SIMPLIFICATION ET EXTENSION
DE LA
GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE.

Depuis plus de quarante ans, je suis en possession de quelques propositions de la Géométrie élémentaire, qui m'ont paru simplifier le domaine de cette science, sans lui rien faire perdre de la rigueur qu'on a le droit d'exiger. Les Géomètres de ma connoissance les ont jugées dignes d'être publiées, et je me suis rendu à leurs souhaits en faisant imprimer un mémoire sur cette matière dans les Annales de nôtre Académie des sciences et belles lettres, pour les années 1814—15. Mais depuis ce tems, en revenant toujours sur le même objet, je suis parvenu à simplifier encore d'avantage cette science exacte, et je ne crois pas pouvoir mieux remplir ma tâche, comme Professeur de Mathématiques au collège françois, et répondre à l'honorable confiance de mes supérieurs, qu'en traitant ici cette simplification inattendue, et pour ne pas répéter des propositions trop faciles à démontrer ou dont on trouve la démonstration ailleurs, je ne ferai que les indiquer.

§. 1. Définition. Le simbole $a.b$ représente en général un parallélogramme oblique quelconque, dont les côtés sont a et b.

Si l'angle est droit, $a.b$ sera un rectangle des droites a et b.

Si $b = a$ on aura $a.a$, ce sera un rhombe ou un carré selon que l'angle est oblique ou droit. Dans le dernier cas on peut écrire $a.a = a^2$.

§. 2. Théorème. Des parallélogrammes équiangles dont les côtés sont égaux coincident.

§. 3. Théorème. Des parallélogrammes égaux et équiangles, qui ont un côté égal, coïncident, ou leurs autres côtés sont aussi égaux.

§. 4. Théorème. Des parallélogrammes équiangles, qui ont un côté égal, sont ensemble égaux à un parallélogramme équiangle de même côté, et dont la base est égale à la somme de leurs bases.

La différence de deux parallélogrammes de cette espèce sera un parallélogramme de même espèce, mais dont la base est égale à la différence de leurs bases.

§. 5. Premier théorème général et principal. Si de quatre rectangles AC, AF, AH, AL, le premier AC est égal au second AF, et le troisième AH égal au quatrième AL, mais que le premier et le troisième ont une même base AB, et le second et le quatrième une même hauteur AG; on aura un cinquième AM égal à un sixième AN, dont le cinquième a la hauteur AD du premier et la base AK du quatrième, et le sixième a la hauteur AI du troisième et la base AE du second. (Fig. 1.)

Démonstration. Complétez le rectangle DE.

Il faut démontrer d'abord que A, Q, O sont en ligne droite; car supposé qu'en prolongeant AQ on coupe DC en R et tirant RT parallèle à AD,

on aura $\square AC = \square AS$ (Euclide I. Liv. prop. 43.)
mais par hypothèse $\square AC = \square AF$
on aura donc $\square AS = \square AF$
ce qui est absurde.
Donc A, Q, O sont en ligne droite.

On démontrera de même que A, P, O sont en allignement, ainsi les points, Q, P sont sur la diagonale AO,

donc $\square AM = \square AN$ (Eucl. 1. Liv. prop. 43.).

Ce théorème fournit un algorithme dont on fera un usage fréquent.

Supposé que de quatre rectangles 1, 2, 3, 4.

Les bases soient $\overset{1}{b}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{l}$, $\overset{4}{\beta}$.
Les hauteurs A, a, α, a

$$\begin{array}{rl} \text{et qu'on ait} & A.b = a.B \\ \text{et} & \underline{a.\beta = \alpha.b} \\ \text{on en concluera sur le champ} & A.\beta = \alpha.B. \end{array}$$

Remarque. Le théorème, que nous venons de démontrer, est aussi vrai pour des parallélogrammes équiangles quelconques, et dans ce cas les hauteurs sont les côtés des parallélogrammes obliques.

§. 6. **Second théorème principal.** Dans deux triangles rectangles ABC, abc les rectangles de deux côtés non homologues, mais qui comprennent un angle égal, sont égaux. (Fig. 2.)

Savoir: 1) $AB.bc=ab.BC$; 2) $AB.ac=ab.AC$; 3) $AC.bc=ac.BC$.

Dém. 1°) Faites $Ab=ab$; $Ac=ac$, on a

$$\Delta Abc \cong \Delta abc.$$

Construisez les $\square BD=AB.BC$; $\square AG=AB.bc$; et $\square AE=ab.BC$.

on aura $\square AG = \square dE$ (Eucl. 1 Livr. prop. 43.)

ou $AB.bc=ab.BC$

c. à. d. Les rectangles de deux cathètes non homologues sont égaux.

2°) Prenez (Fig. 3) $Ab=ab$; $Ac=ac$, on aura $\Delta Abc \cong \Delta abc$.

Construisez les rectangles $\square AE=AB.ac$ et $\square AG=ab.AC$.

Tirez CD et cF, vous aurez

$\Delta CAD \cong \Delta cAF$ (Eucl. 1 Livr. prop. 4)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{mais} & 2\Delta CAD=\square AE \\ \text{et} & 2\Delta cAF=\square AG\end{array}\right\}\ \text{(Eucl. 1 Livr. prop. 41)}$$

donc $\square AE = \square AG$

ou $AB.ac=ab.AC$.

On démontrera de même que 3°) $AC.bc=ac.BC$.

Car on n'a qu'à poser le Δabc sur le ΔABC, de sorte que l'angle c tombe en C, ca en CB et cb en CA.

De numéro (2 et 3) il s'en suit que les rectangles de deux cathétes homologues et des hypothénuses sont égaux.

§. 7. **Troisième théorème général et principal.** Dans deux triangles équiangles quelconques ABC, abc les rectangles formés par deux côtés non homologues, mais qui comprennent un angle égal, sont égaux. (Fig. 4.)

Savoir: 1) $CA.cb=ca.CB$; 2) $AB.ac=ab.AC$; 3) $BA.bc=ba.BC$.

Dém. 1) Supposé que CD soit perpendiculaire sur AB, et cd sur ab, on aura

$\Delta ACD \sim \Delta acd$, et $\Delta BCD \sim \Delta bcd$, ainsi d'après (§. 6.)

$CA.cd=ca.CD$

et $cb.CD=CB.cd$, donc d'après (§. 5.)

$CA.cb=ca.CB$.

2) Supposé que AE soit perpendiculaire sur BC et ae perpendiculaire sur bc, on aura $\Delta ABE \infty \Delta abe$ et $\Delta ACE \infty ace$

$$\begin{array}{ll} \text{ainsi} & \left.\begin{array}{l} AB.ae=ab.AE \\ ac.AE=AC.ae \end{array}\right\} (\S.\ 6.) \\ \text{et} & \\ \hline \text{donc} & AB.ac=ab.AC \quad (\S.\ 5.) \end{array}$$

3) Supposé de même que BF soit perpendiculaire sur AC, et bf perpendiculaire sur ac,

on aura $\Delta ABF \infty \Delta abf$, et $\Delta BCF \infty \Delta bcf$

$$\begin{array}{ll} \text{ainsi} & \left.\begin{array}{l} BA.bf=ba.BF \\ bc.BF=BC.bf \end{array}\right\} (\S.\ 6.) \\ \text{et} & \\ \hline \text{donc} & BA.bc=ba.BC \quad (\S.\ 5.). \end{array}$$

Remarque. Nro. 3 se déduit directement de Nro. 1 et 2.

$$\begin{array}{ll} \text{car de} & CA.cb=ca.CB \\ \text{et de} & AB.ac=ab.AC \\ \hline \text{il s'en suit} & AB.cb=ab.CB \quad (\S.\ 5.). \end{array}$$

§. 8. Les trois théorèmes (§. 5, 6 et 7.) sont dans mon système de Géométrie de la plus grande conséquence. — Leur démonstration est entièrement nouvelle, intuitive, d'une simplicité étonnante et sûrement dans l'esprit de la plus rigoureuse Géométrie. Les démonstrations, que depuis plus de 2000 ans les Géomètres en ont pu donner, dependent des proportions, c. a. d. ils font entrer dans leurs démonstrations des principes de l'arithmétique, dont mes démonstrations sont entièrement libres.

Dans mon système de Géométrie élémentaire les proportions ne sont employées que là où elles sont entièrement indispensables c. a. d. pour des propositions où le bût est d'établir un rapport entre des figures semblables et leurs côtés homologues etc.

Les propositions suivantes ont pour bût principal de faire valoir l'application de ces trois théorèmes.

§. 9. Théor. Si deux triangles ABC, abc, ont un angle égal ($A=a$), et les rectangles $AB.ac$ et $ab.AC$ des côtés qui comprennent cet angle, sont égaux, les triangles sont équiangles où $\Delta ABC \infty \Delta abc$. (fig. 5.)

Dém. Prenez $Ac'=ab$; $Ab'=ab$, le $\Delta Ab'c'$ sera $\cong \Delta abc$, et $b'c'$ parallèle à BC. Car supposé que $b'c'$ ne soit pas parallèle à BC, ce sera donc une autre $b'd'$ parallèle à BC.

Mais alors on aura $AB.Ad=Ab'.AC$ (§. 7.)
Par l'hypothèse on a $Ab'.AC=AB.ac$
ainsi l'on aura $AB.Ad=AB.ac$
donc $Ad=ac$ (§. 3.)
ce qui est absurde
donc $b'c'$ parallèle à BC ou le $\Delta Ab'c' \infty \Delta abc \infty ABC$.

§. 10. **Théor.** Si dans deux triangles ABC, abc on avoit
1, $AB.ac=ab.AC$ et 2, $ba.BC=BA.bc$
on aura $\Delta ABC \infty \Delta abc$ (fig. 5.)

Dém. D'après l'hypothèse on aura aussi $BC.ac=bc.AC$ (§. 7. Remarque) supposé que tout soit comme au §. 9. on aura $\Delta Ab'c' \infty \Delta ABC$

donc $AB.b'c'=Ab'.BC$ (§. 7.)
$=ab.BC$
$=AB.bc$
ainsi $b'c'=bc$ (§. 3.)
donc $\Delta abc \cong \Delta Ab'c' \infty \Delta ABC$.

§. 11. **Théor.** Si deux parallélogrammes équiangles quelconques $AC=AD.AB$ et $AF=AG.AE$ sont égaux. Les rectangles $AD.AB$ et $AG.AE$ sont égaux aussi. (Fig. 6.)

Dém. Le point I se trouve sur la diagonale AH du parallélogramme DE, ainsi $\Delta ADH \infty AGI$, donc le rectangle $AD.GI=$ rect. $AG.DH$ ou rect. $AD.AB=AG.AE$. (§. 7.)

§. 12. **Théorème.** Si deux rect. $A.b$ et $a.B$ sont égaux, les parallélogrammes quelconques sous les mêmes côtés le sont aussi.

Dém. Supposé que le parallélogramme $A.b$ soit égal au parallélogramme équiangle $x.B$
on aura rect. $A.b$ égal au rect. $x.B$ (§. 11.)
ainsi aussi rect. $a.B$ égal au rect. $x.B$
donc $x=a$ (§. 3.)
ainsi parallélogramme $A.b$ égal au parallélogramme $a.B$.

§. 13. **Problème.** Supposé que C soit l'angle droit du triangle ABC, et CD perpendiculaire sur AB. On demande les rélations qu'on peut tirer des trois ΔABC, CDA et CDB équiangles. (Fig. 7.)

Solution. Les triangles sont équiangles parceque les deux ΔCDA, CDB, ont chacun un angle aigû commun avec le ΔABC.

Les côtés du $\triangle ABC$ sont AB, AC, BC
- - homologues du $\triangle CDA$ - CA, AD, CD
- - - - $\triangle CDB$ - BC, CD, BD

En combinant deux à deux les côtés non homologues pour en faire des rectangles, on trouvera les six équations suivantes

1. $AB.AD = AC.AC = AC^2$
2. $AB.BD = BC^2$
3. $AD.BD = CD^2$
4. $AB.CD = CA.CB$
5. $CA.CD = AD.BC$
6. $AC.BD = CD.BC.$

No. 1 et 2 s'énoncent: Le carré d'une cathète est égal au rectangle formé par l'hypoténuse et du segment adjacent à la cathète.

No. 3. dit: que le carré de la perpendiculaire est égal au rectangle formé par les deux segments de l'hypoténuse.

La rélation (4) veut dire que le rectangle dont les côtés sont l'hypoténuse et la perpendiculaire est égal au rectangle dont les côtés sont les deux cathètes etc.

Additionnant (1) et (2) on aura d'aprés (§. 4.)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

c'est le théorème de Pythagore.

Pour faire voir qu'on peut donner des rélations ci dessus encore d'autres démonstrations particulières et nouvelles je choisirai No. 3. (fig. 7.)

Prenez $AE = CD$; faites les $\text{▭} DG$, EG, AK

vous aurez $\triangle AEH \cong \triangle CDB$ (Eucl. 1 Livr. prop. 26) ainsi $EH = BD$

$$\text{▭} AK = \square AF$$

ou $$AD.DB = CD^2$$

cette démonstration est nouvelle et indépendante du théorème de Pythagore..

§. 14. Définitions. Le pied a d'une perpendiculaire d'un point A sur une droite ou sur un plan de position quelconque, s'appelle la projection du point A sur cette droite ou sur ce plan. La projection d'une droite a sur une autre droite b, se trouve sur b entre les projections des extrémités de a sur b, et pour marquer par un symbole qu'on parle de la projection de a sur b j'écrirai $\underset{b}{a}$ — ainsi $\underset{a}{b}$ marque la projection de b sur a.

Supposé que a, b, c soient les côtés d'un triangle quelconque, on verra tout de suite que

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \underset{c}{a}+\underset{c}{b}=c \\ 2.\ \underset{b}{a}+\underset{b}{c}=b \\ 3.\ \underset{a}{b}+\underset{a}{c}=a \end{array}\right\}$$

Pourvu qu'on observe, que les projections, qui tombent dans une direction directement opposée à celle qu'on a d'abord adoptée, sont prises négativement.

Si $a.b$ sont les cathètes et c l'hypoténuse on aura

1. $\underset{c}{a}+\underset{c}{b}=c$; 2. $\underset{b}{a}+\underset{b}{c}=\underset{b}{c}=b$; 3. $\underset{a}{b}+\underset{a}{c}=\underset{a}{c}=a$.

Les six relations (§. 13.) exprimées par cette notation sont, p désignant la perpendiculaire sur l'hypoténuse

1. $c.\underset{c}{b}=b^2$
2. $c.\underset{c}{a}=a^2$
3. $\underset{c}{a}.\underset{c}{b}=p^2$
4. $c.p=a.b$
5. $b.p=a.\underset{c}{b}$
6. $b.\underset{c}{a}=a.p$

et additionnant (1) et (2), il s'en suit

$$c.\left(\underset{c}{a}+\underset{c}{b}\right)=a^2+b^2;\ \text{ou}\ c^2=a^2+b^2.$$

En général: dans une figure quelconque rectiligne plane et fermée, chaque côté est égal à la somme algébrique des projections de tous les autres côtés sur lui.

La projection du périmètre d'une telle figure sur une droite d'une position quelconque dans le plan de la figure est zéro.

§. 15. **Théor.** Dans un triangle ABC quelconque le rectangle d'un côté $CB=a$ et de la projection CD d'un autre côté $CA=b$ sur a est égal au rectangle du côté $CA=b$ et de la projection CE de a sur b

c. $a.d$, $\square DG=\square EH$ ou $a.\underset{a}{b}=b.\underset{b}{a}$. (Fig. 8.)

Dém. Les triangles rect. CBE, CAD sont équiangles

donc $CB.CD=CA.CE$ (§. 6.)
ou 1. $a.\underset{a}{b}=b.\underset{b}{a}$
de même on aura 2. $a.\underset{a}{c}=c.\underset{c}{a}$
et 3. $b.\underset{b}{c}=c.\underset{c}{b}$.

Remarque. En construisant des carrés sur les côtés du triangle, on a
$\Delta ACG \cong \Delta BCH$ (Eucl. 1. Livr. prop. 4.)
donc 1. ▭DG = ▭EH (Eucl. 1. Livr. prop. 41.)
de la même manière on démontre
que 2. ▭DI = ▭FK
et 3. ▭EL = ▭FM
mais ce n'est qu'une répétition des démonstrations données au (§. 6.) — Toute fois cette répétition peut convenir aux commençants.

§. 16. **Corollaire.** En additionnant les rect. (1) et (2) on trouvera

$$a.\left[\underset{a}{b}+\underset{c}{c}\right]=b.\underset{b}{a}+c.\underset{c}{a} \text{ (§. 4.)}$$

mais $\underset{a}{b}+\underset{a}{c}=c$ (§. 14.)

donc 1. $a^2=b.\underset{b}{a}+c.\underset{c}{a}$
on aura de même 2. $b^2=a.\underset{a}{b}+c.\underset{c}{b}$
et 3. $c^2=a.\underset{a}{c}=b.\underset{b}{c}$
donc 4. $a^2+b^2+c^2=2.a.\underset{a}{b}+2.b.\underset{b}{c}+2.a.\underset{a}{c}$

c. a. d. La somme des carrés des trois côtés d'un triangle quelconque est égale à la double somme algébrique des rectangles de chaque côté et de la projection de la suivante sur lui.

Remarque. On tire directement du Δ acutangle
□BG + □AH + □BM = 2▭DG + 2▭EL + 2▭FK
et du Δ obtus
□BG + □AH + □BM = 2▭EL + 2▭DI - 2▭DG
ou = 2▭EL + 2▭FK - 2▭DG.

En écrivant (4) comme il suit

$$2 . a . \underset{a}{b} + 2a . \underset{a}{c} - a^2 = b^2 + c^2 - 2b . \underset{b}{c}$$

on en tire $2 . a \left[\underset{a}{b} + \underset{a}{c} \right] - a^2 = b^2 + c^2 - 2b . \underset{b}{c}$ (§. 4.)

$$2a^2 - a^2 = b^2 + c^2 - 2b . \underset{b}{c} \text{ (§. 14.)}$$

donc 5) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b . \underset{b}{c}$ ou $a^2 = b^2 + c^2 - 2 . c . \underset{c}{b}$. (§. 15.)

c. a. d. Le carré d'un triangle quelconque est égal à la somme algébrique de la somme des deux autres côtés et du double rectangle de l'un des deux côtés et de la projection de l'autre sur elle.

Remarque. Avec la moindre attention on tire directement du triangle acutangle

$$\square BM = \square CI + \square CL - 2 \sqsubset DG \quad \text{ou} \quad \square BM = \square CI + \square CL - 2 \sqsubset EH$$

et du triangle obtus

$$\square BM = \square CI + \square CL + 2 \sqsubset DG \quad \text{ou} \quad \square BM = \square CI + \square CL + 2 \sqsubset EH$$

ce sont les deux théorèmes qu'Euclide démontre d'une manière toute différente au second livre prop. 12 et 13.

L'expérience m'a appris que la plupart des commençants trouvent quelques difficultés d'opérer avec la notation que j'ai proposée, c'est pourquoi je suis d'avis de se servir de figures qui mettent pour ainsi dire les propositions devant les yeux. Mais pour des recherches plus compliquées notre notation a un grand avantage et mérite qu'on se familiarise avec elle.

§. 17. **Théor.** Si les trois sommets d'un triangle ABC sont également éloignés du milieu D d'un côté AB, le triangle sera un triangle rectangle. (Fig. 9.)

Dém. $x = A$, et $y = B$ (Eucl. 1. Livr. prop. 5.)

donc l'angle $C = A + B$ égal à un angle droit.

§. 18. **Théor.** Dans un triangle rectangle quelconque ABC les trois sommets sont également éloignés du milieu D du côté opposé à l'angle droit. (Fig. 9.)

Dém. On démontrera facilement que DC ne peut ni être plus petit ni plus grand que $DA = DB$.

§. 19. **Problème.** Connaissant les deux projections $\underset{c}{a}, \underset{c}{b}$ des cathètes a, b sur l'hypoténuse c, construire ce triangle rectangle.

Solution. Sur la somme des deux projections $(\underset{c}{a} + \underset{c}{b} = c)$, décrivez un demi cercle, et au point ou les deux projections se touchent, élevez sur c une perpendiculaire, et le point d'intersection avec la demi circonférence sera d'aprè s (§. 17.) le sommet de l'angle droit.

§. 20; Probl. Si l'hypoténuse c et la perpendiculaire p sur elle sont données, construire le triangle rectangle.

Sol. Décrivez sur c un demi Cercle, et à une distance égale à p, tirez une parallèle à c. L'un ou l'autre des deux points d'intersection de cette parallèle avec la demi circonférence sera le sommet de l'angle droit. (§. 17.)

Remarque. Le maximum de la perpendiculaire p est $\frac{1}{2}c$.

§. 21. Probl. Transformer un rectangle $(a.b)$ donné, en un carré.

1. Sol. Sur la somme $(a+b)$, décrivez un demi cercle, et au point où a et b se touchent, élevez une perpendiculaire jusqu'a ce qu'elle rencontre la périphérie du demi cercle, cette perpendiculaire sera le côté du carré qu'on demande.

Dém. Elle suit du §. 17. et du §. 13. No. 3.

2. Sol. Décrivez un triangle rectangle dont le plus grand côté b soit l'hypoténuse et a un segment. — La cathète adjacente au segment a sera le côté du carré qu'on exige.

Dém. Elle suit du §. 13. No. 1. ou No. 2.

§. 22. Théor. Si deux triangles ABC, ADE, qui ont un angle commun A, sont égaux, les rect. formés par les côtés qui comprennent cet angle sont aussi égaux. c. a. d. $AB.AC = AD.AE$. (Fig. 10.)

Dém. Le $\Delta BEC = \Delta BED$
donc BE parallèle à CD (Eucl. 1. Livr. prop. 39.)
ainsi le $\Delta ABE \infty ADC$
donc $AB.AC = AD.AE$ (§. 7.)

§. 23. Théor. Si dans deux triangles ABC, ADE, qui ont un angle commun A, les rectangles $(AB.AC, AD.AE)$ formés par les deux côtés qui comprennent cet angle sont égaux, les triangles le sont aussi. (Fig. 10.)

Dém. De l'hypothèse $AB.AC = AD.AE$ suit d'après le §. 9., que les ΔABE et ADE sont semblables ainsi $\Delta BEC = \Delta BED$ (Eucl. 1. Livr. prop. 38.)
donc $\Delta ABC = ADE$.

Remarque. Les triangles sont aussi égaux si, au lieu d'un angle commun, ils ont des angles supplémentaires.

§. 24. Problème. Changer un triangle ABC dont l'angle A est égal à $\frac{2}{3}$ d'un angle droit en un triangle équilatéral ADE. (Fig. 11.)

Sol. Du (§. 22.) il suit sur le champ

$AD^2 = AB . AC$

ainsi AD sera trouvé d'après §. 21.

Remarque. Si le triangle ABC donné n'avoit pas un angle $A = \frac{e}{3}$ d'un angle droit, on pourroit facilement le changer en un tel triangle.

Si on demande de changer un ΔABC quelconque en un Δ isoscèle ADE, dont l'angle A au sommet est donné, on aura aussi $AD^2 = AB . AC$. (Fig. 11.)

§. 25. Probl. En conservant l'angle A d'un triangle donné ABC, changer la position du côté BC opposé à l'angle A, de sorte que EF devienne parallèle à une ligne M donnée de position. (Fig. 12.)

Sol. L'égalité supposée des deux triangles ABC, AEF

donne $AE . AF = AB . AC$ (§. 22.)

mais $\underline{AE . AC = AD . AF}$ (parceque les triangles ACD, AEF sont équiangles)

donc $AE^2 = AB . AD$ (§. 5.)

La construction se fera d'après le §. 21.

§. 26. Probl. Changer un carré donné AE en un rhombe AH d'un angle donné α (Fig. 13.)

Sol. Faites le parallélogramme $AE = \Box AC$; et vous aurez le parallélogramme $AE =$ au rhombe AH ainsi $\Delta AGI = \Delta ABF$ donc $AG^2 = AB . AF$ (§. 22.), et la construction s'achève d'après §. 21.

§. 27. Probl. Changer un triangle donné ABC en un trapèze $ABED$, dont la base AB et les deux angles adjacents à cette base sont connus. (Fig. 14.)

Sol. Supposé que CA, EB prolongés se coupent en F, on doit avoir d'aprés l'hypothèse $\Delta FBC = \Delta FDE$; et comme DE doit être parallèle a AB

on aura 1. $FD^2 = FA . FC$ (§. 25.)

cette équation résout parfaitement le problème, car FD sera trouvé d'après le §. 21.

Mais il sera utile de chercher encore une autre solution, qui évitera le point d'intersection F. Tirez $CG || AB$, elle coupera FB prolongée en G.

Vous aurez 2. $FA . DE = FD . AB$ (§. 7.)

En combinant cette équation avec (1) vous trouverez

3. $FD . DE = FC . AB$ (§. 5.)

Vous aurez encore 4. $\underline{FC . DE = FD . CG}$ (§. 7.)

de là (3 et 4) vous concluez 5. $DE^2 = AB . CG$ (§. 5.)

ce qui donne la construction suivante

Tirez $AH \| FG$; et cherchez $GK^2 = GH.CK$ (§. 21.)
faites $KD \| BG$, et $DE \| AB$.

§. 28. **Probl.** Déterminer dans l'intérieur d'un triangle isoscèle quelconque ABC un point E, duquel trois perpendiculaires sur les côtés du triangle partagent le triangle en trois parties égales. (Fig. 15.)

Sol. La perpendiculaire CD sur la base AB partage le ΔABC en deux $\Delta CDA = \Delta CDB$, le point E qu'on cherche sera sûrement sur cette perpendiculaire, parcequ'il doit avoir une position symétrique à l'égard des côtés CA, CB.

Prenez $CI = \frac{1}{3} CD$, on aura le $\Delta CIA = \Delta CEF = \frac{1}{3} \Delta CDA$ et $\Delta CEF \infty \Delta CDA$ de là suit

$$CE.CF = CI.CA = \tfrac{1}{3} CD.CA \quad (\text{§. } 22.)$$

$$\text{et} \quad \underline{CE.CD = CA.CF} \quad (\text{§. } 7.)$$

$$\text{donc} \quad CE^2 = \tfrac{1}{3} CA.CA \quad (\text{§. } 5.)$$

§. 29. **Probl.** Partant de l'angle A d'un ΔABC, partager par une droite AD le côté BC opposé à cet angle, de sorte qu'un parallélogramme quelconque formé par ce côté et par un des segments BD, soit égal à un rhombe équiangle à ce parallélogramme sur le côté AB adjacent à ce segment. (Fig. 16.)

Sol. On doit avoir $AB.AB = BC.BD$, ainsi $\Delta ABD \infty ABC$ (§. 9.), et $x = C$. De là suit qu'on n'a qu'à faire l'angle $x = C$.

§. 30. **Corollaire.** On aura aussi $AB^2 = BC.BD$ (§. 11.)
faisons l'angle $y = B$, on aura aussi

$AC^2 = BC.CE$. Ainsi

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC.[BD + CE] \\ &= BC.[BC - DE] \\ &= BC^2 - BC.DE. \end{aligned}$$

Si l'angle A étoit un angle droit, on auroit derechef le théorème de Pythagore.
La proposition réciproque à celle-ci est vraie aussi.

§. 31. **Probl.** Supposé que ABC soit un triangle isoscèle, et chacun des angles de la base BC, le double de celui au sommet A; Déterminer, de quel problème dépend la construction d'un tel triangle (Fig. 17.)

Sol. Supposé que CD divise l'angle C en deux parties égales $x = y$ égal à A, ainsi $CB^2 = AB.BD$ (§. 30.) et comme le ΔBCD est équiangle au ΔABC, nous avons $CB = CD = AD$ donc $AD^2 = AB.BD$.

Il sagit donc de diviser une ligne donnée AB en D de sorte, que le carré du plus grand segment AD soit égal au rectangle formé par la ligne AB entière et le petit segment BD.

Ce qui s'exécute de la manière suivante. (Fig. 18.)

A l'extrémité A élevez sur AB la perpendiculaire $AF=AB$.

Faites $CE=AC=CF$ et tirez FE qui coupera AB en D de sorte qu'on aura $AD^2=AB.BD$.

Dém. Prolongez BC et prenez $CG=CE$, on aura l'angle $G=F=y=x$, ainsi les ΔBED, BAE et BAG sont semblables.

On aura donc $BD.EG=BE.AD$ (suit facilement du §. 7.)

c. a. d. $\quad BD.AB=BE.AD \; (EG=AB)$

mais $\quad BE^2=BD.AB$ (§. 29.)

de là suit $\quad BE^2=BE.AD$

ainsi $\quad AD\;=BE$ (§. 3.)

donc $\quad AD^2=BA.BD$.

§. 32. **Théorème.** Le rectangle formé par une droite AB et par la projection cd d'une seconde droite CD sur AB, est égal à un rectangle formé par CD et par la projection ab de AB sur CD. (Fig. 19.)

Savoir: $AB.cd=ab.CD$.

Dém. Tirez $Cf=cd$ et parallèle à cd, faites $CE=AB$, la projection Ce de CE sur CD sera égale à ab projection de AB sur CD, donc $CE.Cf=CD.Ce$ (§. 6) ou $AB.cd=ab.CD$.

§. 33. **Corollaire.** Si donc a et b sont deux lignes droites données, dans un plan et dans une position arbitraire, on aura d'après notre notation (§. 14) $a.b_a=b.a_b$ — Ainsi ayant le rectangle $n.r_n$ on concluera d'abord $n.r_n=r.n_r$.

§. 34. **Théorème.** Dans chaque polygone rectiligne la somme des carrés sur les côtés est égale à la double somme algébrique des rectangles formés par chacun de ces côtés et par la projection de tous les côtés suivants sur lui.

Dém. Si $a, b, c, d,$ ----x sont les côtés, on a

$$\text{I.}\quad \left.\begin{aligned} a &= b_a+c_a+d_a+\text{----}+x_a \\ b &= a_b+c_b+d_b+\text{----}+x_b \\ c &= a_c+b_c+d_c+\text{----}+x_c \\ &\;\vdots \\ x &= a_x+b_x+c_x+\text{----}+w_x \end{aligned}\right\} \text{(§. 14.)}$$

donc aussi

$$\left.\begin{aligned}
\text{II.}\quad a^2 &= a.b_a + a.c_a + a.d_a + \cdots + a.x_a \\
b^2 &= b.a_b + b.c_b + b.d_b + \cdots + b.x_b \\
c^2 &= c.a_c + c.b_c + c.d_c + \cdots + c.x_c \\
&\ \vdots \\
x^2 &= x.a_x + x.b_x + x.c_x + \cdots + x.w_x
\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 4.)$$

Or on a généralement toujours $p.q_p = q.p_q$

chaque rectangle se trouve ainsi ici double,

donc

$$\text{III.}\quad a^2+b^2+c^2+\cdots+x^2 = 2\left[a.b_a + a.c_a + \cdots + b.c_b + \cdots + w.x_w\right]$$

§. 35. Corollaire. On tire de II.

$$\text{IV.}\quad a^2 = b^2+c^2+d^2+\cdots+x^2 - 2\left[b.c_b + b.d_b + \cdots + w.x_w\right]$$

c. à. d. Dans un polygone rectiligne quelconque, le carré sur un côté est égal à la somme des carrés sur les autres côtés, moins la double somme des rectangles formés par chacun de ces côtés et par la projection de tous les côtés suivants sur lui.

Ces propositions suffisent pour montrer que par notre méthode on peut démontrer des théorèmes et résoudre des problèmes, qui jusqu'ici n'ont été attaqués que par une voie arithmétique. Pour d'autres propositions je prie de lire mon mémoire de l'an 1814 sur cette matière, qui se trouve aussi dans **Leslies geometrische** *Analysis, aus dem Englischen übersetzt von* **Grüson**. *Berlin* 1822.

§. 36. On ne peut pas dissimuler, que par des principes d'arithmétique, on ne puisse étendre infiniment le domaine de la Géométrie, mais pour conserver à la Géométrie le caractère qui lui est propre et qui exige que les démonstrations soient intuitives, il faut au moins que, dans les élémens qu'on professe dans les collèges, on évite tant qu'on peut les principes d'arithmétique, qui ne doivent y entrer que lorsqu'ils deviennent indispensables. — J'offre ici un essai de cette seconde partie de la Géométrie, qui peut-être trouvera grâce.

§. 37. **Définition.** Le rapport de deux quantités A à B repose sur l'idée, combien de fois la première A (l'antécédent), ou une partie déterminée de A, est contenue dans la seconde B (le conséquent), ainsi sur l'idée d'une expression numérique, (qui d'après les circonstances peut même être irrationnelle). —

C'est le rapport numérique, qui nous fournit des idées justes, si nous traitons des rapports et des proportions entre des quantités continues.

§. 38. **Théor.** Supposé que φ soit un nombre rationnel entier, fractionnaire, ou irrationnel, on aura toujours, si $\varphi b = B$

$$\varphi \times b \,.\, a = B \,.\, a = \varphi b \,.\, a$$

c. à. d. φ fois le parallélogramme $b \,.\, a$ est égal à un parallélogramme équiangle du même côté a et d'une base $B = \varphi b$ c. à. d. φ fois plus grande.

Dém. 1er **Cas.** Soit $\varphi = m$ un nombre entier rationnel, on doit démontrer que $m \times b \,.\, a = mb \,.\, a$

On a $m \times b \,.\, a = b \,.\, a + b \,.\, a + b \,.\, a + \text{----} + b \,.\, a$

$$= (b + b + b + \text{----} + b) \,.\, a \quad (\text{§. } 4)$$

$$= mb \,.\, a.$$

2d **Cas.** Soit $\varphi = \frac{m}{n}$ un nombre fractionnaire rationnel, il faut démontrer que $\frac{m}{n} \times b \,.\, a = \frac{m}{n} b \,.\, a.$

Supposé que $\frac{m}{n} \times b \,.\, a = B \,.\, a$

on aura $m \times b \,.\, a = n \times B \,.\, a$

ainsi d'après le 1er cas aussi

$$mb \,.\, a = nB \,.\, a$$

de là $mb = nB$ (§. 3)

ainsi $\frac{m}{n} b = B$

donc $\frac{m}{n} \times b \,.\, a = \frac{m}{n} b \,.\, a$

3me **Cas.** Soit φ un nombre irrationnel, on aura $\varphi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \text{----}$ infinitum,

ainsi $\varphi \times b \,.\, a = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \text{----}\right) \times b \,.\, a$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \times b \,.\, a + \frac{\gamma}{\delta} \times b \,.\, a + \text{----}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} b \,.\, a + \frac{\gamma}{\delta} b \,.\, a + \text{----} \quad (\text{2d Cas})$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\beta}b+\frac{\gamma}{\delta}b+\cdots\right).a \text{ (§. 4.)}$$
$$=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}b+\cdots\right)b.a$$
$$=\varphi b.\text{a}$$

§. 39. **Corollaire 1.** Réciproquement $\varphi b.a=\varphi\times b.a$.

§. 40. **Corollaire 2.** Comme on a $b.a=a.b$

on aura aussi $\varphi\times b.a=\varphi\times a.b$

donc $\varphi b.a=\varphi a.b$

c. à. d. Un parallélogramme augmente ou diminue dans un rapport quelconque, si on augmente ou diminue un de ses côtés dans le même rapport.

§. 41. **Corollaire 3.** $\psi\times\varphi\times b.a=\psi a.\varphi b$.

Dém. $\psi\times\varphi\times b.a=\psi.\varphi b.a=\psi\times a.\varphi b=\psi a.\varphi b$ (§. 40.).

§. 42. **Corol. 4.** Réciproquement $\varphi a.\psi b=\psi\times\varphi\times a.b$.

§. 43. **Corol. 5.** $\frac{1}{\varphi}\times\varphi\times b.a=\varphi b.\frac{1}{\varphi}a$ (§. 41.)

c. à. d. Un parallélogramme reste invariable, si on diminue un des côtés dans le même rapport, dans lequel on augmente l'autre côté.

§. 44. **Théorème.** Des parallélogrammes de même hauteur sont dans le rapport de leurs bases.

Dém. Si les parallélogrammes ne sont pas équiangles, on changera l'un, en conservant la même hauteur, en un parallélogramme équiangle avec l'autre. Or supposé que B, a, sont les côtés de l'un et b, a, les côtés de l'autre parallélogramme équiangle, et le rapport des bases $\frac{B}{b}=\varphi$, on a $B=\varphi b$

ainsi $B.a=\varphi b.a$

par conséquent $B.a=\varphi\times b.a$ (§. 39.)

donc $\frac{B.a}{b.a}=\varphi=\frac{B}{b}$.

§. 45. **Théor.** Des parallélogrammes de même base sont dans le rapport de leurs hauteurs.

Dém. Transformez les deux parallélogrammes en rectangles de même base, on aura, si B est la base commune et A, a, leurs hauteurs,

$$\frac{B.A}{B.a}=\frac{A}{a} \quad \text{(§. 44.)}.$$

§. 46. **Théor.** Deux parallélogrammes sont dans un rapport composé de leurs bases et hauteurs. c. a. d. $\frac{A.B}{a.b}=\frac{A}{a}\times\frac{B}{b}$.

Réciproquement: $\frac{A}{a} \times \frac{B}{b} = \frac{A.B}{a.b}$.

Dém. Si $\frac{A}{a} = \psi$, on a $A = \psi a$

et $\frac{B}{b} = \varphi$, - - $B = \varphi b$

ainsi $A.B = \psi a . \varphi b$

donc aussi $A.B = \psi \times \varphi \times a.b$ (§. 42.).

§. 47. **Théor.** Deux parallélogrammes, qui ont un angle égal, sont dans un rapport composé des côtés qui comprennent l'angle égal.

Dém. $\frac{A.B}{a.b} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b}$ (§. 46.).

§. 48. **Théor.** Si deux parallélogrammes égaux ont un angle égal, les côtés qui comprennent l'angle égal sont dans un rapport réciproque.

Dém. Si $A.B = a.b$ on a aussi

$\frac{A.B}{a.B} = \frac{a.b}{a.B}$

donc aussi $\frac{A}{a} = \frac{b}{B}$. (§. 44.).

Autre démonstration:

Si $\frac{A}{a} = \varphi$, on a $A = \varphi a$

ainsi $\varphi a . B = a.b$

donc aussi $\varphi B . a = b.a$ (§. 40)

par conséquent $\varphi B = b$ (§. 3.)

et $\varphi = \frac{b}{B}$

donc $\frac{A}{a} = \frac{b}{B}$.

§. 49. **Théor.** Réciproquement: Si deux parallélogrammes ont un angle égal, et si les côtés qui comprennent cet angle sont dans un rapport inverse, les parallélogrammes sont égaux.

Dém. Si $\frac{B}{a} = \frac{b}{B}$, on a aussi

$\frac{A.B}{a.B} = \frac{a.b}{a.B}$

donc aussi $A.B = a.b$

Autre démonstration:

Supposé $\frac{A}{a} = \varphi$

on aura $A = \varphi a$

et $\varphi B = b$

donc $\varphi B . A = \varphi a . b$

ainsi $\varphi \times B . A = \varphi \times a . b$ (§. 39.)

par conséquent $B . A = a . b$.

§. 50. Théor. Si deux parallélogrammes sont égaux, leurs hauteurs sont dans un rapport inverse de leurs bases.

Dém. On change ces parallélogrammes en rectangles, en conservant leurs bases et leurs hauteurs, ces rectangles sont égaux et équiangles, donc le théorème est prouvé (§. 48).

§. 51. Théor. Deux carrés sont dans un rapport double de leurs côtés.

Dém. $\frac{A . A}{a . a} = \frac{A}{a} \cdot \frac{A}{a}$ (§. 47.)

§. 52. Théor. Si dans deux parallélogrammes équiangles, les côtés qui comprennent un angle égal, sont proportionels, les parallélogrammes sont dans le rapport de carrés sur deux côtés homologues.

Dém. Si $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, on a

$\frac{A . B}{a . b} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b}$ (§. 47.)

donc aussi $= \frac{A}{a} \times \frac{A}{a} = \frac{A . A}{a . a}$ (§. 47.)

§. 53. Si deux parallélogrammes équiangles sont égaux, par exemple:

$A . b = a . B$

on aura $\frac{A}{b} = \frac{B}{b}$ ou $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

c. à. d. les côtés qui comprennent un angle égal sont dans un rapport inverse.

Dém. Comme on a $A . b = a . B$

on aura aussi $\frac{A . b}{a . b} = \frac{a . B}{a . b}$

donc $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$

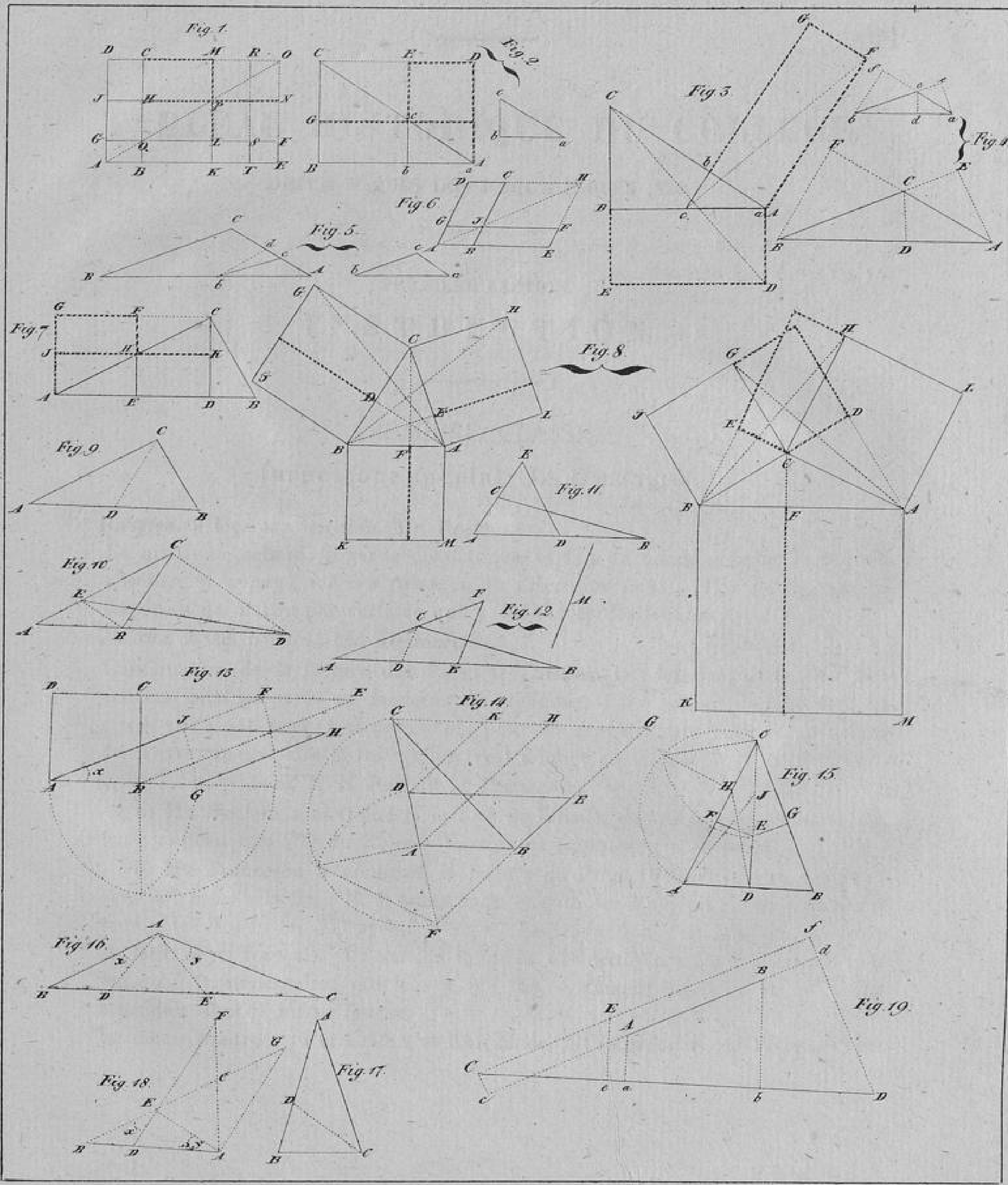
de même

$\frac{A . b}{B . b} = \frac{a . B}{B . b}$

donc $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

Ce qui précède suffira pour montrer que toutes les démonstrations de ce genre sont directes. Les bornes d'un programme ne permettent pas d'entrer dans des discussions plus étendues. Je me contente d'avoir tracé la route, et des Géomètres plus habiles perfectionneront et simplifieront peutêtre encore plus la méthode que j'ai proposée.

GRUSON, Conseiller privé et Professeur.



Lith. v. Winckelmann & Söhne in Berlin