteigungen der Gestirne, die Stundenwinkel dieser Gestirne selbst; darauf bestimmt man aber nach den in §. 27. Seite 388. angegebenen Formeln die wahren Höhen der Mittelpunkte der Gestirne, und dadurch erhält man dann die Parallaxen in Höhe und die Strahlenbrechungen; legt man nun die Strahlenbrechungen zu den wahren Höhen hinzu und zieht die Höhen-Parallaxen davon ab, so erhält man endlich die scheinbaren Höhen der Gestirne.

29. **Berechnung der scheinbaren Halbmesser der Gestirne.** Bezeichnet man durch r den wahren Halbmesser des Mondes, durch r' aber seinen scheinbaren Halbmesser, so besteht zwischen beiden, folgende Relation: $r' = r \cos(h - y) \sec h$, wo h die wahre Höhe des Mondes, und y die entsprechende Höhen-Parallaxe ist. Uebrigens wird in den meisten Hülfstafelnsammlungen häufig der Werth $r' - r$ oder die Vergrösserung des Mondshalbmessers, der jeder

Mondshöhe entspricht, gegeben. Diese Correction ist nur beim Monde merklich, bei allen anderen Gestirnen dagegen, kann man sie ohne weiteres vernachlässigen.

Es giebt aber noch eine andere Correction des scheinbaren Halbmessers der Gestirne, welche zuweilen sehr merklich werden kann, und von dem Unterschiede der Strahlenbrechung beim Ober- und Unterrande der Gestirne abhängt. Da die scheinbare Grösse der Durchmesser des Mondes und der Sonne nur ungefähr einen halben Grad ausmacht, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass der Unterschied der Strahlenbrechungen bei den verschiedenen Punkten am Umfange der Sonnen- oder Mondscheibe sich der Höhen-Differenz dieser Punkte proportional ändert. Ohne Strahlenbrechung würden die Gestirne als Kreis-Scheiben erscheinen; aber in Folge der Strahlenbrechung müssen alle verticalen Sehnen der scheinbaren Sonnen- oder Mondsscheibe der Grösse dieser Sehnen selbst proportional verkleinert werden; jede horizontale Sehne aber bleibt dabei unverändert, und folglich nimmt das Gestirn die Gestalt einer Ellipse an, deren grosse Halb-Achse $= r' =$ scheinbaren Halbmesser des Gestirnes, horizontal ist; der kleine aber $= r' - (\varrho - \varrho')$, vertical ist; ϱ ist dabei die Refraction für die Höhe des Unterrandes, und ϱ' diejenige für die Höhe des Oberrandes, so dass ϱ stets grösser als ϱ' ist. Die Abplattung dieser Ellipse ist $= \frac{\varrho - \varrho'}{2\,r'}$ und immer sehr klein. Aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse, folgt nun, dass, wenn man alle Potenzen der Abplattung, welche höher als die erste sind, vernachlässiget und durch $\mathfrak{r}$ irgend einen Halbmesser dieser kleinen Ellipse bezeichnet, welcher mit der kleinen oder verticalen Halb-Achse, einen Winkel $= \psi$ bildet, alsdann auch:

$$\mathfrak{r} = r' - \tfrac{1}{2}(\varrho - \varrho')\cos^2\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

Dieser Winkel ψ liegt nun zwischen dem Verticalkreise, der vom Zenithe aus nach dem Centrum desjenigen Gestirnes geht, dessen Radius r ist, und dem Bogen des Kreises, der die Mittelpunkte beider Gestirne verbindet. Wenn zum Beispiel, das dem Horizonte näher gelegene Gestirne der Mond ist, das andere aber höher gelegene, die Sonne ist, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $S' Z L'$ (Fig. 56.):

$$\cos\psi = \frac{\sin h' - \sin H' \cos\partial'}{\cos H' \sin\partial'}, \text{ oder}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sin\frac{1}{2}(H' + \partial' - h)\cos\frac{1}{2}(H' + \partial' + h')}{\cos H' \sin\partial'};$$

Zur Berechnung dieses Winkels sind 4stellige Logarithmen vollkommen genügend. Die scheinbare Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne oder ∂' wird gefunden, wenn man zur beobachteten Distanz der Ränder die Summe derjenigen scheinbaren Halbmesser der Gestirne zulegt, die auf dem grössten Kreisbogen liegen, der beide Gestirne verbindet; folglich ist r der Werth des Halbmessers, den man in der Rechnung statt r' brauchen muss, wo r' den scheinbaren horizontalen Halbmesser bedeutet, der schon nach §. 29. Seite 396. für die entsprechende Höhe des Gestirnes über dem Horizonte vergrössert sein muss. Die Correction, welche von der Strahlenbrechung herrührt, wird nur alsdann merklich werden, wenn die Höhe des Gestirnes über dem Horizonte kleiner als 15° ist; in allen anderen Fällen ist sie beinahe verschwindend klein.

30. **Einfluss der Gestalt der Erde auf die Berechnung der Mond-Distanz.** Die Annahme, dass die Erde eine kugelförmige Gestalt hat, wird zwei Fehler hervorrufen; denn

1stens wird die in dieser Voraussetzung berechnete Höhenparallaxe ungenau sein, weil man bei ihrer Berechnung sich der scheinbaren Distanzen der Gestirne vom wahren oder geocentrischen Zenith bedienen soll, und nicht ihrer Distanzen, die vom scheinbaren Zenithe, oder von der Richtung der Lothlinie abgerechnet werden; und

2tens wird die dabei angenommene Gleichheit der Winkel SZL und $S'ZL'$ (Fig. 56.) nicht stattfinden, denn die Parallaxe führt den Mond aus der Vertical-Ebene heraus, und folglich wird $L'ZS'$ oder der Unterschied der scheinbaren Azimuthe des Mondes und der Sonne, nicht gleich dem Unterschiede LZS des wahren Azimuthes dieser beiden Gestirne sein können. Die hier folgende Methode, um bei dieser Berechnung, den Einfluss der wahren Gestalt der Erde mit genügender Genauigkeit zu berücksichtigen, rührt von Borda her.

Bezeichnet man durch Π die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes, durch α die Erdabplattung und durch φ die Breite des Beobachtungsortes, so berechnet man den Werth: $\Pi\ (1 + \alpha \sin^2 \varphi)$, welchen man statt der Horizontal-Parallaxe des Mondes annehmen muss; hat man damit die wahre Monddistanz ∂, nach den Formeln (C) und (D) berechnet, so muss man endlich zu dem gefundenen ∂ die Endcorrection:

$$+ 22.8 \sin \varphi \left\{ \frac{\sin D}{\sin \partial} - \operatorname{cotg} \partial . \sin \delta \right\},$$

hinzulegen, wo δ die Declination des Mondes und D die Declination der Sonne ist*); es ist noch genauer statt des

*) Um diese Formel herzuleiten, nehme man an, dass A (Fig. 57.) das Centrum der Erde sei; es sei AQ die kleine Achse, auf deren Verlängerung sich der Pol des Aequators P befindet, ferner sei O der Ort des Beobachters, Z sein scheinbares, Z' sein geocentrisches Zenith, S der wahre Ort der Sonne, und L' der Ort des Mondes nur für Re-

Factors 22''.8 die Zahl $2\alpha\Pi$, oder $\frac{1}{150}\Pi$ zu nehmen, wo Π die Aequatorial-Parallaxe ist.

---

fraction verbessert, und endlich sei $Z\,O\,N$ die Lothlinie, welche die Umdrehungsachse der Erde im Punkte N schneidet. Wenn wir die halbe grosse Achse der Erde als Einheit annehmen, so wird die Länge der Normale $O\,N = 1 + \alpha \sin^2\varphi$, und wenn die Erde eine Kugel wäre, welche von N aus mit dem Halbmesser $O\,N$ beschrieben wäre, so würde die Horizontalparallaxe des Mondes $= \Pi\,(1 + \alpha \sin^2\varphi)$ werden, seine wahre Horizontalparallaxe aber bei der Breite φ, ist $= \Pi\,(1 - \alpha \sin^2\varphi)$, wo Π die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe ist. Denkt man sich die Bögen $Z\,S$, $Z\,L'$, $Z'\,S$, $Z'\,L'$, und auf $Z'\,L'$ den Bogen $L'\,p = \Pi\,(1 - \alpha \sin^2\varphi) \sin Z'\,L'$ abgesetzt, so wird alsdann $\partial'' = S\,p$ die wahre Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne bestimmen; wenn man aber auf dem Verticalkreise $Z\,L'$, einen Punkt L so annimmt, dass der Bogen $L\,L' = \Pi\,(1 + \alpha \sin^2\varphi) \sin L'\,Z$ wird, so wird die Distanz $S\,L = \partial$ diejenige sein, welche aus den Formeln (B) und (D) erhalten wurde, als man die Horizontal-Parallaxe des Mondes $= \Pi\,(1 + \alpha \sin^2\varphi)$ annahm.

Denkt man sich jetzt die kleinen Bögen $o\,p\,n$ und $L\,m$ senkrecht auf $S\,L'$; so wird $o\,L$ sehr nahe $= m\,n = n\,L' - m\,L'$ werden, und folglich $\partial = \partial'' + L'\,n - L'\,m$ sein. Es sei $Z\,L' = a$; $Z'\,L' = a'$; $Z\,S = b$, $Z'\,S = b'$, $S\,L' = \partial'$; alsdann ist:

$$L'n = L'p.\cos Z'L'S = \Pi\,(1 - \alpha \sin^2\varphi).\ \sin a' \left(\frac{\cos b' - \cos a' \cos \partial'}{\sin a' \sin \partial'}\right).$$

$$L'm = L\,L'.\cos Z\,L'S = \Pi\,(1 + \alpha \sin^2\varphi).\ \sin a \left(\frac{\cos b - \cos a \cos \partial}{\sin a \sin \partial}\right)$$

Die Differenz $L'\,n - L'\,m$ wird immer sehr klein sein, und man kann deswegen bei der Berechnung dieser Differenz ∂ statt ∂' nehmen; bezeichnet man nun $a' - a$ durch $\triangle a$ und $b' - b$ durch $\triangle b$, so kann man die Glieder vernachlässigen, in welchen $\triangle a^2$, $\triangle b^2$, $\Pi\,(\partial' - \partial)$, $\alpha \triangle a$ und $\alpha \triangle b$ vorkommen, weil diese sehr klein sein werden, und erhält alsdann:

Hat man nun die wahre Winkeldistanz ∂'' des Mittelpunktes des Mondes von dem anderen Gestirn berechnet, so kann man alsdann vermittelst genauer Interpolation aus einer astronomischen Ephemeride die mittlere Zeit T an dem Meridiane dieser Ephemeride finden, zu welcher die wahre Distanz der beiden Gestirne, den Werth ∂'' hatte; alsdann wird der Unterschied zwischen dieser Zeit T und der entsprechenden mittleren Zeit am Beobachtungsorte, die gesuchte Länge des Ortes, von jenem Meridiane abgezählt, bestimmen, welche östlich sein wird, wenn die Beobachtungszeit grösser als T, und westlich im entgegengesetzten Falle sein wird.

Um die wahre Monddistanz aus der direct beobachteten herzuleiten, hat der berühmte Bessel eine andere sehr sinn-

---

$$L'n - L'm = -2\,\alpha\,\Pi \sin^2\varphi\left(\frac{\cos b - \cos a \cos\partial}{\sin\partial}\right) +$$

$$+\,\Pi\left(\frac{\triangle a \cos\partial \sin a - \triangle b \sin b}{\sin\partial}\right),$$

Bezeichnet man nun durch A das Azimuth des Mondes und durch B das Azimuth der Sonne, so erhält man:

$$a' - a = \triangle a = \alpha.\sin 2\varphi.\cos A;\ \cos A = \frac{\sin\delta - \cos a \sin\varphi}{\cos\varphi \sin a}$$

$$b' - b = \triangle b = \alpha.\sin 2\varphi.\cos B;\ \cos B = \frac{\sin D - \cos b \sin\varphi}{\cos\varphi \sin b}$$

In diesen Formeln bezeichnet δ die Declination des Mondes, und D die Declination der Sonne. Setzt man nun in dem Ausdrucke für $L n' - L' m$, statt $\triangle a$ und $\triangle b$ ihre Werthe aus den obigen Ausdrücken ein, so erhält man nach einiger Reduction:

$$\partial'' = \partial + 2\,\Pi\,\alpha.\sin\varphi\left(\frac{\sin D - \cos\partial \sin\delta}{\sin\partial}\right)$$

der mittlere Werth von Π ist $57'\,0''$; $\alpha = \frac{1}{300}$; folglich $2\,\Pi\,\alpha = 22''.8$.

reiche Methode vorgeschlagen, welche ganz streng ist, (Astronomische Nachrichten, B. X. S. 17—62.); man findet diese Methode auch in einem russischen Werke von Knorre, mit vielen dazugehörigen Zusätzen entwickelt, welches zu Anfang des Jahres 1837 in Nicolaew erschien. Es ist jedoch zu bedauern, dass heut zu Tage die nöthigen Hülfstafeln noch nicht herausgegeben werden, ohne welche diese Methode bei ihrer Anwendung eine ziemlich weitläuftige Berechnung erfordert. Auf eine ähnliche Weise werden auch die Mondsdistanzen von Fixsternen und von Planeten berechnet; für Sterne sind die scheinbaren Halbmesser und die Parallaxen gleich Null; was die Planeten anbelangt, so werden wir unten einige Bemerkungen darüber anführen.

Beispiel. Auf der St. Petersburger academischen Sternwarte, wurden am 1sten Januar 1846, mit Hülfe eines Througton'schen Sextanten folgende Beobachtungen angestellt:

Uhrzeit nach der Pendeluhr von Lepaute	Distanz zwischen den nächsten Rändern des Mondes und der Sonne	Barometer = 29.38 engl. Zoll oder = 27′ 6″.8
$1^h\,53'\,30''$	$49^0\,10'\,30''$	pariser Maass.
54 47	10 58	Inneres Thermom.
56 11	11 33	$= + 3^0.0$ Reomur
57 34	12 5	Aeusseres Thermo.
58 43	12 30	$= - 3^0.8$ Reomur
$1^h\,56'\,9''.0$	$49^0\,11'\,31''.2$ = Mittel	

Die Uhr war gegen mittlere St. Petersburger Zeit um $7'\,10''.0$ zu spät; der Indexfehler, sowohl vor als nach der Beobachtungen bestimmt, war $= + 5'\,49''$; und folglich findet man, dass um $2^h\,3'\,19''.0$ mittlere St. Petersburger Zeit, die scheinbare Zenithdistanz $= 49^0\,17'\,20''.2 = \partial'$ war.

Mit der vorläufig angenommenen Länge St. Petersburgs von Greenwich $= 2^h\,1'\,16''$ findet man, dass zur Zeit unserer

Beobachtung die mittlere Zeit in Greenwich $= 0^h\,2'\,3''$ war, und aus dem Nautical-Almanac findet man damit:

gerade Aufsteigung des Mondes	Declination des Mondes	Aequatorial Horizontal-Parallaxe	Mondes-Halbmesser
$22^h\,4'\,9''.41$	$-6^0\,38'\,9''$	$\Pi = 60'\,2''.2$	$16'\,21''.6$

Sonnen-Declination	Horizontal-Parallaxe der Sonne	Halbmesser der Sonne	Zeit-Gleichung
$-23^0 1' 11''.4$	$+8''.7$	$16'\,17''.3$	$-3'\,50''.4$

(—) zeigt hier an, dass die Declination südlich war, und dass die wahre Sonnenzeit später als die mittlere war. Man bestimmt nun zuerst die Stundenwinkel der Gestirne:

St. Petersburger mittlere Zeit	=	$2^h\;\;3'\,19''.00$
Zeit-Gleichung	=	$-3\;\;50\;\;.40$
Wahre Zeit.	=	$1^h\,59'\,28''.60$

folglich wird der westliche Stundenwinkel der Sonne in Graden ausgedrückt $= t$ . . . . $= 29^0 52'\;\;9''.00$

Sternzeit im mittleren St. Petersb. Mittag	=	$18^h\,42'\,41''.45$
Mittlere Zeit der Beobachtung	=	$2\;\;3\;\;19\;\;.00$
Voreilung in $2^h\,3'\,19''$	=	$20\;.20$
Sternzeit der Beobachtung	=	$20^h\,46'\,20''.65$
Gerade Aufsteigung des Mondes.	=	$22\;\;4\;\;9\;.41$
Oestlicher Stundenwinkel des Mondes. . .	=	$1^h\,17'\,48''.76$
oder in Graden $= t$	=	$19^0\,27'\,11''.40$

Die Breite des Ortes $\varphi = 59^0\,56'\,31''$, und nun findet man nach den Formeln in §. 27. Seite 388.; dass für das gegebene Moment der Beobachtung, die wahre Höhe des

Sonnencentrums $= H = 3^0\,30'\,51''.4$; die wahre Höhe des Mondes aber $= h = 21^0\,39'\,36''.4$ war.

Bezeichnet man nun die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes durch Π, und will man nach der oben erwähnten Methode von Borda rechnen, so muss man bei der Berechnung eine Horizontal-Parallaxe gebrauchen, die $= \pi = \Pi(1 + \frac{1}{300}\,sin^2\,\varphi)$ ist; in unserem Falle wird $\pi = 60'\,11''.2$. Aus den Hülfstafeln, welche den Callet'schen Logarithmen-Tafeln angehängt sind, findet man die entsprechende Höhenparallaxe $= 56'\,11''.4$; zieht man diese darauf von der wahren Höhe des Mondes ab, so erhält man die erste genäherte Höhe des Mondes $= 20^0\,43'\,25'' = h$ ☾, und dann leitet man daraus nach der Formel $= sin\,P = sin\,\pi\,cos\,h$ ☾ die genaue Höhenparallaxe des Mondes $= P = 56'\,17''.6$ ab.

Die genäherte Strahlenbrechung kann man aus den Hülfstafeln nehmen, die den Anhang zu den Callet'schen Logarithmen-Tafeln bilden, es wird nämlich dort die mittlere Strahlenbrechung für alle verschiedenen scheinbaren Höhen gegeben, aber da wir vorläufig nur die wahre Höhe minus Höhenparallaxe kennen, so muss man mit dieser Höhe die Strahlenbrechung aus der Tafel ausnehmen sie zu jener hinzulegen und dann erhält man auf diese Weise eine erste angenäherte scheinbare Höhe, mit der man dann die Strahlenbrechung genauer suchen kann. Also hat man:

Wahre Höhe des Sonnencentrums . . .	$= 3^0\,30'\,51''.4 = H$;
Höhen-Parallaxe	$-\;8\;.6$
Genäherte Refraction	$+\;12\;30\;.2$
Genäherte scheinbare Höhe	$= 3^0\,43'\,13''$
Wahre Höhe des Mondscentrums. . . .	$= 21^0\,39'\,36''.4 = h$
Höhen-Parallaxe	$-\;56\;17\;.6$
Genäherte Refraction	$+\;2\;29\;.0$
Genäherte scheinbare Höhe	$= 20^0\,45'\,48''$

Mit diesen genäherten scheinbaren Höhen und den oben angegebenen Barometer- und Thermometer-Ständen, kann man nun aus den allgemeinen Schumacher'schen Hülfstafeln die genaue Strahlenbrechung bestimmen. Thut man dieses, so findet man die entsprechenden Strahlenbrechungen:

für die Sonne	für den Mond
$12' 57''.8$	$2' 37''.9$;

es wird daher:

Wahre Höhe der $\odot$	$= 3^0 30' 51''.4 = H$	des $☽ = 21^0 39' 36''.4 = h$
Höhenparallaxe . .	$-8\ .6$	$-56\ 17\ .6$
Genaue Refraction.	$+12\ 57\ .8$	$+\ 2\ 37\ .9$
Genaue schb. Höhe	$= 3^0 43' 40''.6 = H'$	$= 20^0 45' 56''.7 = h'$

Nach der Formel: $r' ☾ = r ☾ . \cos(h - P) \sec h$ findet man den scheinbaren Halbmesser des Mondes $r' ☾$; in unserem Falle wird $r' ☾ = 16' 27''.8$ und wegen der ziemlich grossen Höhe des Mondes über dem Horizonte, braucht man die von Strahlenbrechung abhängige Correction des Halbmessers nicht zu beachten. Die Sonne aber befand sich sehr nahe am Horizonte, so dass es durchaus nöthig sein wird auf den Einfluss der Refraction auf den Halbmesser der Sonne Rücksicht zu nehmen. Nun ist aber der scheinbare Halbmesser der Sonne $= \mathrm{r} \odot = r \odot - \frac{1}{2}(\varrho - \varrho') \cos^2\psi$, wo $r \odot$ der wahre Halbmesser der Sonne ist, ϱ die Strahlenbrechung für die scheinbare Höhe $H' - r \odot$ des Unterrandes bezeichnet und ϱ' die Strahlenbrechung für die scheinbare Höhe $H' + r \odot$ des Oberrandes der Sonne; da nun $r \odot$ nicht gross ist, und man nur die Differenz von $\varrho - \varrho'$ zu wissen braucht, so kann man ϱ und ϱ' aus einer Tafel der mittleren Refractionen berechnen; ψ findet man dabei aus der oben in §. 29. Seite 398. angegebenen Formel, und dann hat man in unserem Falle:

$(\varrho - \varrho') = 39''.1$; $\psi = 65^0\, 48'$; $\frac{1}{2}(\varrho - \varrho')\, cos^2\, \psi = 6''.5$ und

$r \odot = 16'\, 17''.3 - 6''.5 = 16'\, 10''.8$

Scheinbare Distanz der Ränder	$= 49^0\, 17'\, 20''.2$
Scheinbarer Halbmesser des Mondes	$= +16\ 27\ .8$
Scheinbarer Halbmesser der Sonne	$= +16\ 10\ .8$
Scheinbare Distanz der Mittelpunkte $= \partial'$ . . .	$= 49^0 49' 58''.8$
Scheinbare Höhe der Sonne $= H'$	$= 3\ 43\ 40\ .6$
Scheinbare Höhe des Mondes $= h'$	$= 20\ 45\ 56\ .7$

$$2\,p = \partial' + h' + H' = 74^0\, 19'\, 36''.1$$
$$p = 37\ \ 9\ 48\ .1$$
$$\partial' - p = 12\ 40\ 10\ .7$$
$$\tfrac{1}{2}(H + h) = 12\ 35\ 13\ \ 9$$

$lg\ cos\, p = 9.9014128$	$M = 64^0\, 16'\, 14''.5$
$lg\ cos\,(p - \partial') = 9.9892945$	
$lg\ cos\, h = 9.9681979$	$lg\ cos\, M = 9.6376097$
$lg\ cos\, H = 9.9991828$	$lg\ cos\, \frac{1}{2}(H + h) = 9.9894345$
$comp\ lg\ cos\, h' = 0.0291709$	$lg\ sin\, \frac{1}{2}\,\partial = 9.6270442$
$comp\ lg\ cos\, H' = 0.0009199$	
	$\frac{1}{2}\,\partial = 25^0\, 4'\, 3''.1$
Summe $= 39.8881788$	$\partial = 50\ 8\ 6\ .2$
Halbe Summe $= 19.9440894$	
$lg\ cos\, \frac{1}{2}(H + h) = 9.9894345$	
$lg\ sin\, M = 9.9546549$	

Die Correction in ∂, welche von der Abplattung der Erde herrührt, berechnet man nach der Formel von Borda §. 30. Seite 399. In unserem Falle ist die Breite des Beobachtungsortes $= \varphi = 59^0\, 56'$; die Declination der Sonne $= \delta \odot = -23^0\, 1'$; die Declination des Mondes $= \delta$ ☾ $= -6^0\, 38'$; $\partial = 50^0\, 8'$, folglich:

$$\begin{array}{rl} log\ 22''.8 = 1.3579 & log\ 22''.8 = 1.3579 \\ log\ sin\ \varphi = 9.9457 & log\ sin\ \varphi = 9.9457 \\ log\ sin\ \delta\ \odot = 9.5922_n & log\ sin\ \partial\ ☾ = 9.0626_n \\ comp\ log\ sin\ \partial = 0.1168 & log\ cotg\ \partial = 9.9266 \\ \hline -10''.29\ .\ .\ 1.0126_n & -1''.96\ .\ .\ 0.2928_n \end{array}$$

Wir haben früher gefunden, dass: $\partial = 50^0 8' \ 6''.20$

Erster Theil der Correction $= \ -10\ .29$

Zweiter Theil der Correction $= \ +1\ .96$

Wahre Distanz . . . . $= 50^0 7' 57''.87$

Aus den Nautical Almanac, findet man, dass für die mittlere Greenwicher Zeit:

1845 Dec. 31. um 21^h; war $\partial'' = 48^0 25' \ 6''$

1846 Jan. 1. um 0^h; war $\partial'' = 50 \ \ 6 \ 32$

" " " 3^h; war $\partial'' = 51 \ 47 \ 38$

Hieraus findet man durch scharfe Interpolation, dass zur wahren Distanz des Mittelpunktes des Mondes von der Sonne $= 50^0 \ 7' \ 57''.87$, am 1sten Januar 1846, in Greenwich die mittlere Zeit . . . . $= 0^h \ 2' \ 32''.8$ gehörte.

Entsprechende mittl. Zeit der Beobacht. $= 2 \ \ 3 \ 19\ .0$

Oestl. Länge St. Petersb. von Greenwich $= 2^h \ 0' \ 46''.2$

Man weiss, dass die genaue Länge $= 2^h \ 1' \ 15''.8$ ist, und folglich ist der Fehler unserer Bestimmung $= 29''.6$ in Zeit; diese Abweichung wird theilweis hervorgerufen, durch die Beobachtungs- und Instrumental-Fehler, theilweis aber auch durch die Fehler der Mondstafeln; vorzüglich aber dadurch, dass das eine Gestirn nahe am Horizonte war; (in unserem Falle die Sonne). Dieser letztere Umstand ist so sehr ungünstig, dass man ihn, wenn es möglich ist, vermeiden muss; auch haben wir dieses Rechnungsbeispiel nur deswegen so vollständig durchgeführt, um deutlich die Anwendung aller unserer früher entwickelten Formeln auf jeden anderen Fall zu erläutern.

Allgemeine Bemerkungen. Die genaue Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes mit Hülfe von Monddistanzen hängt ab:

1stens Von der Genauigkeit, mit welcher die mittlere Zeit der Beobachtung bekannt ist; und deshalb muss man ein zuverlässiges Chronometer haben, dessen Stand man gegen mittlere oder andere Zeit, immer kurz vor oder nach den Beobachtungen zu bestimmen hat.

2tens Von der Genauigkeit der directgemessenen Distanz der Ränder der Gestirne; wozu es durchaus nothwendig ist, das Instrument genau zu berichtigen und nicht nur den Indexfehler, sondern auch andere Instrumental-Fehler, des gebrauchten Instrumentes so scharf als möglich zu bestimmen; vorzüglich aber, wenn man einen Sextanten zur Messung dieser Distanz anwendet, darf man den Excentricitäts-Fehler nicht unberücksichtigt lassen.

3tens Aber ungeachtet aller dieser Vorsichtsmaassregeln, wird es schwer sein, constante Fehler zu vermeiden, wesshalb man die Beobachtungen so einrichten muss, dass die Fehler grösstentheils, sich gegenseitig gegen einander aufheben. Dieses erreicht man dadurch, dass man Distanzen des Mondes von Sternen beobachtet, die sich östlich und westlich in beinahe gleicher Entfernung vom Monde befinden, und ausserdem noch, solche Sterne dazu wählt, deren Distanzen vom Monde, sich am schnellsten ändern. Jedoch sind die Distanzen, die man zwischen Mond und Sonne beobachtet weit genauer und auch bequemer zu messen, als diejenigen von Sternen, weil man das Berühren der Ränder mit vieler Schärfe beobachten kann, und da man ferner solche Beobachtungen zur Bestimmung der geographischen

Länge, meistens mit Sextanten anstellt, so muss man folglich gleiche und entgegengesetzte Monddistanzen westlich und östlich von der Sonne um die Zeit des ersten und letzten Viertels herum anstellen; das aus ihnen hergeleitete arithmetische Mittel für die Länge, wird nicht nur beinahe gänzlich von den Instrumental-Fehlern unabhängig sein, sondern auch von der Ungenauigkeit, der bei der Berechnung angenommenen Halbmesser der Gestirne; ebenso wird auch der Fehler der Mondstafeln, wenn auch nicht aufgehoben, doch wahrscheinlicher Weise sehr verkleinert werden, weil dieser Fehler im Laufe der Zeit sich seinem Werthe und Zeichen nach verschiedenartig verändert.

4tens Man muss die Beobachtung, gar zu grosser Monddistanzen sorgfältig zu vermeiden suchen, denn bei grossen Winkeln werden mehrere der constanten Instrumental-Fehler des Sextanten, einen merklichen Einfluss haben können.

5tens Ein kleiner Fehler in den Höhen der Gestirne hat keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung der wahren Monddistanz aus der scheinbaren; die Parallaxen und Refractionen muss man aber so genau wie nur irgend möglich berechnen, und desshalb muss man vor dem Anfange und nach der Beendigung der Beobachtungen, den Stand des Barometers und beider Thermometer sorgfältig ablesen. Da ferner in der Nähe des Horizontes das Bild eines Gestirnes, immer sehr unruhig ist und keine Präcision hat, auch die entsprechende Refraction aus den Tafeln nicht genau bestimmt werden kann; so muss man solche Fälle beim Beobachten zu vermeiden suchen, wo dass eine der beiden Gestirne näher an dem Horizonte, als 12° ist.

6tens Zuweilen misst man Monddistanzen von Planeten, und bezieht dabei die Distanz gewöhnlich nicht auf den Rand des Planeten, sondern auf die Mitte seines erleuchteten Theils, denn die Fernröhre im Reflexions-Instrumenten sind zu schwach, um die scheinbaren Planetenscheiben deutlich zu zeigen. Es ist aber leicht einzusehen, dass die Mitte des erleuchteten Theiles selten mit dem Centrum der Planetenscheibe zusammenfallen kann. Bei der Venus wird dieses Zusammenfallen sich sogar niemals ereignen und der Unterschied kann bedeutend werden, für die Planeten Mars, Jupiter und Saturn, wird jedoch dieser Unterschied viel kleiner sein, und gänzlich verschwinden, wenn sie in Opposition mit der Sonne sind. In einigen astronomischen Ephemeriden wird übrigens auf diesen Umstand Rücksicht genommen, und in ihnen, werden dann die Distanzen des Mondscentrums von der Mitte des sichtbaren erleuchteten Theiles des Planeten angegeben.

Von einem neuerfundenen Reflexions-Kreis.

31. Im Jahre 1845 erfuhren wir aus den astronomischen Nachrichten, welche vom Hr. Conferenzrath Schumacher herausgegeben werden, dass Pistor und Martins in Berlin, ein neues Reflexions-Instrument erfunden haben, welches ebenso bequem als ein Sextant ist, nicht so viel kostet als dieser, und dabei viele Vorzüge vor einem Sextanten hat, so dass dieses Instrument den letzteren gänzlich aus dem allgemeinen Gebrauche verdrängen wird; es wird daher nicht unnütz sein, eine kurze Beschreibung seiner Einrichtung zu geben, wie sie selbst von ihren Erfindern herrührt. Der Unterschied dieses neuen Kreises von den früheren Spiegelkreisen, besteht darin, dass bei diesem Instrumente, statt des unbeweglichen kleinen Spiegels, ein unbewegliches Glas-Prisma angebracht ist, in welches die vom beweglichen Spiegel reflectirten Strahlen einfallen, und darauf zweimal gebrochen und einmal vollständig im inneren des Prismas reflectirt werden. Sie treten darauf in's Fernrohr und geben ein Bild, welches

viel heller als dasjenige ist, welches von der Reflexion der Strahlen im zweiten, oder kleinem, unbeweglichen Spiegel bei Sextanten oder Spiegelkreisen hervorgebracht wird. In jeder anderen Beziehung ist das neue Instrument so ziemlich dem früheren ähnlich eingerichtet; aber es hat vor dem Sextanten folgende wesentlichen Vorzüge voraus:

1stens kann man alle Winkel von 0° bis 180° damit messen;

2tens werden diese Messungen ebenso bequem, aber genauer als die mit dem Sextanten sein, weil der Fehler, welcher von der Excentricität abhängt, durch das Ablesen der zwei entgegengesetzten Verniere am Kreise aufgehoben wird, wobei ferner das Instrument symmetrischer construirt und genauer zu berichtigen ist, als der Sextant;

3tens sind die Bilder der Gegenstände in diesem Instrumente lichtstärker und schärfer begrenzt.

Auf (Tafel VI. Fig. I.) stellt der Kreis *A B C* das neue Instrument vor, welches ungefähr 5 Zoll Radius hat. Mit Hülfe zweier sich diametral gegenüberliegenden Verniere, welche sich an den Enden der Alhidade *a c* befinden, kann man die Gradtheilung unmittelbar bis auf 20″, und bei einigen von diesen Instrumenten bis auf 10″ ablesen; durch Schätzung liest man sie noch genauer ab. Auf der Mitte der Alhidade *a c* ist ein Spiegel *d e* senkrecht auf der Ebene des Kreises *A B C* befestigt; dieser Spiegel dreht sich zugleich mit der Alhidade um eine Achse herum, welche durch das Centrum des Kreises *ABC* geht, und mit dessen Ebene *ABC* einen rechten Winkel bildet. In unserer Figur I., wendet der Spiegel seine reflectirende Seite gegen *B*; ebenso ist nun *f* ein dreiseitiges, gleichschenklichtes und rechtwinklichtes Glas-Prisma, und *g* das Fernrohr. Das Prisma ist durch Schrauben ganz fest mit einem Radius des Limbus-Kreises verbunden, ist ungefähr um die Hälfte weniger hoch als der Spiegel, und senkrecht auf der Ebene des Kreises. Der

Durchmesser des Objectives des Fernrohres ist weit grösser als die Höhe des Prismas, so dass, wenn man das Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand richtet, man ihn im Fernrohre mit Hülfe derjenigen Strahlen erblickt, welche am Prisma vorbeifahrend in ersteres hineinfallen. Auf (Tafel VI. Fig. I.) sieht man die Alhidade in derjenigen Lage, wenn sie dem wahren Nullpunkt der Gradtheilung entspricht, d. h. wenn der Spiegel *de* der grösseren Seite des Prismas parallel ist. In diesem Falle werden die Strahlen eines sehr weit gelegenen Gegenstandes, auf welchen man das Fernrohr gerichtet hat, theilweis über die Oberfläche des Prismas hinweg in's Fernrohr treten, und dadurch unmittelbar ein Bild des Gegenstandes im Gesichtsfelde desselben hervorbringen; die übrigen Strahlen aber, welche mit den ersteren parallel sind, werden auf den Spiegel *de* einfallen, von ihm zurückgeworfen werden, und dann auf das Prisma einfallen; alsdann beim Eintritte in dieses gebrochen werden, darauf im inneren des Prismas von seiner längeren Seite vollständig zurückgeworfen werden, endlich noch einmal beim Austritte aus dem Prisma gebrochen werden, und auf diese Weise den directen Strahlen parallel in's Fernrohr einfallen, indem sie im Gesichtsfelde dieses letzteren, ein zweites Bild des Gegenstandes hervorbringen, welches mit dem oben erwähnten directen Bilde des Gegenstandes zusammenfallen wird; bei dieser Lage der Alhidade, bildet der Strahl, welcher auf den Spiegel einfällt mit diesem einen Winkel der nahe $= 20^0$ ist.

Dreht man nun die Alhidade weiter von 0^0 ab, nämlich nach *B* nach der Ordnung der Zunahme der Theilung, wie es in Fig. II. Tafel VI. abgebildet ist, indem das Fernrohr auf den früheren Gegenstand gerichtet bleibt, so wird auf den Spiegel *de* der Strahl eines anderen Gegenstandes einfallen, aber dieser Gegenstand wird zur rechten des früheren liegen. Nachdem die Strahlen dieses Gegenstandes doppelt reflectirt und doppelt gebrochen worden sind, werden sie in's Fernrohr treten, und in dessen Gesichtsfelde ein Bild des zweiten beobachteten Gegenstandes hervorrufen, welches mit dem Bilde des ersten direct gesehenen Gegenstandes zusammenfallen wird; alsdann wird nun die doppelte Zahl von Graden, Minuten und Secunden, um welche man die Alhidade bewegt hat, den Winkel bestimmen, welcher zwischen beiden Gegenständen enthalten ist. Auf diese Weise kann man also Winkel 0° bis 120° ebenso, wie bei dem Sextanten messen. Den letzten zur rechten liegenden Gegenstand, welchen man nach dieser Methode beobachten kann, ist derjenige, welcher eine solche Lage hat, dass seine Strahlen auf den Spiegel nahe unter einem Winkel von 85° einfallen; und hierbei wird der Spiegel sich von seiner anfänglichen Lage von 0° bis 60° gedreht haben. Jedoch treten bei der Messung von Winkeln nahe an 130° und mehr einige Hindernisse ein, in die Nähe von 130° verhindert das Prisma und das Fernrohr, sowie auch zugleich der Kopf des Beobachters, die Strahlen, die vom Gegenstande ausgehen, in den Spiegel zu gelangen. Wenn aber die Alhidade so bewegt wird, dass ihre Richtung um 90° von ihrer Lage bei wahren Nullpunkte 0° verschieden ist, so werden die vom Spiegel reflectirten auf's Prisma fallenden Strahlen, mit der Achse des Fernrohres einen Winkel von 180° bilden, oder von einem Gegenstande ausgehen der diametral demjenigen entgegengesetzt sein wird, welcher direct durch's Fernrohr erblickt wird; wie in Figur III. Tafel VI. deutlich zu sehen ist. Bewegt man die Alhidade weiter von 180° ab, so kann man Winkel zwischen 180° und 280°, oder mit anderen Worten Winkel, die zwischen 100° und 180° auf der entgegengesetzten Seite liegen, messen. In diesem Falle wird der Gegenstand, dessen Bild man durch Reflexion erblickt, zur linken des Gegenstandes liegen müssen, der direct durch's Fernrohr erblickt wird, und wenn man die

Winkelmessung bis 180° in ganz derselben Ordnung wie von 0° bis 130° auszudehnen wünscht, so muss man das Instrument in die entgegengesetzte Lage bringen, und folglich in diesem Falle mit der linken Hand halten. Die Winkel zwischen 80° und 130° kann man daher auf zweifache Weise messen, und wenn man beide kreuzweise Beobachtungen anstellt, so braucht man den Indexfehler nicht zu bestimmen; auch der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des Spiegels abhängt, wird dadurch eliminirt.

Unter gewissen Umständen. z. B. bei der Messung grosser horizontaler Winkel, setzt man auf das Ocular des Fernrohres ein kleines, besonderes Glasprisma auf, Figur IV. Tafel VI., und bei Sonnenbeobachtungen benutzt man Farbengläser, ähnlich denen des Sextanten, diese Gläser sind in der Nähe des Prismas angebracht und können in entgegengesetzten Lagen gebraucht werden. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass alle nöthigen Schrauben zur Senkrechtstellung des Spiegels und Prismas an diesem Instrumente angebracht sind; sowie ebenfalls auch eine Vorrichtung um das Fernrohr der Ebene des Instrumentes parallel zu stellen, vorhanden ist; ausserdem kann man auch das Fernrohr etwas erhöhen oder erniedrigen, (ohne den Parallelismus mit der Instrumentalebene zu stören), um etwa beiden Bildern nöthigenfalls, sowohl dem directen als reflectirten, gleiche Lichtstärke zu geben. Die Berichtigungen können nach ähnlichen Methoden gemacht werden; wie wir oben für den Sextanten erklärt haben.

Wir erwähnten schon vorher, dass wenn die Alhidade dem wahren Nullpunkte der Theilung entspricht, so bildet der auf den Spiegel einfallende Strahl mit diesem einen Winkel von 20°; alsdann wird das reflectirte Bild besonders schwach werden, und daher muss man den Spiegel durch die Beobachtung kleiner Winkel prüfen, und wenn man auf ähnliche Weise beobachtet, wie bei dem Sextanten, so wird man bemerken, dass um so grösser die Winkel werden, desto lichtstärker werden die reflectirten Bilder sein; denn alsdann werden die Strahlen immer unter grösseren Winkeln auf den Spiegel einfallen, und dadurch die Reflexionen heftiger sein; wenn der gemessene Winkel nahe gleich 130°, so wird der Lichtstrahl mit dem Spiegel einen Winkel von sehr nahe = 85° bilden; ganz das Gegentheil findet aber beim Sextanten statt; wenn nämlich in diesem letzteren Instrumente die Alhidade auf 0° steht; so wird der vom grossen Spiegel reflectire Strahl mit diesem einen Winkel von sehr nahe = 75° bilden, wenn aber der beobachtete Winkel nahe an 130°, so wird der reflectirte Strahl mit dem Spiegel einen Winkel von nahe 10° bilden. Hieraus sieht man, dass selbst der kleinste Winkel, unter welchem, bei diesem neuen Instrumente, Lichtstrahlen vom beweglichen Spiegel zurückgeworfen werden können, noch einmal so gross als derjenige beim Sextanten ist. Folglich werden die reflectirten Bilder bei diesem neuen Instrument lichtstärker als beim Sextanten sein; dies wird auch bei gleichen Neigungen der reflectirten Strahlen gegen den beweglichen Spiegel stattfinden, denn es ist bekannt, dass ein Spiegel immer weniger Licht reflectirt, als die innere Fläche eines Prismas, bei der die Reflection vollständiger ist.

Wir bemerken noch, dass die Richtigkeit des gemessenen Winkels von der streng rechtwinklichten und gleichsenklichten Gestalt des Prismas unabhängig ist; es ist nur erforderlich, dass die Seiten des Prismas genaue Ebene sein müssen, damit man deutliche und präcise Bilder des reflectirt gemessenen Gegenstandes bekommen kann.