Zur

Bestimmung des Dreiecks aus Eckentransversalen.

Vom Conrector Dr. Möhring.

§. 1.

Feststellung der Aufgabe.

Unter Transversalen eines Dreiecks versteht man bekanntlich alle geraden Linien, welche die Seiten desselben schneiden, oder die Abschnitte, welche die Durchschnittspunkte der Seiten auf diesen geraden Linien bilden. Solcher Abschnitte kann man im Allgemeinen drei auf jeder Transversale unterscheiden; läuft aber die Transversale einer Dreiecksseite parallel oder durch einen Eckpunkt, ohne daß sie der Gegenseite parallel ist, so reduciert sich die Anzahl der Abschnitte auf jeder solchen Transversale auf einen einzigen. Im Folgenden sollen die Abschnitte der Transversalen, welche von einer Ecke und der Gegenseite begrenzt werden, Eckentransversalen heißen und mit $t = AD$, $t_, = BE$, $t_{,,} = CF$ bezeichnet werden. Wird nun die Aufgabe gestellt, ein Dreieck zu construieren oder zu berechnen, das die drei Eckentransversalen t, $t_,$, $t_{,,}$ enthält, so sind im Allgemeinen offenbar noch drei unabhängige Stücke erforderlich, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen.

Wird z. B. angenommen, daß alle drei Eckentransversalen durch die Mitten der Seiten gehen, in welchem Falle sie häufig schlechtweg Transversalen (oder Mittellinien) genannt werden, so liegen in dieser Annahme offenbar drei Bedingungen, indem sodann das Verhältnis der Abschnitte auf jeder Seite $= 1 : 1$ ist, und das Dreieck ist aus diesen drei Transversalen allein bestimmbar. In der Aufgabe, die im Folgenden vorgenommen werden soll, ist von dieser Beschränkung abgesehen, indem außer den drei Eckentransversalen t, $t_,$, $t_{,,}$ noch die Verhältnisse der Abschnitte, welche die Transversalen auf den Seiten bilden, durch je zwei beliebige reelle Zahlen $m : n$ gegeben sein sollen (wobei aber m oder $n = 0$ oder $= \infty$ ausgeschlossen). Um die Maßzahlen m und n, die das Verhältnis der Abschnitte auf den Seiten ausdrücken, zu unterscheiden, sind die auf Seite b $CE : EA$ mit $m' : n'$ und die auf Seite c, nämlich $AF : FB$, mit $m'' : n''$ bezeichnet. Wenn man also den Umfang des Dreiecks (Figur 1) nach der Reihenfolge der Ecken A, B, C umschreitet, so bezeichnet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

m auf jeder Seite eine Maßzahl für den ersten, so wie n eine Maßzahl für den zweiten Abschnitt in der angegebenen Reihenfolge. Nun können die Eckentransversalen folgende Lagen haben:

I. sie schneiden sich in drei Punkten, (Fig. 1—7)

II. sie schneiden sich in einem Punkte. (Fig. 8—12)

Dabei ist in beiden Fällen wieder zu unterscheiden,

1) ob die Eckentransversalen innerhalb, und

2) ob sie außerhalb des Dreiecks verlaufen.

Wir beginnen mit I.1, setzen also zunächst voraus, daß alle drei Eckentransversalen innerhalb des Dreiecks verlaufen und sich in drei Punkten (Fig. 1) schneiden. (cf. über diesen Fall Aufgabensammlung von Holleben und Gerwien Nr. 2004.)

I.1.

§. 2.

Bestimmung der Abschnitte auf den Eckentransversalen.

Bezeichnet man die Durchschnittspunkte der Eckentransversalen mit t und $t_,$, t und $t_{,,}$, $t_,$ und $t_{,,}$ respective mit C′, B′, A′ (Fig. 1) und werden sodann AA′, BB′, CC′ gezogen und die Durchschnittspunkte mit den Seiten a, b, c durch D, E, F ausgedrückt, so lassen sich die Abschnitte AC′, C′D, AB′, B′D auf der Transversale AD oder t mit Benutzung folgender Dreiecke bestimmen:

1) der Dreiecke mit gemeinsamer Spitze B für die Basen AC′ und C′D, sowie AE und EC,

2) mit gemeinsamer Spitze C′ für die Basen AE und EC, sowie für BC und BD,

3) mit gemeinsamer Spitze C für die Basen AB′ und B′D, sowie für AF und FB,

4) mit gemeinsamer Spitze B′ für die Basen AF und FB, sowie für BC und CD.

Es ist nämlich $DC' : AC' = BC'D : AC'B = BC'C . BC'D : BC'C . AC'B.$

$$BC'D : BC'C = m : m + n.$$

Ferner $BCE : ABE = CC'E : AC'E = m' : n'$ oder $BCE - CCE' : ABE - AC'E = BC'C : AC'B = m' : n'.$

Die Verbindung dieser letzten Gleichung mit der ersten giebt

$$DC' : AC' = mm' : n'(m + n),$$ und durch Addition

$$DC' + AC' : mm' + n'(m + n) = DC' : mm' = AC' : n'(m + n)$$ oder

$$t : DC' = mm' + n'(m + n) : mm',$$ und

$$t : AC' = mm' + n'(m + n) : n'(m + n),$$ woraus

$$1)\ AC' = \frac{n'(m + n)}{mm' + n'(m + n)}\, t$$

$$2)\ DC' = \frac{mm'}{mm' + n'(m + n)}\, t$$

In gleicher Weise

$$DB' : AB' = CB'D : AB'C = BB'C . CB'D : BB'C . AB'C,$$

$$CB'D : BB'C = n : m + n.$$

Ferner

$$BCF : ACF = BB'F : AB'F = n'' : m'', \text{ oder}$$

$$BCF - BB'F : ACF - AB'F = BB'C : AB'C = n'' : m'',$$

$$\text{folglich } DB' : AB' = nn'' : m''(m+n), \text{ und durch Addition}$$

$$DB' + AB' : nn'' + m''(m+n) = DB' : nn'' = AB' : m''(m+n), \text{ oder}$$

$$t : B'D = nn'' + m''(m+n) : nn'', \text{ und}$$

$$t : AB' = nn'' + m''(m+n) : m''(m+n), \text{ woraus}$$

$$3)\ AB' = \frac{m''(m+n)}{nn'' + m''(m+n)}\,t \qquad 4)\ B'D = \frac{nn''}{nn'' + m''(m+n)}\,t$$

In analoger Weise bestimmen sich die Abschnitte auf den Eckentransversalen $t_,$ und $t_{,,}$ aus den Verhältnissen der entsprechenden Dreiecke und zwar folgender:

Dreiecke zur Bestimmung der Abschnitte auf $t' = BE$:

1) mit gemeinsamer Spitze C für die Basen BA′ und EA′, so wie AF und FB.
2) „ „ „ A′ „ „ „ AF „ FB, „ „ CA „ CE.
3) „ „ „ A „ „ „ BC′ „ C′E, „ „ BD „ DC.
4) „ „ „ C′ „ „ „ BD „ DC, „ „ CA „ EA.

Dreiecke zur Bestimmung der Abschnitte auf $t_{,,} = CF$:

1) mit gemeinsamer Spitze A für die Basen CB′ und B′F, so wie CD und DB.
2) „ „ „ B′ „ „ „ CD „ DB, „ „ AB „ AF.
3) „ „ „ B „ „ „ CA′ „ A′F, „ „ CE „ AE.
4) „ „ „ A′ „ „ „ CE „ AE, „ „ AB „ AF.

Somit ist

$$5)\ A'E = \frac{m'm''}{m'm'' + n''(m'+n')}\,t_, \qquad 6)\ A'B = \frac{n''(m'+n')}{m'm'' + n''(m'+n')}\,t_,$$

$$7)\ C'E = \frac{nn'}{nn' + m(m'+n')}\,t_, \qquad 8)\ C'B = \frac{m(m'+n')}{nn' + m(m'+n')}\,t_,$$

$$9)\ B'F = \frac{mm''}{mm'' + n(m''+n'')}\,t_{,,} \qquad 10)\ B'C = \frac{n(m''+n'')}{mm'' + n(m''+n'')}\,t_{,,}$$

$$11)\ A'F = \frac{n'n''}{n'n'' + m'(m''+n'')}\,t_{,,} \qquad 12)\ A'C = \frac{m'(m''+n'')}{n'n'' + m'(m''+n'')}\,t_{,,}$$

§. 3.

Inhalt des Dreiecks, Seiten und Winkel.

Werden auf den Eckentransversalen die Abschnitte, welche in einer Ecke, und diejenigen, welche in einer Seite endigen, respective obere und untere genannt, so führt sowohl die Differenz von zwei oberen als von zwei unteren Abschnitten zur Bestimmung der Seiten B′C′, A′C′, A′B′ des Eckentransversalen-Dreiecks A′B′C′, die mit a′, b′, c′ bezeichnet werden sollen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus 3 — 1 oder 2 — 4 (§. 2) folgt:

$$a' = \frac{m''(m+n)[mm'+n'(m+n)] - n'(m+n)[m''(m+n)+nn'']}{[mm'+n'(m+n)][nn''+m''(m+n)]}t$$

$$a' = \frac{mm'[nn''+m''(m+n)] - nn''[mm'+n'(m+n)]}{[mm'+n'(m+n)][nn''+m''(m+n)]}t$$

Bezeichnet man den Nenner $[mm'+n'(m+n)][nn''+m''(m+n)]$ kurzweg mit p und reduciert, so ist

$$\text{I.}\quad a' = \pm\frac{(mm'm''-nn'n'')\,(m+n)}{p}\,t$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $mm'm'' \gtrless nn'n''$.

Bezeichnet man ferner das Product $[m'm''+n''(m'+n')][nn'+m(m'+n')]$ kurz mit q, und $[mm''+n(m''+n'')][n'n''+m'(m''+n'')]$ mit r, so ist

$$\text{II.}\quad b' = \pm\frac{(mm'm''-nn'n'')\,(m'+n')}{q}\,t_{,},$$

$$\text{III.}\quad c' = \pm\frac{(mm'm''-nn'n'')\,(m''+n'')}{r}\,t_{,,}$$

Setzt man $P = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

und $x = \frac{m+n}{p}t,\quad y = \frac{m'+n'}{q}t_{,},\quad z = \frac{m''+n''}{r}t_{,,}$, so ergeben die Gleichungen I., II., III. den Inhalt des Eckentransversalen-Dreiecks in folgender Form:

$$\text{IV.}\quad \triangle A'B'C' = \frac{(mm'm''-nn'n'')^2}{4}\sqrt{P}.$$

Da $\sin A' = \frac{2\triangle A'B'C'}{b'c'}$, $\sin B' = \frac{2\triangle A'B'C'}{a'c'}$, $\sin C' = \frac{2\triangle A'B'C'}{a'b'}$, so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung

$$\text{V.}\quad \sin A' = \frac{qr\sqrt{P}}{2(m'+n')(m''+n'')t_{,}t_{,,}}$$

$$\sin B' = \frac{pr\sqrt{P}}{2(m+n)(m''+n'')t\,t_{,,}}$$

$$\sin C' = \frac{pq\sqrt{P}}{2(m+n)(m'+n')t\,t_{,}}$$

Ferner ist $\triangle A'BC = \frac{A'C \,.\, A'B}{2}\sin A'$.

Nun ist $A'C \,.\, A'B = \frac{m'n''(m'+n')(m''+n'')t_{,}t_{,,}}{[m'm''+n''(m'+n')][n'n''+m'(m''+n'')]}$

Hierin ist der Nenner $= [m'm''+(m'+n')n'']^2$, und setzt man diesen $= p'$, so ist

$$\triangle A'BC = \frac{m'n''.qr}{4p'}\sqrt{P}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnet man ferner $[mm''+(m''+n'')n]^2$ mit q', $[mm'+(m+n)n']^2$ mit r', so ergiebt sich mit Benutzung der Gleichungen in §. 2 $\triangle B'AC = \frac{m''npr}{4q'}\sqrt{P}$, $\quad \triangle C'AB = \frac{mn'pq}{4r'}\sqrt{P}$.

Beachtet man, daß $\frac{qr}{p'} = p$, $\frac{pr}{q'} = q$ und $\frac{pq}{r'} = r$, so nehmen die vorhergehenden Gleichungen folgende Form an:

$$\text{VI.} \quad \triangle A'BC = \frac{m'n''p}{4}\sqrt{P}.$$

$$\text{VII.} \quad \triangle B'AC = \frac{m''nq}{4}\sqrt{P}.$$

$$\text{VIII.} \quad \triangle C'AB = \frac{mn'r}{4}\sqrt{P}.$$

Aus IV., VI., VII., VIII. bestimmt sich $\triangle ABC = \triangle A'B'C' + \triangle A'BC + \triangle B'AC + \triangle C'AB$.

$$\text{IX.} \quad \triangle ABC = {}^1/_4[(mm'm''-nn'n'')^2 + m'n''p + m''nq + mn'r]\sqrt{P},$$

wobei P, p, q, r in der vorhin angegebenen Bedeutung zu nehmen.

Zur Bestimmung der Seiten a, b, c des Dreiecks ABC führen die Dreiecke $A'BC$, $B'AC$ und $C'AB$.

Aus $\triangle A'BC$ ergiebt sich

$$a^2 = (A'C)^2 + (A'B)^2 - 2\,A'C\,.\,A'B\cos A',$$

oder mit Benutzung der Gleichungen 6 und 12 aus §. 2 und der Gleichung V., indem man $\cos A'$ aus $\sqrt{1-\sin A'^2}$ bestimmt,

$$\text{X.} \quad a^2 = \frac{(m'+n')^2n''^2t_,^2 + m'^2(m''+n'')^2t_{,,}^2 \pm m'n''\sqrt{4(m'+n')^2(m''+n'')^2t_,^2t_{,,}^2 - q^2r^2P}}{p'}$$

Eben so aus $\triangle B'AC$ und $\triangle C'AB$

$$\text{XI.} \quad b^2 = \frac{(m''+n'')^2n^2t_{,,}^2 + m''^2(m+n)^2t^2 \pm m''n\sqrt{4(m''+n'')^2(m+n)^2t_{,,}^2t^2 - p^2r^2P}}{q'}$$

$$\text{XII.} \quad c^2 = \frac{(m+n)^2n'^2t^2 + m^2(m'+n')^2t_,^2 \pm mn'\sqrt{4(m+n)^2(m'+n')^2t^2t_,^2 - p^2q^2P}}{r'}$$

Aus den Gleichungen X., XI., XII. lassen sich nun auf bekannte Weise auch die Winkel des $\triangle ABC$ berechnen, wie z. B. mittelst des Sinus: $\sin A = \frac{2\Delta}{bc}$, $\sin B = \frac{2\Delta}{ac}$, $\sin C = \frac{2\Delta}{ab}$.

§. 4.

Ueber die Vorzeichen in den Gleichungen X., XI., XII. und Umformung derselben.

Was die Vorzeichen vor den Wurzeln in den Gleichungen X., XI., XII. betrifft, so ist die Wahl derselben nicht willkürlich, sondern abhängig von den Gleichungen I., II., III.

Ergiebt sich aus diesen Gleichungen $a'^2 \lessgtr b'^2 + c'^2$, $b'^2 \lessgtr a'^2 + c'^2$, $c'^2 \lessgtr a'^2 + b'^2$, so ist im ersten Falle $+$, im zweiten $-$ zu nehmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nämlich $a'^2 < b'^2 + c'^2$, so muß $A' < 90^\circ$, also sein Nebenwinkel $BA'C > 90^\circ$, folglich im $\triangle A'BC$ $a^2 > (A'C)^2 + (A'B)^2$, also kann in diesem Falle nur $+$ als Vorzeichen der Wurzel in X. gelten, während, wenn $a'^2 > b'^2 + c'^2$; Winkel $A' > 90^\circ$, der Nebenwinkel $BA'C < 90^\circ$, mithin $a^2 < (A'C)^2 + (A'B)^2$, es kann deshalb vor der Wurzel in diesem Falle nur $-$ als Vorzeichen gelten.

Die Gleichungen X., XI., XII. lassen sich noch weiter umformen. Es ist nämlich:

$$P = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$$

worin $x = \dfrac{m+n}{p} t$, $\quad y = \dfrac{m'+n'}{q} t_,$, $\quad z = \dfrac{m''+n''}{r} t_{,,}$ zu nehmen.

Das kleinste Vielfache der Nenner ist

$$(mm' + mn' + nn')(mm'' + m''n + nn'')(m'm'' + m'n'' + n'n'') = \sqrt{p'}\sqrt{q'}\sqrt{r'}, \text{ also}$$

$$P = \frac{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}{p'^2 q'^2 r'^2},$$

wobei $x = (m+n)\sqrt{p'}\, t$, $\quad y = (m' + n')\sqrt{q'}\, t_,$, $\quad z = (m'' + n'')\sqrt{r'}\, t_{,,}$.

Nun ist $p'q'r' = pqr$, also, wenn man den Zähler mit P' bezeichnet, $q^2 r^2 P = \dfrac{1}{p^2} P'$.

Die Entwicklung von $4(m'+n')^2(m''+n'')^2 t_,^2 t_{,,}^2 - \dfrac{1}{p^2} P'$ giebt $[(m'+n')^2 q' t_,^2 + (m''+n'')^2 r' t_{,,}^2 - (m+n)^2 p' t^2]^2$. Bezeichnet man dies Quadrat mit Q^2, so ist

$$\text{X}'.\quad a^2 = \frac{(m'+n')^2 n''^2 t_,^2 + m'^2 (m''+n'')^2 t_{,,}^2 \pm \dfrac{m'n''}{p} Q}{p'}$$

In analoger Weise ergiebt sich

$$\text{XI}'.\quad b^2 = \frac{(m''+n'')^2 n^2 t_{,,}^2 + m''^2 (m+n)^2 t^2 \pm \dfrac{m''n}{q} R}{q'}$$

$$\text{XII}'.\quad c^2 = \frac{(m+n)^2 n'^2 t^2 + m^2 (m'+n')^2 t_,^2 \pm \dfrac{mn'}{r} S}{r'}$$

wobei $R = (m''+n'')^2 r' t_{,,}^2 + (m+n)^2 p' t^2 - (m'+n')^2 q' t_,^2$,
$S = (m+n)^2 p' t^2 + (m'+n')^2 q' t_,^2 - (m''+n'')^2 r' t_{,,}^2$ zu nehmen ist.

Nun folgt aus Gleichung I., II. und III., §. 3:

$$a'^2 : b'^2 : c'^2 = (m+n)^2 p' t^2 : (m'+n')^2 q' t_,^2 : (m''+n'')^2 r' t_{,,}^2.$$

Ist daher in der umgeformten Gleichung X. der mit Q bezeichnete Ausdruck positiv, so ist auch $b'^2 + c'^2 - a'^2$ positiv, also $a'^2 < b'^2 + c'^2$, mithin $A' < 90^\circ$, der Nebenwinkel $BA'C > 90^\circ$ und deshalb $(A'B)^2 + (A'C)^2 < (BC)^2$, folglich muß $\dfrac{m'n''}{p} Q$ in X. addiert werden, und es gilt von $\pm$ vor diesem Ausdruck $\dfrac{m'n''}{p} Q$ nur das obere Vorzeichen $+$; ist aber Q negativ, so ist auch $b'^2 + c'^2 - a'^2$ negativ, also $a'^2 < b'^2 + c'^2$, mithin $A < 90^\circ$, der Nebenwinkel $BA'C$ aber $> 90^\circ$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und deshalb $(A'B)^2 + (A'C)^2 > a^2$, folglich muß Q addiert werden, und es gilt auch in diesem Falle wiederum nur das $+$-Zeichen vor $\frac{m'n''}{p}Q$. Zu demselben Schluß kommt man auch bei den umgeformten Gleichungen XI. und XII. Wenn also alle drei Eckentransversalen innerhalb des Dreiecks verlaufen, so ist in den drei umgeformten Gleichungen für die Seiten von den beiden Vorzeichen $\pm$ nur das obere $+$ statthaft.

§. 5.

Bestimmung der Abschnitte auf den Eckentransversalen bei Fig. 2 bis 6.

Im Vorhergehenden ist die Auflösung des Dreiecks aus denjenigen Eckentransversalen bestimmt worden, welche innerhalb des Dreiecks verlaufen und sich in drei Punkten schneiden.

Zieht man auch diejenigen Eckentransversalen mit in Betracht, welche die Außenwinkel des Dreiecks durchschneiden, so kann man noch folgende Fälle (unter der Voraussetzung von drei Durchschnittspunkten) unterscheiden: a) alle drei Eckentransversalen verlaufen außerhalb des Dreiecks (Fig. 2); b) zwei verlaufen außerhalb, eine durchschneidet die Fläche des Dreiecks (Fig. 3 bis 6); c) zwei durchschneiden das Dreieck, eine verläuft außerhalb (Fig. 7a und 7b).

Auch für diese Fälle kann man die frühere Bezeichnung beibehalten, nur ist zu bemerken, daß man bei außerhalb des Dreiecks fallenden Eckentransversalen $m + n$ mit $\pm(m - n)$ vertauschen muß, wobei das obere Vorzeichen zu wählen, wenn die außerhalb des Dreiecks fallenden Eckentransversalen die Dreiecksseiten in der Verlängerung (die Richtungen der Seiten im obigen Sinne (§. 1) genommen), das untere, wenn die Eckentransversalen die Dreiecksseiten in der Rückwärtsverlängerung (wie z. B. t, und $t_{,,}$ in Fig. 4) schneiden. Wird das im §. 2 Angegebene berücksichtigt, so lassen sich durch eine analoge Construction zunächst die Abschnitte auf den Eckentransversalen, wie folgt, in den Fällen a, b, c bestimmen, jedoch ist der Fall c, da er im Folgenden (§. 10) nicht zur Anwendung kommt, außer Acht gelassen. Demnach ergeben sich die Bestimmungen der zwölf Abschnitte auf den drei Eckentransversalen in den Fig. 2 bis 6, wie folgt:

I. für Figur 2:

$$1)\ AC' = \frac{n'(m-n)}{mm' - (m-n)n'}\,t \qquad 2)\ DC' = \frac{mm'}{mm' - (m-n)n'}\,t$$

$$3)\ DB' = \frac{nn''}{m''(m-n) + nn''}\,t \qquad 4)\ AB' = \frac{m''(m-n)}{m''(m-n) + nn''}\,t$$

$$5)\ A'E = \frac{m'm''}{m'm'' - n''(m'-n')}\,t_{,} \qquad 6)\ A'B = \frac{n''(m'-n')}{m'm'' - n''(m'-n')}\,t_{,}$$

$$7)\ C'E = \frac{nn'}{nn' + m(m'-n')}\,t_{,} \qquad 8)\ C'B = \frac{m(m'-n')}{nn' + m(m'-n')}\,t_{,}$$

$$9)\ B'F = \frac{mm''}{mm'' - n(m''-n'')}\,t_{,,} \qquad 10)\ B'C = \frac{n(m''-n'')}{mm'' - n(m''-n'')}\,t_{,,}$$

$$11)\ A'F = \frac{n'n''}{n'n'' + m'(m''-n'')}\,t_{,,} \qquad 12)\ A'C = \frac{m'(m''-n'')}{n'n'' + m'(m''-n'')}\,t_{,,}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Figur 3:

1) $AC' = \frac{n'(m+n)}{n'(m+n) - mm'} t$ 2) $C'D = \frac{mm'}{n'(m+n) - mn} t$

3) $AB' = \frac{m''(m+n)}{m''(m+n) - nn''} t$ 4) $B'D = \frac{nn''}{m''(m+n) - nn''} t$

5) $A'E = \frac{m'm''}{m'm'' - n''(m'-n')} t_{,}$ 6) $A'B = \frac{n''(m'-n')}{m'm'' - n''(m'-n')} t_{,}$

7) $C'E = \frac{nn'}{nn' - m(m'-n')} t_{,}$ 8) $C'B = \frac{m(m'-n')}{nn' - m(m'-n')} t_{,}$

9) $B'F = \frac{mm''}{mm'' + n(m''-n'')} t_{,,}$ 10) $B'C = \frac{n(m''-n'')}{mm'' + n(m''-n'')} t_{,,}$

11) $A'F = \frac{n'n''}{n'n'' + m'(m''-n'')} t_{,,}$ 12) $A'C = \frac{m'(m''-n'')}{n'n'' + m'(m''-n'')} t_{,,}$

III. Figur 4:

1) $AC' = \frac{n'(m+n)}{n'(m+n) - mm'} t$ 2) $C'D = \frac{mm'}{n'(m+n) - mm'} t$

3) $AB' = \frac{m''(m+n)}{m''(m+n) - nn''} t$ 4) $B'D = \frac{nn''}{m''(m+n) - nn''} t$

5) $A'E = \frac{m'm''}{m'm'' + n''(n'-m')} t_{,}$ 6) $A'B = \frac{n''(n'-m')}{m'm'' + n''(n'-m')} t_{,}$

7) $C'E = \frac{nn'}{nn' + m(n'-m')} t_{,}$ 8) $C'B = \frac{m(n'-m')}{nn' + m(n'-m')} t_{,}$

9) $B'F = \frac{mm''}{mm'' - n(n''-m'')} t_{,,}$ 10) $B'C = \frac{n(n''-m'')}{mm'' - n(n''-m'')} t_{,,}$

11) $A'F = \frac{n'n''}{n'n'' - m'(n''-m'')} t_{,,}$ 12) $A'C = \frac{m'(n''-m'')}{n'n'' - m'(n''-m'')} t_{,,}$

IV. Figuren 5 und 6:

Fig. 5 — Fig. 6

1) $AC' = \frac{n'(m+n)}{n'(m+n) - mm'} t = \frac{n'(m+n)}{mm' - n'(m+n)} t$

2) $C'D = \frac{mm'}{n'(m+n) - mm'} t = \frac{mm'}{mm' - n'(m+n)} t$

3) $AB' = \frac{m''(m+n)}{m''(m+n) - nn''} t = \frac{m''(m+n)}{nn'' - m''(m+n)} t$

4) $B'D = \frac{nn''}{m''(m+n) - nn''} t = \frac{nn''}{nn'' - m''(m+n)} t$

5) $A'E = \frac{m'm''}{m'm'' - n''(m'-n')} t_{,} = \frac{m'm''}{n''(m'-n') - m'm''} t_{,}$

$$6)\ A'B = \frac{n''(m'-n')}{m'm''-n''(m'-n')}\,t_{,} = \frac{n''(m'-n')}{n''(m'-n')-m'm''}\,t_{,}$$

$$7)\ C'E = \frac{nn'}{nn'-m(m'-n')}\,t_{,} = \frac{nn'}{m(m'-n')-nn'}\,t_{,}$$

$$8)\ C'B = \frac{m(m'-n')}{nn'-m(m'-n')}\,t_{,} = \frac{m(m'-n')}{m(m'-n')-nn'}\,t_{,}$$

$$9)\ B'F = \frac{mm''}{mm''-n(n''-m'')}\,t_{,,} = \frac{mm''}{n(n''-m'')-mm''}\,t_{,,}$$

$$10)\ B'C = \frac{n(n''-m'')}{mm''-n(n''-m'')}\,t_{,,} = \frac{n(n''-m'')}{n(n''-m'')-mm''}\,t_{,,}$$

$$11)\ A'F = \frac{n'n''}{n'n''-m'(n''-m'')}\,t_{,,} = \frac{n'n''}{m'(n''-m'')-n'n''}\,t_{,,}$$

$$12)\ A'C = \frac{m'(n''-m'')}{n'n''-m'(n''-m'')}\,t_{,,} = \frac{m'(n''-m'')}{m'(n''-m'')-n'n''}\,t_{,,}\,.$$

§. 6.

Inhalt des $\triangle$ ABC, Bestimmung der Seiten und Winkel für Fig. 2. Regel über die Vorzeichen.

Aus den Abschnitten der Eckentransversalen (§. 5) lassen sich nun leicht die übrigen Formeln I. bis XII. wie im §. 3 ableiten. Aus diesen sind im Folgenden nur die Formeln für $\triangle$ und Bestimmung der Dreiecksseiten zu Fig. 2 angeführt, d. h. für den Fall, wo alle drei Eckentransversalen außerhalb des Dreiecks verlaufen. Die weitere Ausführung der übrigen Fälle ist im §. 10 gegeben, d. h. unter der Voraussetzung, daß sich alle drei Eckentransversalen in einem einzigen Punkte schneiden. Nun ist $\triangle$ ABC in Fig. 2

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' + \triangle A'BC + \triangle B'AC + \triangle C'AB.$$

Mit Benutzung des §. 5 ergiebt sich eben so wie in §. 3

$$\triangle ABC = \frac{1}{4\,p\,q\,r}\,[(mm'm''+nn'n'')^2 - m'n''p - m''nq - mn'r]\,\sqrt{P'},$$

wobei

$$\begin{aligned}
p &= [mm'-(m-n)n'][mm''-(m''-n'')n]\\
q &= [mm'-(m-n)n'][m'm''-(m'-n')n'']\\
r &= [mm''-(m''-n'')n][m'm''-(m'-n')n'']\\
p' &= [m'm''-(m'-n')n'']^2\\
q' &= [mm''-(m''-n'')n]^2\\
r' &= [mm'-(m-n)n']^2\\
P' &= (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)
\end{aligned}$$

$$x = (m-n)\sqrt{p'}\,t, \quad y = (m'-n')\sqrt{q'}\,t_{,}, \quad z = (m''-n'')\sqrt{r'}\,t_{,,}$$

zu nehmen ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In analoger Weise läßt sich der Inhalt des $\triangle$ ABC in den übrigen Fällen aus den sechs Bestimmungsstücken berechnen, wenn man berücksichtigt, daß

Fig. 3 $\triangle ABC = \triangle B'AC + \triangle C'AB - \triangle A'BC - \triangle A'B'C'$.
Fig. 4 $\triangle ABC = \triangle B'AC + \triangle C'AB - \triangle A'BC - \triangle A'B'C'$.
Fig. 5 $\triangle ABC = \triangle B'AC + \triangle C'AB - \triangle A'BC - \triangle A'B'C'$.
Fig. 6 $\triangle ABC = \triangle A'BC + \triangle A'B'C' - \triangle B'AC - \triangle C'AB$.
Fig. 7_a $\triangle ABC = \triangle A'BC + \triangle B'AC + \triangle C'AB - \triangle A'B'C'$.
Fig. 7_b $\triangle ABC = \triangle A'BC + \triangle C'AB + \triangle A'B'C' - \triangle B'AC$.

Die jedesmaligen Werthe von p, q, r und p′, q′, r′ ergeben sich für die Figuren 3 bis 6 aus §. 5; die Figuren 7_a und 7_b sind nicht weiter in Betracht gezogen, da sie in der zweiten Abtheilung dieser Aufgabe keine Anwendung finden. Auch die Gleichungen X., XI., XII. für die Dreiecksseiten entwickeln sich eben so wie in §. 3 und sollen nur für Figur 2 noch besonders aufgeführt werden. Nimmt man p, q, r, p′, q′, r′ und P′ in dem Sinne, wie eben vorher angegeben, so ist

$$\text{X.}\quad a^2 = (m'-n')^2 n''^2 t_,^2 + m'^2 (m''-n'')^2 t_{,,}^2 \pm m' n'' \sqrt{4(m'-n')^2 (m''-n'')^2 t_,^2 t_{,,}^2 - q^2 r^2 P'}$$

$$\text{XI.}\quad b^2 = (m''-n'')^2 n^2 t_{,,}^2 + m''^2 (m-n)^2 t^2 \pm m'' n \sqrt{4 (m''-n'')^2 (m-n)^2 t_{,,}^2 t^2 - p^2 r^2 P'}$$

$$\text{XII.}\quad c^2 = (m-n)^2 n'^2 t^2 + m^2 (m'-n')^2 t_,^2 \pm m n' \sqrt{4 (m-n)^2 (m'-n'^2) t^2 t_,^2 - p^2 q^2 P'}.$$

Ueber die Wahl des Vorzeichens vor der Wurzel gilt hiebei dieselbe Regel, wie in §. 4 angegeben ist.

Diese drei Gleichungen lassen sich auch noch in analoger Weise weiter umformen, wie in §. 4 geschehen, nämlich so:

$$\text{X}'.\quad a^2 = \frac{(m'-n')^2 n''^2 t_,^2 + m'^2 (m''-n'')^2 t_{,,}^2 \pm \frac{m' n''}{p} Q}{p'}$$

$$\text{XI}'.\quad b^2 = \frac{(m''-n'')^2 n^2 t_{,,}^2 + m''^2 (m-n)^2 t^2 \pm \frac{m'' n}{q} R}{q'}$$

$$\text{XII}'.\quad c^2 = \frac{(m-n^2) n' t^2 + m^2 (m'-n')^2 t_,^2 \pm \frac{m n'}{r} S}{r'}$$

wobei
$$Q = (m'-n')^2 q' t_,^2 + (m''-n'')^2 r' t_{,,}^2 - (m-n)^2 p' t^2$$
$$R = (m''-n'')^2 r' t_{,,}^2 + (m-n)^2 p' t^2 - (m'-n')^2 q' t_,^2$$
$$S = (m-n)^2 p' t^2 + (m'-n')^2 q' t_,^2 - (m''-n'')^2 r' t_{,,}^2.$$

Was die Wahl der Vorzeichen in diesen umgeformten Gleichungen X., XI., XII. betrifft, so ist für diesen Fall, wo alle drei Eckentransversalen außerhalb des Dreiecks verlaufen, in jeder derselben vor dem dritten Gliede im Dividendus nur das —-Zeichen statthaft. Aus §. 5 folgt nämlich für die Seiten des $\triangle$ A′B′C′:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a' = \frac{(mm'm'' + nn'n'')(m - n)}{[mm' - (m - n)n'][mm'' - (m'' - n'')n]} t$$

$$b' = \frac{(mm'm'' + nn'n'')(m' - n')}{[m'm'' - (m' - n')n''][mm' - (m - n)n']} t,$$

$$c' = \frac{mm'm'' + nn'n'')(m'' - n'')}{[mm'' - (m'' - n'')n][m'm'' - (m' - n')n'']} t_{,,}\,, \quad \text{daraus folgt}$$

$$a'^2 : b'^2 : c'^2 := (m - n)^2 p' t^2 : (m' - n')^2 q' t_,^2 : (m'' - n'')^2 r' t_{,,}^2$$

Ist nun in der Gleichung X. die Differenz $(m' - n')^2 q' t_,^2 + (m'' - n'')^2 r' t_{,,}^2 - (m - n)^2 p' t^2$ positiv, so ist auch $b'^2 + c'^2 - a'^2$ positiv, also $a'^2 < b'^2 + c'^2$, mithin $A < 90^0$ und in diesem Falle $(A'B)^2 + (A'C)^2 > a^2$ und deshalb $-\frac{m'n''}{p} Q$ zu nehmen; ist aber obige Differenz negativ, so ist $a'^2 > b'^2 + c'^2$, also auch $A > 90^0$ und $(A'B)^2 + (A'C)^2 < a^2$, folglich muß, da Q negativ, $\frac{m'n''}{p} Q$ subtrahiert werden, und es gilt auch in diesem Falle — als Vorzeichen. Zu demselben Schluß gelangt man bei Gleichung XI. und XII.

II. §. 7.

Alle drei Eckentransversalen schneiden sich in einem einzigen Punkte: 1) innerhalb des Dreiecks Bedingung. Erste Umformung der Verhältniszahlen. Inhaltsbestimmung der Dreiecke ABC und DEF. (Figur 8.)

In den vorhergehenden §§. wurde immer vorausgesetzt, daß die drei Eckentransversalen innerhalb oder außerhalb des Dreiecks sich in drei Punkten schneiden; jetzt soll vorausgesetzt werden, daß sie sich nur in einem einzigen Punkte O schneiden und zwar zunächst innerhalb des Dreiecks (Fig. 8). Fallen nun die drei Punkte A′, B′, C′ in einem Punkt O zusammen, so folgt sofort, daß auch je zwei Abschnitte auf den Eckentransversalen, z. B. AB′ und AC′ gleiche Werthe haben müssen. Setzt man also AB′ = AC′, so ist nach §. 2

$$\frac{m''(m + n)}{nn' + m''(m + n)} = \frac{n'(m + n)}{mm' + n'(m + n)}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{m''}{nn' + m''(m + n)} = \frac{n'}{mm' + n'(m + n)}, \quad \text{also muß}$$

$$mm'm'' = nn'n'' \text{ sein.}$$

Diese Beziehung zwischen den Abschnitten der Dreiecksseiten für Eckentransversalen, die sich innerhalb des Dreiecks in einem Punkte schneiden (die nach Kunze, Geometrie, 5. Anhang III. pag. 168—169 zuerst der Mailänder Johann Ceva aus statischen Principien abgeleitet hat), *) kann

*) Man kann diese Beziehung auch als eine Folgerung aus dem Satze des Menelaus ableiten; cf. Wittstein Planimetrie §. 231 und 232, cf. Wiegand 3. Cursus der Planimetrie §. 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

als charakteristisches Merkmal für den gemeinsamen Durchschnitt der drei Eckentransversalen in einem Punkte betrachtet werden und gilt, wie sich leicht aus §. 5 nachweisen läßt, auch für den Fall, daß sich die drei Eckentransversalen außerhalb des Dreiecks in einem einzigen Punkte schneiden.

Bevor wir nun unsere Aufgabe unter dieser Bedingung weiter verfolgen, soll mit den Verhältniszahlen m, n, m', n', m'', n'' eine Umformung vorgenommen werden, um zu einfacheren Resultaten zu gelangen. Dies kann auf doppelte Weise geschehen,

1) dadurch, daß man

$$m + n = m' + n' = m'' + n'' = 1$$

2) dadurch, daß man $n = n' = n'' = 1$ setzt.

Für den ersten Fall kann man dann n mit $1 - m$, n' mit $1 - m'$, n'' mit $1 - m''$ vertauschen, und man erhält als Bedingungsgleichung für den Durchschnitt der drei Eckentransversalen in einem Punkte

$$mm'm'' = (1-m)(1-m')(1-m''),$$

$$\text{woraus } m'' = \frac{1-m-m'+mm'}{1-m-m'+2mm'} = \frac{1}{1+\dfrac{mm'}{1-m-m'+mm'}}$$

Unter dieser Voraussetzung bekommen die in §. 3 mit p, q, r bezeichneten Ausdrücke folgende Werthe:

1) $p = [1 - m'(1-m)][1 - m(1-m'')]$
2) $q = [1 - m''(1-m')][1 - m'(1-m)]$
3) $r = [1 - m(1-m'')][1 - m''(1-m')]$

Bezeichnet man $[1 - m(1-m'')][1 - m'(1-m)][1 - m''(1-m')]$ mit M, so ist

$$\sqrt{\left(\frac{t}{p}+\frac{t_{,}}{q}+\frac{t_{,,}}{r}\right)\left(-\frac{t}{p}+\frac{t_{,}}{q}+\frac{t_{,,}}{r}\right)\left(\frac{t}{p}-\frac{t_{,}}{q}+\frac{t_{,,}}{r}\right)\left(\frac{t}{p}+\frac{t_{,}}{q}-\frac{t_{,,}}{r}\right)} =$$
$$\frac{1}{M^2}\sqrt{(pt+qt_{,}+rt_{,,})(-pt+qt_{,}+rt_{,,})(pt-qt_{,}+rt_{,,})(pt+qt_{,}-rt_{,,})}$$

Der Factor vor der Wurzel in der Inhaltsformel §. 3

$$\frac{(mm'm''-nn'n'')^2+m'n''p+m''nq+mn'r}{4} \text{ ist gleich}$$

$$\frac{1}{4}(m'n''p+m''nq+mn'r).$$

Entwickelt man das Aggregat $m'n''p + m''nq + mn'r$, so erhält man dasselbe wie das Product der Factoren, die unter dem Ausdruck M vorhin zusammengefaßt sind, und es reduciert sich die Inhaltsformel (§. 3) unter der Voraussetzung, daß $mm'm'' = nn'n''$ und daß $m + n = m' + n' = m'' + n'' = 1$ auf $\triangle ABC = \frac{1}{4M}\sqrt{(pt+qt_{,}+rt_{,,})(-pt+qt_{,}+rt_{,,})(pt-qt_{,}+rt_{,,})(pt+qt_{,}-rt_{,,})}$

worin $M = [1 - m(1-m'')][1 - m'(1-m)][1 - m''(1-m')]$

$p = 1 - m''(1-m') \qquad q = 1 - m(1-m'') \qquad r = 1 - m'(1-m).$

Nimmt man für m'' den oben gefundenen Werth $\frac{1-m-m'-mm'}{1-m-m'-2mm'}$ auf, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$\triangle ABC = \frac{1}{4m'(1-m)(1-m'+mm')}\sqrt{(m't+(1-m)t_{,}+(1-m-m'+2mm')t_{,,})(\;)(\;)(\;)}$$

worin in den Klammern unter der Wurzel die Differenzen

$$(1-m)t_{,}+(1-m-m'+2mm')t_{,,}-m't$$
$$m't+(1-m-m'+2mm')t_{,,}-(1-m)t_{,}$$
$$m't+(1-m)t_{,}-(1-m-m'+2mm')t_{,,}$$ zu ergänzen sind.

An dieser Stelle mag unter denselben, wie vorher angenommenen Bedingungen die Inhaltsbestimmung des Dreiecks DEF, das von den Verbindungslinien der Durchschnittspunkte der drei Eckentransversalen mit den Dreiecksseiten gebildet wird, ihren Platz finden. Dies Dreieck DEF erhält seine Bestimmung (Fig. 1) aus den Dreiecken EDC′, EFA′, DFB′ und A′B′C′, wozu das Nöthige schon im §. 3 angegeben, wobei nur zu bemerken, daß $\triangle A'B'C'$ verschwunden oder auf 0 reduciert ist, und die Winkel EC′D, EA′F und DB′F in Fig. 8 zu benachbarten Winkeln am Scheitel O geworden sind. Die Entwicklung des Inhalts von $\triangle DEF$ führt zu der Formel

$$\triangle DEF = \frac{m(1-m')(1-m-m'+2mm')}{2(1-m'+mm')^3}\sqrt{P}$$

wobei $P = (pt+qt_{,}+rt_{,,})(-pt+qt_{,}+rt_{,,})(pt-qt_{,}+rt_{,,})(pt+qt_{,}-rt_{,,})$

Wird hierin wie oben $m'' = \frac{1-m-m'+mm'}{1-m-m'+2mm'}$ gesetzt, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$\triangle DEF = \frac{m(1-m')}{2(1-m'+mm')(1-m-m'+2mm')}\sqrt{P}$$

wenn man für P denselben Ausdruck nimmt, wie vorher in der Formel für $\triangle ABC$ angegeben.

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorher gefundenen für $\triangle ABC$, so ergiebt sich

$$\triangle DEF : \triangle ABC = \frac{m(1-m')}{1-m-m'+2mm'} : \frac{1}{2m'(1-m)}$$
$$= 2mm'(1-m)(1-m') : (1-m-m'+2mm'),$$ also
$$\triangle DEF = \frac{2mm'(1-m)(1-m')}{1-m-m'+2mm'}\triangle ABC$$

z. B. für $m = m' = m'' = 1/2$, also für seitenhalbierende Eckentransversalen ist $\triangle DEF = 1/4 \triangle ABC$

für $m = 1/2$, $m' = 2/3$ ist $\triangle DEF = 2/9 \triangle ABC$

$m = 1/2$, $m' = 3/5$ ist $\triangle DEF = 6/25 \triangle ABC$ u. s. w.

Ist nun das Dreieck ABC gegeben, und fragt es sich, bei welcher Theilung der Seiten durch die drei Eckentransversalen, die sich in einem Punkte innerhalb des Dreiecks schneiden, das Dreieck DEF, welches durch Verbindung der Fußpunkte der drei Eckentransversalen entsteht, seinen größten Werth erhalte, so hängt die Entscheidung darüber offenbar davon ab, für welche Werthe von m und m′ der Quotient $\frac{mm'(1-m)(1-m')}{1-m-m'+2mm'}$ ein Maximum wird. Bezeichnet man die veränderlichen

Werthe von m und m' mit x und y, so ist zu bestimmen, wann der Quotient $\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-x-y+2+y}$ oder $\frac{xy-x^2y-xy^2+x^2y^2}{1-x-y+2xy}$ ein Maximum wird. Differenziiert man nun diesen Quotienten nach der bekannten Methode zur Bestimmung eines Maximums für zwei Veränderliche einmal nach x, sodann nach y und setzt diese Differenziale $= 0$, so erhält man (wenn man im ersten Falle mit y, im andern mit x reduciert)

$$1)\quad 1-2x-2y+4xy+x^2+y^2-3x^2y-2xy^2+2x^2y^2=0$$
$$2)\quad 1-2x-2y+4xy+x^2+y^2-3xy^2-2x^2y+2x^2y^2=0.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3)\quad 2x+3y=2y+3x, \text{ also } x=y.$$

Wird $y=x$ in 1) substituiert, so muß

$$4)\quad 1-4x+6x^2-5x^3+2x^4=0 \text{ sein.}$$

Die reellen Wurzeln dieser Gleichung 4) sind $+1$ und $+\frac{1}{2}$, da aber nach den vorher angenommenen Voraussetzungen x nur ein Bruch sein kann (<1), so folgt daraus, daß für den Werth $m=m'=\frac{1}{2}$ der Inhalt des $\triangle$ DEF ein Maximum wird, d. h. von allen Fußpunktdreiecken hat das den seitenhalbierenden Eckentransversalen zugehörige Fußpunktdreieck den größten Inhalt, nämlich von $\frac{1}{4}\triangle ABC$.

§. 8.

Zweite Berechnung des Inhaltes von $\triangle ABC$ für $n=n'=n''=1$, Bestimmung der Seiten und Winkel.

Wählt man m, m', m'', so daß $n=n'=n''=1$ wird, so folgt zunächst aus $mm'm''=nn'n''=1$ $m''=\frac{1}{mm'}$, und es ergiebt sich die Bestimmung des $\triangle$ ABC aus den fünf Stücken t, $t_,$, $t_{,,}$, m, m'.

Dann ist $p=\frac{(1+m+mm')^2}{mm'}$, $q=\frac{(1+m+mm')^2}{m}$, $r=\frac{(1+m+mm')^2}{m^2m'}$

$$p'=\frac{(1+m+mm')^2}{m^2},\quad q'=\frac{(1+m+mm')^2}{m^2m'^2},\quad r'=(1+m+mm')^2$$

$$\frac{m+n}{p}=\frac{mm'(m+1)}{(1+m+mm')^2},\quad \frac{m'+n'}{q}=\frac{m(m+1)}{(1+m+mm')^2},\quad \frac{m''+n''}{r}=\frac{m(1+mm')}{(1+m+mm')^2}$$

Ferner ist $\triangle ABC=\triangle BOC+\triangle AOC+\triangle AOB$

$$\triangle ABC=\frac{m+\frac{1}{m'}+\frac{m}{m'}}{4m'(1+m+mm')^2}\sqrt{P}=\frac{1}{4m'(1+m+mm')}\sqrt{P}$$

wobei $P=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

$x=(1+m)m't,\quad y=(1+m')t_,,\quad z=(1+mm')t_{,,}$ genommen ist.

Die Berechnung des Fußpunktdreiecks DEF ergiebt sich, wie in §. 7,
aus $\triangle EC'D + \triangle DB'F + \triangle EA'F$ (Fig. 1)
oder aus $\triangle EOD + \triangle DOF + \triangle EOF$ (Fig. 8).

Nun ist 1) $\triangle EC'D = \frac{EC' \cdot C'D}{2} \sin C'$

$$= \frac{m}{4(1+m)(1+m')(1+m+mm')^2}\sqrt{P}$$

2) $$\triangle DB'F = \frac{m^2}{4(1+m)(1+mm')(1+m+mm')^2}\sqrt{P}$$

3) $$\triangle EA'F = \frac{m}{4(1+m')(1+mm')(1+m+mm')^2}\sqrt{P}.$$

Aus 1 + 2 + 3 folgt

$$\triangle DEF = \frac{m}{2(1+m)(1+m')(1+mm')(1+m+mm')}\sqrt{P}$$

wobei P denselben Werth wie in der vorhergehenden Inhaltsgleichung für $\triangle ABC$ hat, folglich:

$$\triangle DEF = \frac{2mm'}{(1+m)(1+m')(1+mm')}\triangle ABC,$$

z. B. für $m = m' = 1$, d. h. für seitenhalbierende Eckentransversalen
ist $\triangle DEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$;

für $m = 1$, $m' = 2$,
ist $\triangle DEF = \frac{2}{9} \triangle ABC$;

für $m = 1$, $m' = \frac{3}{2}$,
ist $\triangle DEF = \frac{6}{25} \triangle ABC$.

Man erhält also dieselben Resultate für den Inhalt von $\triangle DEF$, wie in den §. 7 gegebenen Beispielen, wie es sein muß, da die hier angenommenen Werthe von m und m' den in §. 7 gegebenen entsprechend gewählt sind.

Zur Bestimmung der Dreiecksseiten dienen die Gleichungen in §. 3, indem man in denselben m'' durch $\frac{1}{mm'}$ ersetzt. Dann ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$\text{X.}\quad a^2 = \frac{m^2(1+m')^2t_,^2 + (1+mm')^2t_{,,}^2 \pm m[(1+m')^2t_,^2 + (1+mm')^2t_{,,}^2 - m'^2(1+m)^2t^2]}{(1+m+mm')^2}$$

$$\text{XI.}\quad b^2 = \frac{(1+mm')^2t_{,,}^2 + (1+m)^2t^2 \pm \frac{1}{m'}[m'^2(1+m)^2t^2 + (1+mm')^2t_{,,}^2 - (1+m')^2t_,^2]}{(1+m+mm')^2}$$

$$\text{XII.}\quad c^2 = \frac{(1+m)^2t^2 + m^2(1+m')^2t_,^2 \pm \frac{m}{m'}[m'^2(1+m)^2t^2 + (1+m')^2t_,^2 - (1+mm')^2t_{,,}^2]}{(1+m+mm')^2}$$

Die Bestimmung der Dreieckswinkel ist mittelst der cosinus aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleitet, wobei das obere Vorzeichen + als das allein gültige (cf. §. 9) angenommen worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $\cos\alpha =$

$$\frac{m'(1+m)^2[(1+m')(1+mm')+1]t^2+(1+m')^2[m(1-m')-1]t_{,}^2+(1+mm')^2[1-m(1+m')]t_{,,}^2}{2\sqrt{(1+m')(1+mm')[m'(1+m)^2t^2-(1+m')t_{,}^2+(1+mm')^2t_{,,}^2][m'(1+m)^2t^2+m(1+m')^2t_{,}^2-m(1+mm')t_{,,}^2]}}$$

2) $\cos\beta =$

$$\frac{(1+m')^2[1+m(1+m'+2mm')]t_{,}^2+(1+m)^2m'^2(m-mm'-1)t^2+(1+mm')^2(mm'-m-1)t_{,,}^2}{2\sqrt{m'(1+m)(1+mm')[m(1+m')^2t_{,}^2+(1+mm')^2t_{,,}^2-m(1+m)m'^2t^2][m'(1+m)^2t^2+m(1+m')^2t_{,}^2-m(1+mm')t_{,,}^2]}}$$

3) $\cos\gamma =$

$$\frac{(1+mm')^2[(1+m)(1+m')+m']t_{,,}^2+(mm'-m-1)(1+m')^2t_{,}^2+m'^2(1-m-mm')(1+m)^2t^2}{2\sqrt{m'(1+m)(1+m')[m(1+m')^2t_{,}^2+(1+mm')^2t_{,,}^2-m(1+m)m'^2t^2][m'(1+m)^2t^2+(1+mm')^2t_{,,}^2-(1+m')t_{,}^2]}}$$

Wird in Gleichung 1) $m = m' = m'' = 1$ gesetzt, so ist für seitenhalbierende Eckentransversalen

$$\cos\alpha = \frac{5t^2-t_{,}^2-t_{,,}^2}{2\sqrt{(2t^2+2t_{,,}^2-t_{,}^2)(2t^2+2t_{,}^2-t_{,,}^2)}}$$ u. s. w., und für ein gleichseitiges Dreieck

$\cos\alpha = {}^1/_2$, wie es sein muß.

§. 9.

Gültigkeit der Formeln des §. 3. Regel über die Vorzeichen.

Figur 8a.

In §. 7 und §. 8 ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die Formeln für Inhalt, Seiten und Winkel des $\triangle ABC$, wie sie in §. 3 abgeleitet, auch für den Fall gültig bleiben, daß die drei Eckentransversalen sich in einem einzigen Punkte schneiden. In diesem §. 9 soll die Berechtigung hiezu nachgewiesen und die Wahl über die Vorzeichen in den Gleichungen X. bis XII. entschieden werden. In §. 8 ist nämlich $\triangle ABC$ berechnet worden mit Hülfe der Gleichungen von §. 2 und §. 3. Da nun aber in Fig. 8—12 $\triangle A'B'C'$ verschwindet, so wird

$$\sin A' = \frac{2\triangle A'B'C'}{b'c'}, \text{ d. h. } = \frac{0}{0}.$$

Hebt man nun $(mm'm''-nn'n'')^2$ gegen $(mm'm''-nn'n'')^2$, so ergiebt der reducierte Bruch den sinus des Nebenwinkels von A' und dieser ist in Fig. 8 bei $\sin COB$ zu Grunde gelegt. Bestimmt man $\cos COB$ aus $\sqrt{1-\sin COB^2}$ und setzt man $n=n'=n''=1$, so erhält man

$$\text{I.}\quad \cos COB = \pm\frac{(1+m')^2t_{,}^2+(1+mm')^2t_{,,}^2-m'^2(1+m)^2t^2}{2(1+m')(1+mm')t_{,}t_{,,}}$$

$$\text{II.}\quad \cos AOC = \pm\frac{(1+mm')^2t_{,,}^2+m'^2(1+m)^2t^2-(1+m')^2t_{,}^2}{2(1+m)(1+mm')tt_{,,}}$$

$$\text{III.}\quad \cos AOB = \pm\frac{(1+m)^2m'^2t^2+(1+m')^2t_{,}^2-(1+mm')^2t_{,,}^2}{2(1+m)(1+m')tt_{,}}$$

Man kann aber auch diese Gleichungen direct aus den Dreiecken COB, AOC und AOB ableiten. Zu dem Ende mag an dieser Stelle folgendes Lemma eingeschoben werden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den drei Seiten eines Dreiecks eine der drei Eckentransversalen, z. B. t, zu berechnen, wenn das Verhältnis m:1 der beiden Abschnitte (BD:DC Fig. 8a.), welche dieselbe auf der Seite a bildet, gegeben ist. — Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) die Eckentransversale BD verläuft innerhalb, 2) BD' außerhalb des Dreiecks.

Erster Fall:

Es sei BD:DC = m:1, so ist

$$\triangle ACD : \triangle ABC = CD : a = \frac{1}{m+1} : 1 = 1 : (1+m), \text{ also}$$

$$1)\quad \triangle ABC = (1+m) \triangle ADC.$$

Nun ist $\triangle ADC = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{a}{1+m}+b+t\right)\left(-\frac{a}{1+m}+b+t\right)\left(\frac{a}{1+m}-b+t\right)\left(\frac{a}{1+m}+b-t\right)}$

$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}$.

Setzt man diese Werthe für $\triangle ADC$ und $\triangle ABC$ in Gleichung 1) ein und löset dieselbe dann nach t auf, so ergiebt sich

$$t^2 = \frac{a^2}{(1+m)^2} + b^2 \pm \frac{1}{1+m}(a^2+b^2-c^2)\ .$$

Ist nun 1) Dreieckswinkel $C > 90^0$, so muß $t^2 > \frac{a^2}{(1+m)^2} + b^2$, folglich $\pm(a^2+b^2-c^2)$ positiv genommen werden. Dann ist aber $c^2 > a^2 + b^2$, folglich kann nur das —-Zeichen gelten.

2) Ist Winkel $C < 90^0$, so muß $t^2 < \frac{a^2}{(1+m)^2} + b^2$, folglich $\pm(a^2+b^2-c^2)$ negativ genommen werden. Dann ist aber $c^2 < a^2+b^2$, folglich kann wieder nur — als Vorzeichen gelten. Es ist also in jedem Falle, wenn t innerhalb des Dreiecks verläuft,

$$\text{I.}\quad t^2 = \frac{a^2}{(1+m)^2} + b^2 - \frac{a^2}{1+m} - \frac{b^2}{1+m} + \frac{c^2}{1+m}$$

$$= \frac{a^2}{(1+m)^2}[m(1+m)b^2 - ma^2 + (1+m)c^2.$$

Zweiter Fall: t verläuft außerhalb des Dreiecks (AD').

Dann ist $\triangle AD'C = \frac{1}{m-1}\triangle ABC$, und es ergiebt eine analoge Entwicklung, wie im ersten Fall

$$t^2 = \frac{a^2}{(m-1)^2} + b^2 \pm \frac{1}{m-1}(a^2+b^2-c^2)\ .$$

Ist nun der Außenwinkel $C' > 90^0$, so muß $t^2 > \frac{a^2}{(m-1)^2} + b^2$, dann ist aber, weil Dreieckswinkel $C < 90^0$, $(a^2+b^2-c^2)$ positiv, folglich nur das + als Vorzeichen statthaft.

Ist aber Winkel $C > 90^0$ und der Außenwinkel $C' < 90^0$, so muß $t^2 < \frac{a^2}{(m-1)^2} + b^2$, und da in diesem Falle $(a^2+b^2-c^2)$ negativ, so kann wiederum nur + als Vorzeichen genommen werden.

Es ist also in jedem Falle, wenn t außerhalb des Dreiecks verläuft,

$$\text{II.}\quad t^2 = \frac{a^2}{(m-1)^2} + b^2 + \frac{1}{m-1}(a^2+b^2-c^2), \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{(m-1)^2}\left[m a^2 + m(m-1) b^2 - (m-1) c^2\right].$$

Löset man die mit I. bezeichnete Gleichung nach a^2 auf, so ist

$$a^2 = (m+1) b^2 + \frac{m+1}{m} c^2 - \frac{(m+1)^2}{m} t^2.$$

Nun entspricht im $\triangle$ OBC (Fig. 8): die Seite BC der Seite a, OC der Seite b, OB der Seite c, OD (der untere Abschnitt der Eckentransversale AD) dem t, und es ist $OB = \frac{m(1+m')}{1+m+mm'} t_{,}$, $OC = \frac{1+mm'}{1+m+mm'} t_{,,}$, $OD = \frac{mm'}{1+m+mm'} t$.

Werden diese Werthe in obiger Gleichung für a^2 substituiert, so erhält man mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung für $\triangle$ ABC (Fig. 8) die Gleichung

$$\text{X.}\quad a^2 = \frac{1+m}{(1+m+mm')^2}\left[m(1+m')t_{,}^2 + (1+mm')^2 t_{,,}^2 - mm'^2(1+m)t^2\right].$$

Dies ist dieselbe Gleichung, wie die in §. 8 gefundene, wenn man daselbst von den beiden Vorzeichen $\pm$ das obere $+$ nimmt. Entwickelt man in analoger Weise die Gleichungen für b^2 und c^2, so erhält man

$$\text{XI.}\quad b^2 = \frac{1+m'}{m'(1+m+mm')^2}\left[m'(1+m)^2 t^2 + (1+mm')^2 t_{,,}^2 - (1+m')t_{,}^2\right].$$

$$\text{XII.}\quad c^2 = \frac{1+mm'}{m'(1+m+mm')^2}\left[m'(1+m)^2 t^2 + m(1+m')^2 t_{,}^2 - m(1+mm')t_{,,}^2\right].$$

Die Vergleichung von XI. und XII. mit den entsprechenden in §. 8 zeigt wiederum, daß dort von den beiden Vorzeichen nur $+$ zulässig.

Was die Gleichung II. ($t^2 =$) anbetrifft, so wird dieselbe im folgenden §. 10 ihre Anwendung finden.

Die Gleichungen X., XI., XII. kann man auch benutzen, um die Bestimmung der Winkel um O direct (Fig. 8) abzuleiten und den Zusammenhang mit Gleichung V. §. 3, worauf die folgenden und auch die Inhaltsgleichung IX. begründet sind, nachzuweisen.

Es ist nämlich $\cos COB = \frac{(OC)^2+(OB)^2-a^2}{2\,OC\,.\,OB}$, und wenn man darin die vorhin angegebenen Werthe von a^2, OC, OB substituiert, so ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \cos COB = \frac{m'(m+1)^2 t^2 - (m'+1)^2 t_{,}^2 - (1+mm')^2 t_{,,}^2}{2(1+m')(1+mm')t_{,}t_{,,}}$$

$$\text{II.}\quad \cos AOC = \frac{(1+m')t_{,}^2 - m'^2(1+m)^2 t^2 - (1+mm')^2 t_{,,}^2}{2(1+m)(1+mm')t\,t_{,,}}$$

$$\text{III.}\quad \cos AOB = \frac{(1+mm')^2 t_{,,}^2 - m'^2(1+m)^2 t^2 - (1+m')^2 t_{,}^2}{2(1+m)(1+m')t\,t_{,}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alle diese drei Gleichungen stimmen mit den vorhin aus §. 3 abgeleiteten überein, wenn man daselbst — als Vorzeichen wählt, und somit ist auch die Gültigkeit der Gleichungen V. bis IX. auch für den Fall nachgewiesen, daß die Eckentransversalen wie in Fig. 8 sich in einem einzigen Punkte schneiden.

§. 10.

Zweiter Fall. Die drei Eckentransversalen schneiden sich in einem Punkte außerhalb des Dreiecks (Fig. 9—12). Inhalt, Seiten und Winkel des Dreiecks ABC.

Nachdem in §. 8 und §. 9 der Fall erörtert, wo alle drei Eckentransversalen innerhalb des Dreiecks verlaufend sich in einem Punkte schneiden, soll nun die Bestimmung des $\triangle$ ABC für den Fall gegeben werden, wenn der gemeinsame Durchschnittspunkt der Eckentransversalen außerhalb des Dreiecks fällt, wobei die Verhältniszahlen m : n wie in §. 8 genommen sind. Nimmt man die Richtung der Seiten in dem Sinne, wie sie ein Umschreiten des Dreiecks von der Ecke A über B nach C und von C zurück nach A ergiebt, so bestimmt sich daraus sofort, in welchem Sinne die Vorwärts- oder Rückwärtsverlängerung der Seiten des Dreiecks zu denken ist. Schneiden sich nun alle drei Eckentransversalen außerhalb des Dreiecks in einem Punkte O, so muß unter den Eckentransversalen immer eine (AD) sein, welche das $\triangle$ durchschneidet, während die beiden andern außerhalb desselben verlaufen (cf. Fig. 9—12). Dabei können drei Fälle unterschieden werden: 1) die beiden außerhalb des $\triangle$ verlaufenden Eckentransversalen treffen die Verlängerungen der Seiten CA und AB in E und F (Fig. 9); 2) die Rückwärtsverlängerungen dieser Seiten (Fig. 10); 3) die eine t, trifft die Vorwärtsverlängerung von CA, die andere t,, die Rückwärtsverlängerung von AB, und zwar liegt O a) innerhalb des Winkels A (Fig. 11), oder b) innerhalb des Scheitelwinkels von A (Fig. 12). Für alle drei Fälle (Fig. 9—12) ergiebt sich in gleicher Weise wie in §. 9, daß sin COB dem sin BA′C, sin AOC dem sin AB′C und sin AOB dem sin AC′B entspricht, und man kann das $\triangle$ ABC aus denselben Formeln bestimmen, wie in §. 3 angegeben.

I. Inhaltsbestimmung des Dreiecks. (Fig. 9—12.)

Erster Fall. Fig. 9.

Zur Berechnung des Inhalts dienen die Gleichungen

$$p = \frac{(1+m-mm')^2}{mm'} \qquad q = \frac{(1+m-mm')^2}{m} \qquad r = \frac{(1+m-mm')^2}{m^2m'}$$

$$p' = \frac{(1+m-mm')^2}{m^2} \qquad q' = \frac{(1+m-mm')^2}{m^2m'^2} \qquad r' = (1+m-mm')^2$$

$$\frac{m+n}{p} = \frac{mm'(1+m)}{(1+m-mm')^2}, \qquad \frac{m'-n'}{q} = \frac{m(m'-1)}{(1+m-mm')^2}, \qquad \frac{m''-n''}{r} = \frac{m(1-mm')}{(1+m-mm')^2}$$

Nun ist $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OAC - \triangle OBC$

$$= \frac{\frac{m}{m'} + \frac{1}{m'} - m}{4m'(1+m-mm')^2}\sqrt{P}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{4m'(1+m-mm')}\sqrt{P}$$

wobei $P = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

$$x = m'(1+m)t, \quad y = (m'-1)t_{,}, \quad z = (1-mm')t_{,,}.$$

Determination.

Es muß $1 > mm'$, also $(1-mm')$ positiv sein; denn wäre $mm' > 1$, so müßte $\frac{1}{mm'} < 1$, d. h. $m'' < 1$ sein, mithin könnte $t_{,,}$ die Seite c nicht in der Vorwärtsverlängerung schneiden, wie doch in diesem Falle vorausgesetzt ist.

Zweiter Fall. Fig. 10.

Es gelten die Gleichungen

$$p = \frac{(1+m-mm')^2}{mm'}, \quad q = \frac{(1+m-mm')^2}{m}, \quad r = \frac{(1+m-mm')^2}{m^2m'} \text{ u. s. w.}$$

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OAC - \triangle OBC$$

$$\varDelta = \frac{1}{4m'(1+m-mm')}\sqrt{P}$$

$$P = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

$$x = m'(1+m), \quad y = 1-m', \quad z = mm'-1.$$

Determination.

Es muß immer $mm' > 1$ (denn wäre $mm' < 1$, also $m'' > 1$, so müßte $t_{,,}$ die Vorwärtsverlängerung der Seite c schneiden im Widerspruch mit der Voraussetzung), ferner $m' < 1$ (da $t_{,}$ die Seite b in der Rückwärtsverlängerung schneidet), folglich auch $m > mm'$, also um so mehr $1 + m > mm'$.

Dritter Fall. Fig. 11 und 12.

Es gelten die Gleichungen $p = \frac{(1+m-mm')^2}{mm'} = \frac{(mm'-m-1)^2}{mm'}$

$$q = \frac{(1+m-mm')^2}{m} = \frac{(mm'-m-1)^2}{m}$$

$$r = \frac{(1+m-mm')^2}{m^2m'} = \frac{(mm'-m-1)^2}{m^2m'}$$

$$\triangle ABC = \triangle ABO + \triangle ACO - \triangle BCO \quad \text{(Fig. 11)}$$

$$\triangle ABC = \triangle BCO - \triangle ABO - \triangle ACO \quad \text{(Fig. 12)}$$

$$\triangle ABC = \pm\frac{1}{4m'(1+m-mm')}\sqrt{P}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das obere Vorzeichen + gilt für Fig. 11, das untere — für Fig. 12.

$$P = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$$

$$x = m'(1 + m)\,t, \qquad y = (m' - 1)\,t_,, \qquad z = (mm' - 1)\,t_{,,}.$$

Determination.

Es muß immer $mm' > 1$ sein, denn wäre $mm' < 1$ oder $m'' > 1$, so müßte $t_{,,}$ die Seite c in der Verlängerung schneiden im Widerspruch mit der Voraussetzung; ist dann $1 + m > mm'$, so gilt + als Vorzeichen in der gemeinsamen Inhaltsformel, ist aber $1 + m < mm'$, so gilt — als Vorzeichen.

II. Bestimmung der Seiten.

1) Fig. 9.

Da eine Eckentransversale das $\triangle$ durchschneidet, was hier von t angenommen, so ist (cf. §. 9)

$$1)\ a^2 = \frac{1 + m}{(1 + m - mm')^2}\left[(m' - 1)^2 t_,^2 + (1 - mm')^2 t_{,,}^2 - mm'^2 (1 + m)\,t^2\right].$$

Für b^2 und c^2 ergiebt die in §. 9 abgeleitete Gleichung

$$\text{II.}\ t^2 = \frac{1}{(m - 1)^2}\left[m a^2 + m(m - 1)\,b^2 - (m - 1)\,c^2\right]$$ die zugehörigen Werthe.

Löset man nämlich II. nach a^2 auf, so ist

$$a^2 = \frac{(m - 1)^2}{m}\,t^2 - (m - 1)\,b^2 + \frac{m - 1}{m}\,c^2.$$

Nun ist in Fig. 9, wenn man $a = AC$ nimmt,

$$t = OE = \frac{1}{1 + m - mm'}\,t_,$$

$$b = OA = \frac{1 + m}{1 + m - mm'}\,t$$

$$c = OC = \frac{1 - mm'}{1 + m - mm'}\,t_{,,}$$

Hieraus folgt

$$2)\ b^2 = \frac{m' - 1}{m'(1 + m - mm')^2}\left[(m' - 1)\,t_,^2 + (1 - mm')^2 t_{,,}^2 - m'(1 + m)^2 t^2\right].$$

Eben so folgt

$$3)\ c^2 = \frac{1 - mm'}{m'(1 + m - mm')^2}\left[m'(1 + m)^2 t^2 - m(m' - 1)^2 t_,^2 + m(1 - mm')\,t_{,,}^2\right].$$

Die Winkel lassen sich eben so bestimmen wie §. 8.

Beispiel.

Es sei $m = \frac{1}{3}$, $m' = 2$

$$16\,t^2 = 13\,a^2, \quad t_,^2 = 3\,a^2, \quad t_{,,}^2 = 7\,a^2\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann ist

$$\Delta = \frac{1}{48}\sqrt{(8t+3t_,+t_{,,})(-8t+3t_,+t_{,,})(8t-3t_,+t_{,,})(8t+3t_,-t_{,,})} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

und $a = b = c$, also das $\triangle$ gleichseitig mit der Seite a.

2) Fig. 10.

$$1)\ a^2 = \frac{1+m}{(1+m-mm')^2}\left[m(1-m')^2t_,^2 + (mm'-1)^2t_{,,}^2 - mm'^2(1+m)t^2\right]$$

$$2)\ b^2 = \frac{1-m'}{m'(1+m-mm')^2}\left[(1-m')t_,^2 + m'(1+m)^2t^2 - (mm'-1)^2t_{,,}^2\right]$$

$$3)\ c^2 = \frac{mm'-1}{m'(1+m-mm')^2}\left[m(1-m')^2t_,^2 + m(mm'-1)t_{,,}^2 - m'(1+m)^2t^2\right]$$

z. B. für $m = 4$, $m' = \frac{1}{2}$, $25t^2 = 21a^2$, $t_,^2 = t_{,,}^2 = 3a^2$ ist

$$\Delta = \frac{1}{24}\sqrt{(5t+t_,+2t_{,,})(-5t+t_,+2t_{,,})(5t-t_,+2t_{,,})(5t+t_,-2t_{,,})} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$a = b = c$, also das zugehörige $\triangle$ ABC gleichseitig.

3) Fig. 11 und 12.

Die folgenden Gleichungen gelten sowohl für Fig. 11 wie Fig. 12.

$$1)\ a^2 = \frac{m+1}{(1+m-mm')^2}\left[m(m'-1)^2t_,^2 + (mm'-1)^2t_{,,}^2 - mm'^2(1+m)t^2\right]$$

$$2)\ b^2 = \frac{m'-1}{m'(1+m-mm')^2}\left[(mm'-1)^2t_{,,}^2 + (m'-1)t_,^2 - m'(1+m)^2t^2\right]$$

$$3)\ c^2 = \frac{mm'-1}{m'(1+m-mm')^2}\left[m(m'-1)^2t_,^2 + m(mm'-1)t_{,,}^2 - m'(1+m)^2t^2\right].$$

Beispiel zu Fig. 11.

$m = \frac{2}{3}$, $m' = 2$, $25t^2 = 19a^2$, $t_,^2 = 3a^2$, $t_{,,}^2 = 13a^2$, giebt

$$\Delta = \frac{1}{24}\sqrt{(10t+3t_,+t_{,,})(-10t+3t_,+t_{,,})(10t-3t_,+t_{,,})(10t+3t_,-t_{,,})} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$a = b = c$.

Beispiel zu Fig. 12.

Es sei $m = 1$, $m' = 3$, $4t^2 = 3a^2$, $4t_,^2 = 4t_{,,}^2 = 7a^2$, so ist

$$\Delta = \frac{1}{3}\sqrt{(3t+t_,+t_{,,})(-3t+t_,+t_{,,})(3t-t_,+t_{,,})(3t+t_,-t_{,,})} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$a = b = c$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anhang.

§. 11.

Beziehungen zwischen den Abschnitten der Eckentransversalen und den Verhältniszahlen m : n und Bestimmung des Dreiecks aus den Abschnitten der Eckentransversalen für den Fall, daß sie sich in einem einzigen Punkte schneiden.

In den vorhergehenden Paragraphen ist das Dreieck aus drei Eckentransversalen und den Verhältniszahlen der Abschnitte, welche die Transversalen auf den Seiten bilden, die sie durchschneiden, bestimmt worden; im folgenden sollen die Beziehungen zwischen diesen Abschnitten und den Verhältniszahlen (m : n) nachgewiesen und sodann die Bestimmung des Dreiecks aus den Abschnitten eben dieser Eckentransversalen für den Fall, daß sie sich in einem einzigen Punkte schneiden, abgeleitet werden. Dabei sollen die Abschnitte auf den Eckentransversalen, in welche sie sich gegenseitig theilen, als obere und untere unterschieden und mit t^{o} t^{u} u. s. w. bezeichnet werden, je nachdem sie in einer Ecke oder Seite endigen.

Nach Feststellung dieser Bezeichnung ergiebt sich aus den in §. 2 abgeleiteten Gleichungen für Fig. 1:

Erster Fall.

Die drei Eckentransversalen schneiden sich in einem Punkte innerhalb des Dreiecks.

$$1)\quad \frac{AC'}{t}=\frac{t^{o}}{t}=\frac{1+m}{1+m+mm'} \qquad \frac{BA'}{t'}=\frac{t_{,}^{o}}{t_{,}}=\frac{1+m'}{1+m'+m'm''} \qquad \frac{CB'}{t_{,,}}=\frac{t_{,,}^{o}}{t_{,,}}=\frac{1+m''}{1+m''+mm''}$$

$$2)\quad \frac{DB'}{t}=\frac{t^{u}}{t}=\frac{1}{1+m''+mm''} \qquad \frac{EC'}{t_{,}}=\frac{t_{,}^{u}}{t_{,}}=\frac{1}{1+m+mm'} \qquad \frac{FA'}{t_{,,}}=\frac{t_{,,}^{u}}{t_{,,}}=\frac{1}{1+m'+m'm''}$$

Fallen A′, B′, C′ in einem Punkte O zusammen, so ist $m''=\frac{1}{mm'}$, und die Gleichungen 1) und 2) nehmen folgende Gestalt an: 1) im Falle, daß die Eckentransversalen sich in einem Punkte innerhalb des Dreiecks schneiden:

$$1)\quad \frac{t^{o}}{t}=\frac{1+m}{1+m+mm'} \qquad \frac{t_{,}^{o}}{t_{,}}=\frac{m(1+m')}{1+m+mm'} \qquad \frac{t_{,,}^{o}}{t_{,,}}=\frac{1+mm'}{1+m+mm'}$$

$$2)\quad \frac{t^{u}}{t}=\frac{mm'}{1+m+mm'} \qquad \frac{t_{,}^{u}}{t_{,}}=\frac{1}{1+m+mm'} \qquad \frac{t_{,,}^{u}}{t_{,,}}=\frac{m}{1+m+mm'}$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3)\quad \frac{t^{o}}{t^{u}}=\frac{1+m}{mm'} \qquad \frac{t_{,}^{o}}{t_{,}^{u}}=m(1+m') \qquad \frac{t_{,,}^{o}}{t_{,,}^{u}}=\frac{1+mm'}{m}$$

$$4)\quad \frac{t^{o}\,t_{,}^{o}\,t_{,,}^{o}}{t^{u}\,t_{,}^{u}\,t_{,,}^{u}}=\frac{(1+m)(1+m')(1+m'')}{mm'm''}=\frac{(1+m)(1+m')(1+mm')}{mm'}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Addiert man die Gleichungen unter 1) und 2), so erhält man die bekannten Gleichungen

$$\text{I.}\quad \frac{t^0}{t} + \frac{t_{,}^{0}}{t_{,}} + \frac{t_{,,}^{0}}{t_{,,}} = 2$$

$$\text{II.}\quad \frac{t^u}{t} + \frac{t_{,}^{u}}{t_{,}} + \frac{t_{,,}^{u}}{t_{,,}} = 1,$$

welche beide als charakteristische Bedingung für den Fall anzusehen sind, daß die drei innerhalb eines Dreiecks verlaufenden Eckentransversalen sich in einem einzigen Punkte schneiden. Sind also außer den drei Eckentransversalen noch zwei Abschnitte derselben gegeben, so liefern diese beiden Gleichungen nebst den Gleichungen $t = t^0 + t^u$, $t_{,} = t_{,}^{0} + t_{,}^{u}$, $t_{,,} = t_{,,}^{0} + t_{,,}^{u}$ die übrigen Abschnitte, und es läßt sich ein Dreieck immer aus fünf von einander unabhängigen Abschnitten der drei Eckentransversalen für den Fall bestimmen, daß dieselben sich in einem Punkte innerhalb des Dreiecks schneiden.

Nimmt man als die fünf Bestimmungsstücke t, $t_{,}$, $t_{,,}$, t^0, $t_{,}^{0}$ und lös't die Gleichungen unter 1) nach m und m' auf, so erhält man:

$$1)\ m = \frac{t^0 t_{,}}{t(t_{,} - t_{,}^{0})} - 1, \qquad 2)\ m' = \frac{t_{,}(t - t^0)}{t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)}, \qquad 3)\ 1 + m = \frac{t^0 t_{,}}{t(t_{,} - t_{,}^{0})},$$

$$4)\ 1 + m' = \frac{t_{,}^{0} t}{t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)}, \qquad 5)\ (1 + m)\, m' = \frac{t^0 t_{,}^{2}(t - t^0)}{t(t_{,} - t_{,}^{0})[t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)]},$$

$$6)\ 1 + m + mm' = \frac{t_{,}}{t_{,} - t_{,}^{0}}, \qquad 7)\ m'(1 + m + mm') = \frac{t_{,}^{2}(t - t^0)}{(t_{,} - t_{,}^{0})[t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)]}.$$

Mittelst dieser Gleichungen ergeben sich nun die Formeln für Inhalt, Seiten und Winkel des Dreiecks.

Nach §. 8 war $\triangle ABC = \dfrac{1}{4m'(1 + m + mm')} \sqrt{P}$

Daraus wird

$$\triangle ABC = \frac{(t_{,} - t_{,}^{0})[t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)]}{4 t_{,}^{2}(t - t^0)} \cdot \frac{\sqrt{P'}}{t^2 (t_{,} - t_{,}^{0})^2 [t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)]^2}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{4 t^2 t_{,}^{2}(t - t^0)(t_{,} - t_{,}^{0})[t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)]} \sqrt{P'}$$

$$P' = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$$

$$x = t^0 t_{,}^{2}(t - t^0) t$$

$$y = t_{,}^{0} t^2 (t_{,} - t_{,}^{0}) t_{,}$$

$$z = (2 t t_{,} - t^0 t_{,} - t_{,}^{0} t)[t_{,}^{0} t - t_{,}(t - t^0)] t_{,,}\,.$$

Nimmt man $t_{,,}^{0}$ mit auf, so erhält man nach einigen Reductionen die geschmeidigere Inhaltsformel

$$\triangle ABC = \frac{t\, t_{,} t_{,,}}{4(t - t^0)(t_{,} - t_{,}^{0})(t_{,,} - t_{,,}^{0})} \sqrt{\left(\frac{t^0(t - t^0)}{t} + \frac{t_{,}^{0}(t_{,} - t_{,}^{0})}{t_{,}} + \frac{t_{,,}^{0}(t_{,,} - t_{,,}^{0})}{t_{,,}}\right)()()()}$$

worin die leeren Klammern unter der Wurzel mit den bekannten Differenzen aus den Gliedern der ersten Klammern darin auszufüllen sind. Setzt man t'' für $t - t^0$, $t_{,}''$ für $t_{,} - t_{,}^0$, $t_{,,}''$ für $t_{,,} - t_{,,}^0$, so erhält man die Gleichung:

$$\triangle ABC = \frac{t\,t_{,}\,t_{,,}}{4t''t_{,}''t_{,,}''}\sqrt{\left(\frac{t^0t''}{t}+\frac{t_{,}^0t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(-\frac{t^0t''}{t}+\frac{t_{,}^0t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(\frac{t^0t''}{t}-\frac{t_{,}^0t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(\frac{t^0t''}{t}+\frac{t_{,}^0t_{,}''}{t_{,}}-\frac{t_{,,}^0t_{,,}''}{t_{,,}}\right)}$$

Für den Inhalt des Fußpunktdreiecks DEF ergiebt sich die Formel

$\triangle DEF = \frac{t\,t_{,}\,t_{,,}}{2t^0t_{,}^0t_{,,}^0}\sqrt{P}$, wobei P dem Radicandus in der vorigen Gleichung entspricht. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\triangle DEF : \triangle ABC = 2t''t_{,}''t_{,,}'' : t^0t_{,}^0t_{,,}^0 \text{ oder}$$

$$\triangle DEF = \frac{2t''t_{,}''t_{,,}''}{t^0t_{,}^0t_{,,}^0}\triangle ABC\,.$$

Zur Bestimmung der Seiten a, b, c dienen die Gleichungen X., XI., XII. des §. 8, woraus die folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$1)\ a^2 = \frac{t^0}{t}\cdot\frac{t_{,}^{0\,2}(t_{,}-t_{,}^0)\,t\,t_{,,}+t_{,,}^{0\,2}(t_{,,}-t_{,,}^0)\,t\,t_{,}-t^0(t-t^0)^2t_{,}\,t_{,,}}{t\,(t_{,}-t_{,}^0)(t_{,,}-t_{,,}^0)}$$

$$2)\ b^2 = \frac{t_{,}^0}{t_{,}}\cdot\frac{t^{0\,2}(t-t^0)\,t_{,}\,t_{,,}+t_{,,}^{0\,2}(t_{,,}-t_{,,}^0)\,t\,t_{,}-t_{,}^0(t_{,}-t_{,}^0)^2\,t\,t_{,,}}{t_{,}(t-t^0)(t_{,,}-t_{,,}^0)}$$

$$3)\ c^2 = \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}\cdot\frac{t^{0\,2}(t-t^0)\,t_{,}\,t_{,,}+t_{,}^{0\,2}(t_{,}-t_{,}^0)\,t\,t_{,,}-t_{,,}^0(t_{,,}-t_{,,}^0)^2\,t\,t_{,}}{t_{,,}(t-t^0)(t_{,}-t_{,}^0)}\,.$$

Die Dreieckswinkel ergeben sich aus den vorhergehenden Gleichungen auf bekannte Weise, z. B. mittelst der sinus

1) $\sin\alpha = \frac{2\Delta}{bc}$, oder mittelst der cosinus

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ u. s. w.

Zweiter Fall. Fig. 9—12.

Die drei Eckentransversalen schneiden sich in einem Punkt außerhalb des Dreiecks.

a) Für Fig. 9.

Die Gleichungen 1), 2), I. und II. im ersten Fall nehmen folgende Form an:

$$1)\ \frac{t^0}{t} = \frac{1+m}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,}^0}{t_{,}} = \frac{m(m'-1)}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = \frac{1-mm'}{1+m-mm'}$$

$$2)\ \frac{t''}{t} = \frac{mm'}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,}''}{t_{,}} = \frac{1}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}''}{t_{,,}} = \frac{m}{1+m-mm'}$$

$$\text{I.}\ \frac{t^0}{t}+\frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}-\frac{t_{,}^0}{t_{,}} = 2$$

$$\text{II.}\ \frac{t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}''}{t_{,,}}-\frac{t''}{t} = 1\,.$$

Dabei ist $t'' = t^0 - t \qquad t_{,}'' = t_{,} + t_{,}^0 \qquad t_{,,}'' = t_{,,} - t_{,,}^0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Zu Fig. 10.

$$1)\quad \frac{t^0}{t} = \frac{1+m}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_,^0}{t_,} = \frac{m(1-m')}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = \frac{mm'-1}{1+m-mm'}$$

$$2)\quad \frac{t^u}{t} = \frac{mm'}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_,^u}{t_,} = \frac{1}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} = \frac{m}{1+m-mm'}$$

$$\text{I.}\quad \frac{t^0}{t} + \frac{t_,^0}{t_,} - \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = 2 \qquad \text{II.}\quad \frac{t_,^u}{t_,} + \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} - \frac{t^u}{t} = 1\,.$$

Dabei ist $t^u = t^0 - t \qquad t_,^u = t_, - t_,^0 \qquad t_{,,}^u = t_{,,}' + t_{,,}^0$.

c) Zu Fig. 11.

$$1)\quad \frac{t^0}{t} = \frac{1+m}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_,^0}{t_,} = \frac{m(m'-1)}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = \frac{mm'-1}{1+m-mm'}$$

$$2)\quad \frac{t^u}{t} = \frac{mm'}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_,^u}{t_,} = \frac{1}{1+m-mm'} \qquad \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} = \frac{m}{1+m-mm'}$$

$$\text{I.}\quad \frac{t^0}{t} - \frac{t_,^0}{t_,} - \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = 2 \qquad \text{II.}\quad \frac{t_,^u}{t_,} + \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} - \frac{t^u}{t} = 1\,.$$

Dabei ist $t^u = t^0 - t \qquad t_,^u = t_, + t_,^0 \qquad t_{,,}^u = t_{,,} + t_{,,}^0$.

d) Zu Fig. 12.

$$1)\quad \frac{t^0}{t} = \frac{1+m}{mm'-m-1} \qquad \frac{t_,^0}{t_,} = \frac{m(m'-1)}{mm'-m-1} \qquad \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} = \frac{mm'-1}{mm'-m-1}$$

$$2)\quad \frac{t^u}{t} = \frac{mm'}{mm'-m-1} \qquad \frac{t_,^u}{t_,} = \frac{1}{mm'-m-1} \qquad \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} = \frac{m}{mm'-m-1}$$

$$\text{I.}\quad \frac{t_,^0}{t_,} + \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}} - \frac{t^0}{t} = 2 \qquad \text{II.}\quad \frac{t^u}{t} - \frac{t_,^u}{t_,} - \frac{t_{,,}^u}{t_{,,}} = 1\,.$$

Dabei ist $t^u = t^0 + t \qquad t_,^u = t_,^0 - t_, \qquad t_{,,}^u = t_{,,}^0 - t_{,,}$.

Die Gleichungen I. und II. sind offenbar charakteristisch für den Verlauf der drei Eckentransversalen, die sich außerhalb des Dreiecks in einem Punkte schneiden.

Der Inhalt des Dreiecks, die Bestimmung der Seiten und Winkel (deren Entwicklung aus den Seiten übergangen) ergiebt sich leicht aus den früheren Gleichungen, wenn man zuvor mittelst der vorhergehenden Gleichungen m und m' aus den Abschnitten der Eckentransversalen bestimmt. Es ist nämlich:

$$m = \frac{t^0 t_,}{t(t_, + t_,^0)} - 1 \quad \text{oder wenn man } t_{,,}^0 \text{ einführt}$$

$$m = \frac{t_,(t_{,,} - t_{,,}^0)}{t_{,,}(t_, + t_,^0)}$$

$$m' = \frac{t_,^0 t_{,,}}{t_,(t_{,,} - t_{,,}^0)} + 1 = \frac{t_{,,}(t^0 - t)}{t(t_{,,} - t_{,,}^0)}\,.$$

Nimmt man $t_{,,}^0$, das seine Bestimmung aus Gleichung I. erhält und also entbehrt werden kann, mit auf, so werden die Formeln geschmeidiger, und es ist für Fig. 9

$$\triangle ABC = \frac{t t_{,} t_{,,}}{4(t^0 - t)(t_{,} + t_{,}^0)(t_{,,} - t_{,,}^0)} \sqrt{P}$$

wobei $P = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

$$x = \frac{t^0(t^0-t)}{t} \qquad y = \frac{t_{,}^0(t_{,}^0+t_{,})}{t_{,}} \qquad z = \frac{t_{,,}^0(t_{,,}-t_{,,}^0)}{t_{,,}}$$

oder wenn man die unteren Abschnitte der Eckentransversalen einführt

$$\triangle ABC = \frac{t t_{,} t_{,,}}{4 t'' t_{,}'' t_{,,}''}\sqrt{\left(\frac{t^0 t''}{t}+\frac{t_{,}^0 t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0 t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(-\frac{t^0 t''}{t}+\frac{t_{,}^0 t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0 t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(\frac{t^0 t''}{t}-\frac{t_{,}^0 t_{,}''}{t_{,}}+\frac{t_{,,}^0 t_{,,}''}{t_{,,}}\right)\left(\frac{t^0 t''}{t}+\frac{t_{,}^0 t_{,}''}{t_{,}}-\frac{t_{,,}^0 t_{,,}''}{t_{,,}}\right)}$$

eine einfache Gleichung, die in allen vier Fällen (Fig. 9—12) gültig ist, wenn man die Werthe von t'', $t_{,}''$, $t_{,,}''$ in dem Sinne nimmt, wie bei den Fig. 9—12 unter a, b, c, d vorhin angegeben.

Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich für die Seite a für alle vier Fälle die gemeinsame Form

$$a^2 = \frac{t^0}{t}\cdot\frac{t_{,}^{02} t_{,}'' t t_{,,} + t_{,,}^{02} t_{,,}'' t t_{,} - t^0 t''^2 t_{,} t_{,,}}{t t_{,}'' t_{,,}''}.$$

Die Gleichungen für b und c haben für Fig. 9—12 folgende besondere Form:

Fig. 9

$$b^2 = \frac{t_{,}^0}{t_{,}}\cdot\frac{t_{,,}^{02}(t_{,,}-t_{,,}^0)\,t t_{,} - t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,}^0(t_{,}+t_{,}^0)^2\,t t_{,,}}{t_{,}(t^0-t)(t_{,,}-t_{,,}^0)}$$

$$c^2 = \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}\cdot\frac{t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} - t_{,}^{02}(t_{,}+t_{,}^0)\,t t_{,,} + t_{,,}^0(t_{,,}-t_{,,}^0)^2\,t t_{,}}{t_{,,}(t^0-t)(t_{,}+t_{,}^0)}.$$

Fig. 10

$$b^2 = \frac{t_{,}^0}{t_{,}}\cdot\frac{t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} - t_{,,}^{02}(t_{,,}+t_{,,}^0)\,t t_{,} + t_{,}^0(t_{,}-t_{,}^0)^2\,t t_{,,}}{t_{,}(t^0-t)(t_{,,}+t_{,,}^0)}$$

$$c^2 = \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}\cdot\frac{t_{,}^{02}(t_{,}-t_{,}^0)\,t t_{,,} - t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,,}^0(t_{,,}+t_{,,}^0)^2\,t t_{,}}{t_{,,}(t^0-t)(t_{,}-t_{,}^0)}$$

Fig. 11

$$b^2 = \frac{t_{,}^0}{t_{,}}\cdot\frac{t_{,,}^{02}(t_{,,}+t_{,,}^0)\,t t_{,} - t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,}^0(t_{,}+t_{,}^0)^2\,t t_{,,}}{t_{,}(t^0-t)(t_{,,}+t_{,,}^0)}$$

$$c^2 = \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}\cdot\frac{t_{,}^{02}(t_{,}+t_{,}^0)\,t t_{,,} - t^{02}(t^0-t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,,}^0(t_{,,}+t_{,,}^0)^2\,t t_{,}}{t_{,,}(t^0-t)(t_{,}+t_{,}^0)}$$

Fig. 12

$$b^2 = \frac{t_{,}^0}{t_{,}}\cdot\frac{t_{,,}^{02}(t_{,,}^0-t_{,,})\,t t_{,} - t^{02}(t^0+t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,}^0(t_{,}^0-t_{,})^2\,t t_{,,}}{t_{,}(t^0+t)(t_{,,}^0-t_{,,})}$$

$$c^2 = \frac{t_{,,}^0}{t_{,,}}\cdot\frac{t_{,}^{02}(t_{,}^0-t_{,})\,t t_{,,} - t^{02}(t^0+t)\,t_{,} t_{,,} + t_{,,}^0(t_{,,}^0-t_{,,})^2\,t t_{,}}{t_{,,}(t^0+t)(t_{,}^0-t_{,})}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit den vorhergehenden Gleichungen ist die Aufgabe allgemein gelös't:

„**Ein Dreieck zu bestimmen durch fünf Strecken, die in einem beliebigen Punkte innerhalb oder außerhalb desselben zusammentreffen, unter der Voraussetzung, daß dieselben von den Ecken und Seiten des Dreiecks begrenzt sind.**“

§. 12.

Anwendung auf Höhentransversalen.

Von den in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Gleichungen zur Auflösung des Dreiecks aus den Eckentransversalen soll noch in Kürze eine Anwendung des §. 7 und §. 8 auf Höhentransversalen hinzugefügt werden. Da bekanntlich die Abschnitte auf den Seiten, also auch die Verhältniszahlen zwischen denselben von den drei Höhenperpendikeln abhängig sind, so reichen die drei Höhen eines Dreiecks allein schon zur Bestimmung desselben aus. Bezeichnet man die Höhen für die Seiten a, b, c resp. mit h, $h_,$, $h_{,,}$, so wie ihre Abschnitte mit dem Index o und u, je nachdem sie in einer Ecke oder Seite endigen, so kann man die Verhältniszahlen 1) entweder so wählen, daß $m + n = m' + n' = m'' + n'' = 1$, oder 2) daß $n = n' = n'' = 1$ genommen wird. Für den ersten Fall ist

$$m = \frac{h_,^2 h_{,,}^2 + h^2 h_,^2 - h^2 h_{,,}^2}{2 h_,^2 h_{,,}^2} \qquad n = \frac{h_,^2 h_{,,}^2 + h^2 h_{,,}^2 - h^2 h_,^2}{2 h_,^2 h_{,,}^2}$$

$$m' = \frac{h^2 h_{,,}^2 + h_,^2 h_{,,}^2 - h^2 h_,^2}{2 h^2 h_{,,}^2} \qquad n' = \frac{h^2 h_{,,}^2 + h^2 h_,^2 - h_,^2 h_{,,}^2}{2 h^2 h_{,,}^2}$$

$$m'' = \frac{h^2 h_,^2 + h^2 h_{,,}^2 - h_,^2 h_{,,}^2}{2 h^2 h_,^2} \qquad n'' = \frac{h^2 h_,^2 + h_,^2 h_{,,}^2 - h^2 h_{,,}^2}{2 h^2 h_,^2}\,.$$

Im zweiten Falle ist

$$m = \frac{h_,^2 h_{,,}^2 + (h^2 h_,^2 - h^2 h_{,,}^2)}{h_,^2 h_{,,}^2 - (h^2 h_,^2 - h^2 h_{,,}^2)},\quad m' = \frac{h^2 h_{,,}^2 + (h_,^2 h_{,,}^2 - h^2 h_,^2)}{h^2 h_{,,}^2 - (h_,^2 h_{,,}^2 - h^2 h_,^2)},\quad m'' = \frac{h^2 h_,^2 + (h_{,,}^2 h^2 - h_,^2 h_{,,}^2)}{h^2 h_,^2 + (h_{,,}^2 h^2 - h_,^2 h_{,,}^2)}$$

oder wenn man durch $h^2 h_,^2 h_{,,}^2$ reduciert

$$m = \frac{\frac{1}{h^2} + \left(\frac{1}{h_{,,}^2} - \frac{1}{h_,^2}\right)}{\frac{1}{h^2} - \left(\frac{1}{h_{,,}^2} - \frac{1}{h_,^2}\right)},\quad m' = \frac{\frac{1}{h_,^2} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_{,,}^2}\right)}{\frac{1}{h_,^2} - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_{,,}^2}\right)},\quad m'' = \frac{\frac{1}{h_{,,}^2} + \left(\frac{1}{h_,^2} - \frac{1}{h^2}\right)}{\frac{1}{h_{,,}^2} - \left(\frac{1}{h_,^2} - \frac{1}{h^2}\right)}\,.$$

Nun ist $m m' m'' = 1$, also $m m' m'' = n n' n''$, mithin schneiden sich die drei Höhenperpendikel in einem einzigen Punkte.

Entwickelt man nun mit diesen Gleichungen die Formel für den Inhalt des Dreiecks, so gelangt man nach einigen Reductionen zu der bekannten Formel

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_,} + \frac{1}{h_{,,}}\right)\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h_,} + \frac{1}{h_{,,}}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_,} + \frac{1}{h_{,,}}\right)\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_,} - \frac{1}{h_{,,}}\right)}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 8 war der Inhalt des Fußpunktdreiecks DEF

$$\triangle\, DEF = \frac{2mm'}{(1+m)(1+m')(1+mm')}\,\triangle\, ABC\ .$$

Wird diese Formel nach h, $h_{,}$, $h_{,,}$ entwickelt, so erhält man

$$\triangle\, DEF = \frac{h^2 h_{,}^2 h_{,,}^2}{4}\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}\right)\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,}^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}\right)\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)\triangle\, ABC\ .$$

Für die oberen und unteren Höhenabschnitte ergeben sich folgende Gleichungen:

$$1)\ h^{0} = \frac{2\Delta^2}{h}\left(\frac{1}{h_{,}^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}-\frac{1}{h^2}\right) \quad \text{und} \quad h^{u} = h\,\Delta^2\left[\frac{1}{h^4}-\left(\frac{1}{h_{,}^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)^2\right]$$

$$2)\ h_{,}^{0} = \frac{2\Delta^2}{h_{,}}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}-\frac{1}{h_{,}^2}\right) \qquad h_{,}^{u} = h_{,}\,\Delta^2\left[\frac{1}{h_{,}^4}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)^2\right]$$

$$3)\ h_{,,}^{0} = \frac{2\Delta^2}{h_{,,}}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right) \qquad h_{,,}^{u} = h_{,,}\,\Delta^2\left[\frac{1}{h_{,,}^4}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,}^2}\right)^2\right]$$

Aus 1), 2) und 3) folgt

$$4)\ h^{0}h^{u} = h_{,}^{0}h_{,}^{u} = h_{,,}^{0}h_{,,}^{u} = 2\Delta^4\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}\right)\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,}^2}+\frac{1}{h_{,,}^2}\right)\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)$$

folglich BCEF, ACDF, ABDE Kreisvierecke.

Ferner ist

$$5)\ \triangle\, AOB = \left[\frac{1}{h^4}-\left(\frac{1}{h_{,}^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)^2\right]\Delta^3$$

$$6)\ \triangle\, AOC = \left[\frac{1}{h_{,}^4}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,,}^2}\right)^2\right]\Delta^3$$

$$7)\ \triangle\, COB = \left[\frac{1}{h_{,,}^4}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_{,}^2}\right)^2\right]\Delta^3\ .$$

Aus den Höhenabschnitten folgt dann weiter leicht die Bestimmung der Winkel. Da $ABE = 90^0 - a$, so ist

$$\cos\alpha = \frac{h_{,,}^{u}}{h_{,}^{0}} = \frac{h_{,}^{u}}{h_{,,}^{0}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{1}{h_{,,}^4}-\left(\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{1}{h_{,}^2}\right)^2}{\dfrac{1}{h_{,,}^2}+\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{1}{h_{,}^2}}\cdot h_{,,}h_{,} = \frac{h_{,}h_{,,}}{2}\left(\frac{1}{h_{,,}^2}-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h_{,}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h_{,}}{h_{,,}}+\frac{h_{,,}}{h_{,}}-\frac{h_{,}h_{,,}}{h^2}\right)$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Gleichungen für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

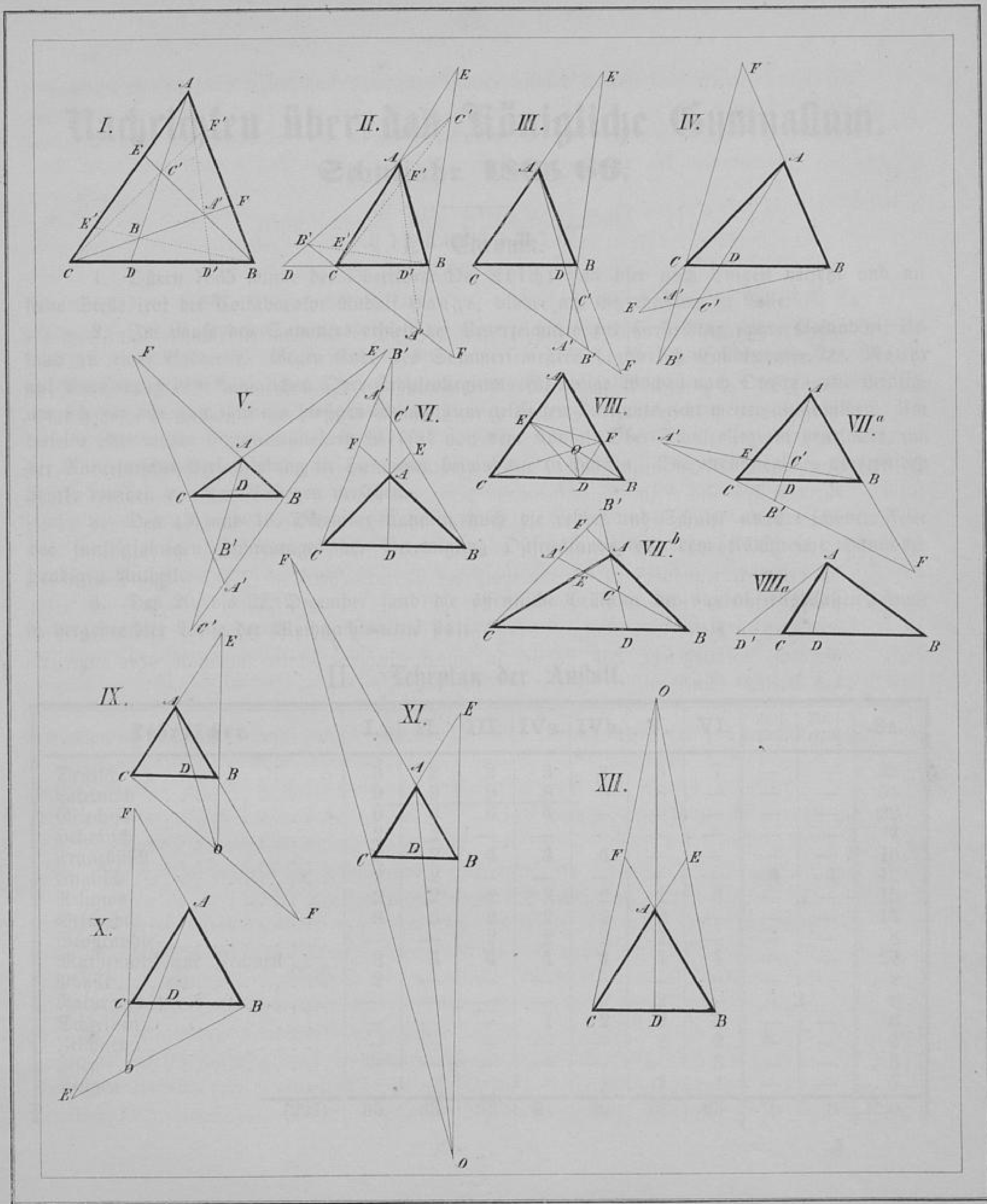
Bemerkungen.

1) In der Figurentafel muß bei Fig. 1 statt des mit B bezeichneten Punktes innerhalb des Dreiecks B′ stehen.

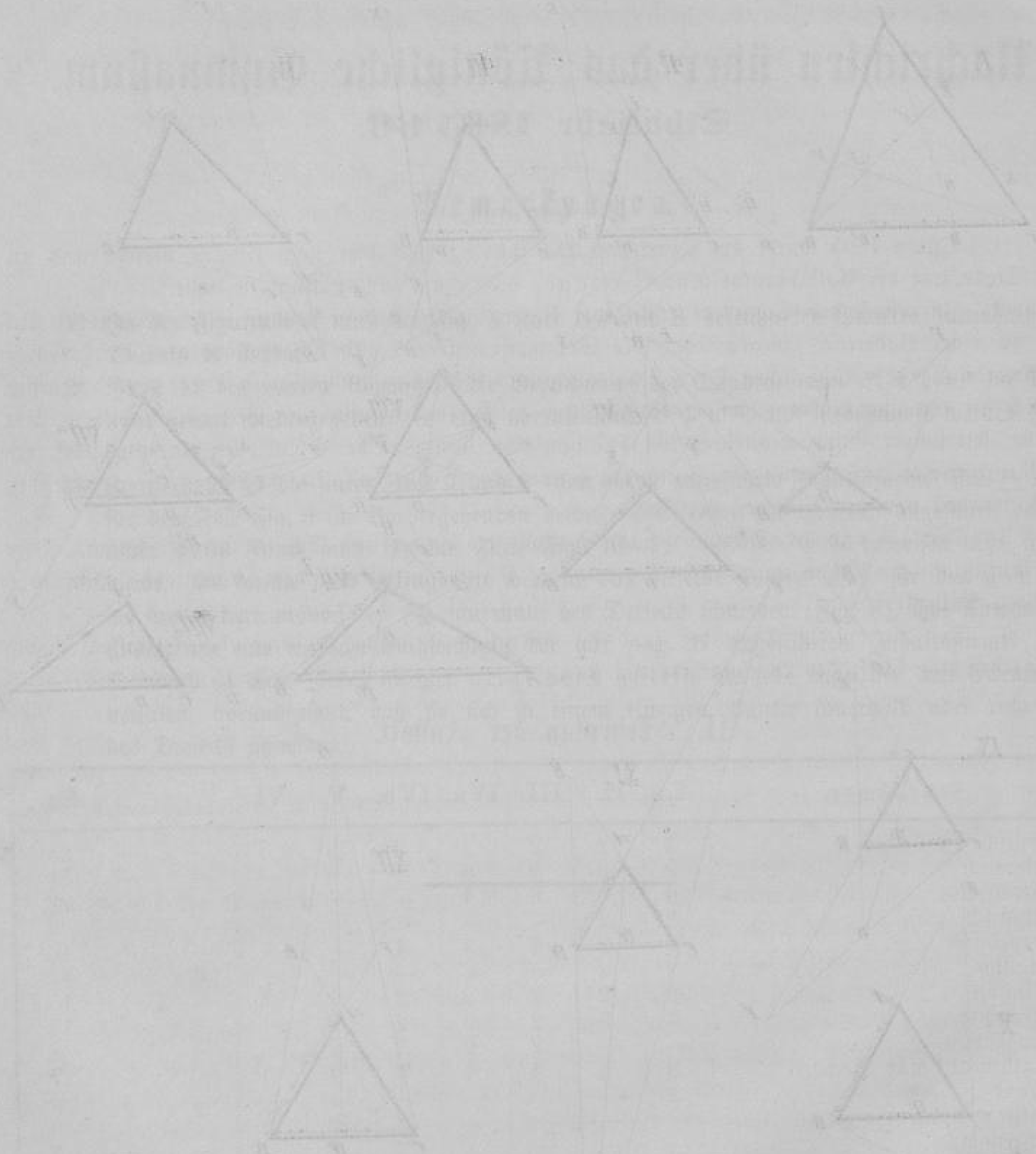
2) In §. 11 des vierten Bogens ist die Bezeichnung der Quadrate von t^0, $t_,^0$, $t_{,,}^0$ im Druck nicht genau wiedergegeben; es muß überall statt t^{02}, $t_,^{02}$, $t_{,,}^{02}$ substituiert werden $(t^0)^2$, $(t_,^0)^2$, $(t_{,,}^0)^2$.

3) Zu pag. 29 ist die unter Zeile 7 und 8 (von oben) angeführte Inhaltsformel für $\triangle$ ABC für den Fall Fig. 9 im Vorhergehenden besonders erwiesen und zugleich angeführt, daß sie unter dieser Form auch für die Fälle Fig. 10—12, wie sich leicht beweisen läßt, gültig bleibt. Es konnte noch hinzugefügt werden, daß dieselbe Formel auch für den Fall, daß die drei Eckentransversalen sich innerhalb des Dreiecks schneiden (Fig. 8), ihre Anwendung findet, wie eine einfache Vergleichung der auf pag. 27 angeführten Inhaltsformel zeigt. Demnach ist diese Inhaltsformel *allgemein gültig* für jede Lage der drei Eckentransversalen, vorausgesetzt, daß sie sich in einem einzigen Punkte innerhalb oder außerhalb des Dreiecks schneiden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf