Ableitung der Rechnungsregeln für die arithmetischen Grundformen.

Es wird von einzelnen Lehrern der Mathematik die Ansicht aufgestellt, dass für den Schulunterricht von seiten des Lehrers der logische Aufbau des mathematischen Lehrsystems und von seiten der Schüler das Erfassen desselben und das Eindringen in dieses System die Hauptsache sei und dass das eigene Können der Schüler in der Mathematik erst in zweiter Reihe zu berücksichtigen sei. Dieser Ansicht können wir uns nur in sofern anschliessen, als das Wissen jedenfalls die Grundlage des Könnens ist und gerade in der Mathematik ein lückenhaftes oder nicht mit vollem Verständnis eindringendes Wissen, ein Halbwissen, immer zum Misslingen der Versuche zur selbständigen Produktion und infolge dessen zur Entmutigung und Vernichtung des Interesses für den mathematischen Unterricht führen muss. Das Wissen muss aber auf jeder Stufe des Unterrichts von einem entsprechenden Können begleitet sein. Das Können ist überall die Frucht des Wissens und giebt dem Schüler Selbstvertrauen auf die eigene Kraft und ermutigt ihn, mit Lust und Liebe weiter vorzuschreiten. Bei der Übung des Könnens kann aber der Schüler in den meisten Fällen die Leitung des Lehrers nicht entbehren. Die anzustellenden Übungen erfordern eine sorgfältige Auswahl, damit nicht den Schülern Arbeiten zugemutet werden, welche ihre Kraft übersteigen, oder so wenig ihr Interesse zu erregen vermögen, dass sie eher Widerwillen gegen die Wissenschaft erregen als zu neuen Fortschritten ermutigen. Dies gilt ganz besonders von arithmetischen Aufgaben, welche ihrer Natur nach abstrakt nur zu leicht der Anschaulichkeit entbehren und in schematische Rechenoperationen ausarten. In der Arithmetik wird es daher auch ganz besonders Sache des der Lösung von Aufgaben vorhergehenden Unterrichts sein, die Verbindung zu zeigen, in welcher die abstrakte Zahl mit der Anschauung steht, und klar zu legen, wie aus dieser die Abstraktion gewonnen wird. Nachdem in der Arithmetik der Begriff der Einheit festgestellt ist, baut sich aus diesem durch deduktives zusammensetzendes Verfahren das ganze Lehrgebäude auf, während in der Geometrie im wesentlichen das zerlegende Verfahren der Induktion vorherrscht. Mit der Arithmetik ist von den Disciplinen der Elementar-Mathematik zusammen zu stellen die Trigonometrie und mit der Geometrie (Planimetrie) naturgemäss die Stereometrie. So lernt der Schüler durch Geometrie und Stereometrie einerseits und durch Arithmetik und Trigonometrie andererseits die beiden Hauptmethoden wissenschaftlicher Behandlung die Induktion und die Deduktion sowie die verschiedenen Formen der Definition, des Urteils, des Schlusses und des Beweises allmählich praktisch kennen, und dadurch dass diese Methoden ihm durch Übung an stufenweise immer schwierigeren Gegenständen in Fleisch und Blut übergehen, hat er einen Gewinn in seiner logischen Ausbildung des Denkens, der entschieden höher zu veranschlagen ist als die Schulung der formalen Logik.

Nachdem ich so in aller Kürze einige Gesichtspunkte angegeben habe, welche nach meiner Ansicht die leitenden im mathematischen Unterricht sein müssen, will ich in folgender Abhandlung den Versuch machen, auf deduktivem Wege die Rechnungsregeln für die Grundformen der Arithmetik oder Lehre von den Zahlen abzuleiten. Ich glaube in derselben einige Lücken der logischen Zusammenfügung, welche die mir bekannten Lehrbücher der Arithmetik zeigen, auszufüllen, ich erinnere nur an die Bestimmung der Zeichenregeln für Produkt und Quotient, und somit die Erlernung des arithmetischen Lehrsystems zu erleichtern. Dass meine Methode der Ableitung der Unterrichtspraxis entstammt und in derselben erprobt ist, brauche ich an dieser Stelle wohl nicht erst zu bemerken. Unter Grundformen der Arithmetik verstehe ich die einfache Zahl, die Summe, die Differenz, das Produkt, den Quotienten oder Bruch, die Potenz, die Wurzel und den Logarithmus.

Die Zahlen.

In der Einleitung zu der Abhandlung über die vier Species sagt Professor Hesse: „Die vier Species gehen von dem Begriffe der Einheit aus. Dieser Begriff ist zugleich der Grundpfeiler, auf welchem die ganze Analysis aufgebaut ist. Die Einheit ist ein Gebilde des durch Erfahrungen schon gereifteren menschlichen Verstandes. Denn das Kind auf der Mutter Arm wird zwar unterscheiden können, ob der ihm zugedachte erste Christbaum viel oder wenig Lichtsterne trägt; eine Ahnung von dem, was wir Einheit nennen, wird deshalb schon das Kind haben, einen Begriff davon hat es sicherlich nicht.

Der Begriff der Einheit entwickelt sich erst mit zunehmender Erfahrung. Derselbe lässt sich deshalb auch nicht in bestimmte Grenzen einschliessen, vielmehr bleibt er weiter bildungsfähig, so weit man auch in der Erkenntnis gekommen sein mag.

Wie wenig auch der Begriff der Einheit entwickelt sei, so ist er doch für den menschlichen Geist ein ganz notwendiger Begriff, um empfangene Eindrücke zu ordnen und einigermassen vorbereitet zu sein für die Aufnahme neuer Eindrücke. Den Begriff der Einheit erklären zu wollen, scheint schon deshalb ein nutzloses Unternehmen, weil dieser Begriff sich nicht begrenzen lässt. Gäbe man ihm auch bestimmte Grenzen, so bedürfte man zu seiner Erklärung doch einfacherer Begriffe, die sich nicht auffinden lassen, weil der Begriff der Einheit schon zu den einfachsten Begriffen gehört."

Wenn wir zugeben müssen, dass der Begriff der Einheit der Grundpfeiler ist, auf welchem sich die ganze Analysis aufbaut, so wird es jedenfalls auch wünschenswert, die Erklärung dieses Begriffs nicht, wie Hesse thut, von vorn herein aufzugeben, sondern eingehendere Rechenschaft über denselben zu geben. Denn von dieser Rechenschaft wird der weitere Aufbau des arithmetischen Lehrgebäudes durchaus abhängig sein. Der Begriff der Einheit hat seine Wurzel in der Körperwelt und in der Art und Weise, wie wir dieselbe sinnlich wahrnehmen. Die Welt, welche wir sinnlich anschauen, stellt sich uns dar in einzelnen durch ihre Eigenschaften, besonders durch die räumliche Begrenzung gesonderten Gegenständen. Ein Pferd, ein Baum, ein Stern erscheint schon dem Kinde als ein für sich abgeschlossenes Ganzes, und in der Ausdrucksweise eines kleinen Kindes, welches von Zahlen noch keinen Begriff hat, zeigt es sich, wie die sinnliche Wahrnehmung der Aussenwelt als bestehend aus einzelnen Dingen die Grundlage des Zählens bildet, wenn das Kind, indem es zwei Pferde sieht, sagt: da ist ein Pferd und noch ein Pferd. Wie wir nun aus der sinnlichen Anschauung einzelne Eigenschaften derselben wie die Farbe, das Gewicht, die Raumerfüllung abstrahieren und uns mit diesen abstrakten Eigenschaften ideell allein beschäftigen können, so abstrahieren wir von den Dingen auch die Eigenschaft für sich bestehende abgegrenzte Ganze zu bilden, und diese Abstraktion führt zum Begriffe der Einheit. Dass dieser Begriff wie jede Abstraktion erst in seiner Abgegrenztheit klar erfasst wird, wenn es sich darum handelt ihn wissenschaftlich zu behandeln, ist selbstverständlich. Wir können nun aber auch mehrere einzelne Dinge für sich als ein Ganzes zusammenfassen, eine Menge von einzelnen Bäumen bildet den Wald, die Gesammtheit der einzelnen Sterne bildet den Sternenhimmel. Immer bleibt auch hier die Auffassung als eines Ganzen im Gegensatz zu andern Dingen, was den Begriff der Einheit bildet. Und weiter können wir durch Zusammenfassen immer höhere Einheiten bilden, bis wir endigen mit dem Verbinden aller Dinge zu einem Ganzen, zum Weltganzen, zum Universum. Der Begriff der Einheit ist also eine Abstraktion, welche eine einzelne Eigenschaft der unsern Sinnen wahrnehmbaren Körperwelt heraushebt, welche sich unserm Geiste darstellt in einzelnen für sich ein Ganzes bildenden Gegenständen.

Vereinigen wir nun eine Einheit und noch eine Einheit in einem Begriffe, so kommen wir zur Zweiheit, und indem wir mit dieser eine neue Einheit zusammenfassen, zu dem Begriffe der Dreiheit, und so lässt sich diese ideelle Operation weiter unbegrenzt fortsetzen, und wir kommen auf diese Weise aus der Einheit zu der Reihe der natürlichen Zahlen. Die Bildung derselben nacheinander macht das Wesen des Zählens aus, welches wir uns ebenfalls unbegrenzt fortgesetzt denken können. Ursprünglich ist die Bildung der Zahlen jedenfalls durch das Zusammenfassen körperlicher Einheiten zu einem Begriffe erfolgt; die Anschauung dieser erleichtert dem in Abstraktion noch ungeübten Geiste des Kindes die Auffassung der Zahlen, besonders dann, wenn die gezählten Gegenstände eine gleichartige Beschaffenheit haben. Befreien wir uns aber von der gegenständlichen Anschauung, so kommen wir zu der wissenschaftlichen Bildung der Zahlen, wie sie die Arithmetik als Grundlage nötig hat. Die Zahlen, welche durch Zusammenfassen abstrakter Einheiten entstehen, nennen wir unbenannte Zahlen, das Gezählte ist bei diesen eben die Einheit. Werden wirkliche Dinge gezählt und man giebt die Art der gezählten Dinge an, z. B. fünf Blumenblätter, drei Steine u. s. w., so erhalten wir eine benannte Zahl. Wir unterscheiden an derselben die Benennung „Blumenblätter, Steine“ und die zählende Zahl oder den Coëfficienten. Ebenso wie Dinge abgezählt werden können, so kann man auch abstrakte Begriffe zählen z. B. drei Farben, vier Dreiecke, oder auch Zahlen-Complexe z. B. sechs Fünfer, vier Zehner u. s. w. Auch hier müssen wir die gezählten Begriffe als Benennungen auffassen, sie geben als Einheit zusammengenommen die Art des Gezählten an.

Als Zahlzeichen bedienen wir uns der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die nächste Zahl zehn bezeichnen wir wieder durch die 1, indem wir dieselbe nur eine Stelle von rechts nach links setzen. Es wird dadurch nötig die Stelle, welche die Ziffern von 1 bis 9 einnehmen, zu markieren und dazu brauchen wir das Zeichen der Null (0). Zehn bezeichnen wir also mit 10 und die 1 zählt nun nicht mehr Einheiten, sondern Zehner. Diesen Zahlenwert nennen wir den Stellenwert der Ziffer, indem lediglich durch die Stellung die Benennung des Gezählten angegeben wird. Die folgenden Zahlen bezeichnen wir nun, indem wir in der letzten Stelle die Anzahl der Einer angeben, welche zu 1 Zehner hinzuzufügen sind; so bedeutet 15 einen Zehner und noch dazu 5 Einheiten (Einer). Haben wir so die 9 Ziffern verbraucht, so kommen wir zu 2 Zehnern, welche wir in Befolgung des aufgestellten Prinzips mit 20 bezeichnen müssen. Wir können so alle Zahlen bis 99 neun Zehner und dazu noch neun Einer ausdrücken. Die folgende hinzugefügte Einheit ergänzt die neun zu einem Zehner, wir haben somit 10 Zehner, diese Zahl bezeichnen wir wieder mit der Ziffer 1, welche nun aber in die dritte Stelle von rechts nach links gezählt rückt, ihr Stellenwert heisst ein Hunderter. Indem wir so weiter verfahren und immer 10 Einheiten eines Stellenwertes zu einer höhern Einheit des nächsten Stellenwertes von rechts nach links weiterschreitend zusammenfassen, genügen uns die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, um mit ihnen die unbegrenzte Reihe der Zahlen auszudrücken. Wir schreiben somit nur die Coëfficienten der gezählten Einheiten hin und drücken die Art derselben, die Benennung lediglich durch die Stelle aus; 857 bedeutet 8 Hunderter, dazu 5 Zehner und dazu noch 7 Einer. Diese Art vermittelst nur zehn Zahlzeichen oder Ziffern die unendliche Reihe der Zahlen auszudrücken ist von allen civilisierten Völkern angenommen. Wir verdanken diese hochwichtige Erfindung den Indern, von welchen sie durch die Araber auf uns gekommen ist, und nennen deshalb dieses System der Zahlbezeichnung das indische oder arabische Zahlensystem oder auch, weil immer je 10 Einheiten zu einer höhern Einheit vereinigt werden, das Zehnersystem oder das dekadische Zahlensystem.

Die Zahlen und die Operation des Zählens bilden die Grundlage alles Rechnens. Rechnen heisst aus mehreren gegebenen Zahlen eine neue Zahl bilden, welche gewissen gegebenen Bedingungen genügt. Es müssen wenigstens zwei Zahlen gegeben sein. Die Arithmetik hat die Aufgabe, allgemein gültige Regeln für das Zahlenrechnen aufzustellen. Um die Regeln in allgemeiner Gültigkeit und nicht etwa nur für einzelne bestimmte Zahlenbeispiele abzuleiten, bedient die Arithmetik sich zur Bezeichnung einer Zahl im allgemeinen noch besonderer Zeichen, und zwar hat man, um eine beliebige Zahl zu bezeichnen, die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets gewählt, so dass irgend ein Buchstabe etwa a irgend eine beliebige Zahl bezeichnet. Sollen in einer Rechnung zwei gleiche sonst aber ganz beliebige Zahlen bezeichnet werden, so wählt man dazu naturgemäss auch denselben Buchstaben. Zwei verschiedene Buchstaben a und b drücken zwei von einander verschiedene sonst aber ganz beliebige Zahlen aus. Die Einführung dieser allgemeinen Zahlzeichen ist in der Arithmetik von grosser Wichtigkeit, denn wir erreichen damit nicht nur, dass die abgeleiteten Regeln von allgemeiner Gültigkeit sind, sondern wir können die Regeln auch in kurzer und deshalb leicht übersichtlicher Form ausdrücken. Um die Art und Weise, wie die gegebenen Zahlen mit einander verbunden werden sollen, oder die Bedingungen der Rechnung anzugeben, gebrauchen wir ebenfalls einfache Zeichen, die Rechenzeichen, und um zwei Zahlen mit einander zu vergleichen bedienen wir uns der Zeichen der Gleichheit oder Ungleichheit. Mit Hülfe dieser einfachen Zurüstungen können wir dann einen mathematischen Gedanken kurz und übersichtlich sowohl mündlich als schriftlich ausdrücken. Da bei allen civilisierten Völkern Übereinstimmung in der Form und im Gebrauche der genannten Zeichen herrscht, so ist diese mathematische Zeichensprache gleichsam eine internationale, so dass ein mathematischer Gedanke, der z. B. von einem Deutschen in diesen Zeichen ausgedrückt ist, von einem französischen, englischen, italienischen Mathematiker in gleicher Weise verstanden wird. Freilich gehört zum Übersetzen dieser Zeichensprache in unsere gewöhnliche Sprache einige Übung; diese aber den Schülern zu vermitteln ist mit eine Hauptaufgabe des arithmetischen Unterrichts. Die Sache hat aber keine besondere Schwierigkeit, wenn im Unterricht von Anfang an darauf gehalten wird, dass die in Zeichen abgeleiteten Regeln stets präcise in Worten ausgedrückt werden und auch umgekehrt die Regeln in Worten in die mathematische Zeichensprache übersetzt werden.

Wir haben oben angegeben, wie die natürlichen Zahlen aus der Einheit entstehen, nämlich so dass die Vereinigung von einer Einheit und noch einer Einheit die Zwei ergiebt und so fort, indem man zu jeder schon gebildeten Vereinigung noch eine Einheit hinzufügt. Die Einheiten, welche wir zugefügt haben, können wir natürlich allmählich von einer beliebigen Zahl anfangend auch wieder fortnehmen und werden dabei die vorher gebildete Zahlenreihe in umgekehrter Richtung durchlaufen. Wir nennen diese Art von einer gegebenen Zahl zu neuen Zahlen überzugehen die Umkehrung der Operation des Zählens oder bezeichnen auch die erste Art, bei welcher je eine Einheit zugelegt wird, mit vorwärts zählen und die zweite Art, bei welcher je eine Einheit weggenommen wird, mit rückwärts zählen. Schon hier ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Umkehrung der Operationen in der Mathematik eine grosse Rolle spielt, um von schon aufgestellten mathematischen Wahrheiten zu neuen zu gelangen. Wir werden dieses im Verlauf unserer Untersuchungen über die Zahlen und Zahlenkombinationen bestätigt finden. Wenn wir nun rückwärts zählend von der Zahl a ab alle vorher durch vorwärts zählen gebildeten Zahlen durchlaufen haben, so werden wir endlich zu unserm frühern Ausgangspunkte zur Eins (1) angekommen sein, und es tritt nun die Frage auf, ob damit die Operation des Rückwärtszählens ihr Ende erreicht hat, oder ob wir noch weitere Einheiten fortnehmen können. Ohne Zweifel kann man die eine Einheit auch noch fortnehmen. Wir behalten dann eine Zahl aber nicht mehr übrig; dieses Nichtvorhandensein eines Zahlenwertes drückt man durch das Zeichen der Null (0) aus. Die Null ist also keine eigentliche Zahl, sie nimmt eine Ausnahmestellung ein, und bei Aufstellung der Rechnungsregeln wird sie deshalb eine besondere Untersuchung erfordern, um festzustellen, ob die für Zahlen allgemein gültige Regel auch für die Null gültig ist. In der schon oben genannten Abhandlung über die vier Species sagt Hesse von der Null in etwas poetischer Weise: „Sie ist unter den algebraischen Grössen der Mephistopheles, welcher zwar den meisten Gesetzen der vier Species unterworfen ist, andere Gesetze aber missachtet. Will man demnach Irrtümer vermeiden, wie sie alltäglich vorkommen, indem man mit der Null gerade so operiert, wie mit andern algebraischen Grössen, so muss man der Zahl Null eine ganz besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Man kennt die Gesetze der vier Species, welchen die Null nicht unterworfen ist, und doch achtet man darauf nicht immer. Es erklärt sich dieses daraus, dass man oft mit algebraischen Ausdrücken zu operieren hat, die man selbst nicht darstellen kann, von welchen man nur das Bildungsgesetz kennt. Da kann es sich dann leicht ereignen, dass man in dem Glauben handelt, die complicierten Ausdrücke seien von der Null verschieden, während sie ihr gleich sind. Es ist in der That nicht so leicht, die Fehler zu vermeiden, zu welchen die Null verführt.“ Fahren wir nun von der Null aus mit der Operation des Rückwärtszählens d. h. der Wegnahme einzelner Einheiten weiter fort, so werden wir finden, dass wir zu Zahlenwerten kommen, welche in der Reihe der natürlichen Zahlen nicht vorkommen; man benennt diese Zahlenwerte, welche unter Null liegen und durch rückwärts zählen von der Null aus entstanden sind, als negative Zahlen und bezeichnet sie dadurch, dass man der Zahl, welche die rückwärts gezählten Einheiten angiebt, ein besonderes Zeichen, das Minuszeichen vorsetzt. $-a$ bedeutet also einen Zahlenwert, der dadurch entstanden ist, dass man von der Null aus a Einheiten rückwärts gezählt hat. Im Gegensatz zu den negativen Zahlen nennen wir diejenigen Zahlenwerte, welche von der Null aus durch vorwärts zählen entstanden sind, positive Zahlen, und wenn wir diese Eigenschaft besonders hervorheben wollen, geben wir ihnen ebenfalls ein Vorzeichen, das Pluszeichen. Eine Zahl a ohne Vorzeichen gilt im allgemeinen als eine positive Zahl. Nebensächlich sei bemerkt, dass wir zur Bildung der negativen Zahlenwerte ein Recht haben, da wir es mit abstrakten rein ideellen Begriffen zu thun haben. Aber dieses Recht ist um so unzweifelhafter, da Zahlenwerte, welche unter Null liegen, auch im praktischen Leben vorkommen; ein landläufiges Beispiel ist der Vermögensstand eines Menschen, der wohl unter Null sein kann. Die gewonnene Zahlenreihe können wir uns veranschaulichen, indem wir von einem Punkte aus, den wir den Nullpunkt nennen wollen, eine gerade Linie ziehen und von dem Nullpunkt ausgehend nach einander eine beliebig gewählte Länge, welche die Einheit repräsentiert, auftragen. Die Entfernungen der Endpunkte von dem Nullpunkte mögen dann die positiven Zahlen darstellen. Verlängern wir nun die gerade Linie über den Nullpunkt hinaus, also in einer dem Verlauf der vorher gezogenen Linie gerade entgegengesetzten Richtung und tragen nun vom Nullpunkt aus die gewählte Längeneinheit auch in dieser Richtung auf, so geben uns die Entfernungen der jedesmaligen Endpunkte vom Nullpunkte ein Bild der negativen Zahlen.

Addition und Subtraktion.

Wir stellen uns die Aufgabe, zu einer gegebenen Zahl a eine andere gegebene Zahl hinzu zu zählen, die beiden gegebenen Zahlen zu addieren oder eine neue Zahl zu finden, welche so viel Einheiten enthält als die beiden gegebenen Zahlen zusammen. Die arithmetische Form der Aufgabe ist $a + b$, und wenn wir annehmen, dass die gesuchte Zahl c ist, so erhalten wir die Gleichung

$$a + b = c.$$

Die gegebenen Zahlen a und b nennt man die Summanden oder Posten, c die Summe, $a + b$ ist die Form der Summe. Wir werden in jeder arithmetischen Form den gegebenen Zahlen besondere Bezeichnungen beilegen, um aus diesen sofort die Stellung, welche die Zahl in der Rechnung einnimmt, zu erkennen; ebenso erhalten die gesuchten Zahlen besondere Namen, welche uns dann sagen, durch welche Rechnungsart die betreffende Zahl entstanden ist.

Wenn es nur auf die Gesammtzahl der Einheiten ankommt, so ist es offenbar gleichgültig, ob ich b zu a oder a zu b hinzulege.

$$a + b = b + a$$

d. h. „Eine Summe ändert ihren Wert nicht, wenn ich die Reihenfolge der Summanden verändere.“ — Die Zahlen a und b nehmen in der Rechnung also ganz gleiche Stellung ein und haben daher den schon angegebenen gemeinsamen Namen Summanden oder Posten.

Wie $a = 0 + a$ entstanden ist, indem ich von 0 um a Einheiten vorwärts zähle, so entsteht c aus $a + b$, indem ich von a aus um b Einheiten vorwärts zähle. Daraus folgt, dass, wenn ich zu einer positiven Zahl eine andere positive Zahl addiere, als Summe sich auch eine positive Zahl ergiebt.

Eine neue Rechnungsart erhalten wir durch Umkehrung unserer Aufgabe, indem wir die gesuchte Zahl mit einer der gegebenen Zahlen vertauschen. Die neue Aufgabe heisst nun:

eine Zahl zu finden, welche zu der gegebenen Zahl a addiert, die gegebene Zahl c ergiebt. Es wird also die Zahl b gesucht. Da c aus a und b entstand, indem ich von a aus um b Einheiten vorwärts zählte, so wird b aus c und a gefunden werden, indem ich von c aus um a Einheiten rückwärts zähle oder indem ich von c Einheiten a Einheiten fortnehme, abziehe oder subtrahiere. Die Zahl c heisst Minuendus, d. h. die Zahl, welche vermindert werden soll, und die Zahl a heisst Subtrahendus d. h. die Zahl, welche abgezogen werden soll. In Zeichen wird die Aufgabe dargestellt durch c — a. Die gesuchte Zahl b nennen wir die Differenz oder den Unterschied der gegebenen Zahlen. c — a ist also die Form der Differenz.

$$c - a = b.$$

Zu bemerken ist, dass die Aufgabe der Summenbildung nur eine Umkehrung gestattet, weil in der Summe, wie oben ausgesprochen wurde, die beiden gegebenen Zahlen ganz gleiche Stellung einnehmen, mit einander vertauscht werden können, ohne dass der Wert der Summe sich ändert.

Ist in einer Differenz der Minuendus a grösser als der Subtrahendus b ($a > b$) so werde ich, indem ich von a aus um b Einheiten rückwärts zähle, auf eine positive Zahl kommen. Ist der Minuendus a und der Subtrahendus ihm gleich, also auch a, so komme ich, indem ich von a aus a Einheiten rückwärts zähle, zur 0.

$$a - a = 0$$

d. h. eine Differenz, in welcher der Subtrahendus gleich dem Minuendus ist, hat den Wert Null. Ist der Subtrahendus einer Differenz a — b grösser als der Minuendus, so werde ich, indem ich von a aus b Einheiten rückwärts zähle, zu einer negativen Zahl kommen. Ist der Subtrahendus b z. B. um d Einheiten grösser als a, also $b = a + d$, so komme ich, indem ich vom Minuendus a erst a Einheiten rückwärts zähle, auf Null, und wenn ich nun, wie verlangt wird, weitere d Einheiten rückwärts zähle, auf die negative Zahl — d.

$$a - b = - d, \text{ wenn } b = a + d \text{ ist,}$$

d. h. eine Differenz, deren Subtrahendus grösser ist als der Minuendus, hat einen negativen Zahlenwert.

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Weise eine Differenz ihren Wert ändert, wenn wir den Minuendus mit dem Subtrahendus vertauschen. a — b, wenn $a > b$ und zwar $a = b + d$ ist, ergiebt, indem ich b Einheiten wegnehme, die positive Zahl + d; b — a ergiebt, wenn wie vorher $a = b + d$ ist, die negative Zahl — d, also ist

$$a - b = - (b - a).$$

Die Klammer um b — a bedeutet, dass ich die Differenz ausgerechnet denken soll. Ist in der Differenz a — b der Subtrahendus grösser als der Minuendus, $b > a$, und zwar $b = a + d$, so hat, wie wir schon oben gesehen haben, die Differenz den Wert — d. Vertausche ich den Minuendus mit dem Subtrahendus, so erhalte ich b — a, und da $b = a + d$, so hat diese Differenz den Wert + d. Also auch in diesem Falle ist

$$a - b = - (b - a)$$

d. h. wenn man in einer Differenz den Minuendus mit dem Subtrahendus vertauscht, so nimmt die Differenz das entgegengesetzte Vorzeichen an. Zahlen, welche durch die Zeichen $+$ oder $-$ mit einander verbunden sind, nennt man die Glieder der zusammengesetzten arithmetischen Form. Ein einzelnes Glied heisst ein Monom, eine Form mit zwei Gliedern heisst Binom, mit drei Gliedern Trinom, mit beliebig vielen Gliedern ein Polynom. $-b + a$ wird berechnet, indem man, wie oben erklärt ist, von $-b$ aus um a Einheiten vorwärts zählt. Ist nun b grösser als a, nämlich $b = a + d$, so bleibe ich, indem ich von $-b$ aus um a Einheiten vorwärts zähle, noch um d Einheiten in dem negativen Zahlengebiet von der Null entfernt $-b + a = -d$. Ist aber $b < a$ und zwar $a = b + d$, so erhalte ich für $-b + a$, indem ich von $-b$ erst b Einheiten vorwärts zähle, Null und indem ich, wie vorgeschrieben ist, noch weitere d Einheiten vorwärts zähle, ergiebt sich für $-b + a$ der Wert $+d$. Vergleichen wir diese Werte mit denen, welche wir vorher für $a - b$ gefunden haben, so erkennen wir, dass $a - b = -b + a$ ist, d. h. die Glieder eines Ausdrucks mit ihren Vorzeichen können in ihrer Reihenfolge verändert werden, ohne dass der Ausdruck seinen Wert ändert. Da $a - b = -(b - a)$ war, so können wir hier schon bemerken, dass, wenn wir in dem Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen die Parenthesen weglassen wollen, wir den Gliedern in der Parenthese das entgegengesetzte Vorzeichen geben müssen.

Wir haben gesehen, dass die Summe $+a + b$ gefunden wird, indem wir von $+a$ aus b Einheiten vorwärts zählen d. h. in demselben Sinne, in welchem der Summande b gezählt ist. Die Differenz $+a - b$ wird berechnet, indem wir von $+a$ um b Einheiten rückwärts zählen d. h. im entgegengesetzten Sinne, in welchem der Subtrahendus b gezählt ist. Behalten wir nun diese Definitionen des Addierens und Subtrahierens bei auch in dem Falle, in welchem der zu addierende Summande oder der Subtrahendus negative Zahlen sind, so werden sich auch hiefür die Rechnungsregeln auf einfache Weise ergeben. Soll zu $+a$ der Summande $-b$ hinzugefügt werden, so haben wir von $+a$ aus um b Einheiten in demselben Sinne weiter zu zählen, in welchem der Summande gezählt ist d. h. rückwärts. Die Aufgabe $+a$ um $-b$ zu vermehren ergiebt also dasselbe Resultat wie die schon behandelte $+a$ um $+b$ zu vermindern.

$$+a + (-b) = +a - b$$

Soll von $+a$ die Zahl $-b$ subtrahiert werden, so müssen wir nach der Definition des Subtrahierens von $+a$ um b Einheiten weiter zählen in dem entgegengesetzten Sinne als in dem, in welchem der Subtrahendus gezählt ist, d. h. vorwärts. Wir sehen somit, dass die Aufgabe $+a$ um $-b$ zu vermindern dasselbe Resultat ergiebt als die schon behandelte $+a$ um $+b$ zu vermehren.

$$+a - (-b) = +a + b$$

Aus den beiden letzten Formeln ergiebt sich der Satz, dass die Subtraktion einer positiven oder negativen Zahl stets ersetzt werden kann durch die Addition der entgegengesetzten

Zahl d. h. einer Zahl, welche mit dem gegebenen Subtrahendus das entgegengesetzte Vorzeichen hat, aber abgesehen vom Vorzeichen — im absoluten Werte — mit ihm übereinstimmt. Da die Subtraktion sich stets durch die Addition ersetzen lässt, so sind für das praktische Rechnen die Regeln der letzteren von besonderer Wichtigkeit. Nach unseren Ausführungen können wir aber als Rechnungsregeln der Addition für das praktische Rechnen die folgenden aufstellen.

Zwei Zahlen, welche gleiche Vorzeichen haben, werden addiert, indem man die absoluten Werte addiert und der Summe dasselbe Vorzeichen giebt, welches die Summanden haben.

Zwei Zahlen, welche ungleiche Vorzeichen haben, werden addiert, indem man den kleineren absoluten Wert von dem grösseren subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen des Summanden giebt, in welchem die absolute Zahl die grössere ist.

Wir wollen nun die Aufgabe behandeln, ein Binom, d. h. eine Summe oder Differenz zu einer gegebenen Zahl zu addieren oder von derselben zu subtrahieren. Die Aufgabe hat also vier verschiedene Fälle, welche nach einander durchgegangen werden sollen.

1) Die Addition einer Summe zu einer Zahl: $a + (b + c)$. Addiere ich zu a erst b Einheiten, so erhalte ich $a + b$, ich habe dann aber noch c Einheiten zu wenig addiert, füge ich diese auch noch hinzu, so erhalte ich $a + b + c$.

$$a + (b + c) = a + b + c$$

d. h. eine Summe wird addiert, indem man ihre Summanden einzeln addiert.

Es möge hier nebenbei die Bemerkung Platz finden, dass bei den Operationen mit allgemeinen Zahlzeichen wie a, b, c, natürlich ein wirkliches Ausrechnen wie bei bestimmten Zahlen nicht stattfinden kann; die allgemeine Arithmetik hat vielmehr die Aufgabe, die Zahlenformen umzuformen zu transformieren, und es bleibt dann meistens dem Geschick des Rechners überlassen, diejenige Form zu wählen, welche für die wirkliche Ausrechnung im gegebenen Falle die beste ist, d. h. welche auf dem kürzesten Wege zum Ziele führt. Der zuletzt aufgeführte Satz lehrt also, dass man, statt erst $b + c$ zu addieren und dann diese Summe zu a hinzuzufügen, auch so verfahren kann, dass man zu a erst b addiert und zu der Summe noch c hinzufügt. Im gegebenen Falle für bestimmte Zahlen wird das eine oder das andere vorzuziehen sein. Es ist daher wichtig, dass wir die angeführte Gleichung, welche die Umformung enthält, auch umgekehrt aussprechen. Wir befolgen hier, wie bei späteren Umkehrungen von Gleichungen, den Grundsatz, dass, wenn die Grösse a gleich ist der Grösse b, auch die Grösse b gleich a ist. So erhalten wir durch Umkehrung

$$a + b + c = a + (b + c)$$

d. h. Statt zwei Zahlen b und c nach einander zu addieren, kann man auch ihre Summe addieren.

2) Die Addition einer Differenz zu einer Zahl: $a + (b - c)$. Addiere ich erst b zu a so erhalte ich $a + b$, ich habe dann aber c Einheiten zu viel addiert, da ich nur $b - c$ addieren soll; diese c Einheiten muss ich also noch wegnehmen und erhalte

$$a + (b - c) = a + b - c$$

d. h. eine Differenz addiert man, indem man ihren Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert.

Durch Umkehrung ergiebt sich:

$$a + b - c = a + (b - c)$$

d. h. Statt eine Zahl b zu addieren und dann eine zweite c zu subtrahieren, kann man die Differenz dieser beiden Zahlen addieren.

Aus 1) und 2) ergiebt sich noch die Regel, dass, wenn vor einer Parenthese ein +zeichen steht, man auch die Parenthesen fortlassen kann. Durch die oben angegebene Methode der Ableitung kann man diese Regel auch ausdehnen auf den Fall, dass in der Parenthese ein Polynom steht.

$$a + (b + c - d - e) = a + b + c - d - e$$

d. h. ein Polynom wird addiert, indem man seine positiven Glieder addiert und die negativen Glieder subtrahiert.

3) Die Subtraktion einer Summe von einer Zahl: $a - (b + c)$. Subtrahiere ich von a erst b, so erhalte ich $a - b$, ich habe dann aber noch c Einheiten zu wenig subtrahiert, diese muss ich noch fortnehmen und erhalte

$$a - (b + c) = a - b - c$$

d. h. eine Summe subtrahiert man, indem man die Summanden einzeln subtrahiert.

Durch Umkehrung folgt hieraus:

$$a - b - c = a - (b + c)$$

d. h. Statt zwei Zahlen nach einander zu subtrahieren, kann man ihre Summe subtrahieren.

4) Die Subtraktion einer Differenz: $a - (b - c)$. Subtrahiere ich von a erst b, so erhalte ich $a - b$, dann habe ich aber c Einheiten zu viel subtrahiert, denn ich soll ja nur $b - c$ subtrahieren. Diese c Einheiten muss ich also noch zulegen und erhalte:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

d. h. eine Differenz wird subtrahiert, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert. Durch Umkehrung erhalten wir

$$a - b + c = a - (b - c)$$

d. h. Statt eine Zahl zu subtrahieren und dann eine zweite zu addieren, kann man auch die Differenz der beiden Zahlen subtrahieren.

Aus 3) und 4) ist ersichtlich, dass, wenn vor einer Parenthese ein —zeichen steht und man die Parenthesen fortlassen will, man jedem Gliede in der Parenthese das entgegengesetzte Vorzeichen geben muss. Auch diese Regel lässt sich durch die für Binome angewandte Methode der Ableitung auf Polynome ausdehnen.

$$a - (b + c - d - e) = a - b - c + d + e$$

d. h. ein Polynom wird subtrahiert, indem man seine positiven Glieder subtrahiert und die negativen addiert.

Zählt eine Zahl nicht absolute Einheiten, sondern Dinge oder auch Zahlen, haben wir es also mit benannten Zahlen zu thun, so kann ohne Unterbrechung vorwärts oder rückwärts nur dann gezählt werden, wenn die gezählten Dinge oder Zahlen unter einander gleichartig sind. Wir erhalten hieraus den Grundsatz, dass benannte Zahlen nur dann addiert oder subtrahiert werden können, wenn die Benennungen der Zahlen gleich sind. Ist dieser Bedingung genügt, so werden benannte Zahlen in der Weise addiert oder subtrahiert, dass man die abzählenden Zahlen oder Coëfficienten, mit ihren Vorzeichen zusammen genommen, addiert oder subtrahiert und dieselbe Benennung beibehält. Die Ziffern des dekadischen Zahlensystems haben ihre Benennungen in den Stellenwerten. Es müssen die Zahlen also zur Addition oder Subtraktion so angeordnet werden, dass die Ziffern mit gleichen Stellenwerten addiert und subtrahiert werden. Um Polynome zu addieren setzt man die gleichbenannten Glieder derselben untereinander und führt nun die Addition dieser Glieder nach der oben angegebenen Regel aus. Um Polynome zu subtrahieren, setzt man die Glieder des Subtrahendus unter die gleichbenannten des Minuendus, verwandelt die Vorzeichen der einzelnen Glieder des Subtrahendus in die entgegengesetzten und addiert dann.

Multiplikation und Division.

A. Multiplikation.

Hat eine Summe lauter gleiche Summanden, so können diese als die abzuzählenden Einheiten angesehen werden. Zählt die Zahl a Einer ab, so brauchen wir das Gezählte, die Eins, nicht anzugeben, obwohl es auch gestattet ist und zuweilen auch geschieht.

$$a = a.\,1$$

Treten an die Stelle der abzuzählenden Einer andere Zahlen, so müssen letztere jedenfalls angegeben werden. Das Schema einer Summe, deren gleicher Summande die Zahl b ist und deren Anzahl der Summanden a ist, werden wir ausdrücken durch

$$b + b + b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. + \overset{a}{\frown}\!\!\!\!b,$$

indem wir bei dem letzten Gliede die Anzahl der Summanden oben angeben und, da a eine unbestimmte beliebig kleine oder grosse positive Zahl sein muss, die fehlenden Summanden durch die Punkt-Reihe ausdrücken. Da die Summe durch Angabe der beiden Zahlen a und b vollständig bestimmt ist, so schreiben wir sie in der einfacheren Form a . b (a mal b) und nennen diese neue arithmetische Form ein Produkt. Die Zahl, welche in der Summe die Anzahl der Summanden angab, wird in der Form des Produkts Multiplikator genannt, und die Zahl, welche in der Summe der gleiche Summande war, heisst in der Form des Produkts der Multiplikandus. Wir wollen hiebei noch besonders die Analogie hervorheben, welche zwischen der Bildung der unbenannten Zahlen aus der Eins, der Bildung der benannten Zahlen aus Coëfficient und Benennung und der Bildung des Produkts aus der gezählten oder zu vervielfachenden Zahl und der zählenden oder vervielfachenden Zahl besteht.

Wie bei der Summe und Differenz, wollen wir nun beim Produkt die Frage stellen, welche Veränderung mit demselben vorgeht, wenn man die gegebenen Zahlen a und b in ihrer Stellung in der Rechnung mit einander vertauscht. Zahlenbeispiele zeigen, dass man in einem Produkt den Multiplikator mit dem Multiplikandus vertauschen kann, ohne dass dadurch der Wert des Produkts eine Änderung erleidet. Um auch allgemein nachzuweisen, dass $a \,.\, b = b \,.\, a$ ist, stellen wir b, seiner Entstehung gemäss, dar als eine Summe aus Einern und schreiben die Gleichung zwischen den beiden Formen a mal untereinander.

$$
\begin{array}{r}
b = \underbrace{1 + 1 + 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 1}_{b} \\
b = 1 + 1 + 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 1 \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
a)\; b = 1 + 1 + 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 1
\end{array}
$$

Bei der letzten Gleichung haben wir am Anfange angegeben, dass es die ate ist. Und da a eine unbestimmte beliebig kleine oder grosse Zahl ist, so sind die fehlenden Gleichungen durch Punktreihen ausgedrückt. Addieren wir nun diese Gleichungen, so erhalten wir nach dem Grundsatze: „Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches“ wieder eine Gleichung. Die in vertikaler Reihe untereinander stehenden Einer zählen wir dabei zusammen und erhalten für jede Vertikalzeile den Wert a, also

$$\underbrace{b + b + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + b}_{a} = \underbrace{a + a + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a}_{b}$$

d. h.

$$a \,.\, b = b \,.\, a.$$

Die beiden gegebenen Zahlen können also ohne Veränderung des Produkts vertauscht werden; deshalb haben sie ausser den oben angegebenen Bezeichnungen noch den gemeinsamen Namen Faktoren. Wir können schon hier bemerken, dass die Multiplikation nur eine Umkehrung gestatten wird.

Wir wollen nun das Vorzeichen des Produkts bestimmen, wenn der Multiplikator und der Multiplikandus positive oder negative Zahlen sind. Dabei wird die Bedeutung eines Produktes, dessen Multiplikator negativ ist, noch besonders festgestellt werden müssen.

1) Ist sowohl der Multiplikator als der Multiplikandus eine positive Zahl, so kann das Produkt dargestellt werden als eine Summe aus lauter gleichen Summanden. Da diese Summe stets einen positiven Zahlenwert haben muss, so ist auch das Produkt aus zwei positiven Zahlen positiv.

2) Ist der Multiplikator eine positive, der Multiplikandus aber eine negative Zahl, so kann man das Produkt als eine Summe aus lauter gleichen negativen Summanden darstellen. Eine solche Summe muss aber stets einen negativen Wert haben, daher ist das Produkt aus einem positiven Multiplikator und einem negativen Multiplikandus eine negative Zahl.

3) Wenn wir bedenken, dass die Zahl — a entstand, indem wir von 0 aus a Einheiten rückwärts zählten, so wird das Produkt — a b die Bedeutung haben müssen, dass wir den Multiplikandus mit dem absoluten Werte des Multiplikators multiplicieren und die erhaltene Zahl von Null abziehen. Ist der Multiplicator also eine negative und der Multiplicandus eine positive Zahl, so haben wir das Produkt darzustellen als eine Summe aus lauter positiven Summanden, deren Wert positiv ist, und haben dann diese Summe von 0 abzuziehen, erhalten somit eine negative Zahl. Wenn daher der Multiplicator negativ und der Multiplicandus positiv ist, so hat das Produkt einen negativen Wert.

4) Wenn sowohl der Multiplikator als auch der Multiplikandus negativ sind, so können wir, indem der Multiplikator absolut genommen wird, das Produkt zunächst darstellen als eine Summe aus lauter negativen Summanden. Der Wert derselben ist negativ und wir haben ihn noch von 0 abzuziehen; das ergiebt, wie aus früheren Ausführungen folgt, eine positive Zahl. Haben also Multiplikator und Multiplikandus negative Vorzeichen, so hat das Produkt einen positiven Zahlenwert.

Für den praktischen Gebrauch können die abgeleiteten Zeichenregeln in folgende beide Regeln zusammengefasst werden.

Ein Produkt aus zwei Faktoren, welche gleiches Vorzeichen haben, hat einen positiven Zahlenwert.

Ein Produkt aus zwei Faktoren, welche entgegengesetzte Vorzeichen haben, hat einen negativen Zahlenwert.

Aus diesen Zeichenregeln der Multiplikation folgt noch, dass der oben für positive Faktoren bewiesene Satz, dass ein Produkt seinen Wert nicht ändert, wenn man den Multiplikator mit dem Multiplikandus vertauscht, allgemeine Gültigkeit hat. Er gilt auch dann, wenn das Produkt mehr als zwei Faktoren hat, und es kann also in jedem Produkt die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden, ohne dass dadurch das Produkt seinen Wert ändert.

$$abc = (ab)\,c = (ac)\,b = (bc)\,a \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, ein Produkt zu berechnen, wenn der Multiplikator eine einfache Zahl, der Multiplikandus aber ein Binom also eine Summe oder eine Differenz ist. $a\,(b \pm c)$. Wir können dieses Produkt darstellen als eine Summe aus lauter gleichen Summanden $(b \pm c)$. Die Anzahl der Summanden muss a sein

$$a\,(b \pm c) = \overbrace{(b \pm c) + (b \pm c) + \;.\;.\;.\;.\;.\; + (b \pm c)}^{a}.$$

Da vor den Parenthesen überall +zeichen stehen, so können wir sie weglassen und erhalten

$$= \overbrace{b \pm c + b \pm c + \;.\;.\;.\;.\;.\; + b \pm c}^{a}$$

$$= \overbrace{b + b + \;.\;.\;.\; b}^{a} \overbrace{\pm c \pm c \pm \;.\;.\;.\; \pm c}^{a}.$$

denn eine Summe aus positiven und negativen Gliedern ändert ihren Wert nicht, wenn man die Reihenfolge der Summanden ändert. Beachten wir ferner den Satz: „Statt mehrere Zahlen nach einander zu addieren oder zu subtrahieren, kann man auch die Summe derselben addieren oder subtrahieren“, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a\,(b \pm c) &= (b + b + \;.\;\;.\;\;. \overset{a}{+}\, b) \pm (c + c + \;.\;\;.\;\;. \overset{a}{+}\, c) \\ &= ab \pm ac \end{aligned}$$

d. h. Man multipliciert eine Summe (Differenz) mit einer Zahl, indem man die Glieder derselben einzeln multipliciert und die Produkte addiert (subtrahiert). Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Summe in ein Polynom übergeht. Die Ableitungsmethode bleibt dieselbe.

Durch Umkehrung des Satzes erhalten wir:

$$ab \pm ac = a\,(b \pm c)$$

d. h. Wenn die Glieder einer Summe (Differenz) Produkte sind, welche einen gleichen Faktor haben, so kann man den gleichen Faktor mit der Summe (Differenz) der ungleichen Faktoren multiplicieren. Und allgemein heisst der Satz: Wenn die Glieder eines Polynoms Produkte sind, welche gleiche Faktoren haben, so kann man die gleichen Faktoren herausnehmen und das übrig bleibende in Parenthese als Faktor folgen lassen.

Da $a\,(b \pm c) = (b \pm c)\,a$ ist,

so ist auch $(b \pm c)\,a = ab \pm ac$

d. h. Mit einer Summe (Differenz) multipliciert man, indem man mit jedem Gliede multipliciert und die einzelnen Produkte addiert (subtrahiert).

Hat sowohl der Multiplikator als auch der Multiplikandus die Form eines Binoms, so müssen wir bei Ableitung der Rechnungsregeln folgende vier Fälle unterscheiden.

1) Multiplikator und Multiplikandus haben die Form einer Summe: $(a + b)\,(c + d)$. Denken wir uns zunächst den Multiplikandus $(c + d)$ als eine ausgerechnete Zahl, so erhalten wir nach den vorher abgeleiteten Regeln

$$\begin{aligned} (a + b)\,(c + d) &= a\,(c + d) + b\,(c + d) \\ &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= ac + ad + bc + bd. \end{aligned}$$

2) Der Multiplikator ist eine Differenz, der Multiplikandus eine Summe: $(a - b)\,(c + d)$. Wir denken uns wieder $(c + d)$ als eine ausgerechnete Zahl und erhalten:

$$\begin{aligned} (a - b)\,(c + d) &= a\,(c + d) - b\,(c + d) \\ &= (ac + ad) - (bc + bd) \\ &= ac + ad - bc - bd. \end{aligned}$$

3) Der Multiplikator ist eine Summe, der Multiplikandus eine Differenz: $(a + b)\,(c - d)$. Verfahren wir wie vorher, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} (a + b)\,(c - d) &= a\,(c - d) + b\,(c - d) \\ &= (ac - ad) + (bc - bd) \\ &= ac - ad + bc - bd. \end{aligned}$$

4) Sowohl der Multiplikator als auch der Multiplikandus haben die Form einer Differenz: (a — b) (c — d).

$$\begin{aligned}(a - b)(c - d) &= a(c - d) - b(c - d)\\ &= (ac - ad) - (bc - bd)\\ &= ac - ad - bc + bd.\end{aligned}$$

Dieselbe Methode der Ableitung kann man befolgen, wenn Multiplikator und Multiplikandus Polynome sind. Die Resultate, welche die Betrachtung der vier einzelnen Fälle ergeben hat, können wir nun, indem wir zugleich die Verallgemeinerung auf Polynome vornehmen, in dem Satze aussprechen: „Zwei Polynome werden mit einander multipliciert, indem man jedes Glied des Multiplikators, mit dem Vorzeichen zusammengenommen, mit jedem Gliede des Multiplikandus, ebenfalls mit dem Vorzeichen des betreffenden Gliedes genommen, multipliciert und alle einzelnen Produkte addiert.“

Mit Anwendung dieser Multiplikationsregel erhalten wir folgende Formeln:

$$\begin{aligned}&1)\ (a + b)(a + b) = aa + 2\,ab + bb\\ &2)\ (a - b)(a - b) = aa - 2\,ab + bb\\ &3)\ (a + b)(a + b)(a + b) = (aa + 2\,ab + bb)(a + b)\\ &\qquad\qquad = aaa + 3\,aab + 3\,abb + bbb\\ &4)\ (a - b)(a - b)(a - b) = (aa - 2\,ab + bb)(a - b)\\ &\qquad\qquad = aaa - 3\,aab + 3\,abb - bbb.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren a a mit a^2 (a hoch 2 oder a Quadrat) und ein Produkt aus drei gleichen Faktoren a a a mit a^3 (a hoch 3 oder a Kubus), so nehmen die obigen Formeln folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}&1)\ (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2\\ &2)\ (a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2\\ &3)\ (a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3\\ &2)\ (a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Wir erhalten ferner:

$$5)\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

d. h. die Summe zweier Zahlen multipliciert mit der Differenz derselben beiden Zahlen giebt die Differenz ihrer Quadrate. Die Formeln 1) bis 5) kommen häufig auch umgekehrt zur Anwendung. Die Umkehrung von 5) lautet:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

d. h. die Differenz zweier Quadratzahlen kann dargestellt werden als ein Produkt aus Summe der Grundzahlen mal Differenz derselben.

B. Division.

Wir wollen nun die Aufgabe der Multiplikation $ab = c$ umkehren, indem wir die gefundene Zahl c mit einer der gegebenen Zahlen vertauschen und a und c als gegeben und b als gesucht ansehen. Wir haben schon oben bemerkt, dass es nur eine Umkehrung der Multiplikation geben kann, da a und b, die Faktoren, in der Rechnung ganz gleiche Stellung einnehmen. Die neue Aufgabe heisst also: es soll eine Zahl gefunden werden, welche mit einer gegebenen Zahl multipliciert eine andere gegebene Zahl ergiebt. Die Aufgabe wird gelöst sein, wenn ich die Zahl c darstellen kann als eine Summe aus gleichen Summanden a. Die Anzahl der Summanden ist dann die gesuchte Zahl b. Diese wird also angeben, wie oft die Zahl a in c enthalten ist. Die Aufgabe ist aber auch gelöst, wenn ich c darstelle als eine Summe aus a gleichen Summanden. Nun ist der gleiche Summande b die gesuchte Zahl. Diese wird also auch gefunden, indem ich c in a gleiche Teile zerlege. Wir nennen die gegebene Zahl, welche in gleiche Teile geteilt werden soll, Dividendus und die Zahl, welche den gleichen Teil darstellt, nennen wir Divisor. Die gesuchte Zahl, welche angiebt, wie viel mal der Divisor im Dividendus enthalten ist, heisst der Quotient (quotiens wie oft). Indem wir bestimmen, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, messen wir den letzteren durch den ersteren als Masseinheit. Der Quotient stellt nach dieser Auffassung die Masszahl vor. In arithmetischen Zeichen wird die Aufgabe ausgedrückt durch $c : a$ oder $\frac{c}{a}$. Aus der Definition der Aufgabe folgt ohne weiteres, dass der Quotient mit dem Divisor multipliciert, den Dividendus ergeben muss $(\frac{c}{a} \,.\, a = c)$ oder, wenn wir die Zahl a als Dividendus und b als Divisor nehmen:

$$\frac{a}{b} \,.\, b = a.$$

Ist der Dividendus a nicht ein Vielfaches des Divisors b, so kann der Quotient nur dann vollständig angegeben werden, wenn wir uns die Eins in b gleiche Teile geteilt denken. Einen solchen Teil bezeichnet man mit $\frac{1}{b}$. Betrachten wir nun diese Zahl $\frac{1}{b}$ als die Einheit und zählen wir a solche Einheiten ab, so erhalten wir nach der früheren Darstellung:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots \overset{\text{a}}{\overbrace{\frac{1}{b}}} = a.\,\frac{1}{b}.$$

Es ist somit a die abzählende Zahl, der Coëfficient oder Multiplikator und $\frac{1}{b}$ stellt die gezählte Einheit, die Benennung vor. Eine Summe von Zahlen kann man in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zerlegen, indem man jeden Summanden in die gegebene Anzahl gleicher Teile zerlegt und je einen Teil von jedem Summanden zusammen nimmt. $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ wird also dargestellt werden können, indem ich a in Einer zerlege, jeden Einer in b gleiche Teile teile und je einen Teil nehme.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots \overset{\text{a}}{\overbrace{\frac{1}{b}}}$$

Somit drücken die Formen $a.\frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b}$ gleiche Zahlenwerte aus

$$a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Die Form $\frac{a}{b}$ wird auch Bruch genannt und die Zahl b heisst dann der Nenner (die Benennung $\frac{1}{b}$) und a, der Zähler, ist nach unserer Darstellung die Zahl, welche die Einheiten $\frac{1}{b}$ abzählt. Beachten wir, dass Zahlen mit gleicher Benennung addiert oder subtrahiert werden, indem man die Coëfficienten addiert oder subtrahiert und dieselbe Benennung beibehält, so werden wir für die Addition oder Subtraktion der Brüche mit gleichen Nennern die Regel erhalten: Brüche mit gleichen Nennern werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und den gleichen Nenner beibehält.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Durch Umkehrung erhalten wir:

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

d. h. eine Summe oder Differenz, oder verallgemeinert ein Polynom wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied durch die Zahl dividiert und die Quotienten der additiven Glieder addiert und die der subtraktiven Glieder subtrahiert.

Der Divisor kann aber auch eine negative Zahl sein, und wir werden daher allgemein die Frage stellen müssen, welches Vorzeichen erhält der Quotient, wenn Divisor und Dividendus beliebig positive oder negative Zahlen sind. Wir werden dabei wieder vier Fälle zu untersuchen haben.

1) Dividendus und Divisor sind positive Zahlen $+ a : + b$. Wir wollen annehmen, der Quotient habe den absoluten Wert q, das Vorzeichen desselben sei aber noch unbestimmt. Es muss dann sein:

$$(+ b) . q = + a.$$

Ein Produkt aus zwei Faktoren ist nur dann positiv, wenn die beiden Faktoren gleiches Vorzeichen haben, also muss q positiv sein.

2) Der Dividendus sei eine negative, der Divisor eine positive Zahl: $- a : + b = q$. Dann muss der Quotient mit dem Divisor multipliciert den Dividendus ergeben, also:

$$(+ b) . q = - a.$$

Ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren hat aber nur dann einen negativen Wert, wenn die beiden Faktoren entgegengesetztes Vorzeichen haben. Deshalb muss q negativ sein.

3) Der Dividendus soll eine positive, der Divisor eine negative Zahl sein: $+ a : - b = q$. Hieraus ergiebt sich

$$(- b) . q = + a.$$

Ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren kann nur dann positiv sein, wenn die beiden Faktoren gleiches Vorzeichen haben, also muss q eine negative Zahl sein.

4) Sowohl der Dividendus als der Divisor sind negativ: $-a : -b = q$. q ist richtig bestimmt, wenn

$$(-b) \cdot q = -a$$

ist. Ein Produkt aus zwei Faktoren kann aber nur dann negativ sein, wenn die beiden Faktoren entgegengesetztes Vorzeichen haben, also muss q positiv sein.

Fassen wir die Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen, so erhalten wir für die Division die folgenden Zeichenregeln: Haben Dividendus und Divisor gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv. Haben Dividendus und Divisor entgegengesetzte Vorzeichen, so ist der Quotient negativ.

Die Division eines Polynoms durch eine Zahl, dieselbe sei positiv oder negativ, wird demnach so ausgeführt werden müssen, dass man jedes Glied des Polynoms, mit seinem Vorzeichen genommen, durch den Divisor mit Beachtung der Zeichenregeln dividiert und die einzelnen Quotienten addiert.

$$(a - b + c - d) : e = \frac{a}{e} - \frac{b}{e} + \frac{c}{e} - \frac{d}{e}$$

$$(a - b - c + d) : (-e) = -\frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} - \frac{d}{e}$$

Der Bruch $\frac{a}{b}$ entsteht, indem ich Eins in b gleiche Teile teile und a solcher Teile abzähle. Teile ich jeden Teil $\frac{1}{b}$ noch in n gleiche Teile, so habe ich die Eins in $b \cdot n$ gleiche Teile zerlegt, ein solches Teilchen hat demnach den Zahlenwert $\frac{1}{bn}$. n von diesen Teilchen zusammen $\frac{n}{bn}$ giebt $\frac{1}{b}$. Daher muss $a n \cdot \frac{1}{bn}$ oder $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$ sein, d. h. ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder dividiert. Die erste Operation nennt man eine Erweiterung, die zweite das Heben des Bruches.

Dadurch wird es möglich, Brüche, die ungleiche Nenner haben, in die Form von Brüchen mit gleichen Nennern zu bringen. Sind die ungleichen Nenner a und b, so hat man eine Zahl zu suchen, welche sowohl ein Vielfaches von a als von b ist. Solche Zahlen giebt es sehr viele. Um aber die Rechnung nicht unnütz zu erweitern, wird man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividendus von a und b suchen. Diese Zahl heisst der Generalnenner. Erweitert man nun die gegebenen Brüche so, dass sie zu Nennern den Generalnenner haben, so kann man die Brüche addieren oder subtrahieren nach der schon aufgestellten Regel für Addition oder Subtraktion von Brüchen mit gleichen Nennern. Unterscheiden wir die ganzen Zahlen in solche, welche sich nicht in Faktoren zerlegen lassen, Grundzahlen oder Primzahlen, und solche, welche sich in Faktoren zerlegen lassen, zusammengesetzte Zahlen, so wird ein Generalnenner stets zu der letzteren Art gehören, er wird aber nur soviel Primfaktoren enthalten dürfen, dass die Primfaktoren eines jeden einzelnen Nenners darin vorkommen.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c}{1} = \frac{a + bc}{b}$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{d}{be} = \frac{ae}{bce} + \frac{cd}{bce} = \frac{ae + cd}{bce}$$

Haben wir ein Produkt, in welchem der Multiplikator eine ganze Zahl, der Multiplikandus ein Bruch ist, $a \,.\, \frac{b}{c}$, so ist

$$a \,.\, \frac{b}{c} = \overbrace{\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \,.\,.\,.\,.\,.\, \frac{b}{c}}^{a}$$

$$= \frac{\overbrace{b + b + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, + b}^{a}}{c}$$

$$= \frac{ab}{c}$$

d. h. einen Bruch multipliciert man mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert.

Beachten wir, dass $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \,.\, 1$ aus Eins so entstanden ist, dass Eins in b gleiche Teile geteilt ist und a dieser Teile zusammengenommen sind, so wird $\frac{a}{b} \,.\, c$ gebildet werden, indem wir c in b gleiche Teile teilen und a solcher Teile vereinigen.

$$\frac{a}{b} \,.\, c = a \,.\, \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Durch Umkehrung erhält man

$$\frac{ab}{c} = a \,.\, \frac{b}{c}$$

$$\text{und } \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b$$

d. h. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Faktoren durch die Zahl dividiert. Für die Ausrechnung wird es am geschicktesten sein, wenn man zur Division wo möglich einen solchen Faktor wählt, welcher ein Vielfaches des Divisors ist.

Eine benannte Zahl wird durch eine unbenannte Zahl dividiert, in gleiche Teile geteilt, indem man den Coëfficienten durch die Zahl dividiert und die Benennung beibehält; 12 Meter dividiert durch 3 giebt 4 Meter, 9 Zehner dividiert durch 3 giebt 3 Zehner. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner beibehält.

$$\frac{a}{b} : c = a.\frac{1}{b} : c = \frac{a}{c} \,.\, \frac{1}{b} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$$

Erweitere ich den letzten Bruch mit c, so entsteht $\frac{a}{bc}$. Multipliciere ich die Ausdrücke $\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{bc}$ mit c, so erhalte ich in beiden Fällen den Dividendus $\frac{a}{b}$. Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert oder indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert. Durch Umkehrung ergiebt sich: $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c$ d. h. Durch ein Produkt dividiert man, indem man durch die Faktoren nach einander dividiert. Zwei Zahlen mit gleicher Benennung dividiert man, indem man die Coëfficienten durch einander dividiert, der Quotient ist eine unbenannte Zahl, die Masszahl, welche angiebt, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten ist. Zwei Zahlen mit ungleicher Benennung zu dividieren hat keinen Sinn, es sei denn, dass dieselben sich in gleich benannte Zahlen verwandeln lassen.

Da man mit einem Bruch multipliciert, indem man durch seinen Nenner dividiert und dann mit dem Zähler multipliciert, so ist:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a. \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$$

d. h. Brüche werden mit einander multipliciert, indem man die Zähler mit einander und die Nenner mit einander multipliciert.

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\text{weil } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} \text{ ist.}$$

Brüche mit gleichen Nennern dividiert man also, indem man die Zähler dividiert.

Zwei Zahlen, welche mit einander multipliciert das Produkt 1 geben, nennen wir reciproke oder umgekehrte Zahlenwerte, z. B. a und $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b},$$

$$\text{denn } \frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{abc}{bc} = a.$$

Durch einen Bruch dividiert man also, indem man mit seinem reciproken Werte multipliciert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$$

Multiplicieren wir den Quotienten $\frac{ad}{bc}$ mit dem Divisor $\frac{c}{d}$, so erhalten wir $\frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$, den Dividendus. Die Division durch einen Bruch kann also in jedem Falle durch Multiplikation mit dem reciproken Werte des Bruches ersetzt werden. Die Division zweier Polynome kann man zurückführen auf die Division von Monomen. Man dividiert zwei Polynome, indem man die Glieder des Dividendus und des Divisors zunächst ordnet, dann das erste Glied des Divisors in das erste Glied des Dividendus hineindividiert, so erhält man das erste Glied des Quotienten: mit diesem multipliciert man nun den ganzen Divisor und zieht das Produkt von dem Dividendus ab; mit dem Rest als neuen Dividendus verfährt man mit Beibehaltung des Divisors wie vorher und erhält so das zweite Glied des Quotienten u. s. w.

Durch Teilung der Einheit können wir das dekadische Zahlensystem durch Stellenwerte, welche kleiner als 1 sind, erweitern. Gehen wir von der Einerstelle zur nächsten Stelle nach rechts, so werden die Ziffern dieser Stelle die Benennung oder den Stellenwert $\frac{1}{10}$ haben, die darauf rechts folgende Stelle wird die Benennung $\frac{1}{100}$ haben u. s. w. Indem wir die Stelle der Einer durch ein rechts daneben gesetztes Komma kenntlich machen, können wir die Stellenwerte der einzelnen Ziffern leicht bestimmen. Gehen wir eine Stelle von rechts nach links weiter, so wächst der neue Stellenwert gegen den vorigen 10 mal so gross, und in umgekehrter Richtung um eine Stelle weitergerückt, nimmt der Wert der Ziffern den 10. Teil des vorigen Stellenwertes an. Durch Erweiterung der Stellen von links nach rechts über die Einerstelle hinaus entstehen die Decimalbrüche.

Potenz — Wurzel, Logarithmus.

A. Potenzen.

Ein Produkt aus gleichen Faktoren ist bestimmt, wenn man den gleichen Faktor und die Anzahl der Faktoren kennt. Das Produkt

$$a.\ a.\ a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \overbrace{a}^{n}$$

schreibt man einfacher a^n (a hoch n). Diese neue arithmetische Form nennt man eine Potenz. Eine Potenz ist also ein Produkt aus gleichen Faktoren. Der gleiche Faktor a wird in der Form der Potenz die Grundzahl oder Basis genannt, und die Zahl n, welche die Anzahl der Faktoren angiebt, heisst in der Form der Potenz der Exponent. Die erste Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst ($a^1 = a = 1.\ a$). Potenzen, welche in Grundzahl und Exponent übereinstimmen, addiert oder subtrahiert man, indem man ihre Coëfficienten addiert oder subtrahiert.

$$a^n + a^n = 2\ a^n. \quad 3\ a^n + 5\ a^n = 8\ a^n. \quad p\ a^n + q\ a^n = (p \pm q)\ a^n.$$

Man sieht dabei die gleichen Potenzen als die gezählten Einheiten, Benennungen, an und befolgt die Regel, welche wir für Addition oder Subtraktion gleichbenannter Zahlen aufgestellt haben. Oder man betrachtet die Glieder als Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor a^n, welcher heraus gehoben und mit der Summe oder Differenz der ungleichen Faktoren multipliciert wird.

Das Produkt von Potenzen, welche sowohl ungleiche Grundzahlen als auch ungleiche Exponenten haben, $a^m . b^n$ lässt sich nicht in einer einfacheren Form darstellen. Das Produkt von zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl $a^m . a^n$ erfordert die Multiplikation zweier Produkte, welche beide nur gleiche Faktoren enthalten; diese Multiplikation ergiebt ein Produkt aus soviel gleichen Faktoren als die Potenzen zusammen haben, also aus (m + n) Faktoren und kann wieder als eine Potenz dargestellt werden.

$$a^m = a \cdot a \cdot a \;.\;.\;.\;.\; \overset{m}{\overbrace{a}}$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}$$

$$\text{folglich: } a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \;.\;.\;.\; \overset{m}{\overbrace{a}}\, a\, a\, a \;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}$$

$$= a^{m+n}$$

Potenzen mit gleicher Basis multipliciert man, indem man die Basis unverändert lässt und die Exponenten addiert. Durch Umkehrung ergiebt sich: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ d. h. Eine Potenz, deren Exponent eine Summe ist, kann dargestellt werden als ein Produkt aus Potenzen mit derselben Grundzahl und mit den einzelnen Summanden als Exponenten.

Das Produkt von zwei Potenzen mit ungleicher Grundzahl aber mit gleichen Exponenten $a^n \cdot b^n$ wird ausgeführt durch Multiplikation zweier Produkte, deren jedes für sich gleiche Faktoren enthält und in welchen die Anzahl der Faktoren gleich ist. Wir erhalten dadurch ein Produkt, in welchem die Reihenfolge der Faktoren geändert werden kann, ohne dass dadurch sich der Wert des Produkts ändert. Da die Faktoren a und die Faktoren b in gleicher Anzahl vorhanden sind, so können wir auf ein a immer b folgen lassen. Fassen wir dann ein solches Produkt (ab) als eine Zahl auf, so erhalten wir ein Produkt aus gleichen Faktoren, welches sich in die Form der Potenz bringen lässt.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}$$

$$b^n = b \cdot b \cdot b \;.\;.\;.\;.\; b$$

$$\text{folglich: } a^n \cdot b^n = a \cdot a \cdot a \;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}} \cdot b \cdot b \cdot b \;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{b}}$$

$$= (ab)\,(ab)\,(ab) \;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{(ab)}}$$

$$= (ab)^n$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliciert, indem man die Grundzahlen multipliciert. Durch Umkehrung ergiebt sich $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ d. h. Ein Produkt wird potenziert, indem die einzelnen Faktoren potenziert werden.

Dividieren wir zwei Potenzen, welche gleiche Grundzahlen haben, so erhalten wir einen Bruch, in welchem Zähler und Nenner Produkte aus gleichen Faktoren sind. Diesen Bruch können wir heben. Sind im Zähler ebensoviel Faktoren vorhanden als im Nenner, so erhalten wir $\frac{1}{1} = 1$. Hat der Zähler mehr Faktoren als der Nenner, so heben sich im Nenner alle Faktoren fort und die Anzahl der Faktoren des Zählers vermindert sich um die Anzahl der Faktoren des Nenners. Hat hingegen der Zähler weniger Faktoren als der Nenner, so heben sich die Faktoren des Zählers sämmtlich fort, so dass nur der nicht ausdrücklich angegebene aber immer vorhandene Faktor 1 übrig bleibt, und die Anzahl der Faktoren des

Nenners vermindert sich um die Anzahl der Faktoren des Zählers. Die Produkte aus gleichen Faktoren werden schliesslich wieder in die Form der Potenz gebracht.

$$1)\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{m}{\overbrace{a}}}{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}} \qquad (m > n)$$

$$= a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{m-n}{\overbrace{a}}$$

$$= a^{m-n}$$

$$2)\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\; \overset{m}{\overbrace{a}}}{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}} \qquad (m < n)$$

$$= \frac{1}{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\; \overset{(n-m)}{\overbrace{a}}}$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}$$

Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Durch Umkehrung ergiebt sich $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ d. h. Eine Potenz, deren Exponent eine Differenz ist, kann dargestellt werden als ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Potenzen von derselben Grundzahl sind. Der Exponent der Potenz im Zähler ist der Minuendus und der Exponent der Potenz im Nenner ist gleich dem Subtrahendus.

Dividieren wir zwei Potenzen mit ungleichen Grundzahlen aber gleichen Exponenten $a^n : b^n$, so erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Produkte mit gleicher Anzahl von Faktoren sind. Dieser Bruch kann dargestellt werden als ein Produkt aus einzelnen unter einander gleichen Brüchen mit je einem Faktor im Zähler und Nenner. Dieses Produkt aus gleichen Brüchen bringen wir dann in die Form der Potenz.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{a}}}{b \,.\, b \,.\, b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; b}$$

$$= \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{n}{\overbrace{\frac{a}{b}}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Grundzahlen dividiert. Durch Umkehrung erhalten wir: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ d. h. ein Bruch wird potenziert, indem man den Zähler und den Nenner potenziert.

Soll eine Potenz a^m noch mit n potenziert werden $\left(a^m\right)^n$, so erhalten wir ein Produkt aus n gleichen Faktoren a^m. Dieses berechnen wir, da die einzelnen Faktoren Potenzen mit gleicher Grundzahl sind, indem wir die Exponenten addieren. Da aber die Exponenten gleich sind, so erhalten wir durch die Addition eine Summe aus gleichen Summanden, welche, wie wir früher gesehen haben, sich als Produkt schreiben lässt.

$$\begin{aligned}\left(a^m\right)^n &= \overbrace{a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a^m}^{n} \\ &= a^{\overbrace{m + m + m \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + m}^{n}} \\ &= a^{m\,.\,n}\end{aligned}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliciert.

Danach ist $\left(a^n\right)^m = a^{n\,.\,m} = a^{m\,.\,n}$, also $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$ d. h. Wenn man eine Zahl mehrmals nacheinander zu potenzieren hat, so kann man die Reihenfolge der Potenzierungen beliebig wählen.

Durch Umkehrung ergiebt sich $a^{m\,.\,n} = \left(a^m\right)^n$ d. h. Statt eine Zahl mit einem Produkt zu potenzieren, kann man sie nacheinander mit den einzelnen Faktoren potenzieren.

Wir haben vorher gefunden $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ $(m < n)$. Führen wir die Division von $\frac{a^m}{a^n}$ so aus, dass wir den Exponenten des Nenners von dem Exponenten des Zählers subtrahieren, so erhalten wir eine negative Zahl. Es sei $m - n = -p$, so ergiebt sich $\frac{a^m}{a^n} = a^{-p}$. Da $n - m = +p$ sein muss, so werden wir $\frac{1}{a^p}$ auch durch die Form a^{-p} bezeichnen können. Diese Form der Potenz mit negativem Exponenten ist häufig für die Rechnung geschickter als die Form des Bruches, zumal da wir nachweisen können, dass für diese Potenzen mit negativen Exponenten dieselben Rechnungsregeln gelten wie für die Potenzen mit positiven Exponenten. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist also ein Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine Potenz von derselben Grundzahl mit dem positiv genommenen Exponenten ist und umgekehrt.

Da $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ist, so können wir für eine Potenz mit negativem Exponenten auch eine Potenz setzen, deren Grundzahl der reciproke Wert der Grundzahl der ersten Potenz ist und deren Exponent den entgegengesetzten Wert, d. h. den positiven Wert, von dem des Exponenten der ersten Potenz hat.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$$

d. h. Wenn der Zähler oder der Nenner eines Bruches eine Potenz mit negativem Exponenten als Faktor enthält, so kann man diese Potenz mit positivem Exponenten aus dem Zähler in den Nenner oder, wenn sie im Nenner stand, aus dem Nenner in den Zähler setzen, ohne dass dadurch der Bruch seinen Wert ändert.

Die Methode, um zu zeigen, dass für Potenzen mit negativen Exponenten dieselben Rechnungsregeln gelten wie für Potenzen mit positiven Exponenten, besteht darin, dass man die Potenzen mit negativen Exponenten nach der Definition verwandelt in Ausdrücke, welche nur Potenzen mit positiven Exponenten enthalten. Mit diesen Ausdrücken nimmt man dann nach den schon abgeleiteten Regeln die vorgeschriebene Rechnung vor und verwandelt das Resultat wieder durch Fortschaffen der etwa vorkommenden Nenner in Potenzen mit negativen Exponenten. Die Anwendung dieser Methode wollen wir nur an zwei Beispielen erläutern.

1) $a^{-m} \,.\, a^{-n} = \frac{1}{a^m} \,.\, \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$

2) $\left(a^{-m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(a^{-m}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{m\,.\,n}$

Auf gleiche Art kann die Richtigkeit folgender Formeln abgeleitet werden.

1) $a^m \,.\, a^{-n} = a^{m-n}$ 2) $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$

3) $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$ 4) $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n} = a^{n-m}$

5) $a^{-m} \,.\, b^{-m} = (ab)^{-m}$ 6) $a^{-m} : b^{-m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$

7) $\left(a^{-m}\right)^n = a^{-mn}$ 8) $\left(a^m\right)^{-n} = a^{-mn}$.

Und damit ist dann gezeigt, dass dieselben Regeln, welche für Potenzen mit positiven Exponenten gelten, auch angewendet werden können auf Potenzen mit negativen Exponenten.

B. Wurzeln.

In einer Potenz können nicht, wie es bei der Summe und beim Produkt der Fall war, die Zahlen, welche die Form bilden, mit einander vertauscht werden, ohne dass der Wert des Ausdrucks sich ändert. Das beweist ein beliebiges Zahlenbeispiel: $5^2 = 25$ aber $2^5 = 32$. Grundzahl und Exponent nehmen also in der Rechnung verschiedene Stellung ein. Indem wir nun die Zahl, welche die Ausrechnung der Potenz ergiebt, mit dem Exponenten oder mit der Grundzahl vertauschen, erhalten wir durch Umkehrung aus dem Potenzieren zwei neue Rechnungsarten. Ist $a^n = p$ und wir nehmen n und p als gegebene Zahlen und wollen a finden, so haben wir die Aufgabe p in n gleiche Faktoren zu zerlegen oder als ein Produkt aus n gleichen Faktoren darzustellen. Diese Aufgabe bildet das Radicieren oder Wurzelziehen. In

Zeichen wird die Aufgabe dargestellt durch $\sqrt[n]{p}$ (nte Wurzel aus p). In dieser arithmetischen Form heisst p, die Zahl, welche in gleiche Faktoren zerlegt oder aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, der Radikandus, und n, die Zahl, welche angiebt, in wieviel gleiche Faktoren zerlegt werden soll, nennt man den Wurzel-Exponenten. Die Form selbst $\sqrt[n]{p}$ oder die Zahl a, welche den gleichen Faktor angiebt, heisst die Wurzel. Aus dieser Definition der Wurzelrechnung folgt sofort, dass die Wurzel richtig bestimmt ist, wenn sie mit dem Wurzel-Exponenten potenziert den Radikandus ergiebt.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Ebenfalls ist sofort ersichtlich, dass, wenn der Radikandus schon die Form einer Potenz hat, deren Exponent gleich dem Wurzel-Exponenten ist, dass dann die Wurzel gleich der Grundzahl der Potenz ist:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Wir wollen nun die schon bekannten Rechnungsarten mit Wurzelgrössen vornehmen.

Da man die Wurzeln in ihrer Form als Einheiten ansehen muss, so kann man Wurzeln nur dann addieren oder subtrahieren, wenn sie ganz gleich sind d. h. wenn sie gleiche Wurzel-Exponenten und gleiche Radikanden haben. In diesem Falle addiert oder subtrahiert man sie, indem man ihre Coëfficienten addiert oder subtrahiert.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{a}; \quad 3\sqrt[n]{a} + 7\sqrt[n]{a} = 10\sqrt[n]{a}; \quad b\sqrt[n]{a} \pm c\sqrt[n]{a} = (b \pm c)\sqrt[n]{a}$$

Die Multiplikation und die Division von Wurzelgrössen wollen wir zunächst für den Fall vornehmen, dass die Wurzeln gleiche Wurzel-Exponenten haben. Haben wir zu multiplicieren $\sqrt[n]{a}$ mit $\sqrt[n]{b}$, so wollen wir die Werte dieser Wurzeln v und w setzen. Es muss dann, wie vorher angegeben ist, $v^n = a$ und $w^n = b$ sein. Multiplicieren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir die neue Gleichung $(v \cdot w)^n = ab$. Radicieren wir nun diese Gleichung auf beiden Seiten durch n, so müssen wir wieder Gleiches erhalten, denn wenn man gleiche Grössen auf gleiche Weise verändert, so muss wieder Gleiches entstehen.

Wir erhalten: $\sqrt[n]{(v \cdot w)^n} = \sqrt[n]{ab}$

oder: $vw = \sqrt[n]{ab}$

Setzen wir für v und w die Wurzeln ein, deren Werte diese Zahlen angeben, so ergiebt sich:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten werden multipliciert, indem man ihre Radikanden multipliciert. Und durch Umkehrung erhalten wir

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

d. h. Aus einem Produkt zieht man eine Wurzel, indem man sie aus jedem Faktor zieht.

Das gleiche Verfahren befolgen wir, um die weiteren Rechnungsregeln für Wurzelgrössen abzuleiten. Es sollen zwei Wurzelgrössen mit gleichen Wurzel-Exponenten dividiert werden. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$. Wir nehmen an $\sqrt[n]{a}$ sei gleich v und $\sqrt[n]{b} = w$, dann muss $v^n = a$ und $w^n = b$ sein. Dividieren wir diese Gleichungen und zwar die erste durch die zweite, so erhalten wir $\left(\frac{v}{w}\right)^n = \frac{a}{b}$ und indem wir durch n radicieren: $\frac{v}{w} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Setzen wir nun für v und w die Wurzeln ein, deren Werte diese Zahlen darstellen, so ergiebt sich

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert. Durch Umkehrung dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

d. h. Ein Bruch wird radiciert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner radiciert.

Eine Wurzel $\sqrt[n]{a}$ soll potenziert werden und zwar zur m ten Potenz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Ist $\sqrt[n]{a} = v$, so muss $v^n = a$ sein. Erheben wir die gleichen Grössen zur m ten Potenz, so entsteht: $v^{n \cdot m} = a^m$ oder $\left(v^m\right)^n = a^m$, und wenn wir diese Gleichung durch n radicieren, erhalten wir $v^m = \sqrt[n]{a^m}$. Setzen wir wieder für v die Form der Wurzel, deren Wert es angiebt, so ergiebt sich:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Eine Wurzel wird potenziert, indem man ihren Radikanden potenziert. Die Umkehrung dieser Gleichung giebt

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

d. h. Eine Potenz radiciert man, indem man ihre Grundzahl radiciert und die Wurzel dann mit dem Potenzexponenten potenziert.

Um eine Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a}$ durch m zu radicieren $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$, setzen wir den Wert dieser Grösse gleich v, dann muss $v^m = \sqrt[n]{a}$ sein. Da v^m der Wert von $\sqrt[n]{a}$ ist, so muss auch $\left(v^m\right)^n = a$ oder $v^{mn} = a$ sein. Radicieren wir diese Gleichung durch m . n und setzen dann für v die Wurzelform ein, deren Wert v angiebt, so erhalten wir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Eine Wurzel radiciert man also, indem man die Wurzel-Exponenten multipliciert. Die umgekehrte Gleichung heisst:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

d. h. durch ein Produkt radiciert man, indem man durch die Faktoren des Produktes nach einander radiciert.

Da $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ und mn = nm ist, so ist auch $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ d. h. Wenn eine Zahl mehrfach zu radicieren ist, so kann man die Reihenfolge der Radicierungen beliebig wählen.

Ist $\sqrt[n]{a} = v$, also $v^n = a$ und wir potenzieren diese Gleichung durch eine beliebige Zahl p, so erhalten wir $v^{np} = a^p$. Wird diese Gleichung durch np radiciert und für v die Wurzelform $\sqrt[n]{a}$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \quad \text{und} \quad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

Da $a = a^1$ ist, so erhalten wir die Regel: Eine Wurzel ändert ihren Wert nicht, wenn man den Wurzel-Exponenten und den Radikanden-Exponenten mit derselben Zahl multipliciert oder dividiert. Vermittelst dieser Regel können wir Wurzeln, welche ungleiche Wurzel-Exponenten haben, stets so umformen, dass die Wurzel-Exponenten gleich werden. Wir bestimmen den kleinsten gemeinschaftlichen Dividendus der Wurzel-Exponenten und multiplicieren dann in jeder Wurzel den Wurzel-Exponenten und den Radikanden-Exponenten mit einer solchen Zahl, dass der Wurzel-Exponent gleich dem gemeinschaftlichen Dividendus wird. Wurzeln, welche ungleiche Wurzel-Exponenten haben, werden multipliciert oder dividiert, indem man mit ihnen die angegebene Umformung vornimmt und dann nach den aufgestellten Regeln für Multiplikation und Division von Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten verfährt.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} : \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$$

Nach der Definition der Wurzel muss $\sqrt[1]{a} = a$ sein. Wenn wir nun in $\sqrt[n]{a^m}$ den Wurzel-Exponenten und den Radikanden-Exponenten durch n dividieren, so erhalten wir $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[1]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}$. Ist in dem Exponenten dieser Potenz n nicht als Faktor in m enthalten, so haben wir eine Potenz mit gebrochenem Exponenten. Es ist vorteilhaft für die Rechnung, diese neue Bezeichnung für eine Wurzel einzuführen, weil wir nachweisen können, dass für Potenzen mit gebrochenen Exponenten dieselben Rechnungsregeln gelten, welche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten abgeleitet worden sind. Eine Potenz mit gebrochenen Exponenten hat die Bedeutung einer Wurzel vom Grade des Nenners aus einer Potenz vom Grade des Zählers. Um zu beweisen, dass auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten dieselben Rechnungsregeln angewendet werden können wie für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, bringt man dieselben zunächst in die Form der Wurzel, führt dann mit diesen Formen die vorgeschriebene Rechnung nach den aufgestellten Regeln aus und verwandelt schliesslich die im Resultat erhaltenen Wurzeln in Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

z. B. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^{m}} \cdot \sqrt[q]{a^{p}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq + nq}} =$

$$a^{\frac{mq + nq}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

Auf dieselbe Art kann man ableiten:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

C. Logarithmen.

Wenn man für a^n durch Ausrechnung den Zahlenwert p erhalten hat und man vertauscht nun p mit n, so dass p und a gegebene Zahlen sind und n gefunden werden soll, so hat man die Aufgabe die gegebene Zahl p als eine Potenz mit der gegebenen Grundzahl a darzustellen. Diese Aufgabe nennt man das Logarithmieren einer Zahl in Bezug auf eine gegebene Basis. Dieselbe wird in Zeichen dargestellt durch $\log._a p$. Das Rechenzeichen wird hier ausgedrückt durch log. Diese Bezeichnung ist weniger einfach als die Rechenzeichen, welche wir in den schon behandelten arithmetischen Grundformen angewendet haben. Daher haben Mehler und Worpitzky in ihren bekannten Lehrbüchern der Elementar-Mathematik einfachere Zeichen in Vorschlag gebracht. Da das Zeichen Worpitzky's sich leicht und bequem schreibt, so verdient es allgemein angenommen zu werden. Die gegebene Zahl p, welche in Form einer Potenz mit gegebener Basis dargestellt werden soll, heisst Numerus oder Logarithmandus, und die gegebene Basis wird logarithmische Basis oder nur Basis genannt. Der gesuchte Exponent heisst Logarithmus. Aus der Definition der Aufgabe ergiebt sich ohne weiteres, dass die logarithmische Basis mit dem Logarithmus potenziert den Numerus ergeben muss.

$$a^{\log._a p} = p.$$

Es sollen nun die Logarithmen der zusammengesetzten arithmetischen Formen durch die Logarithmen der einfachen Zahlen ausgedrückt werden. Die Aufgabe, den Logarithmus einer Summe oder Differenz darzustellen aus den Logarithmen der Glieder, kann mit Hülfe der Gauss'schen Logarithmen gelöst werden. Dieselbe gehört aber nicht in den Unterricht der Elementar-Mathematik und soll daher auch hier übergangen werden. Wir kommen dann zu der Aufgabe, den Logarithmus eines Produkts zu finden aus den Logarithmen der Faktoren: $\log._a bc$. Hat $\log._a b$ den Zahlenwert m und $\log._a c$ den Wert n, so ist $a^m = b$ und $a^n = c$. Multiplicieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir: $a^{m + n} = bc$. Da somit bc als eine Potenz mit der Basis a dargestellt ist, so ist der Exponent $m + n$ der Logarithmus von bc

$$\log. bc = m + n.$$

Setzen wir für m und n die Form der Logarithmen, denen diese Zahlen gleichgesetzt wurden, so ergiebt sich:

$$\log. bc = \log. b + \log. c.$$

d. h. der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren Als logarithmische Basis möge hier wie in den folgenden Ableitungen a genommen werden.

Um den Logarithmus eines Bruches $\frac{b}{c}$ durch die Logarithmen des Zählers und Nenners auszudrücken, sei wieder $\log. b = m$ und $\log. c = n$. Dann muss $a^m = b$ und $a^n = c$ sein. Dividieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $a^{m-n} = \frac{b}{c}$. Da der Bruch $\frac{b}{c}$ als Potenz von a dargestellt ist, so ist der Logarithmus von $\frac{b}{c}$ gleich $m - n$. Führen wir nun für m und n die ihnen gleichen Grössen log. b und log. c ein, so ergiebt sich:

$$\log. \frac{b}{c} = \log. b - \log. c$$

d. h. Der Logarithmus eines Bruches ist gleich der Differenz zwischen dem Logarithmus des Zählers und dem Logarithmus des Nenners.

Der Logarithmus einer Potenz b^n. Ist der Logarithmus von b gleich m, so muss $a^m = b$ sein. Potenzieren wir diese Gleichung mit n, so erhalten wir: $a^{m \cdot n} = b^n$. Da a^n als eine Potenz mit der Basis a dargestellt ist, so ist der Logarithmus von b^n gleich dem Exponenten dieser Potenz: $\log. b^n = m . n$, und da $m = \log. b$ war, so ergiebt sich

$$\log. b^n = n \log. b$$

d. h. Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliciert.

Der Logarithmus einer Wurzel $\sqrt[n]{b}$.

$$\log. b = m, \text{ also } a^m = b.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die nte Wurzel, so erhalten wir: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{b}$ oder $\sqrt[n]{b} = a^{\frac{m}{n}}$, und da nun $\sqrt[n]{b}$ in die Form einer Potenz mit der Basis a gebracht ist, so ist $\log. \sqrt[n]{b} = \frac{m}{n}$. Setzen wir in dieser Gleichung für m seinen Wert log. b ein, so ergiebt sich:

$$\log. \sqrt[n]{b} = \frac{\log. b}{n} = \frac{1}{n} \log. b$$

d. h. Eine Wurzel wird logarithmiert, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzel-Exponenten dividiert.

Stellt man die Logarithmen der natürlichen Zahlen für eine bestimmte logarithmische Basis zusammen, so erhält man ein Logarithmensystem. $\log. 1 = 0$ für jede Basis, denn $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$, für jeden Zahlenwert von a. Wenn die Logarithmen für eine Basis bekannt sind, so kann man daraus die Logarithmen für eine andere Basis finden. Es soll $\log._a b$ gefunden werden, wenn die Logarithmen von der Basis c bekannt sind. Ist $\log._a b = m$, so ist $a^m = b$. Logarithmieren wir diese Gleichung in Bezug auf die Basis c, so erhalten wir:

$$m \log._c a = \log._c b$$

oder, da $m = \log._a b$ ist:

$$\log._a b \;.\; \log._c a = \log._c b$$

und aus dieser Gleichung finden wir

$$\log._a b = \frac{\log._c b}{\log._c a} = \frac{1}{\log._c a} \;.\; \log._c b$$

Wenn ein Logarithmensystem bekannt ist, so findet man die Logarithmen für eine gegebene Basis, indem man den Logarithmus aus dem gegebenen System dividiert durch den Logarithmus der gegebenen Basis, genommen aus dem bekannten System. $\frac{1}{\log._c a}$ heisst der Modulus des Logarithmensystems mit der Basis a. Gewöhnlich benutzt man zur Rechnung Logarithmen mit der Basis 10, welche nach ihrem ersten Berechner Briggische oder, weil sie am häufigsten zur Anwendung kommen, gemeine Logarithmen genannt werden.