Sechster Abschnitt.

VON DER REDUCTION DER LÄNGE, BREITE UND DES AZIMUTHES EINES ORTES AUF DER ERDE, AUF EINEN ANDERN UND VON DER BESTIMMUNG DER ENTFERNUNG VON PUNKTEN, DEREN GEOGRAPHISCHE LAGE BESTIMMT IST.

198. Die erste sich hierauf beziehende Aufgabe, besteht in folgendem:

Es seien auf der Oberfläche der Erde zwei Punkte M und M' (Fig. 42, *a*) *gegeben; und man kennt die geographische Breite $= T$ des Punktes M, seine kürzeste Entfernung $= r$ von dem anderen Punkte M' und das Azimuth $= A$ des Punktes M' von M ausgezählt; man verlangt nun die geographische Breite T' des Punktes M'; den Unterschied der geographischen Längen zwischen den Punkten M und M' sowie ebenfalls das Azimuth A' des Punktes M, von M' ausgesehen.*

Wir wollen zuerst die Erde als eine Kugel annehmen, deren Halbmesser $= R$ sei, und die Azimuthe von Süden durch Westen von 0° bis 360° nach derselben Richtung zählen. Wenn nun M' westlich von M liegt und P (Fig. 42, *a*) den Pol des Aequators bedeutet, so besteht die Auflösung unserer Aufgabe in der Berechnung des sphärischen Dreieckes $P\ M\ M'$, dessen Seiten: $M\ M' = r$, $P\ M = 90 - T$ und der Winkel $P\ M\ M' = 180° - A$ bekannt sind, und in welchem man die Winkel $M P M' = \mathit{\Delta}$, $P M' M = A' - 180°$, und die Seite $P\ M' = 90° - T'$ zu finden hat. In diesem Falle wird die kürzeste Entfernung zwischen den Punkten M und M', durch den Bogen $M\ M' = r$, des grössten Kreises auf der Erde, der durch M und M' geht, ausgedrückt, und wenn alsdann diese Entfernung gleich D Toisen ist, so wird der ihr entsprechende Bogen in Secunden ausgedrückt, durch folgende Formel erhalten:

$$r = \frac{D}{R \sin 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo R den Halbmesser der Erdkugel, ebenso wie D in Toisen ausgedrückt bedeutet. Durch die Auflösung des sphärischen Dreieckes $P\ M\ M'$ erhält man nun die bekannten Formeln:

$$\cos T.\ tg\ T' = \sin T \cos \mathit{\Delta} - \sin \mathit{\Delta}\ cotg\ A,$$
$$\sin A\ cotg\ \mathit{\Delta} = \cos T\ cotg\ r + \sin T.\ \cos A.$$

Nun sei:

$$tg\ r \cos A = tg\ t; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a),$$

so wird alsdann:

$$tg\ \mathit{\Delta} = tg\ A.\ \sin t \sec (T - t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$\cos T.\ tg\ T' = \cos \mathit{\Delta} (\sin T - tg\ \mathit{\Delta}\ cotg\ A) =$$
$$= \cos \mathit{\Delta} [\sin T - \sin t \sec (T - t)] = \cos \mathit{\Delta}\ tg\ (T - t).\ \cos T$$

folglich wird hieraus:

$$tg\, T' = \cos A\, tg\,(T-t), \text{ also:}$$

$$tg\,(T-t) - tg\, T' = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A\, tg\,(T-t);$$

$$\sin (T - t - T') = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A \cos T' \sin (T-t).$$

Aber aus dem Dreiecke $P\,M\,M'$ erhält man:

$$\cos T' = \frac{\sin r \sin \mathrm{A}}{\sin A};$$

folglich:

$$\sin (T - t - T') = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} A}{\sin A} . \sin (T-t) \sin r \sin \mathrm{A}; \text{ oder}$$

$$\sin (T - t - T') = tg\, \tfrac{1}{2} A \sin (T-t) \sin r \sin \mathrm{A} \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

Den Längenunterschied oder A, berechnet man nach der Formel (b); hat man aber zuerst T' aus der Gleichung (c) bestimmt, so kann man A auch durch die folgende Gleichung berechnen:

$$\sin A = \frac{\sin r \sin \mathrm{A}}{\cos T'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Endlich erhält man aus dem Dreiecke $P\,M\,M'$ nach den Neperschen Analogien:

$$cotg\, \frac{P\,M\,M' + P\,M'\,M}{2} = tg\, \frac{A}{2} . \frac{\sin \frac{1}{2} (T + T')}{\cos \frac{1}{2} (T - T')}.$$

Aber $P\,M\,M' + P\,M'\,M = (180^0 - \mathrm{A}) + (\mathrm{A}' - 180^0) = \mathrm{A}' - \mathrm{A}$;

folglich:

$$tg\, [90^0 - \tfrac{1}{2} (\mathrm{A}' - \mathrm{A})] = tg\, \frac{A}{2} . \frac{\sin \frac{1}{2} (T' + T)}{\cos \frac{1}{2} (T' - T)} \quad \ldots\ldots (e)$$

Durch die Formeln (a), (b) oder (d), (c), (e) wird unsere Aufgabe mit vollkommener Genauigkeit aufgelöst; da aber r in der Praxis selten 4^0 oder 5^0 übersteigt, und also auch $T' - T$, Δ und $180^0 - A' + A$ sehr kleine Grössen, sein werden; so kann man anstatt der strengen Formeln, viel bequemer folgende logarithmische Reihen brauchen, bei welchen vorausgesetzt ist, dass die gegebenen und gesuchten Grössen in Secunden ausgedrückt sind.

Berechnet man sich also zuerst:

$$r \cos A = u;\ r \sin A = v \ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und bezeichnet das Product, des Modulus des Brigg'schen oder gemeinen Logarithmen-Systems in $\frac{1}{12} \sin^2 1''$, durch μ; so wird:

$$\log \mu = 7.9297528 - 20;$$

$$\log t = \log u + 4\,\mu.\,v^2 \ \ldots\ldots \quad (3)$$

$$v \sec (T - t) = l;\ v\, tg\,(T - t) = m \ \ldots \quad (4)$$

$$\log \Delta = \log l - 2\,\mu.\,u^2 - 4\,\mu.\,m^2 \ \ldots \quad (5)$$

$$\log \sigma = \log (\tfrac{1}{2} \sin 1''.\,v.\,m) - \mu.\,r^2 - 3\,\mu.\,u^2 - 3\,\mu.\,m^2 \ \ldots \quad (6)$$

$$\log \Delta = \log \left(\frac{\Delta \sin \frac{1}{2}(T + T')}{\cos \frac{1}{2}(T - T')}\right) + \mu.\,v^2 \ \ldots\ldots \quad (7)$$

$$T' = T - t - \sigma;$$

$$A' = 180^0 + A - \Delta.$$

Diese Reihen sind fast identisch mit denen, welche Gauss vorgeschlagen hat; wenn der angenommene Bogen r eine kleine Grösse der Isten Ordnung ist, so werden die oben angeführten Reihen bis auf Grössen der 5ten Ordnung genau sein. *)

---

*) Zum Beweise dessen, wollen wir die Grössen 5ter Ordnung vernachlässigen, und $\sin 1'' = \varrho$ setzen, so wird alsdann sehr nahezu: $\sin k = k\,\varrho\,(1 - \frac{1}{6}\,k^2\,\varrho^2)$; $tg\ k = k\,\varrho\,(1 + \frac{1}{3}\,k^2\,\varrho^2)$ werden.

199. **Wenn die Entfernung zwischen den gegebenen Punkten auf der Erdoberfläche oder zwischen A und E (Fig. 42. b) so bedeutend wird, dass man E von A nicht mehr sehen kann; so muss man in den zwischenliegenden Punkten B, C, D . . . . Signale aufstellen und A und E durch die Hülfsdreiecke $A\ B\ C$, $B\ C\ D$, $D\ C\ E$ . . . . verbinden, in welchen man gewöhnlich die an allen Scheiteln, jedes dieser Dreiecke, liegenden horizontalen Winkel beobachtet; jedoch muss man ausserdem noch eine horizontale Länge und das Azimuth einer Seite, zum Beispiel $A\ B$, messen, und zur grössten Genauigkeit muss man sich im allgemeinen bemühen**

Folglich hat man aus der Gleichung (a): $r\cos A\,(1+\frac{1}{3}r^2\varrho^2) = t\,(1+\frac{1}{3}t^2\varrho^2)$; aber es ist t sehr nahe $= u = r\cos A$, und daher:

$$t = u\,(1+\tfrac{1}{3}r^2\varrho^2-\tfrac{1}{3}\varrho^2r^2\cos^2 A) = u\,(1+\tfrac{1}{3}\varrho^2v^2)\,..(A).$$

Die Gleichung (b) giebt uns:

$$\Lambda = tg\,A\,sec\,(T-t).\,t.\,(1-\tfrac{1}{6}\cdot\varrho^2t^2) - \tfrac{1}{3}\Lambda^3\varrho^2;$$

also ist auch sehr nahe:

$$\Lambda = tg\,A\,sec\,(T-t).\,u.\,(1+\tfrac{1}{3}\varrho^2v^2-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2)-\tfrac{1}{3}l^3\varrho^2$$
$$= l\,[1+\tfrac{1}{3}\varrho^2(v^2-l^2)-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2];\ \text{oder}$$
$$\Lambda = l\,(1-\tfrac{1}{3}\varrho^2m^2-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(B)$$

Es sei $T-t-T'=\sigma$; so ist σ schon selbst eine Grösse 2ter Ordnung; vernachlässigt man alsdann die Glieder 5ter Ordnung, so wird:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\Lambda\left(1+\frac{\varrho^2\Lambda^2}{12}\right)r.\left(1-\frac{r^2\varrho^2}{6}\right)\sin(T-t)\sin A;$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}v.m\left(1-\tfrac{1}{3}m^2\varrho^2-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2-\frac{r^2\varrho^2}{12}-\frac{\varrho^2}{12}(r^2-l^2)\right)$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}v.m\Big(1-\tfrac{1}{12}\varrho^2r^2-\tfrac{1}{3}m^2\varrho^2-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2 -$$
$$-\tfrac{1}{12}\varrho^2r^2\,[\cos^2A-\sin^2A\,tg^2(T-t)]\Big)$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}v.m\,[1-\tfrac{1}{12}\varrho^2r^2-\tfrac{1}{3}m^2\varrho^2-\tfrac{1}{6}\varrho^2u^2-\tfrac{1}{12}\varrho^2(u^2-m^2)]$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}v.m\,(1-\tfrac{1}{12}\varrho^2r^2-\tfrac{1}{4}\varrho^2u^2-\tfrac{1}{4}\varrho^2m^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(C)$$

die Signale so aufzustellen, dass alle von ihnen gebildeten Dreiecke so weit wie möglich gleichseitig werden. Wenn die unmittelbar gemessene Entfernung zwischen A und B gleich D' ist und die Neigung der Linie $A\ B$ gegen den Horizont durch i bezeichnet wird, so wird $D' \cos i = D' - 2\,D' \sin^2 \frac{i}{2} = D$, die auf den Horizont reducirte Länge der Seite $A\ B$ sein. Der Winkel i wird aus den gemessenen Zenithdistanzen des Punktes B und des Punktes A hergeleitet, indem man die Ergänzungen dieser Zenithdistanzen zu 90^0, mit einander vergleicht. Es sei ferner h die mittlere Erhebung der Punkte A und B über der Meeresfläche, und R der Erdhalbmesser, in ebendemselben Maasse wie h ausgedrückt; so wird alsdann $D_0 = \frac{D.\,R}{R+h}$, die horizontale Länge der Seite $A\ B$, auf das Niveau des Meeres

---

Es sei $\sin \frac{1}{2}(T+T') \sec \frac{1}{2}(T-T') = n$ und $180^0 + A - A' = \Delta$; alsdann wird: $tg\, \frac{1}{2} \Delta = n\, tg\, \frac{1}{2} A$; und

$$\Delta = n\,A\,(1 + \tfrac{1}{12}\,\varrho^2 A^2) - \tfrac{1}{12}\,\varrho^2\,\Delta^3;$$

aber A^3 sehr nahe $= l^3$, $\Delta^3 = n^3\, l^3$ und $1 - n^2$ sehr nahe $= \cos^2 \frac{1}{2}(T+T')$, oder auch beinahe $= \cos^2 (T-t)$; folglich wird:

$\Delta = n\,A\,[1 + \frac{1}{12}\,\varrho^2\, l^2 \cos^2 (T-t)]$; oder

$\Delta = A \sin \frac{1}{2}(T+T') \sec \frac{1}{2}(T-T')\,[1 + \frac{1}{12}\,\varrho^2\, v^2]$. . . (D)

Nun ist überhaupt $\log (1 + z) = M\,(z - \frac{1}{2} z^2 + \ \ldots)$, wo M der Modulus des Briggischen oder gemeinen Logarithmen Systemes bedeutet, der bekanntlich $= M = 0.43429$; wenn aber z ein kleiner Werth der 2^{ten} Ordnung ist, und man bei einer Berechnung nur das Product von $(1+z)$ mit einer kleinen Grösse der 1^{sten} Ordnung zu berücksichtigen hat, so kann man bis auf Grössen der 5^{ten} Ordnung annehmen, dass $\log (1+z) = M\,z$; wendet man diese Regel nun auf die Gleichungen (A), (B), (C) und (D) an, so erhält man die logarithmischen Reihen, die im Texte angegeben wurden.

reducirt, bedeuten; diese Länge D_0, ist namentlich diejenige, welche man bei der Berechnung brauchen muss, denn man schliesst dadurch den Einfluss der zufälligen Ungleichheiten auf der Erdoberfläche aus. Ohne einen merklichen Fehler zu begehen, kann man immer annehmen, dass $D_0 = D' - 2D'^2 \sin^2 \frac{1}{2} i - \frac{h}{R} D'$. Die verschiedenen Methoden, welche man zur genauen Messung der Länge der Basis AB erfunden hat, kann man in den geodätischen Werken von Delambre, Puissant, Struve und Bessel näher erläutert finden.

Die erwähnten Dreiecke müsste man eigentlich als sphärisch betrachten; jedoch sind ihre Seiten, im Vergleich zum Erdhalbmesser, in der Praxis immer so klein, dass man statt der genauen Formeln der sphärischen Trigonometrie bei dieser Berechnung viel bequemer das Legendre'sche Theorem anwenden kann. Nach diesem Lehrsatze bestimmt man nämlich in jedem Dreiecke, den *sphärischen Excess*, oder den Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über 180°; bezeichnet man zum Beispiel in einem Dreiecke ABC die sphärischen Winkel durch A, B, C, die ihnen gegenüber stehenden Seiten durch a, b, c, und den Erdradius, in derselben Längen-Einheit, wie die gegebenen Längen der Seiten a, b, c ausgedrückt, durch R, so erhält man den in Bogensecunden ausgedrückten sphärischen Excess $= e$, nach der Formel* :

$$e = \frac{a\,b.\sin C}{2R^2 \sin 1''} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

*) Sollten die Seiten eines Dreieckes über 50 oder 60 geographische Meilen betragen, so kann man den sphärischen Excess (e) nach der Formel berechnen:

$$(e) = e \left\{ 1 + \tfrac{1}{12}\left(\frac{a^2+b^2}{R^2}\right)\right\} - \tfrac{1}{2} e^2 \sin 1''.\ \mathrm{cotg}\ C;$$

zur Bestimmung von e, muss man zuerst die Seiten a und b genähert berechnen, indem man dabei $A\ B\ C$ als ein geradlinigtes Dreieck betrachtet.

Wenn die Winkel A, B und C genau bestimmt worden wären, so müsste: $A + B + C = 180 + e$ sein, aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, wird man finden dass: $A + B + C = 180^0 + e + \psi$ ist, wo ψ die Summe der zufälligen Fehler bedeutet, welche bei der Messung der drei Winkel begangen wurden. Gewöhnlich kann man annehmen, dass diese Winkel mit gleicher Sorgfalt gemessen wurden, und also einen gleichen Grad von Genauigkeit haben; man kann daher auch die Summe der zufälligen Fehler ψ, auf jeden Winkel gleich vertheilen. Berechnet man also:

$$A' = (A - \tfrac{1}{3}\psi) - \tfrac{1}{3}e;\ B' = (B - \tfrac{1}{3}\psi) - \tfrac{1}{3}e;\ C' = (C - \tfrac{1}{3}\psi) - \tfrac{1}{3}e;$$

so erhält man dadurch das wahrscheinlichste ebene Dreieck $A'\ B'\ C'$, in welchem die geradlinigten Seiten $A'\ B'$, $B'\ C'$ und $A'\ C'$, ebenso lang wie die Seiten des sphärischen Dreieckes $A\ B$, $B\ C$ und $A\ C$ sein werden; kennt man daher $A'\ B' = A\ B$, und die Winkel A', B' und C', so kann man die anderen Seiten des Dreieckes nach der ebenen Trigonometrie finden. Ganz ebenso bestimmt man auch $B\ C$, $D\ C$, $D\ E$ . . . . in allen übrigen Dreiecken $B\ C\ D$, $C\ D\ E$. . . . Durch die Verbindung der sphärischen Winkel $D\ C\ B$ und $A\ C\ B$, welche den beiden benachbarten Dreiecken angehören, leitet man den Winkel $D\ C\ A = w$ her; in unserer Figur (Fig. 42, b.), wird: $w = D\ C\ A =$

wo (e) der genaue, und e der genäherte Werth des sphärischen Excesses ist, wie wir ihn mit Hülfe der Gleichung (α) finden.

$= D\,C\,B - A\,C\,B$*), in anderen Fällen aber, wird man zuweilen statt des Unterschiedes die Summe nehmen müssen; jedoch wird es jedes Mal sehr leicht sein, dieses aus der Lage der verschiedenen Seiten zu bestimmen. In dem sphärischen Dreiecke $A\;C\;D$, werden nun die Seiten $A\;C = s'$, $D\;C = s''$ und der Winkel $D\;C\;A = w$ bekannt sein; und man wird die Seite $A\,D = S$, und die beiden Winkel $C\,A\,D = y$ und $A\;D\;C = x$ zu finden haben. Hierzu berechnet man sich erst den sphärischen Excess: $\varepsilon = \dfrac{s'.\,s''.\,sin\,w}{2\,R^2.\,sin\,1''}$ und den ebenen Winkel $\beta = w - \frac{1}{3}\,\varepsilon$; dann hat man nach der ebenen Trigonometrie:

$$(s' - s'')\,cos\,\tfrac{1}{2}\,\beta = S.\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(\xi - \eta); \quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(\xi - \eta) = \frac{s' - s''}{s' + s''}\,cotg\,\tfrac{1}{2}\,\beta;$$
$$(s' + s'')\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\beta = S.\,cos\,\tfrac{1}{2}\,(\xi - \eta); \quad \xi + \eta = 180^0 - \beta;$$

wodurch die ebenen Winkel ξ, η und die Seite S bekannt werden; folglich werden alsdann die sphärischen Winkel x und y werden: $x = \xi + \frac{1}{3}\,\varepsilon$, und $y = \eta + \frac{1}{3}\,\varepsilon$. Legt man darauf y mit seinem zugehörigen Zeichen (+) oder (−), zum Azimuthe der Seite $A\;C$ hinzu, so erhält man das

---

*) Die angeführten sphärischen Winkel $A\;C\;B$ und $D\;C\;B$, muss man so genau wie nur irgend möglich vom Einflusse der Beobachtungsfehler befreien; so dass man z. B. statt der unmittelbar gefundenen Winkel, die Winkel $A\;C\;B - \frac{1}{3}\,\psi$ und $D\;C\;B - \frac{1}{3}\,\psi'$, nehmen muss, wo ψ der Fehler der Summe der drei Winkel des Dreieckes $A\;C\;B$, dagegen ψ' aber die Summe der Fehler der drei Winkel des Dreieckes $B\;C\;D$ bezeichnet; ausserdem muss man aber noch diese Winkel durch Berücksichtigung der anderen Bedingungen verbessern, welche von der Figur des trigonometrischen Netzes abhängen. Siehe: Gradmessung in Ostpreussen von Bessel.

Azimuth der Seite $A\ D$; dessen respectives Zeichen von der gegenseitigen Lage der Seiten $A\ B$, $A\ C$ und $A\ D$ abhängt. Da man nun den Winkel $x = A\ D\ C$ und den Winkel $E\ D\ C$ hat, so kann man den sphärischen Winkel $E\ D\ A$ berechnen; in unserer Figur (Fig. 42, b) ist $E\ D\ A = E\ D\ C - A\ D\ C = E\ D\ C - x$; da nun in dem sphärischen Dreiecke $A\ D\ E$ aus der vorhergehenden Berechnung die Seiten $D\ E$ und $A\ D$ bekannt sein werden, und ebenfalls der zwischen ihnen gelegene Winkel, so kann man folglich nach der eben angegebenen Methode die Länge der Seite $A\ E$ und ihr Azimuth bestimmen. Führt man nun diese Rechnung bis zu den Grenzpunkten des trigonometrischen Netzes selbst, ganz vollständig aus, so findet man dadurch die Länge und die Richtung der kürzesten auf der Erdoberfläche gezogenen Entfernung zwischen dem Anfangspunkte und dem Endpunkte des Netzes, wie wir es eben gezeigt haben. Diese vorzügliche und bequeme Rechnungsmethode heisst die *Methode der Polar-Coordinaten* und rührt von Bessel her.

200. Es ist bekannt, dass der Erdkörper ein elliptisches Sphäroid ist, welches sich wenig von einer Kugel unterscheidet und als durch die Umdrehung einer wenig excentrischen Ellipse, um ihre kleine Achse entstanden, gedacht werden kann. Bei der Berechnung eines bedeutenden Dreiecks-Netzes, muss man nun immer auf die wahre Gestalt der Erde Rücksicht nehmen; und hierzu sind auch verschiedene Methoden vorhanden, von denen die einfachste, jedoch aber nicht sehr genaue, in der Abhandlung von Delambre; *Base du Systeme métrique* angegeben ist; eine andere, ganz ungleich vorzüglichere, hat Bessel erfunden: *Schumacher's Astronomische Nachrichten No. 86*; sie ist sehr streng und genügt in allen Fällen, wie gross auch das Dreiecksnetz nur immer sein mag. Neuerdings hat Gauss eine andere

Methode zur Berechnung geodätischer Messungen vorgeschlagen, und da die Messungen selten mehr als 70 geographische Meilen betragen, so wird die Gaussische Methode, innerhalb dieser Grenzen, vollkommen genügend sein. Diese Methode ist nun so ausserordentlich bequem, dass wir uns gedrungen fühlen, sie im Detail hier mitzutheilen; die umständliche Discussion derselben, so wie deren Theorie und strengen Beweis, kann man in den Schriften ihres berühmten Uhrhebers selbst, nachlesen, und zwar in der Abhandlung von Gauss, die enthalten ist, in den: *Astronomischen Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher*, 3tes Heft. 1825, und in *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von C. F. Gauss*, 1844.

Bezeichnet man nämlich durch:

e ... die Excentricität der Erdmeridiane (in Theilen des Erdäquators),

a ... den Radius des Erdäquators,

t ... die geographische Länge
$P + p$ ... die geographische Breite
} eines unbestimmten Punktes auf der Erde, als Ellipsoid betrachtet,

T ... die Länge
$Q + q$ ... die Breite
} des entsprechenden Punktes auf der Kugel, auf welcher die conforme Uebertragung des auf dem Erdellipsoide vermessenen Dreiecksystems zu machen ist,

A ... den Radius dieser Kugel,

P ... die Normalbreite auf dem Ellipsoide, welche so zu nehmen ist, dass der Breitenunterschied p als kleine Grösse erster Ordnung zu betrachten, und also z. B. nicht grösser als 5^0 oder 6^0 ist,

Q ... die entsprechende Breite auf der Kugel;

so berechnet man ein für allemal für eine ganze Vermessung die 4 Hülfswinkel φ, ζ, η und Θ, und ausserdem noch die Constanten Q, A und α nach den Formeln:

$$\sin\varphi = e$$
$$tg\,\zeta = tg\,\varphi . \cos^2 P$$
$$tg\,\eta = \sin\zeta\, tg\, P$$
$$\sin\Theta = e \sin P$$
$$tg\,\tfrac{1}{2}(P - Q) = tg\,\tfrac{1}{2}\zeta . tg\,\tfrac{1}{2}\eta$$
$$A = \frac{a \cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$
$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta}$$

201. Alsdann hat man:

1[stens] *Reduction der geographischen Längen und Breiten*

durch die folgenden Formeln:

$t = \frac{T}{\alpha}$ und

$$p = \frac{\cos\Theta}{\cos\varphi} . q - \frac{3\,e^2}{2\cos^2} \cos P \sin P . q^2 +$$
$$+ \frac{e^2}{2\cos^3\varphi\cos\Theta}\Big\{ -\cos^2 P + \sin^2 P +$$
$$+ e^2 (5\cos^2 P \sin^2 P - \sin^4 P)\Big\} . q^3$$
$$+ \frac{e^2 . \cos P \sin P}{24\cos^4\varphi\cos^2\Theta}\Big\{ 16 + e^2 (41\cos^2 P - 77\sin^2 P) -$$
$$- e^4 (101\cos^2 P \sin^2 P - 61\sin^4 P)\Big\} . q^4$$
$$+ \frac{e^2}{120\cos^5\varphi\cos^3\Theta}\Big\{ 16\cos^2 P - 12\sin^2 P +$$
$$+ e^2 (41\cos^4 P - 522\cos^2 P\sin^2 P + 81\sin^4 P)\Big\} . q^5$$
$+$ u. s. w.

wo die Coefficienten von q, q^2, q^3 u. s. w. für alle Punkte, die bei einer Vermessung vorkommen, constante Zahlen sind.

In dieser Reihe ist vorausgesetzt, dass p und q in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens ausgedrückt sind; soll dagegen p in Secunden und q in Graden ausgedrückt werden, so muss dem ersten Gliede der Reihe der Factor 3600, dem zweiten der Factor $\frac{3600}{180}\pi = 20\,\pi$, dem dritten $3600\left(\frac{\pi}{180}\right)^2$

$= \frac{1}{9}\pi\pi$ u. s. f. beigefügt werden; hier ist $\pi = 3.14159265$.

Ebenso hat man auch umgekehrt:

$T = \alpha . t$ und

$$q = \frac{\cos\varphi}{\cos\Theta}.p + \frac{3e^2\cos\varphi}{2\cos^3\Theta}\cos P\sin P.p^2 +$$

$$+ \frac{e^2\cos\varphi}{2\cos^5\Theta}\left\{\cos^2 P - \sin^2 P + \right.$$
$$\left. + e^2(4\cos^2 P\sin^2 P + \sin^4 P)\right\}.p^3$$

$$- \frac{e^2\cos\varphi}{24\cos^7\Theta}\cos P\sin P\left\{16 - e^2(49\cos^2 P - 13\sin^2 P) - \right.$$
$$\left. - e^4(56\cos^2 P\sin^2 P + 29\sin^4 P)\right\}.p^4$$

$$+ \frac{e^2\cos\varphi}{120\cos^9\Theta}\left\{-16\cos^2 P + 12\sin^2 P + \right.$$
$$\left. + e^2(49\cos^4 P - 378\cos^2 P\sin^2 P + 9\sin^4 P)\right\}.p^5$$

+ u. s. w.

2tens *Reduction der Azimuthe.*

202. Bezeichnet man die Azimuthe der geodätischen Linie auf der Erde an ihren beiden Endpunkten, durch $V^0 + \psi^0$ und $V' + \psi'$, die Azimuthe, welche jenen auf der Kugelfläche entsprechen, durch V^0 und V', (in der Richtung von Süden nach Westen bis 360°); die Linearlänge der

geodätischen Linie in Theilen des Halbmessers A ausgedrückt durch h, und setzt man $sin\,1'' = \varrho$, so wird alsdann:

$$k^0 = \frac{e^2 \cos P \sin P}{\varrho \cos \varphi \cos \Theta} \cdot \left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^2 + \frac{e^2 \cos^2 P}{3\, \varrho \cos^2 \varphi . \cos^2 \Theta} \cdot \left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^3 +$$
$$+ \frac{e^2\, tg\, P\, (2 \cos^2 P - 3 \sin^2 P)}{12\, \varrho \cos^3 \varphi \cos^3 \Theta} \cdot \left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^4 +$$
$$+ \frac{e^2 \sec^2 P\, (2 \cos^4 P - 18 \cos^2 P \sin^2 P - 15 \sin^4 P)}{60\, \varrho \cos^4 \varphi \cos^4 \Theta} \cdot \left(\frac{\pi q^0}{180}\right)^5$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

$k' =$ einem ähnlichen Ausdrucke, wenn man q' statt q^0 setzt,

wo q^0 und q' die Werthe von q sind, welche den beiden Endpunkten der geodätischen Linie gehören; in den Formeln für k^0 und k' sind q^0 und q' in Graden ausgedrückt und $\pi = 3.14159265$; die beiden ersten Glieder der Reihe sind fast immer genügend. Hat man k^0 und k' gefunden so wird:

$$\psi^0 = -\tfrac{1}{3}\, h\, (2\, k^0 \sin V^0 - k' \sin V') \text{ und}$$
$$\psi' = -\tfrac{1}{3}\, h\, (2\, k' \sin V' - k^0 \sin V^0).$$

Wir wollen annehmen, dass q^0, V^0 und ψ^0 dem ersten Punkte der geodätischen Linien angehören, und q', V' und ψ' dem zweiten. Da k immer positiv ist und $sin\, V^0$ und $sin\, V'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so wird ψ^0 negativ, ψ' positiv, wenn der zweite Punkt westlich von dem ersten abliegt, und umgekehrt.

Bei der Berechnung der stets fast ganz verschwindenden Grössen ψ^0 und ψ' kann man anstatt V^0 und V' gemessene, oder auf das Ellipsoid sich beziehende, Azimuthe anwenden.

Sollten diejenigen Punkte auf der Kugel, welche respective den beiden Endpunkten der geodätischen Linie entsprechen, ziemlich symmetrisch auf beiden Seiten des Normalparallelkreises liegen, oder wenigstens wenn der kürzeste Verbindungsbogen auf der Sphäre vom ersten bis zum zweiten Punkte in einem zwischen ihnen liegenden Punkte, den Normalparallelkreis trifft, so bekommt man viel genauer:

$$\psi^0 = -\frac{e^2 . \cos P \sin P \sin\chi \cos^2\chi . h^3}{12 \cos\varphi \cos\Theta};$$

$$\psi' = +\frac{e^2 . \cos P \sin P \sin\chi \cos^2\chi . h^3}{12 \cos\varphi \cos\Theta};$$

wobei für χ das im erwähntem Punkte, in welchem jener Verbindungsbogen den Normalparallelkreis trifft, stattfindende Azimuth des Verbindungsbogens zu setzen ist.

3tens *Berechnung des Dreieckssystemes bei trigonometrischen Messungen.*

203. Vorausgesetzt dass die Dreiecke nicht gar zu weit von dem Normalparallelkreise sich entfernen, und dass das Verhältniss der Seiten zu einem ganzen Erdquadranten klein ist, wird man zuvörderst eine Dreiecksseite auf die Kugel gehörig übertragen, und dann das ganze System ebenso, als wenn es auf der Kugelfläche selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, mit der Modification der Azimuthe, welche von den Reductionen ψ^0 u. s. w., von denen so eben die Rede war, abhängig ist.

1stens Uebertragung der Seite. Es sei L die Linearlänge dieser Seite, welche als geodätische Linie auf dem Erdellipsoide zu betrachten ist. Wir nehmen an, dass L in denselben Lineareinheiten ausgedrückt ist, in welchen auch a und A gegeben sind. Es sei ferner H die in denselben Lineareinheiten ausgedrückte gehörige Uebertragung der Seite L auf die Kugelfläche. Aldann wird:

$$H = L\sqrt{m^0 m'}\,, \text{ und}$$

$$lg\, m^0 = -\frac{2\, M\, e^2.\; cos\, P\; sin\, P'}{3\, cos\, \varphi\; cos\, \Theta}\left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^3$$

$$-\frac{M\, e^2.\; cos^2 P}{6\, cos^2 \varphi\; cos^2 \Theta}\,(1 - 7\, e^2\, sin^2 P).\left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^4$$

$$+\frac{M\, e^2.\; tg\, P}{30\, cos^3 \varphi\; cos^3 \Theta}\,(2\, cos^2 P - 3\, sin^2 P).\left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^5$$

$$+\frac{M\, e^2}{180\, cos^4 \varphi\; cos^4 \Theta}.\frac{1}{cos^2 P}\,(2\, cos^4 P -$$

$$- 18\, cos^2 P\, sin^2 P - 15\, sin^4 P).\left(\frac{\pi\, q^0}{180}\right)^6$$

$$+ \text{u. s. w.}$$

$lg\, m'$ = einem ähnlichen Ausdrucke, wenn man q' statt q^0 setzt.

Hierbei sind alle Logarithmen, Briggische, und M der bekannte Modulus, oder $M = 0.4342945$; $\pi = 3.14159265$; q^0 und q', (welche dem Anfange und dem Ende der Seite angehören), sind hier in Graden auszudrücken. Rechnet man mit 7stelligen Logarithmen, so sind fast immer die zwei ersten Glieder der Reihe genügend. Will man lieber nach der endlichen Formel rechnen, so hat man:

$$m = \frac{a.\, A.\, cos\, (Q + q)\sqrt{1 - e^2\, sin\, (P + p)}}{a\, cos\, (P + p)}.$$

2^{tens} Die sphärischen Excesse der Dreiecke wird man berechnen mit dem Halbmesser der Kugel $= A$. Will man die Rechnung von dem Einflusse des Unterschiedes zwischen den sphärischen und sphäroidischen Winkeln befreien, so berechne man die Reduction ψ für jede Seite des Dreieckes. Der Unterschied zwischen zweien correspondirenden Werthen von ψ, die zu an einander anstossenden Seiten gehören, wird die Reduction des auf dem Ellipsoide gemessenen Winkels auf den entsprechenden Winkel der

Kugel ausdrücken. Die ganz rohe Kenntniss der Azimuthe, z. B. graphisch aus der entworfenen Karte der Vermessung geschlossen, wird dazu hinreichend sein.

204. Ist Alles auf die Kugelfläche übertragen, so zerfällt die Berechnung in drei bekannte Hauptstücke:

1stens die Ausgleichung der Winkel;

2tens die Berechnung der sämmtlichen Dreiecksseiten;

3tens die Bestimmung der Längen, Breiten und Azimuthe der Dreieckspunkte. Für diese letztere Bestimmung hat Gauss äusserst bequeme Rechnungsvorschriften vorgeschlagen:

Aus der in Bogentheilen ausgedrückten Grösse einer Dreieckseite r, ihrem Azimuthe V am Anfangspunkte, und der Breite dieses Anfangspunktes S, ist abzuleiten das Azimuth der Seite an dem andern Endpunkte V', die Breite desselben S' und der Längenunterschied beider Punkte λ. Man setze $\mu = \frac{1}{12} M \sin^2 1''$, oder $lg\,\mu = 7.9297528 - 20$, so folgt:

$$r \cos V = s^0;$$
$$r \sin V = w;$$
$$lg\, s = lg\, s^0 + 4 \mu rr - 4 \mu s^0 . s^0$$
$$w . tg\,(S - s) = u^0,$$
$$\frac{w}{\cos (S - s)} = \lambda^0,$$
$$lg\, u = lg\, u^0 - 2 \mu r . r - 4 \mu u^0 . u^0,$$
$$lg\, \lambda = lg\, \lambda^0 - 2 \mu s^0 . s^0 - 4 \mu u^0 . u^0,$$
$$lg\, \sigma = lg\, \tfrac{1}{2} \sin 1'' . w . u^0 - \mu r . r - 3 \mu s^0 . s^0 - 3 \mu u^0 . u^0,$$
$$lg\, \tau = lg\, \tfrac{1}{2} \sin 1'' . w . s^0 + 5 \mu r . r - 6 \mu s^0 . s^0$$

Es ist hier vorausgesetzt, dass r, s, u, λ u. s. w. in Secunden ausgedrückt sind. Alsdann wird:

$$S' = S - s - \sigma$$
$$V' = V \mp 180^0 - u - \tau$$
$$\lambda = \textit{dem gesuchten Längenunterschiede.}$$

u und λ sind auf die fünfte, σ und τ auf die sechste Ordnung ausschliesslich genau.

Diese Formeln sind mit den früheren §. 198. Seite 282. fast identisch.

Die Verwandlung der Längen und Breiten auf der Kugel in die wahren Längen und Breiten auf dem Erdsphäroide geschieht dann für die Längen durch die Division mit dem constanten Divisor α, und für die Breiten vermittelst der Gaussischen Hülfstafel, oder, wenn die Normalbreite sehr verschieden von $52^0 40'$ ist, vermittelst der oben erwähnten Formeln. Das sphäroidische Azimuth bekommt man durch die Anbringung der Reduction ψ, von welcher schon mehrmals die Rede war.

205. Sobald man die genauen Breiten φ und φ' und ebenso den genauen Längen-Unterschied λ, zweier nicht gar zu weit von einander entfernten Punkte auf der Erdoberfläche kennt, und man ihre kürzeste Entfernung von einander auf der Erdoberfläche $= s$ zu bestimmen wünscht, so kann man aus dem eben Gesagten, diese Entfernung $= s$, genügend genau folgern. Setzt man nämlich wiederum $P = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ und berechnet α, Q und A nach den Formeln in §. 200 Seite 290., so findet man mit Hülfe der früher gegebenen Vorschriften:

$$\Lambda = \alpha . \lambda; \quad T - T' = \frac{1}{\alpha} . \frac{\cos P}{\cos Q} . (\varphi - \varphi).$$

Aber hier ist Q beinahe $= \frac{1}{2}(T + T')$, und $T - T'$ und Λ entsprechen dem Breiten- und dem Längen-Unterschiede der gegebenen Punkte auf einer Kugel, deren Halbmesser A ist; die Entfernung s zwischen diesen Punkten kann man alsdann aus einem sphärischen Dreiecke berechnen, dessen Seiten $90^0 - T$, $90^0 - T'$ und s sind, Λ aber ist der Winkel, welcher der zu suchenden Seite s gegenübersteht, alsdann wird man haben:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} s = \sin^2 \tfrac{1}{2} (T - T') \cos^2 \tfrac{1}{2} A + \cos^2 \tfrac{1}{2} (T + T') \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$

Nimmt man nun . . . . $Q = \frac{1}{2} (T + T')$ an, und setzt:

$$tg\, \psi = \frac{\sin \frac{1}{2} (T - T') \cos \frac{1}{2} A}{\cos Q \,.\, \sin \frac{1}{2} A};$$

so wird alsdann: $\sin \frac{1}{2} s = \frac{\cos Q \,.\, \sin \frac{1}{2} A}{\cos \psi};$

oder auch: $\sin \frac{1}{2} s = \frac{\sin \frac{1}{2} (T - T') \cos \frac{1}{2} A}{\sin \psi}.$

Die erste dieser letzten beiden Formeln, wird alsdann vorzüglich gebraucht, wenn A weit grösser als $T - T'$ ist, die zweite aber dann, wenn das Gegentheil stattfindet. Hat man nun s in Secunden ausgedrückt gefunden, so wird $s \,.\, A \sin 1''$ die gesuchte Länge von s in Längenmaass ausdrücken; das Azimuth der Seite s kann man nun ebenfalls aus dem eben erwähnten sphärischen Dreiecke ableiten, wobei man keine weitläuftige Berechnung zu machen braucht.

206. Es wird häufig vorkommen, dass der Beobachter das Azimuth irgend eines Gegenstandes, von einem gegebenen Punkte der Erde aus nicht bestimmen kann; aber alsdann misst man das Azimuth dieses Gegenstandes von einem andern Punkte aus, welcher nahe an dem gegebenen liegt. Es sei Q (Fig. 42. c) der Ort des Beobachters, S das Centrum des Signales, von welchem aus das Azimuth des entfernten Gegenstandes B beobachtet wurde; P der Pol des Aequators; und M und m die Südpunkte auf den Meridianen PO und PS; wir wollen dabei annehmen, dass S und B westlich von O ab liegen, und ferner wie früher die Azimuthe von Süden nach Westen von 0^0 bis 360^0 zählen. Wenn nun die Entfernung $SO = d$ sehr klein ist; zum Bei-

spiel nicht grösser als 70 Fuss, so kann man annehmen, dass die Theile der Meridiane PO und PS, welche unmittelbar bei den Punkten O und S liegen, sehr nahe unter einander parallel sind, und folglich, dass der Unterschied der Azimuthe $BOM = w$ und $BSm = \xi$ sehr nahe gleich dem Winkel $SBO = x$ sein wird, welcher bekanntlich gleich der Reduction der Beobachtung in O auf das Centrum des Signales sein wird, nach §. 70. S. 179. B. I, wissen wir, dass $x = \frac{d.\ sin\, w}{D\, sin\, 1''}$ sein wird; wo $d = SO$, $D = BO$ oder $= BS$, und w der horizontale Winkel ist, welcher von O aus zwischen dem Centrum des Signales S und B gemessen wurde. Wenn die Gradtheilung auf dem Horizontalkreise des Instrumentes von linker Hand nach rechts, nach der von dem Beobachter entfernteren Seite der Kreise, zunimmt, und der Winkel w von S bis B fortwährend bis 360° nach der Richtung von links nach rechts gezählt wird, wobei die Zählung in S anfängt, so muss alsdann der Winkel x zu der Ablesung am Horizontalkreise zugelegt werden. Wenn aber die Entfernung $SO = d$ nicht sehr klein ist, so ist es alsdann noch durchaus nothwendig, ausserdem auf den Nicht-Parallelismus der Meridiane PO und PS Rücksicht zu nehmen; bezeichnet man daher die Breite des Beobachtungsortes durch φ und den Halbmesser der Erdkugel durch R; so wird das gesuchte Azimuth $BSm = \xi$, auf das Centrum des Signales reducirt, durch folgende Formel gefunden:

$$\xi = w + \frac{d\ sin\ w}{D sin 1''} - \frac{d. sin\, \xi . tg\, \varphi}{R. sin\, 1''},$$
