

## Über Rollbewegungen unter der Voraussetzung, dass der erzeugende Punkt noch einer besondern Eigenbewegung unterliegt.

Von Gymnasiallehrer **Biel.**

Auf der durch die Gleichung:

$$\eta = f(x) \quad (1)$$

repräsentierten Curve, welche die Grundcurve heissen soll, rolle eine zweite mit der Gleichung:

$$\eta = \varphi(\xi) \quad (2)$$

beide Gleichungen bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und den Anfangszustand der Bewegung. Es soll nun untersucht werden, welche Bahn ein Punkt in der Ebene beider Curven beschreibt, wenn derselbe sich an der Rollbewegung beteiligt, dabei aber noch eine gewisse, von der Rollbewegung abhängige Eigenbewegung besitzt. Die Bedingungen für diese letztere können im allgemeinen doppelter Art sein, indem nämlich der Punkt entweder auf einer dritten mit der rollenden fest verbundenen Curve in vorgeschriebener Weise sich zu bewegen gezwungen ist oder irgend einer andern Forderung zu genügen hat, etwa der, dass er sich von einem auf der rollenden Curve oder sonst in deren Ebene fest zu ihr liegenden Punkte um ein von der Rollbewegung in bestimmter Weise abhängiges Stück entfernt, aber so, dass seine Abstände von diesem Punkt und einem zweiten oder auch von zwei andern Punkten in einer gewissen Relation zu einander stehen u. s. f.

Im Folgenden sollen nun einige Fälle betrachtet werden, in denen die Eigenbewegung des beschreibenden Punktes nach der ersten Art stattfindet, derselbe sich also auf einer bestimmten Curve, die die Leitcurve heissen mag, nach einer gewissen Vorschrift zu bewegen hat. Wenn sich die Betrachtung auch ganz unabhängig von der Art der Bewegungsbedingung führen lässt, so wollen wir bei der zunächst vorzunehmenden allgemeinen Behandlung unserer Aufgabe doch sogleich davon ausgehen, dass eine Leitcurve gegeben sei, da im Rahmen der folgenden Betrachtung nur dieser Fall Berücksichtigung und Anwendung auf einige bestimmte Beispiele finden soll.

Es sei nun die Gleichung der Leitcurve:

$$\eta' = \chi(\xi') \quad (3)$$

ebenfalls wie (1) und (2) bezogen auf den Anfangszustand der Bewegung und dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem.

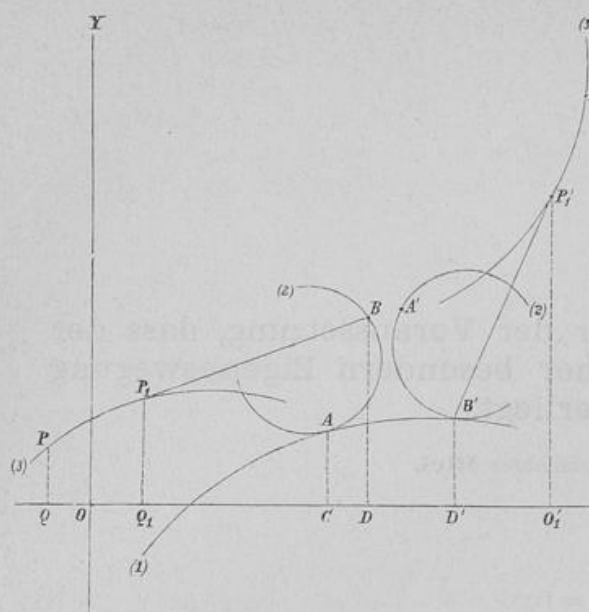


Fig. 1.

In Fig. 1 sei Curve (1) die feste Grundcurve ( $\eta = f(x)$ ), Curve (2) die rollende ( $r = \varphi(\xi)$ ) und Curve (3) die zur rollenden stets in unveränderlicher Lage bleibende Leitcurve ( $r' = \chi(\xi')$ ) des erzeugenden Punktes  $P$ . Die Abscisse  $OC$  des ursprünglichen Berührungspunktes  $A$  sei gleich  $a$ , sowie die ursprüngliche Abscisse  $OQ$  von  $P$  gleich  $b$ . Nach Abwälzung des Bogens  $AB$ , wobei  $B$  nach  $B'$  gelangt und mithin Bogen  $AB =$  Bogen  $AB'$  sein muss, wird Punkt  $P$  um eine gewisse der vorgeschriebenen Bewegungsbedingung entsprechende Strecke auf seiner Leitcurve fortgeschritten sein, sodass er sich, während seine ursprüngliche Lage  $P$  nach  $P'$  gelangt, nunmehr etwa in  $P_1'$  befindet.  $P_1'$  ist dann ein Punkt  $[x, y]$  der gesuchten Curve, deren zu ermittelnde Gleichung wir als

$$y = f(x) \quad (4)$$

annehmen.  $P_1'$  gehört aber offenbar auch gleichzeitig einer gewöhnlichen Rollcurve an, die in einem Punkte  $P_1 [\xi', r']$  beginnt, für welchen Bogen  $PP_1 =$  Bogen  $P'P_1'$  ist. Ganz analog verhält es sich mit allen andern Punkten der gesuchten Curve, d. h. diese setzt sich zusammen aus Punkten, welche einer Schaar von aufeinanderfolgenden gewöhnlichen Rollcurven angehören, von denen jede durch einen ihr entsprechenden Punkt  $[\xi', r']$  als Anfangspunkt spezialisiert ist, dessen Lage nach (3), sowie nach der für die Eigenbewegung des Punktes  $P$  gegebenen Bedingung bestimmt ist, da ja diese Eigenbewegung eine von der Rollbewegung abhängige sein soll und mithin  $\xi'$  und  $r'$  sich als Funktionen von  $x$  und  $y$  und schliesslich von  $x$  allein müssen darstellen lassen. Man gelangt somit einfach zur Gleichung der fraglichen Curve, wenn man in den Bedingungsgleichungen, welche für die zu Punkt  $P_1 [\xi', r']$  als ruhendem Erzeugungspunkt gehörige Rollcurve gewöhnlicher Art bestehen, zunächst  $\xi'$  und  $r'$  als Funktionen von  $x$  ausdrückt und alsdann  $x$  eliminiert.

Zu diesem Zwecke hat man, weil nach Abwälzung des Bogens  $AB'$  der Grundcurve, wobei Punkt  $B$  der rollenden Curve nach  $B'$  gelangt sein mag, Bogen  $AB =$  Bogen  $AB'$  ist, zunächst die Relation:

$$\int_a^{\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2} dx \quad (5)$$

woraus  $\xi$  als Funktion von  $x$  erhalten wird.

Ferner muss sein:

$$B'P_1' = BP_1$$

oder wenn man diese Längen durch die Coordinaten ihrer Endpunkte ausdrückt und beiderseits quadriert:

$$(x - x')^2 + (y - \eta)^2 = (\xi - \xi')^2 + (r - r')^2 \quad (6)$$

Setzt man hierin  $f(x)$  statt  $y$  und drückt  $\xi$  und  $\eta$  mittels (5) und (2) ebenfalls als Funktionen von  $x$  aus und setzt endlich noch für den alsdann rechts sich ergebenden Ausdruck abgekürzt  $(\psi(x))^2$ , so entsteht:

$$(x - \eta)^2 + (y - f(x))^2 = (\psi(x))^2 \quad (6a)$$

Durch diese Gleichung wird eine Schaar von Kreisen repräsentiert, deren Enveloppe bekanntlich die gesuchte Rollcurve ist. Um die Gleichung dieser Einhüllenden zu finden, hat man aber die bekannte weitere Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial [(x - \eta)^2 + (y - f(x))^2 - (\psi(x))^2]}{\partial x} = 0$$

oder entwickelt:

$$(x - \eta) + (y - f(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \psi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

wobei wol zu beachten ist, dass  $\xi'$  und  $\eta'$  beim Differenzieren als constante Grössen anzusehen sind. Durch Elimination von  $x$  aus (6a) und (7) würde man dann die Gleichung der Enveloppe, d. h. der Rollcurve gewöhnlicher Art erhalten, beschrieben von einem Punkte  $[\xi', \eta']$ , wenn derselbe seine Lage zur rollenden Curve unverändert beibehält. Um aber zur Gleichung der hier in Betracht kommenden Curve zu gelangen, sind in (6a) und (7) zunächst  $\xi'$  und  $\eta'$  als Funktionen von  $x$  auszudrücken und erst aus den so sich ergebenden Gleichungen ist dann  $x$  zu eliminieren.

Was nun die Bestimmung der Grössen  $\xi'$  und  $\eta'$  als Funktionen von  $x$  betrifft, so kann eine Beziehung zwischen  $\xi'$  und  $x$  entweder direkt gegeben sein oder es wird sich eine solche aus den vorliegenden Verhältnissen in Verbindung mit der für Punkt  $P$  gegebenen Bewegungsbedingung herleiten lassen. Soll z. B. der bei einem gewissen  $x$  von  $P$  durchlaufene Bogen  $PP_1$  einen von diesem  $x$  oder von einer Funktion dieses  $x$ , etwa dem jenem  $x$  entsprechenden Abwälzungsbogen  $s$  abhängigen Wert haben, welche Abhängigkeit durch das Funktionszeichen  $F$  angedeutet werden mag, so besteht die Gleichung:

$$PP_1 = F(x) \text{ resp. } = F(s)$$

oder, da Bogen  $PP_1 = \int_b^{\xi'} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta'}{d\xi'}\right)^2} d\xi'$ , auch:

$$\int_b^{\xi'} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta'}{d\xi'}\right)^2} d\xi' = F(x) \text{ resp. } = F(s) = F \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8)$$

eine Relation, aus der sich sofort  $\xi'$  und mit Hilfe von (3) auch  $\eta'$  durch  $x$  ausdrücken lässt, da  $F(x)$  resp.  $F(s)$  bekannte, weil gegebene Ausdrücke sind.

Nach dieser allgemeinen Behandlung des Problems mögen nun einige specielle Fälle der Betrachtung unterworfen werden.

I. Die Grundcurve sei der unterhalb der  $x$ -Axe liegende und dieselbe im Coordinatenanfang berührende Kreis:

$$x^2 + (y + r)^2 = r^2 \quad (9)$$

die rollende Curve ein Kreis oberhalb der  $x$ -Axe und dieselbe ebenfalls im Coordinatenanfang berührend mit der Gleichung:

$$\xi^2 + (\eta - \rho)^2 = \rho^2 \quad (10)$$

und die Leitcurve endlich ein zum rollenden concentrischer Kreis mit der Gleichung:

$$\xi'^2 + (\eta' - \rho)^2 = \rho'^2 \quad (11)$$

Punkt  $P$  liege im Anfangszustand der Bewegung auf der  $y$ -Axe und zwar um  $q - q' = \pm d$  vom Koordinatenanfang entfernt, d. h. um  $d$  oberhalb oder unterhalb der  $x$ -Axe, je nachdem  $q$  grösser oder kleiner als  $q'$  ist. Er bewege sich nun auf Kreis (11) so, dass er auf demselben, während Kreis (10) auf Kreis (9) rollt, gleichzeitig ein Bogenstück durchläuft, das zum abgewälzten Bogen stets in einem bestimmten constanten Verhältnisse steht, d. h. wenn  $s$  der abgewälzte,  $s'$  der gleichzeitig von  $P$  durchlaufene Bogen und  $m$  eine gewisse constante Verhältnisszahl ist, so soll sein:

$$s' = ms. \quad (12)$$

Man hat nun zunächst gemäss (5), da hier  $a = 0$  ist:

$$\int_0^{\xi} \frac{q d\xi}{\sqrt{q^2 - \xi^2}} = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

woraus:

$$q \operatorname{arc} \sin \frac{\xi}{q} = r \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r}$$

oder:

$$\xi = q \sin \left( \frac{r}{q} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r} \right)$$

und hiernach auf Grund von (10):

$$\eta = q - q \cos \left( \frac{r}{q} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r} \right)$$

oder auch, wenn abgekürzt  $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{r} = X$  gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q \sin \frac{r}{q} X \\ \eta &= q - q \cos \frac{r}{q} X \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ferner folgt aus (12), da Abscisse  $b$  von Punkt  $P$  hier  $= 0$  ist:

$$\int_0^{\xi'} \frac{q' d\xi'}{\sqrt{q'^2 - \xi'^2}} = m \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

woraus:

$$q' \operatorname{arc} \sin \frac{\xi'}{q'} = m r \operatorname{arc} \sin \frac{x}{r}$$

und hieraus schliesslich analog wie in (13)

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= q' \sin \frac{m r}{q'} X \\ \eta' &= q' - q' \cos \frac{m r}{q'} X \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Nach (6) hat man dann ferner:

$$(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2 = (q \sin \frac{r}{q} X - \xi')^2 + (q - q \cos \frac{r}{q} X - \eta')^2 \quad (15)$$

und hieraus durch Differentiation nach  $x$ , wobei, wie schon bemerkt,  $\xi'$  und  $\eta'$  als constant anzusehen sind, die der Gleichung (7) entsprechende Bedingungsgleichung:

$$-(x-\xi) + (y-f(\xi)) \frac{\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}} = r \left( \rho \sin \frac{r}{\rho} X - \xi' \right) \left( \cos \frac{r}{\rho} X \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-\xi^2}} + r \left( \rho - \rho \cos \frac{r}{\rho} - r' \right) \left( \sin \frac{r}{\rho} X \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-\xi^2}}$$

oder nach einer kleinen Umformung:

$$(x-\xi) \sqrt{1-\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} - (y-f(\xi)) \frac{\xi}{r} + \left( \rho \sin \frac{r}{\rho} X - \xi' \right) \cos \frac{r}{\rho} X + \left( \rho - \rho \cos \frac{r}{\rho} X - r' \right) \sin \frac{r}{\rho} X = 0 \quad (16)$$

Führt man nun in (15) und (16) die für  $\xi'$  und  $r'$  in (14) erhaltenen Werte ein, so ergibt sich durch Elimination von  $\xi$  die Gleichung unserer Rollcurve. Wie sich aber sofort zeigt, ist diese Elimination von  $\xi$  im Allgemeinen entweder gar nicht oder nur schwer durchführbar, wogegen sich in vielen Fällen, wie auch im vorliegenden, die Curve ohne Schwierigkeit durch zwei Gleichungen darstellen lässt, in denen sowohl  $x$  wie  $y$  je als eine Funktion von  $\xi$  allein erscheint, wie dies bei den cycloidischen Curven bekannt ist. — In unserm Falle ist es nun zunächst zweckmässig, statt  $\xi$  den dem abgewälzten Bogen entsprechenden Centriwinkel des Grundkreises einzuführen. Ist dieser Winkel  $\varphi$ , so ist offenbar:

$$\frac{\xi}{r} = \sin \varphi$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} = \cos \varphi$$

$$\text{und } \arcsin \frac{\xi}{r} = X = \varphi$$

Hierdurch geht (16), wenn  $x-\xi$  und  $y-f(\xi)$  der Einfachheit halber einstweilen noch so beibehält, über in:

$$(x-\xi) \cos \varphi - (y-f(\xi)) \sin \varphi + \left( \rho \sin \frac{r}{\rho} \varphi - \xi' \right) \cos \frac{r}{\rho} \varphi + \left( \rho - \rho \cos \frac{r}{\rho} \varphi - r' \right) \sin \frac{r}{\rho} \varphi = 0$$

oder:

$$(x-\xi) \cos \varphi - (y-f(\xi)) \sin \varphi = - \left( \rho \sin \frac{r}{\rho} \varphi - \xi' \right) \cos \frac{r}{\rho} \varphi - \left( \rho - \rho \cos \frac{r}{\rho} \varphi - r' \right) \sin \frac{r}{\rho} \varphi \quad (16\alpha)$$

Quadriert man (16 $\alpha$ ) und subtrahiert von (15), nachdem darin selbstverständlich  $X$  durch  $\varphi$  ersetzt ist, so ergibt sich leicht:

$$(x-\xi) \sin \varphi + (y-f(\xi)) \cos \varphi = \left( \rho \sin \frac{r}{\rho} \varphi - \xi' \right) \sin \frac{r}{\rho} \varphi - \left( \rho - \rho \cos \frac{r}{\rho} \varphi - r' \right) \cos \frac{r}{\rho} \varphi \quad (16\beta)$$

Wenn man jetzt in (16 $\alpha$ ) und (16 $\beta$ )  $\xi'$  und  $r'$  durch ihre Werte aus (14) ersetzt und möglichst reduciert, so gehen die beiden Gleichungen über in:

$$(x-\xi) \cos \varphi - (y-f(\xi)) \sin \varphi = - \rho' \sin \left( \frac{r}{\rho} - \frac{m r}{\rho'} \right) \varphi$$

und

$$(x-\xi) \sin \varphi + (y-f(\xi)) \cos \varphi = \rho - \rho' \cos \left( \frac{r}{\rho} - \frac{m r}{\rho'} \right) \varphi$$

Multipliziert man nun das eine Mal die erste Gleichung mit  $\cos \varphi$ , die zweite mit  $\sin \varphi$  und addiert, das andere Mal die erste Gleichung mit  $\sin \varphi$ , die zweite mit  $\cos \varphi$  und subtrahiert, so ergibt sich schliesslich, wenn man jetzt auch für  $\xi$  und  $f(\xi)$  die ihnen zukommenden Werte,

nämlich  $\xi = r \sin \varphi$  und  $f(\xi) = \sqrt{r^2-\xi^2} = r \sqrt{1-\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} = r \cos \varphi$ , einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r + \varrho) \sin \varphi - \varrho' \sin \left( \frac{r}{\varrho} - \frac{m r}{\varrho'} + 1 \right) \varphi \\ y &= (r + \varrho) \cos \varphi - \varrho' \cos \left( \frac{r}{\varrho} - \frac{m r}{\varrho'} + 1 \right) \varphi - r \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

als Gleichungen der gesuchten epicycloidischen Curve, deren zweite sich noch vereinfacht, wenn der Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Grundkreises verlegt wird, indem alsdann in dem Wert für  $y$  das Glied  $-r$  fortfällt.

Nimmt man in (17)  $r$  negativ, so bedeutet dies, dass der Grundkreis oberhalb der  $x$ -Achse liegt, da seine Gleichung (9) alsdann lautet:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

und wenn man ferner beachtet, dass in diesem Falle der Abwälzungswinkel im entgegengesetzten Sinne beschrieben wird,  $\varphi$  also ebenfalls negativ zu nehmen ist, so gehen die Gleichungen (17) über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r - \varrho) \sin \varphi - \varrho' \sin \left( \frac{r}{\varrho} - \frac{m r}{\varrho'} - 1 \right) \varphi \\ y &= (r - \varrho) \cos \varphi - \varrho' \cos \left( \frac{r}{\varrho} - \frac{m r}{\varrho'} - 1 \right) \varphi + r \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

welches die Gleichungen der entstehenden hypocycloidischen Curve sind, deren zweite sich ebenfalls wieder durch Wegfall des Gliedes  $+r$  vereinfacht, wenn der Anfang der Coordinaten in den Mittelpunkt des Grundkreises zu liegen kommt.

Aus (17) und (18) lässt sich nun eine grössere Anzahl spezieller Fälle ableiten, wenn man dem  $m$  bestimmte Werte erteilt, die positiv oder negativ sein können, je nachdem Punkt  $P$  von seiner ursprünglichen Lage aus in der einen oder andern (entgegengesetzten) Richtung auf dem Leitkreis fortschreiten soll, oder spezieller ausgedrückt: je nachdem das nach einer gewissen Wälzung von  $P$  durchlaufene Bogenstück gleiches oder entgegengesetztes Zeichen mit dem abgewälzten Bogen der rollenden Curve besitzt. In unserm Falle wird also für positives  $m$  Punkt  $P$  auf dem Leitkreis in der nämlichen Richtung fortschreiten, wie der Berührungspunkt auf dem rollenden Kreise, für negatives  $m$  im entgegengesetzten Sinne.

1) Für  $m = 0$  gehen (17) und (18) in die bekannten Gleichungen der gestreckten oder verschlungenen Epicycloide resp. Hypocycloide über, je nachdem  $\varrho'$  kleiner oder grösser als  $\varrho$  ist, wie es sein muss; denn  $m = 0$  ist offenbar die Bedingung dafür, dass  $P$  keine Eigenbewegung besitzt und demgemäss jene gewöhnlichen Rollcurven erzeugen muss.

2) Für  $m = +\frac{\varrho'}{\varrho}$  ergibt sich aus (17):

$$x^2 + (y + r)^2 = (r + \varrho - \varrho')^2 = (r \pm d)^2 \quad (19)$$

und aus (18):

$$x^2 + (y - r)^2 = (r - \varrho + \varrho')^2 = (r \mp d)^2 \quad (20)$$

worin  $\varrho - \varrho' = \pm d$ . Die entstehenden Curven sind also in jedem der beiden Fälle zum Grundkreis concentrische Kreise, was auch sofort durch die Anschauung klar wird. Denn da für jene Bedingung Punkt  $P$  jedesmal den dem Abwälzungswinkel des rollenden Kreises entsprechenden Bogen des Leitkreises durchläuft, so bleibt er stets auf der Centrallinie von Roll- und Grundkreis und zwar im steten Abstand  $r \pm d$  vom Mittelpunkt des letzteren, muss mithin einen zum Grundkreis concentrischen Kreis beschreiben.

3) Für  $m = -\frac{\rho'}{\rho}$  und  $r = \frac{1}{2}\rho$  entsteht aus (17):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{2}\rho \sin \varphi - \rho' \sin 2\varphi \\ y &= \frac{3}{2}\rho \cos \varphi - \rho' \cos 2\varphi - \frac{\rho}{2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und wenn hier noch die weitere Bedingung erfüllt wird, dass  $\frac{3}{2}\rho = 2\rho'$  d. h. der Radius des Leitkreises gleich der halben Centrallinie von rollendem und Grundkreis ist, so kann man statt (21) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\rho' \sin \varphi - \rho' \sin 2\varphi \\ y &= 2\rho' \cos \varphi - \rho' \cos 2\varphi - \frac{2}{3}\rho' \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Curve ist mithin in dem Falle stets die bekannte Cardioide, die auch entstehen würde, wenn der Leitkreis selbst auf einem gleichen zum ursprünglichen Grundkreis concentrischen bei unveränderter Lage des erzeugenden Punktes sich wälzen würde. S. Fig. 2.

3a) Jene Werte  $m = -\frac{\rho'}{\rho}$  und  $r = \frac{1}{2}\rho$  in (18) eingesetzt, liefern:

$$x^2 + (y - r + \rho')^2 = r^2 \quad (23)$$

also einen dem Grundkreis gleichen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der  $y$ -Axe im Abstand  $r - \rho'$  vom Anfang liegt. (Fig. 3, worin Kreis um  $M''$  der erzeugte ist). Wie ersichtlich, ist die Grösse des entstehenden Kreises von der Grösse des Leitkreises durchaus unabhängig; die Grösse des letzteren bedingt lediglich die Lage des erstern und zwar liegt der Mittelpunkt für alle möglichen Werte von  $\rho'$ , wie leicht zu erkennen, auf der  $y$ -Axe zwischen den Grenzen  $+r$  und  $-\infty$ , an welchen er selbst liegt, wenn  $\rho' = 0$  oder  $=\infty$  d. h. wenn der Leitkreis auf einen Punkt, den Mittelpunkt des rollenden Kreises, zusammenschumpft oder unendlich gross wird. In dem speziellen Falle, wo  $\rho' = r$ , ergibt sich:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (23\alpha)$$

der entstehende Kreis hat also seinen Mittelpunkt im Koordinatenanfang. Vgl. auch (45). — Da hier  $r < \rho$ , so findet die hypocyloidische Wälzung nicht so statt, wie dies für  $r > \rho$  der Fall ist, sondern in der Weise, dass sich der grössere rollende Kreis mit seiner Innenseite auf der Aussenseite des Grundkreises wälzt.

4) Für die allgemeine Beziehung:

$$\frac{r}{\rho} - \frac{m r}{\rho'} = -1 \quad (24)$$

ergibt sich aus (17):

$$x^2 + (y + r + \rho')^2 = (r + \rho)^2 \quad (25)$$

Es ist also die entstehende Curve ein Kreis, dessen Radius gleich der Centrallinie von rollendem und Grundkreis ist. Wie beliebig man demnach die drei Kreise auch wählen mag, stets wird nach (24) dem Punkte  $P$  eine solche gleichförmige Eigenbewegung erteilt werden können, dass die von

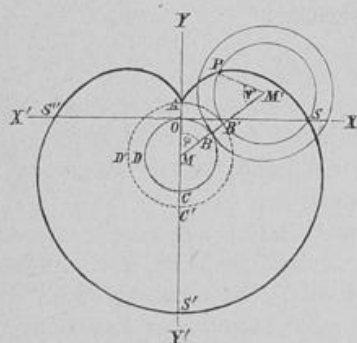


Fig. 2.

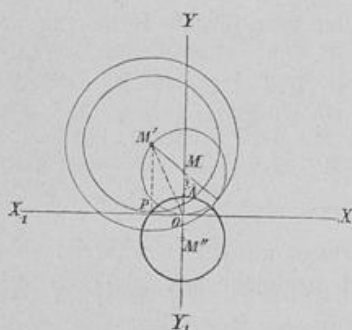


Fig. 3.

ihm beschriebene Curve ein Kreis wird. Aus (24) ist auch weiter ersichtlich, dass dies nur für positive  $m$  eintreten kann. Bemerkenswert ist auch hier die Unabhängigkeit der Grösse des erzeugten Kreises von der Grösse des Leitkreises, durch welche nur die Lage des erstern bedingt wird.

4 $\alpha$ ) Ganz Analoges ergibt sich aus (18); wenn nämlich hier

$$\frac{r}{\varrho} - \frac{mr}{\varrho'} = +1 \quad (26)$$

so ist die erzeugte Curve ebenfalls ein Kreis und zwar mit der Gleichung:

$$x^2 + (y - r + \varrho')^2 = (r - \varrho)^2 \quad (27)$$

wobei Aehnliches zu bemerken ist, wie im vorhergehenden Falle.

5) Besteht endlich noch für (17) die Beziehung:

$$\frac{r}{\varrho} - \frac{mr}{\varrho'} = -2 \quad (28)$$

so gehen jene Gleichungen über in:

$$\frac{x^2}{(r + \varrho + \varrho')^2} + \frac{(y + r)^2}{(r + \varrho - \varrho')^2} = 1 \quad (29)$$

die erzeugte Curve ist also in dem Falle eine Ellipse mit den Halbaxen  $r + \varrho + \varrho'$  und  $r + \varrho - \varrho'$ , deren Mittelpunkt mit dem des Grundkreises zusammenfällt.

5 $\alpha$ ) Auch hier findet bei (18) wieder ganz Analoges statt und zwar für die Beziehung:

$$\frac{r}{\varrho} - \frac{mr}{\varrho'} = +2 \quad (30)$$

indem sich hierfür als erzeugte Curve ebenfalls eine Ellipse ergibt mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{(r - \varrho - \varrho')^2} + \frac{(y - r)^2}{(r - \varrho + \varrho')^2} = 1 \quad (31)$$

der Mittelpunkt derselben ist hier ebenfalls mit dem des Grundkreises identisch; während aber bei (29) die grosse Axe der Ellipse zur Abscissenaxe parallel ist und die kleine mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, so ist hier das Umgekehrte der Fall.

Diese Ergebnisse in 5) und 5 $\alpha$ ) sind in sofern bemerkenswert, als sie eine Verallgemeinerung des bei den gewöhnlichen Hypocycloiden, sowol der gestreckten wie der verschlungenen, eintretenden Falles enthalten, wo bekanntlich bei  $\varrho = \frac{1}{2}r$  für jeden beliebigen Wert von  $\varrho'$  die erzeugte Curve eine Ellipse ist. Unter den oben angegebenen Bedingungen wird dies auch auf die epicycloidische Wälzung ausgedehnt. — Für  $m = 0$  ergibt sich in der That aus (30)  $\varrho = \frac{1}{2}r$  als Bedingung bei einer hypocycloidischen Wälzung dafür, dass die entstehende Curve eine Ellipse ist. Aus der für das epicycloidische Rollen bestehenden Bedingungsgleichung (28) folgt bei  $m = 0$ :  $\varrho = -\frac{1}{2}r$ , was offenbar nur dann einen Sinn hat, wenn  $r$  negativ genommen wird, der Grundkreis also oberhalb und mit dem rollenden auf derselben Seite der  $x$ -Achse liegt, und die Wälzung demnach eine hypercycloidische ist, genau wie im andern Falle. Mit andern Worten heisst das, dass für  $m = 0$  bei einem wirklich epicycloidischen Rollen die entstehende Curve niemals eine Ellipse sein kann.

Lässt man in (17) und (18)  $\varrho' = \varrho$  werden, so ist der rollende Kreis selbst die Leitcurve und jene Gleichungen nehmen dann die speziellere Form an:



$$\left. \begin{aligned} x &= (r + \varrho) \sin \varphi - \varrho \sin \frac{r(1-m) + \varrho}{\varrho} \varphi \\ y &= (r + \varrho) \cos \varphi - \varrho \cos \frac{r(1-m) + \varrho}{\varrho} \varphi - r \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r - \varrho) \sin \varphi - \varrho \sin \frac{r(1-m) - \varrho}{\varrho} \varphi \\ y &= -(r - \varrho) \cos \varphi - \varrho \cos \frac{r(1-m) - \varrho}{\varrho} \varphi + r \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Hier ist auch wieder eine Anzahl gewissen Werten von  $m$ ,  $r$  und  $\varrho$  entsprechender spezieller Fälle von Interesse.

1) Für  $m = 0$  gehen aus (32) und (33) sofort die bekannten Gleichungen der gewöhnlichen Epicycloide und Hypocycloide hervor, wie es sein muss.

2) Für  $m = +1$  gehen sowol (32) wie auch (33) über in die Gleichung des Grundkreises; dieser ist also die erzeugte Curve selbst.  $P$  bleibt nämlich offenbar, da er grade den jedesmaligen abgewälzten Bogen durchläuft, stets im Berührungspunkte und mithin auf dem Grundkreise; dieser ist demnach selbst die Bahn des Punktes. Dasselbe folgt auch aus (19) oder (20), da für diesen Fall dort  $d = 0$  werden muss.

3) Für  $m = +2$  und  $\varrho = r$  ergibt sich aus (32):

$$x^2 + (y + 2r)^2 = (2r)^2 \quad (34)$$

d. h. die entstehende Curve ist ein Kreis vom doppelten Radius des Grundkreises, dessen Centrum auf der Ordinatenaxe liegt im Abstände  $-2r$  vom Coordinatenanfang und der in diesem Punkte sowol die  $x$ -Axe wie auch den Grundkreis berührt. Es folgt dies auch aus dem allgemeinen Falle (25), wenn dort  $\varrho' = \varrho = r$  wird; denn hierfür wird in der That in (24):  $\frac{r}{\varrho} - \frac{mr}{\varrho'} = 1 - 2 = -1$ .

3 $\alpha$ ) Aus (33) entsteht für jene Werte  $m = +2$  und  $\varrho = r$ :

$$x^2 + (y - r)^2 = \varrho^2 = r^2 \quad (34\alpha)$$

also die Gleichung des rollenden resp. des Grundkreises selbst. Ein Rollen ist eigentlich in diesem Falle nicht möglich, jedoch muss man sich denken, dass Kreis um  $\varrho$  eine unendlich kleine Bewegung vollzieht.

4) Für  $m = -1$  und  $\varrho = 2r$  resultiert aus (32):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \varrho \sin \varphi - \varrho \sin 2\varphi \\ y &= \frac{3}{2} \varrho \cos \varphi - \varrho \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \varrho \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

was sich auch aus (21) ergibt, wenn dort  $\varrho' = \varrho$  wird. Führt man  $r$  statt  $\varrho$  in (35) ein, so wird auch, da  $\varrho = 2r$ , also  $\frac{3}{2} \varrho = 3r$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= 3r \sin \varphi - 2r \sin 2\varphi \\ y &= 3r \cos \varphi - 2r \cos 2\varphi - r \end{aligned} \right\} \quad (35\alpha)$$

oder wenn man den Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Grundkreises verlegt:

$$\left. \begin{aligned} x &= 3r \sin \varphi - 2r \sin 2\varphi \\ y &= 3r \cos \varphi - 2r \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (35\beta)$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus (35 $\beta$ ) erhält man nach einfacher Entwicklung als Parallel-coordinatengleichung in  $x$  und  $y$ :

$$x^4 - (17r^2 - 2y^2)x^2 + y^4 - 17r^2y^2 + 36r^3y - 20r^4 = 0$$

Die entstehende Rollcurve ist also eine Linie der 4. Ordnung und die Discussion obiger Gleichungen lässt leicht das Nähere über Gestalt und Verlauf der Curve erkennen. Behält man die ursprüngliche  $x$ -Achse bei und stellt die Betrachtungen an Gleichungen (35 $\alpha$ ) an, so ergibt sich folgendes: Die Curve beginnt im Coordinatenanfang  $O$  (s. Fig. 4), verläuft zunächst auf der negativen Seite der Ordinatenaxe, da in unserer Gleichung für Werte von  $\varphi$  zwischen  $0$  und  $\arccos \frac{3}{4} x$  negativ ausfällt, und wendet dieser Axe ihre concave Seite zu. Darauf durchschneidet sie dieselbe in einem Punkte  $A$ , für welche  $\varphi = \arccos \frac{3}{4}$  und  $y = r$  ist, erreicht auf der positiven Seite, und zwar, wie aus

$$\frac{dy}{d\varphi} = -3r \sin \varphi + 4r \sin 2\varphi = 0 \quad (37)$$

hervorgeht, für  $\varphi = \arccos \frac{3}{4}$  oder  $y = \frac{3}{4}r$ , ihren höchsten Punkt  $D$ , wendet sich von demselben aus weiter nach rechts

und abwärts, durchschneidet die  $x$ -Achse in einem Punkte  $B$ , für den  $\varphi = \arccos -\frac{1}{4}$  und  $x = r\sqrt{15}$  ist, erreicht einen äussersten Punkt  $J$  rechts und zwar, wie sich aus

$$\frac{dx}{d\varphi} = 3r \cos \varphi - 4r \cos 2\varphi = 0 \quad (37\alpha)$$

ergiebt, bei  $\varphi = \arccos \frac{3 - \sqrt{137}}{16}$  und schneidet endlich die  $y$ -Achse in einem tiefsten Punkte  $C$ , dessen  $\varphi = \pi$  und dessen  $y = -6r$  ist. Der übrige Teil der Curve ist dem betrachteten völlig congruent und hat mit diesem eine ganz symmetrische Lage zur  $y$ -Achse. Die Curve besitzt hiernach in  $A$  einen Doppelpunkt; in der That ergibt sich  $y = r$  auch für  $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{3}{4}$ . — Verlegt man den Anfang der Coordinaten in diesen Punkt  $A$ , so lauten die Gleichungen der Curven:

$$\begin{aligned} x &= 3r \sin \varphi - 2r \sin 2\varphi \\ y &= 3r \cos \varphi - 2r \cos 2\varphi - 2r \end{aligned}$$

woraus nach einfacher Umformung entsteht:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi (3 - 4 \cos \varphi) \\ y &= r \cos \varphi (3 - 4 \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Hieraus erhält man, wenn man quadriert und addiert:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 (3 - 4 \cos \varphi)^2 \\ \text{oder } \sqrt{x^2 + y^2} &= \pm r (3 - 4 \cos \varphi) \end{aligned}$$

oder wenn  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  gesetzt wird, wo  $r$  den von  $A$  aus nach dem betreffenden Curvenpunkte gezogenen Radiusvector bedeutet:

$$r = \pm r (3 - 4 \cos \varphi) \quad (39)$$

Aus (37) folgt ferner durch Division:

$$\frac{y}{x} = \cotg \varphi \quad (40)$$

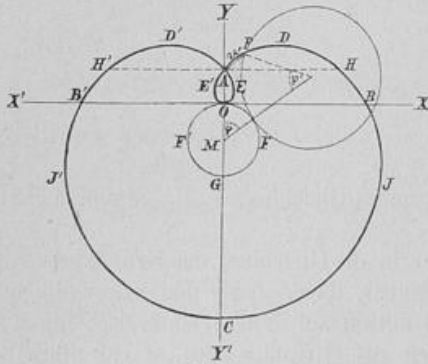


Fig. 4.

und wenn  $\vartheta$  der vom Radiusvector mit der negativen  $y$ -Axe gebildete und in der Uhrzeiger-  
richtung gezählte Polarwinkel ist, auch:

$$\frac{y}{x} = \cotg \vartheta \quad (41)$$

woraus in Verbindung mit (40) sowol:

$$\varphi = \vartheta \quad (42)$$

als auch:

$$\varphi = \vartheta - \pi = \vartheta' \quad (42\alpha)$$

wobei  $\vartheta'$  offenbar dann den vom Radiusvector mit der positiven  $y$ -Axe gebildeten und im selben  
Sinne wie  $\vartheta$  gezählten Polarwinkel bedeutet. Diese Beziehungen (42) und (42 $\alpha$ ) heissen in Worten  
ausgedrückt:

Der von  $A$  aus gezogene Radiusvector der Curve ist stets dem entsprechenden Radius  
des Grundkreises parallel und zwar demselben entweder entgegengesetzt oder gleich gerichtet.

Setzt man jetzt in (39)  $\vartheta$  für  $\varphi$  und lässt das negative Vorzeichen gelten, damit, wie  
es sein muss, der Radiusvector positiv ausfällt, so erhält man:

$$r = r(4 \cos \vartheta - 3) \quad (43)$$

als Polargleichung des innern kleinern Curventeils. Desgleichen liefert die Einsetzung von  $\vartheta'$  für  
 $\varphi$ , wobei das positive Zeichen Geltung haben muss:

$$r = -r(4 \cos \vartheta' - 3) \quad (43\alpha)$$

als Polargleichung des äusseren Curventeils.

Indessen ist die Curve auch schon durch (43) allein dargestellt, wenn man beachtet, dass  
negative Werte des Radiusvector nicht auf dem beweglichen Schenkel des Winkels  $\vartheta$  selbst, son-  
dern auf dessen Rückwärtsverlängerung abzutragen sind. — Da sowol  $\sphericalangle YAP$  oder  $\vartheta'$  als auch  
 $\sphericalangle P'MM$  oder  $\varphi'$  gleich  $\varphi$ , so lässt sich hierauf, wie leicht ersichtlich, eine einfache Construction  
der Curve gründen.

Ist  $r_1$  irgend ein Radiusvector des innern,  $r_0$  ein mit diesem zusammenfallender des äusseren  
Curventeils, so ist:

$$r_1 = r(4 \cos \vartheta - 3)$$

sowie, da hier  $\vartheta' = \pi + \vartheta$  sein muss:

$$r_0 = r(4 \cos \vartheta + 3)$$

mithin, wenn man subtrahiert:

$$r_0 - r_1 = 6r$$

d. h. die Differenz je zweier zusammenfallender Radienvectoren des äussern und innern Curventeils  
ist constant =  $6r$ .

Ferner hat man für einen Radiusvector  $r_0$  des äusseren Curventeils, z. B.  $AH$ , der den  
innern Teil nicht trifft, sowie für dessen Rückwärtsverlängerung  $AH'$  oder  $r_0'$  resp.:

$$r_0 = -r(4 \cos \vartheta' - 3)$$

$$\text{und } r_0' = r(4 \cos \vartheta' + 3)$$

$$\text{mithin } r_0 + r_0' = 6r$$

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich sonach:

Jede durch den Doppelpunkt  $A$  der Curve gezogene Gerade schneidet dieselbe immer in zwei  
Punkten, die entweder auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von  $A$  liegen und deren

Entfernung von einander  $6r$  beträgt. — Einen Spezialfall hiervon bilden die in  $A$  gelegten Tangenten, deren Länge von  $A$  aus bis zu ihrem Durchschnitt mit der Curve also gleich  $6r$  sein muss.

Für den Neigungswinkel  $\nu$ , den die Tangente an irgend einem Curvenpunkt mit der  $x$ -Axe bildet, ergibt sich aus (35 $\alpha$  oder  $\beta$ )

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{dy}{dx} = -\frac{3 \sin \varphi - 4 \sin 2\varphi}{3 \cos \varphi - 4 \cos 2\varphi}$$

Für  $\varphi = 0$  oder  $2\pi$  wird  $\operatorname{tg} \nu = 0$ , d. h. die durch den Anfang  $O$  gehende Tangente der Curve fällt mit der  $x$ -Axe zusammen oder die Curve tangiert die  $x$ -Axe im Coordinatenanfang  $O$ .

Für  $\varphi = \pi$  d. h. für den tiefsten Curvenpunkt  $C$  wird ebenfalls  $\operatorname{tg} \nu = 0$ : die Tangente ist also in diesem Punkte parallel zur  $x$ -Axe. Dasselbe ist der Fall für die höchsten Curvenpunkte  $D$  und  $D'$ , da diesen nach (37)  $\cos \varphi = \frac{3}{4}$  entspricht, wofür ebenfalls  $\operatorname{tg} \nu = 0$  wird. In den äussersten Punkten  $E$  und  $E'$ , für welche nach (37 $\alpha$ )  $3 \cos \varphi - 4 \cos 2\varphi = 0$ , ist  $\operatorname{tg} \nu = \pm \infty$ , die Tangenten hier also senkrecht zur  $x$ -Axe.

Für Punkt  $A$ , welchem  $\cos \varphi = \frac{3}{4}$  entspricht, ergibt sich  $\operatorname{tg} \nu = \pm \frac{3}{4} \sqrt{7}$  und für den von beiden Tangenten eingeschlossenen Winkel  $\alpha$ , unter dem sich also auch die Curve in  $A$  schneidet, erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{7}$$

$$\text{oder } \alpha = 82^\circ 49' 9,268''$$

Um den Bogen auszudrücken, wird man entweder die Gleichungen (35) oder Gleichung (43) benutzen. So ergibt sich leicht entweder

$$ds = r \sqrt{25 - 24 \cos \varphi} d\varphi$$

oder

$$ds = r \sqrt{25 - 24 \cos \vartheta} d\vartheta$$

Die Integrale dieser Differentialausdrücke sind nur näherungsweise bestimmbar, die Curve ist also nicht rectificabel.

Ist  $F_i$  der Inhalt des vom innern Curventheil eingeschlossenen Flächenstücks, sowie  $F_o$  der Inhalt des vom äussern Curventheil begrenzten, so ist nach (43) und (43 $\alpha$ ) resp.:

$$F_i = \int_{\arccos \frac{3}{4}}^{\arccos \frac{3}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = \int_0^{\arccos \frac{3}{4}} r^2 d\vartheta = r^2 (17 \arccos \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \sqrt{7})$$

$$F_o = \int_{\arccos \frac{3}{4}}^{\arccos \frac{3}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\vartheta' = \int_{\arccos \frac{3}{4}}^{\pi} r^2 d\vartheta' = r^2 (17\pi - \arccos \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \sqrt{7})$$

mithin:

$$F_i + F_o = 17 r^2 \pi$$

oder

$$F_i + F_o - r^2 \pi = 16 r^2 \pi$$

d. h. das von der Curve und dem Grundkreise oder auch von der Linie  $ABCB'AE OF'GFOE'A$  begrenzte Flächenstück, dessen äussere Enden gewissermassen übereinanderlagern, besitzt den 16fachen Inhalt des Grundkreises.

Für den Krümmungshalbmesser  $R$  erhält man nach der Formel

$$R = \mp \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''}$$

worin  $r'$  und  $r''$  resp. den ersten und zweiten Differentialsquotienten bedeuten sollen, aus (43):

$$R = \frac{(25 - 24 \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}{41 - 36 \cos \vartheta} r$$

Aus den Gleichungen (35) ergibt sich genau derselbe Ausdruck:

$$R = \frac{(25 - 24 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}{41 - 36 \cos \varphi} r$$

wie es wegen  $\varphi = \vartheta$  sein muss.

Als spezielle Werte von  $R$  sind bemerkenswerth:

$$\begin{aligned} \text{Für } \vartheta = 0 \text{ oder } 2\pi \text{ d. i. für Punkt } O \text{ ist: } R &= \frac{1}{3} r \\ \text{„ } \vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2} \text{ d. i. „ „ Hoder } H': R &= \frac{125}{43} r \\ \text{„ } \vartheta = \pi \text{ d. i. „ „ } C: R &= \frac{43}{11} r \\ \text{„ } \vartheta = \arccos \pm \frac{3}{4} \text{ d. i. „ „ } A: R &= \frac{7\sqrt{7}}{5} r \end{aligned}$$

4  $\alpha$ ) Obige Werte  $m = -1$  und  $\varrho = 2r$  in (33) substituiert liefern:

$$x^2 + (y + r)^2 = r^2 \quad (45)$$

also einen Kreis vom Radius des Grundkreises, der unterhalb der  $x$ -Axe liegend diese und den Grundkreis im Anfangspunkt der Coordinaten berührt. Dasselbe ergibt sich aus (27 oder (23), wenn dort  $\varrho' = \varrho = 2r$  wird. Vergl. Fig. 3 und das dort Gesagte.

5) Endlich werde in (33)  $m = -1$  und  $\varrho = \frac{r}{2}$ ; dann entsteht, wenn man zugleich den Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Grundkreises verlegt:

$$\begin{cases} x = \varrho \sin \varphi - \varrho \sin 3\varphi \\ y = -\varrho \cos \varphi - \varrho \cos 3\varphi \end{cases} \quad (46)$$

oder auch:

$$\begin{cases} x = -2\varrho \sin \varphi \sin 2\varphi \\ y = -2\varrho \cos \varphi \cos 2\varphi \end{cases} \quad (46 \alpha)$$

Durch Elimination von  $\varphi$  ergibt sich daraus als Gleichung in  $x$  und  $y$ :

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\varrho^2 (x^2 - y^2)^2 \quad (47)$$

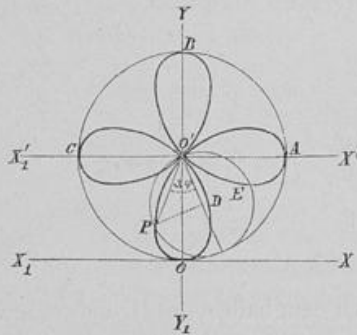


Fig. 5.

Ueber Gestalt und Verlauf der entstehenden Curve giebt am einfachsten Gleichung (46  $\alpha$ ) Aufschluss. Aus derselben ergibt sich, dass die Curve die Gestalt der Fig. 5 hat und dass sie entsteht in der Reihenfolge  $OPO'AO'B'O'CO'O$ . Sie ist, wie aus (47) ersichtlich, eine Linie der sechsten Ordnung und in der That erkennt man sofort, dass zur  $x$ -Axe oder zur  $y$ -Axe in gewissen Abständen — deren Werte beiläufig zwischen  $+\frac{1}{2}r$  und  $-\frac{1}{2}r$  liegen — gezogene Parallele die Curve in sechs Punkten schneiden müssen.

Aus (46  $\alpha$ ) ergibt sich auch wieder eine einfache Polargleichung dieser Curve. Es ist offenbar:

$$x^2 + y^2 = 4\varrho \cos^2 2\varphi$$

oder

$$r = 2\varrho \cos 2\varphi$$

Da ferner:

$$\frac{y}{x} = \cotg \varphi$$

und, wenn Polarwinkel  $\vartheta$  von der negativen  $y$ -Axe und in der Uhrzeigerichtung gezählt wird, auch:

$$\frac{y}{x} = \cotg \vartheta$$

so folgt:

$$\varphi = \vartheta \quad (48)$$

mithin:

$$r = 2\rho \cos 2\vartheta \quad (49)$$

die Polargleichung der Curve. Dieselbe gilt sowohl für die Curve als Ganzes, wobei negative Werte von  $r$  auf der Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels liegen, als auch für jeden einzeln der vier blattartigen und, wie sich leicht zeigen lässt, untereinander congruenten Curventeile allein, wobei  $\vartheta$  stets von der Längsaxe des Blattes, durch welche dasselbe in zwei congruente Hälften geteilt wird, zu zählen ist.

Für die Neigung der Tangente ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi + 3 \sin 3\varphi}{\cos \varphi - 3 \cos 3\varphi} = \frac{\sin \varphi (5 - 6 \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi (5 - 6 \cos^2 \varphi)}$$

Hiernach ist für  $\varphi = 0$  oder  $\pi$  d. h. für die Punkte  $O$  und  $B$

$$\operatorname{tg} \nu = \pm 0$$

mithin die Tangente in jenen Punkten parallel zur  $x$ -Axe und für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  d. h. für die Punkte  $A$  und  $C$

$$\operatorname{tg} \nu = \pm \infty$$

also die Tangente in diesen Punkten senkrecht zur  $x$ -Axe. Da nun ein Gleiches in jenen vier Punkten auch in Bezug auf den Grundkreis stattfindet, so berühren sich Curve und Grundkreis in jenen Punkten. Punkt  $O'$  ist ein vierfacher Punkt und eine ähnliche einfache Betrachtung zeigt, dass je zwei gegenüberliegende Curvenzweige sich in demselben tangieren.

Für das Bogendifferential erhält man aus (49):

$$ds = \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\vartheta} d\vartheta$$

ein Ausdruck, welcher nur annähernd genau zu integrieren ist.

Für den Flächeninhalt  $f$  einer Blattfläche hat man:

$$f = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \rho^2 \pi = \frac{1}{8} r^2 \pi$$

mithin ergibt sich für den Inhalt  $F$  der ganzen Curvenfläche:

$$F = 4f = 2\rho^2 \pi = \frac{1}{2} r^2 \pi$$

d. h. derselbe ist gleich dem doppelten Inhalt des rollenden und gleich dem halben des Grundkreises.

Nun ist:

$$\text{Flächenquadrant } AO'O = \frac{1}{4} r^2 \pi = 2f$$

demnach:

$$\text{Quadrant } AO'O - 2 \cdot \frac{1}{2} f = f$$

d. h. das von einem Bogenquadranten und den zugehörigen Curvenästen begrenzte dreispitzige Flächenstück

$$AODO'EA = f = \frac{1}{8} r^2 \pi$$

Hieraus geht hervor, dass die Curve die Fläche des Grundkreises in acht gleiche Teile teilt, von denen je vier einander congruent sind.

Für den Krümmungshalbmesser hat man:

$$R = \mp \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy^2 - dy dx^2}$$

$$= \mp \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d\varphi^2} \frac{dx}{d\varphi} - \frac{d^2 x}{d\varphi^2} \frac{dy}{d\varphi}}$$

$$\frac{(dx)^3}{(d\varphi)^3}$$

wonach sich aus (46) ergibt:

$$R = \frac{(10 - 6 \cos 4\varphi)^{\frac{3}{2}}}{26 - 6 \cos 4\varphi} \varrho$$

$$= \frac{2(1 + 3 \sin^2 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3 \sin^2 2\varphi} \varrho$$

$$= \frac{(1 + 3 \sin^2 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3 \sin^2 2\varphi} r$$

Aus (49) erhält man:

$$R = \frac{2(1 + 3 \sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3 \sin^2 2\vartheta} \varrho$$

$$= \frac{(1 + 3 \sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3 \sin^2 2\vartheta} r$$

In beiden Fällen stimmen die Ausdrücke in der Form genau überein, wie es zufolge (48) auch sein muss, sodass man nach dieser Beziehung auch den einen aus dem andern herleiten kann. — Spezielle Werte von  $R$  sind:

- 1) für  $\varphi = \vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  d. h. für die Punkte  $O, A, B$  und  $C$ :  $R = \frac{2}{5} \varrho = \frac{1}{5} r$
- 2) für  $\varphi = \vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  d. h. für den vierfachen Punkt  $O'$ :  $R = 2\varrho = r$

II. Wir wenden uns nunmehr zu dem Falle, in welchem die Grundcurve eine Gerade und und zwar die Abscissenaxe selbst ist, während die übrigen Curven dieselben bleiben sollen. Zu den hier geltenden Gleichungen gelangen wir mit Hilfe des Vorhergehenden einfach, wenn wir in (17) oder (18)  $r = \infty$  werden lassen, wofür ja die Peripherie des Grundkreises in eine Gerade und zwar in die Abscissenaxe selbst übergeht. Dabei ist statt  $\varphi$  der Abwälzungswinkel des rollenden Kreises einzuführen; ist derselbe  $\varphi'$ , so besteht bekanntlich die Beziehung:

$$r\varphi = \varrho\varphi'$$

mithin  $\frac{r\varphi}{\varrho} = \varphi'$

Da ferner bei unendlich wachsendem  $r$  Winkel  $\varphi$  unendlich klein wird, so erhält man, da man für  $\sin \varphi$  alsdann den Bogen  $\varphi$  selbst setzen kann

$$r \sin \varphi = r \varphi = \varrho \varphi'$$

während  $\varrho \sin \varphi = 0$  und  $r \cos \varphi = r \cos 0 = r$  wird.

Diese Werte in (17) oder (18) substituiert liefern alsdann aus jedem der beiden Fälle, wenn man gleichzeitig statt  $\varphi'$  wieder einfach  $\varphi$  schreibt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi - \varrho' \sin \left(1 - m \frac{\varrho}{\varrho'}\right) \varphi \\ y &= \varrho - \varrho' \cos \left(1 - m \frac{\varrho}{\varrho'}\right) \varphi \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Betrachten wir zunächst einige hierin enthaltene spezielle Fälle:

1) Für  $m = 0$  ergeben sich aus (50), je nachdem  $\varrho'$  kleiner oder grösser ist als  $\varrho$ , die Gleichungen der gestreckten oder verschlungenen Cycloide, welche Curven bei festliegendem Punkt  $P$  auch thatsächlich entstehen müssen.

2) Für  $m = + \frac{\varrho'}{\varrho}$  entsteht:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi \\ y &= \varrho - \varrho' = \pm d \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

welche Gleichungen offenbar eine zur  $x$ -Axe im Abstände  $+d$  oder  $-d$  parallele Grade repräsentieren. Dies ist auch ohne weiteres aus der Anschauung klar; denn da in diesem Falle Punkt  $P$  den dem Abwälzungswinkel entsprechenden Bogen seines Leitkreises durchläuft, so bleibt er stets auf dem durch den jedesmaligen Berührungspunkt gehenden Radius des Rollkreises oder dessen Verlängerung und befindet sich so stets im Abstände  $\pm d$  von der  $x$ -Axe.

3) Für  $m = + 2 \frac{\varrho'}{\varrho}$  nehmen Gleichungen (50) die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi + \varrho' \sin \varphi \\ y &= \varrho - \varrho' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

oder auch, wenn man  $\varrho' = \varrho \mp d$  setzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi + (\varrho \mp d) \sin \varphi \\ y &= \varrho - (\varrho \mp d) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (52\alpha)$$

Eine einfache Betrachtung lässt die Curve, je nachdem das negative oder positive Vorzeichen von  $d$  Geltung hat, als eine gestreckte oder verschlungene Cycloide erkennen, die sich in umgekehrter Lage befindet, den Scheitel also nach unten gerichtet; und zwar liegt dieser, bei der gestreckten Cycloide um die Strecke  $d$  über, bei der verschlungenen um dieselbe Strecke unter dem Koordinatenanfang. Die Curven werden in diesem Falle vom Scheitel aus beschrieben, sodass von der ersten der unendlich vielen sich aneinanderreihenden zunächst nur die Hälfte entsteht; dieselbe wird vervollständigt, wenn der Kreis nach der entgegengesetzten Richtung rollt. Denn bei umgekehrter Wälzungsrichtung muss auch für Punkt  $P$  die Eigenbewegung im entgegengesetzten Sinne erfolgen, sodass also auf der negativen Seite der  $y$ -Axe die Bewegungsverhältnisse für  $P$  sich ganz symmetrisch zu denen auf der positiven Seite gestalten, mithin ein dem positiven Curvenast ganz gleicher, symmetrisch zur  $y$ -Axe liegender, d. i. die andere Curvenhälfte, entsteht.

Wird  $\varrho' = \varrho$ , der rollende Kreis also selbst die Leitcurve, so nehmen Gleichungen (50) die speciellere Form an:



$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi - \varrho \sin(1-m)\varphi \\ y &= \varrho - \varrho \cos(1-m)\varphi \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Von speciellen Fällen heben wir folgende hervor:

1) Für  $m = 0$  ergeben sich aus (53), wie es sein muss, die Gleichungen der gemeinen Cycloide.

2) Für  $m = +1$  wird:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Die Bahn des Punktes ist also die  $x$ -Axe selbst, wovon man sich auch leicht durch die Anschauung überzeugt, da  $P$  in diesem Falle gerade den jedesmal abgewälzten Bogen durchläuft, so dass er stets auf der  $x$ -Axe bleibt; dieser Fall entspricht dem in (51) als ein noch speciellerer.

3) Für  $m = +2$  resultiert

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi + \varrho \sin \varphi \\ y &= \varrho - \varrho \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

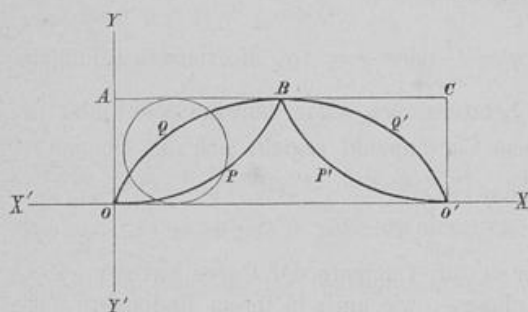


Fig. 6.

Dieser Fall ist offenbar dem in (52) resp. (52a) analog, aus dem er sich für  $\varrho' = \varrho$  resp. für  $d = 0$  ebenfalls sofort ergibt. Die Curve ist eine umgekehrte gemeine Cycloide, die mit ihrem Scheitel im Koordinatenanfang  $O$  liegt und die  $x$ -Axe in diesem Punkte berührt (s. Fig. 6).

Beschreibt der rollende Kreis gleichzeitig vom Anfangspunkt  $O$  aus eine gewöhnliche Cycloide, so liegt deren Scheitel offenbar im Endpunkt  $B$  der ersten umgekehrten und ihr Endpunkt im Scheitel  $O'$  der zweiten umgekehrten. Nun ist bekanntlich die cycloidische Fläche

$$OBO'O = 3 \varrho^2 \pi$$

mithin Flächenstück

$$OPBP'O'O = AOQBQ'O'CA = 4 \varrho^2 \pi - 3 \varrho^2 \pi = \varrho^2 \pi$$

woraus weiter folgt:

$$OPBQO + O'P'BQ'O' = 3 \varrho^2 \pi - \varrho^2 \pi = 2 \varrho^2 \pi$$

oder wegen der Gleichheit dieser beiden letzten Flächenstücke auch

$$OPBQO = O'P'BQ'O' = \varrho^2 \pi$$

d. h. die cycloidische Fläche  $OBO'O$  wird durch die beiden cycloidischen Halbbogen  $OB$  und  $O'B$  in drei gleiche Teile geteilt, von denen jeder dem rollenden Kreis an Flächeninhalt gleich ist.

4) Für  $m = -1$  wird aus (53):

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \varphi - \varrho \sin 2\varphi \\ y &= \varrho - \varrho \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Schreibt man hierfür, indem man gleichzeitig  $2\varphi = \varphi'$  setzt,

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\varrho}{2} \varphi' - \varrho \sin \varphi' \\ y &= \frac{\varrho}{2} - \varrho \cos \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (55a)$$

so giebt sich die Curve sofort als eine verschlungene Cycloide zu erkennen, die auch entsteht, wenn ein Kreis vom Radius  $\frac{\rho}{2}$  auf einer im Abstände  $+\frac{\rho}{2}$  zur  $x$ -Axe Parallelen rollt, während der beschreibende Punkt um die Strecke  $\rho$  von dessen Mittelpunkt entfernt liegt und sich ursprünglich im Koordinatenanfang befindet. Der allgemeine Verlauf der Curve ist somit ohne weiteres klar und wollen wir deshalb nur einige spezielle Einzelheiten hervorheben.

Wie sich aus der Beziehung

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho(1 - 2 \cos 2\varphi) = \rho(4 \sin^2 \varphi - 1) = \rho(2 \sin \varphi + 1)(2 \sin \varphi - 1) = 0$$

ergiebt, erreicht die Curve einen äussersten Punkt links (Minimum von  $x$ ) für  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , sowie einen äussersten Punkt rechts (Maximum von  $x$ ) für  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ . Desgleichen folgt aus

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2 \sin 2\varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

dass der höchste Curvenpunkt (Maximum von  $y$ ) bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  oder  $y = 2\rho$ , die tiefsten (Minimum von  $y$ ) bei  $\varphi = 0$  und  $\pi$  oder  $y = 0$  liegen, welches Letztere auch schon ohnedies sofort klar ist.

Für die Neigung der Tangente an irgend einem Curvenpunkt ergiebt sich aus Obigem:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{dy}{dx} = \frac{4 \sin \varphi \cos \varphi}{(2 \sin \varphi + 1)(2 \sin \varphi - 1)}$$

woraus u. A. zu entnehmen ist, dass für  $\varphi = 0$  oder  $\pi$  die Tangente der Curve mit der  $x$ -Axe identisch ist oder dass die Curve sowol in ihrem Anfangs-, wie auch in ihrem Endpunkte diese Axe tangiert.

Für den Bogen hat man

$$ds = \rho \sqrt{5 - 4 \cos^2 \varphi} d\varphi = \rho \sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Ausdrücke, welche zeigen, dass die Curve nicht genau rectificierbar ist.

Bemerkenswert ist die Beziehung, welche zwischen der Curvenfläche  $F$  und dem rollenden Kreis besteht. Es ergiebt sich nämlich:

$$\begin{aligned} F &= \int y dx = 2\rho^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi)(1 - 2 \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= 2\rho^2 \pi \end{aligned}$$

Die Curvenfläche ist also gleich dem doppelten Inhalt der rollenden Kreises und verhält sich mithin zu der gewöhnlichen Cycloidenfläche desselben Kreises wie 2:3.

Der Ausdruck für den Krümmungsradius  $R$  ist:

$$\begin{aligned} R &= \frac{(5 - 4 \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{2 - \cos 2\varphi} \cdot \frac{\rho}{4} \\ &= \frac{(1 + 8 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 + 2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\rho}{4} \end{aligned}$$

Hiernach ist:

Für Anfangs- und Endpunkt der Curve,	also für $\varphi = 0$ resp. $\pi$ :	$R = \frac{1}{4} \varrho$
„ den Scheitel	„ „ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :	$R = \frac{3}{4} \varrho$
„ die äussersten Punkte links und rechts,	„ „ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ resp. $\frac{5\pi}{6}$ :	$R = \sqrt{\frac{3}{4}} \varrho = \varrho \cos 30^\circ$ .

Uebrigens lässt sich auch an (50) folgende allgemeine Betrachtung anstellen. Setzt man abgekürzt  $1 - m \frac{\varrho}{\varrho'} = n$ , so kann man den Gleichungen (50) offenbar die Form geben:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\varrho}{n} \cdot n\varphi - \varrho' \sin n\varphi \\ y &= \frac{\varrho}{n} - \varrho' \cos n\varphi + \frac{(n-1)\varrho}{n} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

oder auch  $n\varphi = \varphi'$  gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\varrho}{n} \cdot \varphi' - \varrho' \sin \varphi' \\ y &= \frac{\varrho}{n} - \varrho' \cos \varphi' + \frac{(n-1)\varrho}{n} \end{aligned} \right\} \quad (56 \alpha)$$

Diese Gleichungen stellen aber, wie dies besonders aus (56  $\alpha$ ) deutlich ersichtlich ist, für positives  $n$  und je nachdem  $\frac{\varrho}{n}$  grösser oder kleiner als  $\varrho'$  ist, eine gestreckte oder verschlungene Cycloide dar, welche entsteht, wenn ein Kreis vom Radius  $\frac{\varrho}{n}$  auf einer im Abstände  $+\frac{(n-1)\varrho}{n}$  zur  $x$ -Axe Parallelen rollt, während der beschreibende Punkt um die Strecke  $\varrho'$  von dessen Mittelpunkt oder um die Strecke  $\frac{(n-1)\varrho}{n} + \left(\frac{\varrho}{n} - \varrho'\right) = \varrho - \varrho'$  vom Koordinatenanfang entfernt auf der  $y$ -Axe liegt. — Besitzt  $n$  einen negativen Wert, so ist die Curve ebenfalls eine der erwähnten Art, nur ist sie in dem Falle eine umgekehrte, auf dem Scheitel stehende und wird von diesem aus beschrieben, denn in letzterem Falle, wenn z. B.  $n = -n'$  wird, gehen Gleichungen (56) über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\varrho}{n'} n' \varphi + \varrho' \sin n' \varphi \\ y &= \frac{\varrho}{n'} - \varrho' \cos n' \varphi + \frac{(n'-1)\varrho}{n'} \end{aligned} \right\} \quad (56 \beta)$$

für welche die nähere Betrachtung das Gesagte leicht ergibt (vgl. hiermit (52) und (54).) Die Gleichungen (50) repräsentieren also zwei Gruppen von gestreckten oder verschlungenen Cycloiden, von denen wir im Vorhergehenden bereits einige besondere Fälle kennen gelernt und näher betrachtet haben [vgl. oben von (50) Fall 1) und 3), von (53) Fall 4),] die aber auch, wie sich gleichfalls bereits ergab, für gewisse Werke von  $m$  und  $\varrho'$  in die gemeine Cycloide [vgl. von (53) Fall 1) und 3)] oder sogar in Grade übergehen [vgl. von (50) und (52) je Fall 2).]

Für das Bogendifferential erhält man aus (50):

$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 n^2 - 2\varrho\varrho'n \cos n\varphi} d\varphi$$

oder wenn  $q' = q$  und für  $n$  sein daraus folgender Wert  $1 - m$  substituiert wird:

$$ds = q \sqrt{m^2 + 4(1-m) \sin^2 \frac{(1-m)\varphi}{2}} d\varphi$$

Ausdrücke, welche im Allgemeinen nur annähernd integrierbar sind.

Dagegen lässt sich der Flächeninhalt  $F$  auch für den allgemeinsten Fall durch einen geschlossenen Ausdruck genau angeben. Da nämlich die Curve bei  $\varphi = 0$  beginnt und bei  $n\varphi = 2\pi$  oder  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$  ihren Endpunkt besitzt, so ist:

$$\begin{aligned} F &= \int y dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} (q - q' \cos n\varphi) (q - q' n \cos n\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2q^2 + nq'^2}{n} \pi \\ F &= \frac{2q^2\pi}{n} + q'^2\pi \end{aligned} \quad (57)$$

eine Beziehung, die sich auch leicht in Worte kleiden lässt. Bedenkt man noch, dass  $\frac{2q^2\pi}{n} = q \cdot q \frac{2\pi}{n}$  auch den Inhalt des Rechtecks, gebildet aus dem von den Endpunkten der Curve begrenzten Stück der  $x$ -Axe und dem Radius des rollenden Kreises, bedeutet, so erhält man für den Inhalt  $F'$  des Flächenteils, welcher nach Abzug dieses Rechtecks übrig bleibt:

$$F' = F - \frac{2q^2\pi}{n} = q'^2\pi \quad (57\alpha)$$

d. h. dieses  $F'$  ist bei demselben Leitkreis für alle möglichen Werte von  $n$  und mithin auch von  $m$  constant gleich dem Inhalt des Leitkreises.

Führt man in (57) für  $n$  seinen Werth  $1 - m \frac{q}{q'}$ , so entsteht:

$$F = \frac{2q^3 + qq'^2 - m q'^3}{q - m q'} \pi$$

oder für den Fall, wo  $q' = q$ :

$$F = \frac{3 - m}{1 - m} q^2 \pi$$

Für den speziellen Fall 4) von (53), also für  $m = -1$  ergibt sich hieraus ebenso, wie dort bereits gefunden:

$$F = 2q^2\pi$$

oder für  $m = 0$ , also für die gemeine Cycloide:

$$F = 3q^2\pi$$

wie es bekanntlich sein muss. — Der Fall, wo  $m = +1$ , bedarf einer besonderen Betrachtung, eine Bemerkung, die auch für (57) und (57 $\alpha$ ) gilt, da alsdann  $n = 0$  wird.

Für den Krümmungsradius  $R$  ergibt sich aus (50):

$$R = \mp \frac{(q^2 - 2qq'n \cos n\varphi + q'^2 n^2)^{\frac{3}{2}}}{(q \cos n\varphi - q'n) q' n^2}$$

oder für  $q' = q$ , also entsprechend (53), wenn man zugleich den dadurch für  $n$  entstehenden Wert d. i.  $1 - m$  mit  $n'$  bezeichnet:

$$R = \mp \frac{(n'^2 - 2n' \cos n' \varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}{n' - \cos n' \varphi} \cdot \frac{q}{n'^2}$$

III. Lässt man den Grundkreis in einen Punkt zusammenschrumpfen, also in (17)  $r = 0$  werden, so liegt der Fall vor, dass ein Kreis, hier der Leitkreis, sich mit einer fest mit ihm verbundenen, durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden um einen auf dieser Geraden liegenden Punkt, hier den Anfangspunkt der Koordinaten, dreht, während gleichzeitig sich ein Punkt auf demselben bewegt, und es handelt sich dabei um die Bahn dieses Punktes. Diesen Fall allgemein für eine ganz beliebige Curve und eine ganz beliebige Lage derselben zu der mit ihr verbundenen und sich drehenden Geraden zu untersuchen, würde eine ausgedehntere Aufgabe für sich sein und uns hier zu weit führen, weshalb wir die Betrachtung nur an dem uns vorliegenden spezielleren Falle anstellen. Die Drehung wird hier angegeben durch den Winkel, den der durch den Drehpunkt gehende Radius resp. die mit ihm zusammenfallende unbegrenzte Gerade beschreibt und welcher, wie sich leicht ergibt, gleich  $\varphi$  ist, so dass in unsern Gleichungen (17)  $\varphi$  ungeändert bleibt. Soll aber ferner eine Eigenbewegung des Punktes  $P$  stattfinden, so kann dies, da der abgewälzte Bogen, von dem diese Eigenbewegung im Vorhergehenden immer abhängig ist, jetzt unendlich klein wird, nur dann geschehen, wenn man in jenen Gleichungen  $m$  unendlich gross werden lässt. Dadurch wird nämlich:

$$m \cdot r = \infty \cdot 0 = \text{Const.}$$

Setzt man diese Constante  $= m' \cdot q'$ , wobei jetzt  $m'$  eine beliebige Verhältnisszahl bedeutet wie früher  $m$ , und ferner das Stück der Normale bis zum Drehpunkt, nämlich  $q - q' = \pm d$ , also  $q = q' \pm d$ , so entsteht aus (17), wenn man gleichzeitig der Kürze halber die Accente weglässt:

$$\left. \begin{aligned} x &= (q \pm d) \sin \varphi - q \sin (1 - m) \varphi \\ y &= (q \pm d) \cos \varphi - q \cos (1 - m) \varphi \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Hierin gilt, wie leicht ersichtlich, vor  $d$  das positive oder negative Zeichen, je nachdem der Drehpunkt auf der convexen oder der concaven Seite des Peripherieteils liegt, bis zu welchem  $d$  gerechnet wird. Was ferner das Zeichen von  $m$  betrifft, so gilt das positive, wenn der von  $P$  durchlaufene Bogen und der Drehungswinkel  $\varphi$  gleiches Zeichen, das negative, wenn beide entgegengesetzte Zeichen besitzen. Für den speziellen Fall, dass der Drehpunkt auf der convexen Seite, also ausserhalb des Kreises liegt, würde dies z. B. bedeuten:  $P$  bewegt sich von seiner ursprünglichen Lage aus auf dem Bogen, welcher nach der Seite liegt, nach welcher die Drehung erfolgt.

Wenn speziell  $d = 0$ , der Drehpunkt also auf der Kreisperipherie selbst liegt, so nehmen die Gleichungen (58) die einfachere Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} x &= q \sin \varphi - q \sin (1 - m) \varphi \\ y &= q \cos \varphi - q \cos (1 - m) \varphi \end{aligned} \right\} \quad (58\alpha)$$

Aus (58) und (58 $\alpha$ ) lässt sich nun wieder eine Anzahl bemerkenswerter spezieller Fälle für bestimmte Werte von  $m$  ableiten.

1) Für  $m = 0$  ergibt (58):

$$x^2 + y^2 = d^2 \quad (59)$$

also einen Kreis mit Radius  $d$ , dessen Centrum im Anfangspunkt liegt, was auch durch die Anschauung sofort klar ist.

Aus (58 $\alpha$ ) folgen für  $m=0$  die Gleichungen des Coordinatenanfangs selbst, wie es sein muss.

2) Für  $m = +1$  folgt aus (58):

$$x^2 + (y + q)^2 = (q \pm d)^2 \quad (60)$$

und aus (58 $\alpha$ ):

$$x^2 + (y + q)^2 = q^2 \quad (60\alpha)$$

also in jedem Falle ein Kreis, welcher im zweiten ein dem erzeugenden Kreise congruenter ist.

3) Für  $m = +2$  entsteht aus (58):

$$\frac{x^2}{(2q \pm d)^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1 \quad (61)$$

Die entstehende Curve ist demnach eine Ellipse mit den Halbaxen  $2q \pm d$  und  $d$  und mit ihrem Mittelpunkt im Coordinatenanfang.

Aus (58 $\alpha$ ) erhält man für  $m = +2$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= 2q \sin \varphi \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (61\alpha)$$

Diese Gleichungen stellen aber ein Stück auf der  $x$ -Axe dar, welches von Punkt  $P$  durchlaufen wird. Die ganze von  $P$  auf dieser Axe durchlaufene Strecke reicht auf der positiven Seite bis zu einem Punkte  $x_1 = +2q$ , auf der negativen bis zu  $x_2 = -2q$ , wie sich für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  resp.  $\frac{3\pi}{2}$  ergibt. In diesem speziellen Falle geht also die Ellipse (61) in eine Gerade über.

4) Für  $m = +3$  folgt, wenn wir hier nur den speziellen Fall, wo  $d = 0$  ist, beachten, aus (58 $\alpha$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= q (\sin \varphi + \sin 2\varphi) \\ y &= q (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

oder auch nach einfacher Umformung:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2q \sin \frac{3}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi \\ y &= 2q \sin \frac{3}{2}\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (62\alpha)$$

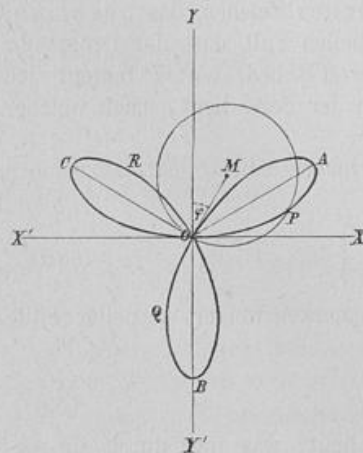


Fig. 7.

Als Polargleichung der entstehenden Curve ergibt sich hieraus leicht:

$$r = 2q \sin 3\vartheta \quad (63)$$

worin Polarwinkel  $\vartheta$  von der positiven  $x$ -Axe nach oben gezählt wird; ferner als Parallelcoordinatengleichung in  $x$  und  $y$  nach Elimination von  $\varphi$ :

$$(x^2 + y^2)^2 - 6qy(x^2 + y^2) + 8qy^3 = 0$$

Die Discussion dieser Gleichungen zeigt, dass die entstehende Curve aus drei blattartigen Teilen besteht, von denen jeder eine zu seiner Längsaxe symmetrische Gestalt besitzt (Fig. 7). Der Wert dieser Längsaxe ergibt sich, wenn man den Maximalwert von  $r$  sucht; als solcher ergibt sich für  $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$  und  $\frac{9\pi}{6}$ :

$$r = 2q$$

Zählt man den Polarwinkel  $\vartheta'$  von dieser Längsaxe aus, so ist in (63) zu setzen  $\vartheta = \vartheta' + \frac{\pi}{6}$ , wodurch entsteht:

$$r = 2\varrho \cos 3\vartheta' \quad (63\alpha)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass  $r$  für gleiche, aber entgegengesetzte  $\vartheta'$  denselben Wert besitzt, woraus die symmetrische Gestalt jedes einzelnen Blattes erhellt.

Wie ferner aus (63) hervorgeht entsteht die Curve in der Reihenfolge *O P A O Q B O R C O*. Sie ist nur annähernd rectificierbar, da sich als Wert für das Bogendifferential ergibt:

$$ds = 2\varrho \sqrt{1 + 8 \cos^2 3\vartheta} d\vartheta$$

Für den Flächeninhalt  $f$  eines Blattes erhält man:

$$f = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 d\vartheta = \frac{1}{3} \varrho^2 \pi$$

mithin für die ganze Curvenfläche:

$$F = 3f = \varrho^2 \pi$$

d. h. ihr Inhalt ist gleich dem des rotierenden Kreises.

Für den Krümmungshalbmesser  $R$  ergibt sich aus (62):

$$R = \frac{(5 + 4 \cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}{7 + 2 \cos 3\varphi} \cdot \varrho$$

oder aus (63):

$$R = \frac{(1 + 8 \cos^2 3\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 4 \cos^2 3\vartheta} \varrho$$

zwei Ausdrücke, von denen zu Folge der Beziehung  $\vartheta = \frac{\varphi}{2}$  (vgl. (62 $\alpha$ ) und (63)) der eine auch aus dem andern hergeleitet werden kann. — Als spezielle Werte von  $R$  mögen hervorgehoben werden:

$$\text{Für } \varphi = 0 \text{ oder } \vartheta = 0 \text{ d. i. in dem vielfachen Punkt } O \text{ ist: } R = 3\varrho$$

$$\text{" } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ oder } \vartheta = \frac{\pi}{6} \text{ d. i. in den Punkten } A, B \text{ und } C \text{ ist: } R = \frac{1}{2}\varrho$$

5) Für  $m = +4$  folgt aus (58 $\alpha$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho (\sin \varphi + \sin 3\varphi) \\ y &= \varrho (\cos \varphi - \cos 3\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\varrho \sin 2\varphi \cos \varphi \\ y &= 2\varrho \sin 2\varphi \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (65\alpha)$$

Hieraus ergibt sich zunächst wiederum, da  $\varphi = \vartheta$  sein muss, die einfache Polargleichung:

$$r = 2\varrho \sin 2\vartheta \quad (66)$$

sowie durch Elimination von  $\varphi$  die Gleichung in  $x$  und  $y$ :

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\varrho^3 x^2 y^2 \quad (67)$$

Für ein um  $45^\circ$  zum ursprünglichen gedrehtes Coordinatensystem gehen diese beiden letzten Gleichungen über in die folgenden:

$$r = 2\rho \cos 2\vartheta \quad (66\alpha)$$

und:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\rho^2 (x^2 - y^2)^2 \quad (67\alpha)$$

aus denen man wegen ihrer Uebereinstimmung mit den Gleichungen (49) und (47) erkennt, dass die hier erzeugte Curve mit der in Fig. 7 dargestellten und schon früher näher betrachteten vollkommen identisch ist. Während in jenem Falle die Curve auf ihre Hauptaxen bezogen erscheint, ist sie es hier auf die durch ihren vierfachen Punkt gehenden Tangenten. Eine weitere Vergleichung beider Fälle zeigt auch sofort die wesentliche Uebereinstimmung der Bewegungsart, nur dass die Bewegung in dem früheren Falle im andern Sinne wie im vorliegenden erfolgt:

6) Für  $m = -1$  entsteht aus (58 $\alpha$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho (\sin \varphi - \sin 2\varphi) \\ y &= \rho (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} x &= -2\rho \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{3}{2}\varphi \\ y &= 2\rho \sin \frac{1}{2}\varphi \sin \frac{3}{2}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (68\alpha)$$

Die leicht hieraus zu entwickelnde Gleichung in  $x$  und  $y$  lautet:

$$x^4 + (2y^2 - 3\rho^2)x^2 + y^4 - 3\rho^2y^2 + 2\rho^3y = 0 \quad (69)$$

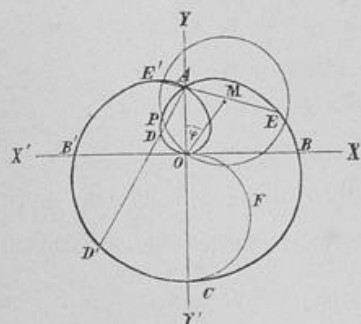


Fig. 8.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass die Curve die in Fig. 8 angedeutete Gestalt besitzt. Sie passiert zwei Mal den Punkt  $A$  der positiven  $y$ -Axe, für welchen  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{5\pi}{3}$  und  $y = \rho$  ist, schneidet die negative  $y$ -Axe in  $C$  und zwar für  $\varphi = \pi$  und  $y = -2\rho$ , und endlich die  $x$ -Axe in den Punkten  $B$  und  $B'$ , für welche  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  resp.  $= \frac{4\pi}{3}$  und  $x = \pm \rho\sqrt{3}$  ist.

Um auch hier die Polargleichung herzustellen, hat man aus (68):

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \frac{3}{2}\varphi$$

sowie

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta$$

wenn  $\vartheta$  der von der positiven  $x$ -Axe gezählte Polarwinkel ist. Mithin:

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} \frac{3}{2}\varphi$$

oder

$$-\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\varphi$$

Es ist aber auch:

$$-\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} (\pi - \vartheta)$$

mithin:

$$\operatorname{tg} (\pi - \vartheta) = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\varphi$$

Führt man diesen Winkel  $\pi - \vartheta$ , welchen der Radiusvector mit der negativen  $x$ -Axe bildet, als Polarwinkel ein und nennt ihn  $\vartheta'$ , so folgt, da hiernach  $\frac{3}{2}\varphi = \vartheta'$  und  $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{3}\vartheta'$  ist:

$$r = 2\rho \sin \frac{\vartheta'}{3}$$

oder mit Weglassung des Accentues:

$$r = 2\rho \sin \frac{\vartheta}{3} \quad (70)$$

als Polargleichung der Curve.



Es lässt sich indessen noch eine zweite Polargleichung aufstellen für den Doppelpunkt  $A$  der Curve als Pol und zwar, ähnlich wie in (43) und (43  $\alpha$ ), sowohl für den innern, wie für den äussern Curventeil je eine besondere. In Beziehung auf Punkt  $A$  lauten nämlich die Gleichungen (68):

$$\begin{aligned}x &= \varrho (\sin \varphi - \sin 2\varphi) \\y &= \varrho (\cos \varphi - \cos 2\varphi) - \varrho\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \sin \varphi (1 - 2 \cos \varphi) \\y &= \varrho \cos \varphi (1 - 2 \cos \varphi)\end{aligned}$$

und durch ähnliche Betrachtung wie in dem damaligen Falle ergibt sich hieraus:

$$r = \varrho (2 \cos \vartheta - 1) \quad (71)$$

als Polargleichung für den inneren Curventeil,  $\vartheta$  gezählt von der negativen  $y$ -Axe, sowie

$$r = -\varrho (2 \cos \vartheta' - 1) \quad (71 \alpha)$$

als Gleichung des äusseren Teils,  $\vartheta'$  gezählt von der positiven  $y$ -Axe. — Es genügt jedoch auch hier (71) für die ganze Curve allein, wenn man beachtet, dass negative Werte des Radiusvector auf der Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels von  $\vartheta$  liegen.

Für zwei zusammenfallende Radiusvectoren des innern und äussern Curventeils  $AD = r_1$  und  $AD' = r_0$  hat man, da in dem Falle  $\vartheta' = \pi + \vartheta$  sein muss:

$$\begin{aligned}r_1 &= \varrho (2 \cos \vartheta - 1) \\ \text{und} \quad r_0 &= \varrho (2 \cos \vartheta + 1)\end{aligned}$$

mit hin durch Subtraktion:

$$\begin{aligned}r_0 - r_1 &= 2\varrho \\ \text{oder} \quad DD' &= 2\varrho\end{aligned} \quad (72)$$

Die Differenz irgend zweier zusammenfallender Radienvectoren des innern und äussern Curventeils ist also constant  $= 2\varrho =$  dem Durchmesser des rotierenden Kreises.

Ebenso ergibt sich für einen Radiusvector  $AE = r_0$ , der den innern Curventeil nicht trifft, und denjenigen, welcher auf dessen Rückwärtsverlängerung liegt, nämlich  $AE' = r_0'$ :

$$\begin{aligned}r_0 &= -\varrho (2 \cos \vartheta' - 1) \\ \text{und} \quad r_0' &= \varrho (2 \cos \vartheta' + 1)\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}r_0 + r_0' &= 2\varrho \\ \text{oder} \quad EE' &= 2\varrho\end{aligned} \quad (72 \alpha)$$

Dieses ganze Ergebnis in (72) und (72  $\alpha$ ) heisst in Worten:

Jede durch den Doppelpunkt  $A$  gezogenen Grade schneidet die Curve in zwei Punkten, die entweder auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von  $A$  liegen und deren Entfernung von einander constant gleich dem Durchmesser des rotierenden Kreises ist.

Für das Bogenelement der Curve erhält man am einfachsten aus (70):

$$ds = 2\varrho \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\vartheta}{3}} d\vartheta$$

ein Ausdruck, dessen Integral auch wieder nur annäherungsweise zu bestimmen ist.

Für den Inhalt  $F$  des von der halben Curve und dem zugehörigen Stück der negativen  $y$ -Axe begrenzten Flächenraums  $OPABCO$  ergibt sich:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r^2 d\vartheta = \frac{3}{2} \varrho^2 \pi$$

mithin für den Inhalt  $F'$  des von der einen Curvenhälfte und dem über  $OC$  beschriebenen Halbkreis begrenzten Flächenstücks, nämlich  $OPABCFO$ :

$$F' = F - \frac{1}{2} \varrho^2 \pi = \varrho^2 \pi$$

Jenes Flächenstück ist also inhaltsgleich mit dem erzeugenden Kreis.

Für den Krümmungshalbmesser  $R$  ergibt sich aus (68):

$$R = \frac{(5 - 4 \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3 - 2 \cos \varphi} \cdot \frac{\varrho}{2}$$

oder aus (70):

$$R = \frac{\left(1 + 8 \sin^2 \frac{\vartheta}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{3}\right)} \cdot \frac{\varrho}{3}$$

welche Werte sich gemäss der Relation  $\frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{3} \vartheta$  auch wieder einer aus dem andern ergeben.

Für  $\vartheta = 0$  oder  $\varphi = 0$  d. i. für Punkt  $O$  ist:  $R = \frac{1}{3} \varrho$

„  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  oder  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  d. i. „ „  $A$  ist:  $R = \sqrt{\frac{3}{4}} \varrho = \varrho \sin 60^\circ$

„  $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$  oder  $\varphi = \pi$  d. i. „ „  $C$  ist:  $R = \frac{2}{3} \varrho$

Für die Neigung der Tangente hat man:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{dy}{dx} = - \frac{\sin \varphi - 2 \sin 2\varphi}{\cos \varphi - 2 \cos 2\varphi}$$

Für  $\varphi = 0$  oder  $2\pi$  folgt hieraus  $\operatorname{tg} \nu = 0$  d. h. die Curve berührt die  $x$ -Axe im Koordinatenanfang.

Für den Doppelpunkt  $A$  ergibt sich, da hierfür  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{5\varphi}{3}$  und wenn  $\nu$  und  $\nu'$  die entsprechenden Neigungswinkel sind:

$$\operatorname{tg} \nu = + \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\operatorname{tg} \nu' = - \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Die Schnittpunkte dieser beiden Tangenten mit der  $x$ -Axe erhält man aus der Gleichung derselben, nämlich aus:

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x + \varrho$$

woraus für  $y = 0$  sofort

$$x = \pm \varrho \sqrt{3}$$

Dies sind aber auch die Abscissen der Punkte  $B$  und  $B'$ , in welchen die Curve die  $x$ -Axe schneidet; also gehen die im Doppelpunkte  $A$  an die Curve gelegten Tangenten durch diese Schnittpunkte  $B$  und  $B'$ . Für die Strecken  $AB$  und  $AB'$  auf denselben ergibt sich leicht aus einem der rechtwinkligen Dreiecke der Wert  $2\varrho$ , was auch schon aus (72) und (72 $\alpha$ ) gefolgert werden kann, da die in  $A$  gelegten Tangenten offenbar einen speziellen Fall von dem dort betrachteten bilden. — Der Winkel  $\alpha$ , unter welchem die Tangenten und mithin auch die beiden Curvenäste selbst in

diesem Punkte  $A$  sich schneiden, beträgt  $\frac{2\pi}{3}$  oder  $120^\circ$ ; dies ergibt sich sowol direkt aus der eben angestellten Betrachtung, wie auch aus der Relation:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (v' - v) = \frac{\operatorname{tg} v' - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} v' \operatorname{tg} v} = -\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \operatorname{tg} 120^\circ$$

d. h.  $\alpha = 120^\circ$ .

7) Für  $m = -2$  endlich erhält man aus (58 $\alpha$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho (\sin \varphi - \sin 3\varphi) \\ y &= \varrho (\cos \varphi - \cos 3\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} x &= -2\varrho \sin \varphi \cos 2\varphi \\ y &= 2\varrho \sin \varphi \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (73\alpha)$$

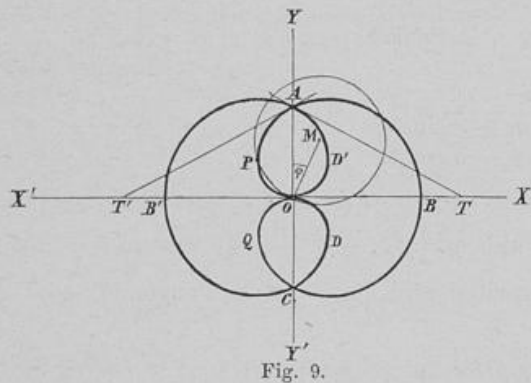
Als Polargleichung dieser Curve ergibt sich hieraus:

$$r = 2\varrho \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (74)$$

wobei Polarwinkel  $\vartheta = 2\varphi$  wiederum von der negativen  $x$ -Axe (in der Uhrzeigerrichtung) zu zählen ist.

Desgleichen erhält man als einzige Curvengleichung in  $x$  und  $y$ :

$$(x^2 + y^2)^3 - 4\varrho^2 (x^2 + y^2)^2 + 4\varrho^4 (x^2 + y^2) - 4\varrho^4 x^2 = 0$$



Aus der Discussion dieser Gleichungen entnimmt man, dass die Curve die Gestalt der Fig. 9 besitzt. Sie schneidet die  $y$ -Axe, wenn  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  und  $\frac{5\pi}{4}$  ist, im Abstände  $y = +\varrho\sqrt{2}$ , sowie, wenn  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  und  $\frac{7\pi}{4}$ , im Abstände  $y = -\varrho\sqrt{2}$ , sodass also jene Schnittpunkte  $A$  und  $C$  Doppelpunkte sind. Ebenso wird die  $x$ -Axe geschnitten für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  in den Abständen  $\pm 2\varrho$ .

Für den Bogen ergibt sich aus (73):

$$\begin{aligned} ds &= \varrho \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta \\ &= \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \sqrt{5 - 3 \cos \vartheta} d\vartheta \end{aligned}$$

oder durch  $\varphi$  ausgedrückt gemäss der Beziehung  $\vartheta = 2\varphi$  oder auch aus (73) direkt:

$$ds = 2\varrho \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Für den Flächenraum  $F$ , der von der einen Curvenhälfte  $OPABCQO$  eingeschlossen wird, erhält man:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\vartheta = 2\varrho^2 \pi$$

Ferner ist der Inhalt eines segmentartigen Flächenstücks  $OPAO$  nämlich

$$f = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\vartheta = \frac{\varrho^2 \pi}{2} - \varrho^2$$

und demnach  $4f = 2\varrho^2 \pi - 4\varrho^2$

woraus sich für den Inhalt  $F'$  der Fläche  $ABCDOD'A$  ergibt:

$$F' = F - 4f = 4\varrho^2 = (2\varrho)^2 \quad (76)$$

d. h. der Inhalt jener halbmondförmigen Fläche ist gleich dem Quadrat über dem Durchmesser des rotierenden Kreises oder gleich dem Quadrate über  $OB$ .

Als Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser ergeben sich aus (73) und (74) resp.:

$$R = \frac{\left(1 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \varrho$$

und  $R = \frac{(5 - 3 \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{7 - 3 \cos 2\varphi} \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{2}}$

Spezielle Werte hieraus sind:

Für  $\varphi = 0$  und  $\pi$  oder  $\vartheta = 0$  und  $2\pi$  also für Punkt  $O$ :  $R = \frac{1}{2} \varrho$

„  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  oder  $\vartheta = \pi$  und  $3\pi$  „ „ Punkte  $B$  und  $B'$ :  $R = \frac{8}{3} \varrho$

Für die Neigung der Tangente ist:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{dy}{dx} = - \frac{\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi}{\cos \varphi - 3 \cos 3\varphi}$$

Bei  $\varphi = 0, \pi$  und  $2\pi$  d. i. für Punkt  $O$  wird  $\operatorname{tg} \nu = 0$ : die Curve berührt also in  $O$  die  $x$ -Axe zweimal von zwei Seiten. Für die Punkte  $A$  und  $C$  also  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  wird  $\operatorname{tg} \nu = \pm \frac{1}{2}$  und von den in  $A$  und  $C$  an die Curven gelegten Tangenten wird die  $x$ -Axe in Punkten  $T$  und  $T'$  geschnitten, deren  $x = \pm 2\sqrt{2}\varrho$ . — Hiernach ist:

$$\text{Rechteck } AO.TO = (\sqrt{2}\varrho) \cdot (2\sqrt{2}\varrho) = 4\varrho^2 = \text{Quadrat } BO$$

und somit auch nach (76):

$$\text{Rechteck } AO.TO = \text{Fläche } ABCDOD'A$$

Gleichungen (58  $\alpha$ ) lassen sich auch allgemein behandeln; so kann man u. A. besonders die allgemeine Polargleichung für sämtliche den verschiedenen Werten von  $m$  entsprechenden Curven aus derselben gewinnen. Schreibt man nämlich dafür:

$$x = 2\varrho \sin \frac{m}{2} \varphi \cos \left(\frac{m}{2} - 1\right) \varphi$$

$$y = 2\varrho \sin \frac{m}{2} \varphi \sin \left(\frac{m}{2} - 1\right) \varphi$$

so folgt  $x^2 + y^2 = 4\varrho^2 \sin^2 \frac{m}{2} \varphi$

also  $r = 2 \varrho \sin \frac{m}{2} \varphi$

Da ferner  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left( \frac{m}{2} - 1 \right) \varphi$

sowie  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta$

worin  $\vartheta$  wieder der von der positiven  $x$ -Axe gezählte Polarwinkel ist, so kann man setzen:

$$\left( \frac{m}{2} - 1 \right) \varphi = \vartheta$$

woraus  $\frac{m}{2} \varphi = \frac{m}{m-2} \vartheta$

und somit wird

$$r = 2 \varrho \sin \frac{m}{m-2} \vartheta \quad (77)$$

die Polargleichung in ihrer allgemeinsten Form.

IV. Es möge jetzt der rollende Kreis in eine Gerade, die Tangente der Grundcurve, übergehen, dann ist in (32)  $\varrho = \infty$  zu setzen. Man transformiere nun diese Gleichungen in:

$$x = r \sin \varphi + \varrho \sin \varphi - \varrho \sin \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \cos \varphi - \varrho \cos \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \sin \varphi$$

$$y = r \cos \varphi + \varrho \cos \varphi - \varrho \cos \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \cos \varphi - \varrho \sin \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \sin \varphi$$

dann wird hierin:

$$\cos \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi = \cos 0 = 1 \text{ und dadurch:}$$

$$- \varrho \cos \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \sin \varphi = - \varrho \sin \varphi$$

sowie  $- \varrho \cos \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi \cos \varphi = - \varrho \cos \varphi$

dagegen nimmt  $\varrho \sin \frac{r(1-m)}{\varrho} \varphi$  die unbestimmte Form  $\infty \cdot 0$  an, für die man

den wahren Wert  $r(1-m)\varphi$  findet. Macht man hiernach in (32) die betreffenden Substitutionen, so ergeben sich als Gleichungen der entstehenden Curve:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi - r(1-m)\varphi \cos \varphi \\ y &= r \cos \varphi - r(1-m)\varphi \sin \varphi - r \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Die Curve ist eine der gewöhnlichen Evolvente ähnliche Linie, die sofort selbst daraus hervorgeht, wenn  $m = 0$  wird, wie es sein muss. Durch Verlegung des Coordinatenanfangs in den Mittelpunkt des Grundkreises verschwindet in  $y$  das Glied  $-r$  und es wird:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi - r(1-m)\varphi \cos \varphi \\ y &= r \cos \varphi - r(1-m)\varphi \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (78 \alpha)$$

Hieraus entspringt für  $m = +1$ :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

also der Grundkreis selbst, da für jene Bedingung der Punkt  $P$  stets im Berührungspunkt bleibt.

V. Wenn endlich der rollende Kreis in eine Gerade übergeht und der Grundkreis gleichzeitig sich auf einen Punkt reduciert, so ist in (78) noch  $r = 0$  zu setzen. Dabei ist aber ähnlich wie bei einer früheren Betrachtung zu beachten, dass, wenn alsdann Punkt  $P$  auf der Geraden fortschreiten soll, die diese Eigenbewegung bedingende Grösse  $rm\varphi$  nicht verschwinden darf, was dadurch erreicht wird, dass man wieder  $m$  unendlich gross werden lässt. Dann wird nämlich  $r \cdot m = 0 \cdot \infty = \text{Const.}$  Setzt man diese Constante gleich der Länge  $a$  und bedenkt, dass der die Drehung bedingende Winkel  $\varphi'$ , welchen die Gerade mit der  $x$ -Axe bildet, gleich dem negativen Abwälzungswinkel also  $= -\varphi$  ist, so gehen die Gleichungen (78) hiernach über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= a\varphi' \sin \varphi' \\ y &= a\varphi' \cos \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

oder, wenn man auch gleichzeitig wieder die Accente weglässt:

$$r = a\varphi \quad (80)$$

Die Curve ist also in diesem Falle die bekannte Archimedische Spirale. Die Grösse  $a$  kann, ebenso wie früher  $m$ , positiv oder negativ sein, je nachdem sich  $P$  auf dem die positive Drehung beschreibenden Schenkel oder auf dessen Rückwärtsverlängerung bewegt.

