Einige Gedanken

über die

Gränzen des Unterrichts in der Mathematik auf Gymnasien,

besonders

hinsichtlich der Kegelschnitte.

Von

J. W. Benckendorff.

Es wird zum öftern die Frage aufgeworfen: wie weit soll der Unterricht in der Mathematik in den Gymnasien getrieben werden? und man hört verschiedene Antworten auf diese Frage. Einige wollen bei dem stehen bleiben, was das den Gymnasial-Unterricht begränzende Gesetz vorschreibt, andere wollen darüber hinaus, und möchten ihre Schüler gleich in die höchsten Höhen der Wissenschaft führen. Ohne mich in eine genauere Erörterung und Beantwortung jener Frage einzulassen, welches schon vielfältig anderswo geschehen ist, habe ich nur einen speciellern Fall ins Auge gefasst, mit dem ich mich hier beschäftigen will. Doch kann ich nicht umhin zu bemerken, dass es mir immer noch so scheinen will, als sey der Unterricht in der Mathematik, im Allgemeinen wenigstens, mit den übrigen Objecten noch nicht so recht in ein zeitgemässes Verhältniss gebracht, und dass man, wollte man den Anforderungen der Gesammtbildung in jeder Hinsicht genügen, der Mathematik noch Feld einräumen und ihr eine unabhängigere Stellung in Bezug auf die übrigen Objecte zu geben suchen müsste.

Doch ich gehe zu einer speciellern Frage über. Soll nemlich die Lehre von den Kegelschnitten in den Kreis des Gymnasial-Unterrichtes gezogen werden oder nicht? In dem oben erwähnten Gesetze ist dieser Gegenstand nicht berührt, auch ist mir keine spätere Verordnung bekannt, wodurch diesem schönen Zweige der Geometrie eine gesetzliche Aufnahme gestattet wäre. Wie also die Sache jetzt steht, so ist er von dem Gymnasial-Unterrichte ausgeschlossen. Weshalb? Etwa weil der Gegenstand zu schwierig ist, zuviel Zeit erfordert, und man ihn auf der Universität nur dem Mathematiker von Profession übrig lassen will?

Was die erste Frage anbetrifft, so gehören die Kegelschnitte keineswegs zu den schwierigern Gegenständen, und sie haben nicht mehr Schwierigkeit, wie zum Beispiele die Trigonometrie, die doch, und das mit vollem Rechte, aufgenommen ist. Die Kegelschnitte können nach verschiedenen Methoden vorgetragen werden, und unter diesen ist eine, welche gestattet, die Haupteigenschaften dieser Curven selbst unabhängig von der Stereometrie vorzutragen, so dass man sie also unmittelbar nach Beendung der ebenen Geometrie bearbeiten kann, wenn es nemlich nur darauf ankommt, die Haupteigenschaften dieser Curven kennen zu lernen, ohne ihr Vorhandenseyn im Kegel nachweisen zu wollen. Aber man hat dies nicht einmal nöthig, da Stereometrie auf allen Gymnasien gelehrt wird; nach dieser aber verschwinden die etwaigen Schwierigkeiten noch mehr. Denn wer sich an die weit schwierigern Constructionen der Stereometrie gewöhnt, und sie ganz begriffen hat, dem wird die Lehre von den Kegelschnitten gewiss leicht erscheinen. Die Schwierigkeit kann also der Grund ihrer Ausschliessung nicht seyn.

Fast eben so ist es mit der zweiten Frage, die sich auf die Zeit bezog. Man mag eine Methode wählen, welche man wolle, so ist der Zeitaufwand so gar gross nicht, wenn man sich auf die Haupteigenschaften der Curven beschränkt. Auch gegenwärtig findet sich immer einige Zeit, diesem Gegenstande einige Aufmerksamkeit zu schenken: denn aus den jährlichen Berichten ersieht man, dass er auf den meisten Gymnasien betrieben wird. Im Allgemeinen also sieht man wohl, dass auch die Zeit kein eigentliches Hinderniss ist, und um so wünschenswerther ist es, diesem so schönen und nützlichen Zweige der Geometrie auch eine gesetzliche Aufnahme zu verschaffen.

Was den dritten Punkt betrifft, man könne das Studium dieses Gegenstandes dem eigentlichen Mathematiker für die Universität übrig lassen, so fällt dieser Einwand eigentlich von selbst weg. Denn wie viel bleibt diesem noch zu leisten übrig! Wie gross ist noch das Gebiet, das hier der eigentliche Mathematiker durchlaufen muss, dem es angenehm und erfreulich seyn wird, wenigstens so viel mitzubringen, dass er im Stande sey, dies grosse Gebiet einigermaassen zu überschauen.

Die Lehre von den Kegelschnitten kann also sehr wohl in den Kreis des Gymnasial-Unterrichtes gezogen werden, und in anderm Betracht ist dies sogar nothwendig. Denn da der physikalische Unterricht seit einiger Zeit eine bedeutende Erweiterung erhalten hat, so kann dieser Zweig der Mathematik, wenn jener überall fruchtbar treiben soll, nicht wohl entbehrt werden. Denn sollen die Naturgesetze gründlich dargestellt werden, so kann man der mathematischen Speculation nicht entbehren, und selbst die Chemie, welche sonst als unabhängig von der Mathematik angesehen wurde, ist erst wahre Wissenschaft durch mathematische Begründung geworden.

Noch einiges habe ich über die Methode zu sagen, nach welcher man die Kegelschnitte vortragen kann. Man hat zwei Wege, welche man einschlagen kann; entweder den rein geometrischen der Alten, oder den analytischen der Neuern. Beide haben ihre Anhänger und Vertheidiger. Bedeutende Mathematiker haben insbesondere in den letzten Jahren die Geometrie der Griechen für Jeden zugänglich gemacht, theils durch Uebersetzungen jener alten Meisterwerke, theils durch freie Bearbeitungen. Sie meinen, diese Methode spreche wegen ihrer anschaulichen Constructionen das Gemüth der Jugend mehr an, übe den Scharfsinn mehr, als jede andere Methode, und entspreche überhaupt den in Gymnasien zu erreichenden Zwecken mehr, als jede andere. Dagegen fehlt es nicht an bedeutenden Stimmen, die eben so lebhaft die Methode der Neuern vertheidigen und sehr geschickt das Vortheilhafte dieser Methode darzustellen wissen. Schwer mögte es überhaupt seyn, hierüber etwas a priori zu bestimmen, da es gewiss sehr von der Individualität des Lehrers abhängt, ob er auf diesem oder jenem Wege mehr Nutzen stiftet.

Bei der Vortrefflichkeit der analytischen Methode, bey der hohen Vollkommenheit, die ihr scharfsinnige Bearbeiter gegeben haben, ist es kein Wunder, wenn sich sehr viele für sie entscheiden. Im Studio derselben liegt ein eigner Reitz für den Lehrer, sie erregt seine ganze Theilnahme. Aus einer einfachen Gleichung, durch Veränderung eines Zeichens, eines Buchstabens u. s. w. gleich mehrere Analogien, Eigenschaften und geometrische Wahrheiten ablesen zu können, zu denen man auf dem anderen Wege nur durch schwierige Constructionen und eine Reihe von Schlüssen gelangt, ist allerdings ansprechend, und für den Geübten leicht; so leicht, dass man nur zu geneigt ist, anzunehmen, der der Universität nahe stehende Jüngling müsse dies alles eben so leicht finden und auffassen. Mit einem Worte, die Eleganz der analytitchen Methode besticht den Lehrer zu leicht, und bringt ihn auf den Gedanken, sie müsse jedem eben so leicht werden, eben so das Interesse erregen, wie bei ihm.

Gelegenheitsschriften, wie diese, halte ich für den schicklichen Ort, gemachte Erfahrungen mitzutheilen und zur Sprache zu bringen. Vielleicht bringt eine ähnliche Belehrung, Berichtigung, und führt eine bestimmte Ansicht herbey.

Vor einigen Jahren war ich selbst der Meinung, mann könne wohl in der ersten Classe eines Gymnasiums die Kegelschnitte auf analytischem Wege durchführen. Die Uebersetzung eines ausgezeichneten Werkes über die Kegelschnitte liefert wohl den Beweis gehöriger Vorstudien, und mühsamen Suchens nach dem Besseren. Allein so leicht, wie ich mir die Sache vorgestellt hatte, fand ich sie nicht, sondern ich stiess dabei auf Schwierigkeiten, die ich nicht erwartet hatte. Leicht war es allemal, die algebraischen Operationen begreiflich zu machen, aber die Discussion der Gleichung, die Ableitung der Sätze, kurz das Uebertragen der Gleichung auf geometrische Gegenstände hatte allemal seine eigenthümlichen Schwierigkeiten Leicht ist es z. B. durch algebraisches Verfahren die Gleichung einer geraden Linie, die durch zwei gegebene Punkte geht, die Gleichung

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

zu finden. War es auch leicht, diese Gleichung durch mehrere Beispiele verständlich zu machen, so erhob sich doch allemal eine neue Schwierigkeit, wenn sie zum Beweise irgend eines Satzes angewandt werden sollte, und Wiederholung und neue Erörterungen mussten eintreten. Noch mehr häuften sich die Schwierigkeiten, als es zur Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades ging, wo, wenn auch die mancherlei Umformungen und Substitutionen verstanden waren, allemal das Ablesen der in dem Resultate liegenden geometrischen Wahrheiten, neue Schwierigkeiten verursachte. Dies ist meine Erfahrung, und ich hatte mit dem unbehaglichen Gefühle zu kämpfen, was gewiss jeden Lehrer fasst, wenn er sich nicht überall verstanden sieht. Zum nächsten Male, wo nach der Eintheilung der Objecte, wie sie bei uns Statt findet, die Kegelschnitte zu behandeln waren, bearbeitete ich mir von neuem ein Heft, nach einer rein geometrischen Methode, in welchem ich nicht blos bey den Hauptaxen stehen blieb, sondern auch die wichtigsten Sätze von den Diametern mitnahm. Meine Hauptabsicht gieng dahin, so kurze und fassliche Beweise zu geben als nur irgend möglich wäre; und ich war so glücklich, meist solche zu finden. Musste nun auch Manches doppelt vorgetragen werden, wie es bey der Ellipse und Hyperbel der Fall ist, so hatte dies seinen guten Nutzen, und gewährte eine zweckmässige Wiederholung. Leicht waren nun einige allgemeine Sätze hinzugefügt, die die Analogien nachwiesen und als Schlussstein dem Ganzen dienten. Mir gelang es auf diese Weise besser, und sichtlich stiftete ich grössern Nutzen. Die aufgewandte Mühe, der Eifer war in beiden Fällen meinerseits gleich; wo lag also das Verfehlen?

Weit entfernt bin ich, in diesen beiden Erfahrungen schon das entscheidende Moment zu suchen. Es ist gar vieles, was sonst noch berücksichtigt werden muss. Wenn, wie schon vorher angedeutet wurde, vieles von der Individualität des Lehrers abhängt, so müssen eben so wohl die Individualiitäten der Schüler, wie der jedesmalige Standpunkt der Classe in Anschlag gebracht werden. Diese haben keinesweges immer gleiche Höhe, und man kann wohl annehmen, dass selbst unter den günstigsten Umständen ein Steigen und Fallen bemerklich ist.

Im Allgemeinen scheint es wohl natürlich, dass Jünglinge in der ersten Classe der Gymnasien sich leichter in die geometrische als analytische Methode finden. Von den untersten Classen an, wo Mathematik als Lehrobject eintritt, sind sie an strenge geometrische Beweise gewöhnt. Die allgemeine Arithmetik aber fand ihre häufigsten Anwendungen auf Zahlen - Beispiele, und algebraische Gleichungen auf geometrische Gegenstände anzuwenden, erlaubte sehr oft die Zeit nicht. Meistentheils aber geschah dies auch nur in den Fällen, wo Figuren zu berechnen waren, wo doch dann wieder der Zahlenbegriff der vorherrschende ist. Es ist also für sie nicht leicht, sich von diesen Begriffen loszumachen, und geometrische Verhältnisse, Sätze und Wahrheiten aus den Gleichungen zu entnehmen.

In jedem Falle thut man wohl am besten, nur nach vielen Erfahrungen zu entscheiden, und so lange es der Einsicht und Gewissenhaftigkeit jedes Lehrers, zu überlassen, welche

Methode ihm am besten gelingt. Nicht die Eleganz der analytischen Methode, und die Leichtigkeit, die sie für den Geübten hat, nicht ihr grosser Nutzen, den sie in der Anwendung gewährt, darf uns bestimmen, sie überall in Gymnasien einznführen, wenn nicht die Vorbereitung erst dort eine andere ist. Mag sie der Universität überhaupt überlassen bleiben, wo sie gründlich und umfassend gelehrt werden muss, und mögen sich die Gymnasien nur bemühen, eine gründliche geometrische Vorbildung zu geben.

Ich füge hier noch eine kleine Probe aus dem oben erwähnten Hefte hinzu, welche einem der letztern Abschnitte augehört. Dieser Abschnitt hat überhaupt die Tendenz, diese Theorie auch von ihrer praktischen Seite zu zeigen, und einige Aufgaben zu lösen, die von wissenschaftlichem Interesse sind. Die wenigen Sätze, welche hier vorausgesetzt werden, lasse ich der Kürze wegen unerörtert.

Man zeigt gewöhnlich eine Construction der Parabel in der Ebene, ohne Beziehung auf den Kegel, blos vermittelst der Directrix und des gegebenen Brennpunktes. Jeder andre Kegelschnitt aber kann eben so construirt werden.

Bey der Parabel hat man nur $LG = LF$ zu machen, und nun Punkte B, B', B'' etc. (die Figur) zu bestimmen, so dass immer $BF = BI$ ist. Hiernach lassen sich soviel Punkte bestimmen als man immer will, und die durch diese Punkte gelegte Curve ist eine Parabel.

Man kann aber, wenn yy', und der Punkt F dieselbe Lage behält, die beiden andern Kegelschnitts-Curven eben so construiren, man darf nur die Lage des Punktes L ändern. Macht man $LF < LG$, und setzt man folgende Proportion an $LF : LG = m : 1$, construirt ferner Linien so, dass immer $BI : BF = LF : LG = m : 1$ ist, so wird, wenn man wie vorher viele Punkte so sucht, durch diese Punkte eine Curve gehn, welche die Ellipse ist. Nimmt man endlich L so dass $LG < LF$ ist, und sucht man Punkte so, dass $BI : BF = LG : LF$ ist, so wird durch die so bestimmte Reihe von Punkten eine Hyperbel gehen.

Nimmt man also überhaupt an $GL : LF = m : 1$, so erhält man eine Parabel wenn $m = 1$; eine Ellipse wenn $m > 1$ und eine Hyperbel wenn $m < 1$ ist.

Von den durch diese Construction erhaltnen Curven lässt sich leicht beweisen, dass sie mit denen, die man bei Durchschneidung eines Kegels durch eine Ebene erhält, identisch sind; und man kann hiervon ausgehend das ganze System der Kegelschnitte begründen.

Ohne hier auf den Nachweis dieser bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte einzugehen, will ich sie hier benutzen, folgende Aufgabe zu lösen:

Von einem gegebenen Punkte F gehen drei gerade Linien FA, FB, FC aus. Durch die Endpunkte dieser Linien einen Kegelschnitt zu legen. Die Art desselben, so wie die übrigen Dimensionen zu bestimmen.

Zuerst verbinde man B und A, so wie C und B durch gerade Linien. Dann verlängere man BA bis D, so dass $AD : BD = AF : BF$. Eben so verlängere man BC nach E, so dass $BE : CE = FB : FC$. Hierdurch sind die Punkte E und D bestimmt, und durch diese eine gerade Linie yy' gelegt, bestimmt die Lage der Directrix des Kegelschnittes. Von F eine Senkrechte auf y gezogen, giebt die Lage der Hauptaxe.

Um zu zeigen dass A, B, C Punkte eines Kegelschnittes sind, muss bewiesen werden, dass $AH : AF$, $BI : BF$, $CK : CF$ in einem constanten Verhältnisse sind.

Hiezu gelangt man sehr leicht. Denn da die Dreiecke AHD, BID ähnlich sind, so hat man folgende Proportionen:

$$AD : BD = AH : BI$$
$$\underline{AD : BD = AF : BF.} \text{ vermöge Construction}$$
$$AF : AH = BF : BI \ldots\ldots\ldots \text{(A)}.$$

Ferner sind die Dreiecke BIE, CKE ähnlich, folglich:

$$BE : CE = BI : CK.$$
$$\underline{BE : CE = BF : FC,} \text{ vermöge Construction}$$
$$BF : BI = FC : CK \ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Vergleicht man hier die Proportionen (A) und (B) so erhält man

$$AF : AH = BF : BI = FC : CK.$$

Da hier AF, BF, CF zu den Linien AH, BI. CK, welche senkrecht auf yy' stehen, in einem bestimmten Verhältnisse sind, so ist die Curve durch A, B, C ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkt F, und dessen Directrix yy' ist. Nun ist es leicht die Art desselben zu bestimmen. Denn ist $AF = AH$ so ist die Curve eine Parabel; ist $AF < AH$, also auch $BF < BI$ u. s. w. so ist sie eine Ellipse; ist endlich $AF > AH$, $BF > BI$ u. s. w. so ist sie eine Hyperbel.

Jetzt kann man eine beliebige Menge von Punkten dieser Curve bestimmen, da die Directrix und die Lage der Axe, so wie in ihr der Brennpunkt bekannt ist. Der Scheitel ist zuerst sehr einfach zu bestimmen, indem man FG so in L theilt, dass $FL : LG = AF : AH$ ist. Hierdurch ist der Scheitel der Curve bestimmt.

Ist $AF = AH$, so wird $LG = LF$, und man hat also auch wenn man LF vierfach nimmt den Hauptparameter, wodurch nun bei dieser Curve alles bestimmt ist.

Ist $FA < AH$, so nehme man, nachdem der Scheitel bestimmt ist, $LN : FN = AH : AF$, so wird N der Mittelpunkt der Ellipse seyn, und LN ist die halbe grosse Axe; die halbe kleine Axe findet man, wenn man $NO = \sqrt{LN^2 - FN^2}$ nimmt, und nun ist leicht der Parameter bestimmt, wodurch sämmtliche Dimensionen der Curve gefunden sind.

Ist $FA > AH$, so hat man eine Hyperbel. Man nehme N′ an der entgegengesetzten Seite von L, so dass

$LN' : FN' = AH : AF$ so ist N′ der Mittelpunkt, und LN′ die halbe grosse Axe, und $N'O' = \sqrt{FN'^2 - LN'^2}$ die halbe kleine Axe der Hyperbel. Nun ist der Hauptparameter sehr leicht zu bestimmen und alle Dimensionen dieser Curve sind eben so leicht gefunden.

Diese Methode, durch 3 auf die angeführte Art bestimmte Punkte einen Kegelschnitt zu legen, führt auf eine leichte trigonometrische Art, in einem bestimmten Falle die Dimensionen des erzeugten Kegelschnittes zu berechnen, wenn auch die Winkel, welche die Linien, die von F ausgehen, bilden, gegeben sind. Ist es nun auch nicht die Sache der Gymnasien, Praktiker in der Mathematik zu bilden, so wird doch in den meisten Fällen die Sache sehr verdeutlicht, wenn man den allgemeinen Auflösungen einer Aufgabe ein oder mehrere Beispiele folgen lässt. Man hat dadurch den doppelten Vortheil, einerseits die gegebene Aufgabe mehr zu erläutern, und das Verständniss derselben zu befördern; andererseits aber früher Abgehandeltes zu wiederholen, und das Ineinandergreifen der verschiedenen Zweige der Mathematik zu zeigen. Behandelt man z. B. die vorstehende Aufgabe trigonometrisch, so findet sich dabei eine Wiederholung der Hauptsätze der Trigonometrie vor. In dieser Hinsicht lasse ich folgende bestimmte Aufgabe folgen, bei welcher hier nur die Momente der Rechnung nebst den Resultaten gegeben sind.

Wenn $AF = 10'$, $BF = 12'$ $CF = 15'$, Winkel $AFB = 27^\circ\ 30'$, $BFC = 21^\circ\ 25'$ sind, was für eine Curve wird dadurch bestimmt und welches sind ihre Dimensionen?

Der Gang der Rechnung ist zuerst AB, BC zu bestimmen, dann lässt sich BD und CE finden, und dann AH, BI, CK, woraus sich dann das Verhältniss dieser letzten Linien zu AF, BF, CF, und somit also die Art der Curve bestimmen lässt.

Nennt man in den Dreiecken AFB, BFC die unbekannten Winkel der Reihe nach m, n, o, p, so hat man:

$$BF + AF : BF - AF = \text{tang}\,\frac{m+n}{2} : \text{tang}\,\frac{m-n}{2}$$

d. h.

$$22 : 2 = \text{tang}\ 76^\circ\ 15' : \text{tang}\,\frac{m-n}{2}$$

folglich

$$\frac{m-n}{2} = 20^\circ\ 22'\ 50''$$
$$m = 97^\circ\ 37'\ 50''$$
$$n = 55^\circ\ 52'\ 10''$$

Ferner:

$$\sin n : \sin AFB = AF : AB.$$

oder

$$AB = \frac{AF . \sin AFB}{\sin n}$$

$$AB = \frac{10 . \sin 27^\circ 30'}{\sin 55^\circ 52' 10''}$$

$$AB = 5 . 578 \ldots .$$

Verfährt man eben so mit dem Dreiecke BFC, so findet man:

$$o = 109^\circ 43' 44''$$

$$p = 48 \quad 51 \quad 16$$

$$BC = 5 . 818 \ldots$$

Da man nun AB, BC hat, so lassen sich AD, BD, CE finden. Denn

$$AD : BD = AF : BF$$

$$AD : AD + AB = AF : BF$$

d. h.

$$AD : AD + 5, 578 \ldots = 10 : 12$$

$$AD : 5 . 578 \ldots = 10 : 2$$

$$2 \; AD = 55 . 78 \ldots$$

$$AD = 27 . 89 \ldots$$

daher

$$AD + AB = BD = 33 . 468 \ldots$$

Auf dieselbe Art findet man:

$$CE = 29 . 093.$$

Nun muss AH, BI, CK gefunden werden, wozu man auf folgende Weise gelangt.

Der Winkel $DBE = 180^\circ - (o + n)$

daher

$$DBE = 14^\circ 24' 6''.$$

Im Dreiecke BDE hat man also folgende Stücke, BD, BE und Winkel DBE. Es lassen sich also die beiden andern Winkel bestimmen; man findet:

$$W. \; EDB = 27^\circ 54' 39'' \text{ und}$$

$$DEB = 137 \; 41 \; 13.$$

Im rechtwinklichten Dreiecke DAH kann nun AH gefunden werden. Denn

$$AD : AH = \sin \text{tot} : \sin 27^\circ 54' 13''.$$

$$AH = 13, 05 \ldots$$

Hat man AH, so werden BI und CK sehr einfach nach folgenden Proportionen gefunden:

$$AD : AH = BD : BI \text{ und}$$

$$BD : BI = CE : CK .$$

Es ergiebt sich

$$BI = 15 . 66 \ldots$$
$$CK = 19 . 58 \ldots$$

Hiernach hat man nun:

$$AF : AH = 10 : 13,\ 05 = 1 : 1,\ 305 \ldots$$
$$BF : BI = 12 : 15 . 66 = 1 : 1 . 305 \ldots$$
$$CF : CK = 15 : 19 . 58 = 1 : 1 . 305 \ldots$$

Da nun in diesen Proportionen $1 < 1 . 305$ ist, so muss die durch A, B, C gehende Curve eine Ellipse seyn, deren Brennpunkt F und deren Directrix yy' ist.

Es sind bei dieser Ellipse nur noch der Scheitel und die übrigen Dimensionen anzugeben.

Den Scheitel erhält man, wenn man FG in L so theilt, dass $FL : LG = 1 : 1 . 305 ..$ ist, weshalb aber erst FG zu berechnen ist. FG aber besteht aus zwei Theilen, $GP = AH$, und FP. FP aber kann aus dem Dreiecke APF gefunden werden, welches bei P rechtwinklicht ist, und worin AF bekannt ist. Auch die beiden andern Winkel sind aus dem vorigen zu bestimmen. Denn der Winkel

$$PAF = 180° - m - DAP. \text{ Aber } DAP = ADH$$

daher

$$PAF = 180° - m - ADH. \text{ d. h.}$$
$$= 180° - 96° \ 37' \ 50'' - 27° \ 45' \ 39''.$$
$$= 55° \ 27' \ 31''.$$
$$AFP = 90° - PAF$$
$$= 90° - 55° \ 27' \ 31''$$
$$= 34° \ 32' \ 29''.$$

Aus den Proportionen

$AF : FP = \sin \text{tot} : \sin PAF$ ergiebt sich $PF = 8 . 2371 \ldots$ mithin

$PF + PG \ (= AH) = 21 . 2871 \ .. = FG$

Nun lässt sich FL angeben, wodurch der Scheitel, oder der Anfangs-Punkt der grossen Axe bestimmt wird. Denn es ist,

$$FL : LG = AF : AH.$$
$$FL : LG + FL = AF : AH + AF$$
$$FL : FG = AF : AH + AF.$$

$FL = \frac{FG . AF}{AH + AF}$, woraus sich, wenn die gefundenen Zahlen-Werthe substituirt werden, findet

$FL = 9.234 \ldots$ Woraus sich ergiebt

$FL : LG = 1 : 1.305 \ldots$ wie seyn muss.

Nun kann man die grosse Axe finden; denn

$LN : FN = AH : AF.$

$LN : LN - FN = AH : AH - AF.$

d. h.

$LN : LF = AH : AH - AF.$

$$LN = \frac{LF \, . \, AH}{AH - AF}.$$

Werden in diesem Ausdrucke die Zahlenwerthe substituirt, so findet sich

$LN = 39.509 \ldots =$ der halben grossen Axe.

Ferner die halbe kleine Axe.

$NO = \sqrt{LN^2 - FN^2}$, und hier die Zahlenwerthe substituirt, giebt

$NO = 25.38 \ldots =$ der halben kleinen Axe.

Folglich also sind die Dimensionen der Ellipse, welche durch die 3 Punkte A, B, C geht, wie folget:

die grosse Axe $= 79.018 \ldots$

die kleine Axe $= 50.76 \ldots$

Parameter $= 31.666 \ldots$

Eccentricitaet $= 30.275 \ldots$