Augsburg 1827

Analytische Untersuchung einer krummen Linie.

Ein Programm

zur

Schluß-Feyer der königl. Studien-Anstalt

zu Augsburg

den 5. September 1827.

Von

Johann Thomas Ahrens,

Doctor der Philosophie und königl. Lyceal-Professor.

Augsburg,

gedruckt bei Abraham Geiger.

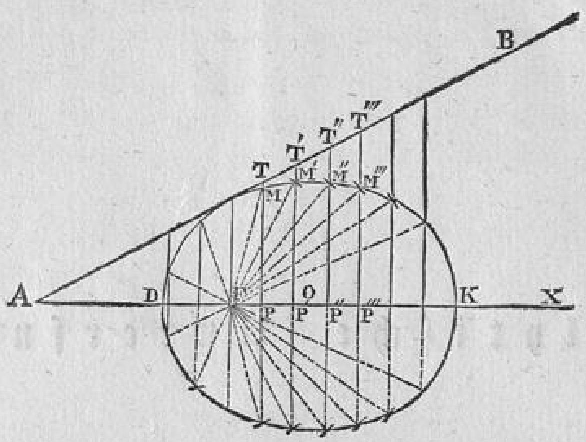
Hr Consistorialrath Kortum

Analytische Untersuchung

einer

krummen Linie.

Wenn zwei gerade Linien A B und A X irgend einen spitzigen Winkel B A X $= \phi$ mit einander bilden, aus mehreren Punkten T, T′, T″, ... des einen Schenkels A B gerade Linien T P, T′P′, T″P″ . . . . . . senkrecht auf den andern Schenkel gezogen werden, und aus einem in dem Schenkel A K willkührlich angenommenen Punkte F jede dieser Senkrechten mit einem Bogen in M, M′, M″ . . . . . durchschnitten wird, dessen Halbmesser der Senkrechten selbst gleich ist, F M = P T, F M′ = P′T′, F M″ = P″T″ . . . . . ; so werden diese Punkte M, M′, M″ . . . ., wie leicht einzusehen, auf einer krummen Linie liegen. In meinen Zusätzen zu Biots analytischer Geometrie zeigte ich, daß diese krumme Linie immer eine krumme Linie zweiter Ordnung ist, indem ich die Gleichung dieser Linie auf die Gleichung zurückführte, welche Biot für die Curven vom zweiten Grad aufstellt; ich will daher in dieser kurzen Abhandlung diese Curve untersuchen, ohne auf jene Gleichung Rücksicht zu nehmen, und meine diesjährige Zuhörer können diese analytische Untersuchung als eine Zugabe zu meinen Vorträgen über analytische Geometrie ansehen.



Betrachten wir einen solchen Punkt M, und nehmen den Scheitel A des Winkels BAX als Anfangspunkt der Coordinaten an; so ist, wenn wir die beständige Größe $AF = d$, die Absciſſe $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, den Winkel $BAX = \phi$ setzen,

$$FM = PT = AP \text{ tang } BAX = x \text{ tang } \phi, \qquad FP = x - d,$$

$$\overline{FM}^{\square} = \overline{FP}^{\square} + \overline{PM}^{\square},$$

$$\overline{PT}^{\square} = \overline{FP}^{\square} + \overline{PM}^{\square},$$

$$x^2 \text{ tang}^2 \phi = (x - d)^2 + y^2.$$

Dieses ist die Gleichung für die Curve, auf welcher die Punkte M, M′, M″ .... liegen.

Ordnet man diese Gleichung, so ist:

$$y^2 - (\text{tang}^2 \phi - 1)\, x^2 - 2\, d\, x + d^2 = 0,$$

und, wenn daraus y gesucht wird,

$$y = \pm \sqrt{((\text{tang}^2 \phi - 1)\, x^2 + 2\, d\, x - d^2)}.$$

Man sieht sogleich, daß die Curve, auf der die Punkte M, M′, M″ .... liegen, in Hinsicht auf die Axe der x symmetrisch ist, weil zu jeder Absciſſe zwei gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören, und daß AX die Curve in zwei congruente Theile theilt, welche oberhalb und unterhalb AX sich hinziehen. Wollen wir die Ausdehnung und Grenzen der durch diese Gleichung dargestellten Curve, in Hinsicht auf die Absciſſenaxe, erforschen; so müssen wir untersuchen, bei welchen Werthen von x diese Wurzelgröße reell bleibt, Null oder imaginär wird. So lange die Wurzelgröße reell bleibt, giebt es immer zwei Ordinaten, und die Curve wird sich daher auch innerhalb dieser Grenzen verbreiten; wird die Wurzelgröße Null, so werden auch die Ordinaten Null, und die für x gefundenen Werthe, welche die Wurzelgröße auf Null bringen, geben dann die Punkte an, wo die Abscissenaxe von der Curve geschnitten wird; wird die Wurzelgröße unmöglich, so werden auch die Ordinaten unmöglich, und die Curve erstreckt sich nicht bis zu solchen Werthen von x. Ausdehnung und Grenze, selbst die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Curve, hängen also von dem Zeichen ab, das die Größe unter dem Wurzelzeichen annimmt. Es läßt sich aber zeigen, daß in einem solchen Ausdruck x immer so groß angenommen werden kann, daß das Zeichen des ganzen Ausdrucks bloß vom Zeichen des Glieds $(\tang^2 \phi - 1)\, x^2$ abhängt *), so daß bei einem gewissen Werthe von x immer

$$(\tang^2 \phi - 1)\, x^2 > 2\,d\,x - d^2$$

ist. Ueber diesen Werth von x hinaus wird nothwendig das Glied $(\tang^2 \phi - 1)\, x^2$ die andern beiden Glieder $2\,d\,x - d^2$ immer mehr übertreffen, je größer man x annimmt. Weil nun x^2 immer

---

*) Bezeichnen wir allgemein ein solches Polynomium durch

$$A\,x^2 + B\,x + C$$

und es soll seyn

$$A\,x^2 > B\,x + C,$$

so muß auch seyn

$$x^2 > \frac{B}{A}\,x + \frac{C}{A}.$$

Nennen wir nun P den größern der beiden Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, so wird dieser Ungleichung Genüge geschehen, wenn $x = P + 1$ oder $x > P + 1$ gesetzt wird; denn man hat alsdann

$$x^2 = P^2 + 2P + 1, \text{ und, wenn } \frac{B}{A} = P,$$

$$\frac{B}{A}\,x + \frac{C}{A} = P\,(P + 1) + \frac{C}{A} = P^2 + P + \frac{C}{A}; \text{ da nun } \frac{C}{A} < P, \text{ so ist}$$

$$P^2 + 2P + 1 > P^2 + P + \frac{C}{A}.$$

Ist aber $\frac{C}{A} = P$, so ist $\frac{B}{A}\,x + \frac{C}{A} = \frac{B}{A}\,(P + 1) + P = \frac{B}{A}\,P + P + \frac{B}{A}$, und da in diesem Falle $\frac{B}{A} < P$, so ist ebenfalls

$$P^2 + 2P + 1 > \frac{B}{A}\,P + P + \frac{B}{A}.$$

positiv ist, so wird das Zeichen jenes Glieds bloß durch seinen Coefficienten $\tan^2 \phi - 1$ bestimmt, dessen Zeichen vom Winkel ϕ abhängt. Ist nähmlich $\phi < 45^\circ$, so ist auch $\tan \phi < 1$, also $\tan^2 \phi - 1$ eine negative Größe; ist $\phi = 45^\circ$, so ist $\tan 45^\circ = 1$, und der Coefficient $\tan \phi^2 - 1 = 0$; ist endlich $\phi > 45^\circ$, so ist auch $\tan \phi > 1$, und der Coefficient $\tan^2 \phi - 1$ ist eine positive Größe.

Jeden dieser drei Fälle wollen wir besonders untersuchen. Zur Erleichterung der Untersuchung bringen wir die Gleichung

$$y = \pm \sqrt{\left((\tan^2 \phi - 1)\, x^2 + 2\,d\,x - d^2\right)}$$

unter folgende Form:

$$y = \pm \sqrt{\left([\tan^2 \phi - 1]\; [x^2 + \frac{2\,d\,x - d^2}{\tan^2 \phi - 1}]\right)},$$

und durch fernere Zerlegung des Factors

$$x^2 + \frac{2\,d\,x - d^2}{\tan^2 \phi - 1}$$

unter die Form

$$y = \pm \sqrt{\left([\tan^2 \phi - 1]\,[x - \frac{d}{\tan \phi + 1}]\,[x + \frac{d}{\tan \phi - 1}]\right)}.$$

Zuerst wollen wir den Fall betrachten, in welchem $\tan^2 \phi - 1$ eine negative Größe, also $\phi < 45^\circ$ ist. Man hat für diesen Fall

$$\tan \phi < 1$$

und $\tan \phi - 1$ wird ein negativer ächter Bruch. In diesem Falle wird also

$$\frac{1}{\tan \phi - 1}$$

nothwendig eine negative ganze Zahl, und

$$\frac{1}{\tan \phi + 1}$$

wird ein ächter positiver Bruch.

Ist nun

$$x < \frac{d}{\tan \phi + 1},$$

so ist $x - \frac{d}{\tan \phi + 1}$ negativ und $x + \frac{d}{\tan \phi - 1}$ auch, daher das Produkt aus diesen beiden negativen Faktoren positiv, und es wird also, da $\tan^2 \phi - 1$ der Voraussetzung zufolge eine negative Größe ist, die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ werden. In diesem Falle ist demnach y unmöglich.

Setzt man $x = 0$, so verhält es sich mit den Werthen von y eben so, und wird x negativ genommen, so bleibt ebenfalls die Größe unter dem Wurzelzeichen immer negativ, und y wird für jeden negativen Werth von x imaginär seyn.

Wird

$$x > \frac{d}{\tang \phi + 1},$$

so jedoch, daß immer, wenn man bloß auf die absolute Größe von $\frac{d}{\tang \phi - 1}$ Rücksicht nimmt, und von dem Zeichen abstrahirt, das dieser Ausdruck in unserm Falle bei sich hat,

$$x < \frac{d}{\tang \phi - 1}$$

bleibt; so wird $x - \frac{d}{\tang \phi + 1}$ positiv und $x + \frac{d}{\tang \phi - 1}$ negativ werden, das Produkt aus diesen Faktoren ist demnach negativ. Nun muß dieses Produkt aber noch mit dem negativen Faktor $\tang^2 \phi - 1$ multiplicirt werden, und daher wird in diesem Falle die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv, und man erhält für y reelle Werthe.

Nimmt man aber, wieder vom Zeichen, das $\frac{d}{\tang \phi - 1}$ in unserm Falle bei sich hat, abstrahirend,

$$x > \frac{d}{\tang \phi - 1},$$

so ist $x - \frac{d}{\tang \phi + 1}$ und $x + \frac{d}{\tang \phi - 1}$ positiv, und beide Faktoren bleiben auch positiv, so groß man auch x annehmen mag, ihr Produkt ist also auch positiv, und demnach die Größe unter dem Wurzelzeichen, welche aus diesem Produkte und dem negativen Factor $\tang^2 \phi - 1$ besteht, negativ. In diesem Falle werden also die Werthe von y wieder unmöglich.

Setzt man

$$x = \frac{d}{\tang \phi + 1},$$

oder

$$x = \frac{-d}{\tang \phi - 1},$$

so wird in beiden Fällen die Größe unter dem Wurzelzeichen Null, und daher auch y.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, daß, wenn $\phi < 45°$, die Punkte M, M′, M″ .... auf einer in sich zurückkehrenden geschlossenen Curve liegen, welche auf beiden Seiten der geraden Linie A X zwischen $x = \frac{d}{\tang \phi + 1}$ und $x = -\frac{d}{\tang \phi - 1}$ sich hinzieht, und die A X in zwei Punkten, in einer Entfernung $\frac{d}{\tang \phi + 1}$ und $-\frac{d}{\tang \phi - 1}$ vom Anfangspunkte der Coordinaten, schneidet.

Nennen wir die Punkte, wo die Abscissenaxe von der Curve geschnitten wird, D, K, und O den gerade in der Mitte von D K liegenden Punkt; so ist aus dem Vorhergehenden klar, daß D K eine Axe und O der Mittelpunkt der Curve ist. Wir können daher auch die Gleichung der Curve auf Mittelpunkt und Axe beziehen, wenn wir die Coordinaten so verändern, daß der Anfangspunkt derselben in O fällt, die Abscissenaxe A X aber dieselbe bleibt. In dieser Absicht setzen wir

$$O D = O K = \tfrac{1}{2} D K = a,$$

die aus O errichtete Ordinate aber $= b$; dann hat man

$$D K = -\frac{d}{\tang \phi - 1} - \frac{d}{\tang \phi + 1} = -\frac{2 d \tang \phi}{\tang^2 \phi - 1},$$

also

$$-\frac{d \tang \phi}{\tang^2 \phi - 1} = a,$$

oder

$$-d \tang \phi = a \left(\tang^2 \phi - 1\right) \quad . \; . \; . \; . \; A.$$

Um die Ordinate des Mittelpunkts zu finden, welche wir $= b$ gesetzt haben, müssen wir in der Gleichung für die Curve

$$x = \frac{d}{\tang \phi + 1} + a = \frac{d}{\tang \phi + 1} - \frac{d \tang \phi}{\tang^2 \phi - 1} = \frac{-d}{\tang^2 \phi - 1},$$

setzen, und dann erhalten wir

$$b = \pm \sqrt{\left([\tang^2 \phi - 1] \left[\frac{-d}{\tang^2 \phi - 1}\right]^2 + 2 d \left[\frac{-d}{\tang^2 \phi - 1}\right] - d^2 \right)}$$

woraus

$$b^2 = -\frac{d^2 \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1},$$

oder

$$d^2 \tang^2 \phi = -b^2 \left(\tang^2 \phi - 1\right) \quad . \; . \; . \; . \; B.$$

folgt.

Mittelst der Gleichungen A und B läßt sich sowohl d als $\tang \phi$ durch eine Function von a und b ausdrücken.

Man erhält nähmlich

$$\tan\varphi = \frac{1}{a}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tan^2\phi = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$d = b^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } d^2 = b^4 (a^2 - b^2)^{-1}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung

$$y^2 = (\tan^2\varphi - 1)\, x^2 + 2\, dx - d^2$$

für $\tan^2\phi$, d und d^2, die gefundenen Werthe, so wird die Gleichung der Curve

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} x^2 + 2\, b^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} x - b^4 (a^2 - b^2)^{-1},$$

und es bleibt bloß noch übrig, den Anfangspunkt der Coordinaten zu verändern. Nun ist die Abscisse des Mittelpunktes O, in welchen Punkt wir den Anfangspunkt der Coordinaten setzen wollen,

$$\frac{d}{\tan\varphi + 1} + \tfrac{1}{2} DK = \frac{d}{\tan\phi + 1} - \frac{d \tan\phi}{\tan^2\phi - 1} = -\frac{d}{\tan^2\phi - 1} = a^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}};$$

daher müssen wir

$$x = x' + a^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, und die Gleichung für die Curve wird dann

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}\left(x' + a^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\, b^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}\left(x' + a^2 (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - b^4 (a^2 - b^2)^{-1}.$$

Entwickelt man und vereinfacht, und läßt bei x die Striche, deren man nicht mehr bedarf, weg, so wird

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b^4}{a^2 - b^2},$$

oder

$$y^2 = \frac{-b^2 (a^2 - b^2)\, x^2 + a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^2 (a^2 - b^2)},$$

und, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $a^2 - b^2$ wegläßt und ordnet, so ist

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

die Gleichung der auf Mittelpunkt und Axen bezogenen Curve, auf welcher, bei der Voraussetzung $\varphi < 45°$, die Punkte M, M′, M″ .... liegen werden.

In der Voraussetzung $\phi < 45°$ ist auch der Fall $\phi = 0$ enthalten. Die Gleichung der Curve wird für diesen Fall

$$y^2 = -x^2 + 2dx - d^2,$$

$$y = \pm \sqrt{-(x-d)^2}.$$

$x \lessgtr d$ giebt y unmöglich, und $x = d$ giebt $y = 0$.

Die Curve reducirt sich also, in diesem Falle, auf den in der Axe liegenden Punkt F, welches vorauszusehen war, da auf diese Weise A B und A X auf einander fallen, und sämmtliche auf der Axe A X errichteten Senkrechten Null werden.

Läßt man aber A B und A X nicht auf einander fallen, sondern nur A B und A X mit einander parallel seyn; so bleibt zwar ϕ Null, allein jene Senkrechten werden nicht mehr Null, sondern jede derselben wird der senkrechten Entfernung der beiden Geraden A B und A X gleich seyn. Bezeichnen wir diese Entfernung der A T und A X mit R; so ist die Gleichung der Curve

$$y^2 + (x-d)^2 = R^2,$$

oder, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in F, diesem zufolge

$$x = x' + d$$

setzen, und hernach die Striche bei x weglassen,

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Der zweite Fall, den wir zu untersuchen haben, ist der, wo $\phi = 45°$, $\tang \phi = 1$, und demnach $\tang^2 \phi - 1 = 0$ ist. In diesem Fall hat man für die Curve die Gleichung

$$y = \pm \sqrt{(2x - d)\,d}.$$

So lange $2x < d$ oder $x < \frac{1}{2} d$ ist, wird die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ bleiben, weil d eine positive Größe ist; daher die Ordinaten imaginär. Wird $x = \frac{1}{2} d$, so wird $2x - d = 0$, also auch $y = 0$. Nimmt man $x > \frac{1}{2} d$, so wird die Größe unter dem Wurzelzeichen immer positiv, und y also reell seyn. Für jeden negativen Werth von x bleibt $2x - d$ eine negative Größe, die Größe unter dem Wurzelzeichen daher auch; für solche Werthe von x sind die Ordinaten demnach unmöglich.

In diesem Falle wird also die Curve bloß in der Richtung der positiven x, von der Mitte von A F an, in das Unbestimmbare sich erstrecken, gleichförmig auf beiden Seiten der Abscissenaxe.

Setzt man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte zwischen A und F, und setzt, da dann die Absciſſe des Anfangspunktes $\frac{1}{2}$ d iſt, in dieſer Abſicht

$$x = x' + \tfrac{1}{2} d,$$

ſo wird

$$y^2 = 2 d x.$$

Dieſes iſt die Gleichung der Curve, auf welcher die Punkte M, M', M'' .... liegen, wenn $\phi = 45°$ und der Coordinaten Anfangspunkt in der Mitte zwiſchen A und F angenommen iſt.

Wir kommen endlich zu dem dritten Fall $\phi > 45°$. Hier iſt

$$\tang \phi > 1,$$

alſo $\tang^2 \phi - 1$ eine poſitive Größe, und die Brüche

$$\frac{1}{\tang \phi - 1}, \quad \frac{1}{\tang \phi + 1}$$

ſind nothwendig ebenfalls poſitive Größen.

So lange

$$x < \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

bleibt, wird der Faktor

$$x - \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

negativ bleiben, und die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ werden, weil die Faktoren

$$\tang^2 \phi - 1 \quad \text{und} \quad x + \frac{d}{\tang \phi - 1}$$

poſitiv ſind. Setzt man $x = 0$, ſo wird die Größe unter dem Wurzelzeichen ebenfalls negativ. Die Werthe von y ſind daher von

$$x = 0 \quad \text{bis} \quad x = \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

unmöglich. Wird

$$x = \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

geſetzt, ſo wird die Größe unter dem Wurzelzeichen Null, und daher auch $y = 0$. Für jeden grö- ßern Werth von

$$x \text{ als } \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

bleibt aber die Größe unter dem Wurzelzeichen poſitiv und man erhält reelle Werthe für y.

2 *

Nimmt man x negativ, so bleibt auch der Faktor

$$x - \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

immer negativ; der Faktor

$$x + \frac{d}{\tang \phi - 1}$$

bleibt dagegen eine positive Größe, so lange

$$x < \frac{d}{\tang \phi - 1},$$

bleibt. So sind also von der Größe unter dem Wurzelzeichen zwei Faktoren positiv und einer negativ, und daher die Werthe von y unmöglich, von $x = 0$, bis zu dem Werth

$$x = - \frac{d}{\tang \phi - 1},$$

welcher wieder $y = 0$ giebt.

Uebersteigen die negativen Werthe von x die Größe

$$\frac{d}{\tang \phi - 1},$$

so bleibt der Faktor

$$x + \frac{d}{\tang \phi - 1}$$

immer negativ, und der Faktor

$$x - \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

natürlich auch, und so wird also die aus zwei negativen und einem positiven Faktor bestehende Größe unter dem Wurzelzeichen immer positiv bleiben und reelle Werthe für y geben.

Folglich wird in diesem Falle die Curve, auf welcher die Punkte M, M′, M″ . . . . liegen, zwei Zweige haben, welche oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe, symmetrisch, nach entgegengesetzten Richtungen, in das Unbestimmbare sich erstrecken. Der eine Zweig schneidet die Abscissenaxe in der Entfernung

$$x = \frac{d}{\tang \phi + 1}$$

und verfolgt seinen Zug, in der Richtung der positiven x, auf beiden Seiten der Abscissenaxe.

Der andere Zweig der Curve verfolgt seinen Zug in der Richtung der negativen x, von der Entfernung

$$x = - \frac{d}{\tan \phi - 1}$$

angefangen, wo dieser Zweig die Abscissenaxe schneidet, auf beiden Seiten der Abscissenaxe.

Innerhalb der Grenzen

$$x = \frac{d}{\tan \phi + 1} \quad \text{und} \quad x = - \frac{d}{\tan \phi - 1}$$

liegt kein Theil der Curve, weil in diesen Grenzen die Werthe von y unmöglich sind.

Setzen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte zwischen die Punkte, in welchen beide Zweige der Curve die Abscissenaxe schneiden, für welche die zugehörige Abscisse

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{\tan \phi + 1} - \frac{d}{\tan \phi - 1}\right) = - \frac{d}{\tan^2 \phi - 1}$$

ist, so müssen wir zur Erreichung dieser Absicht in der Gleichung

$$y^2 = (\tan^2 \phi - 1)\, x^2 + 2\, d\, x - d^2$$

statt x die Größe

$$x' - \frac{d}{\tan^2 \phi - 1}$$

einführen. Man erhält dann nach gehöriger Reduction, indem man zugleich die bei x nicht mehr nothwendigen Striche wegläßt,

$$y^2 = \frac{(\tan^2 \phi - 1)^2\, x^2 - d^2 \tan^2 \phi}{\tan^2 \phi - 1}.$$

Setzen wir nun die Entfernung der Punkte, in welchen die Curve die Abscissenaxe schneidet $= 2\,a$; so ist

$$\frac{d}{\tan \phi + 1} + \frac{d}{\tan \phi - 1} = 2\,a.$$

Daraus findet sich

$$a = \frac{d \tang \phi}{\tang^2 \phi - 1},$$

oder

$$d \tang \phi = a (\tang^2 \phi - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A.$$

Die Entfernung des Punktes F von der Mitte der Durchschnitts-Punkte der Curve und Abscissenaxe, in welche wir den Anfangspunkt der Coordinaten gesetzt haben, ist

$$d + \frac{d}{\tang^2 \phi - 1} = \frac{d \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1}.$$

Nennen wir nun b die mittlere Proportional-Linie, zwischen den Linien, welche durch die Ausdrücke

$$\frac{d \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1} + a, \quad \frac{d \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1} - a$$

gegeben sind; so erhalten wir, wenn für a sein Werth

$$\frac{d \tang \phi}{\tang^2 \phi - 1}$$

gesetzt wird,

$$\frac{d^2 \tang^4 \phi}{(\tang^2 \phi - 1)^2} - \frac{d^2 \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1} = b^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1} = b^2,$$

oder

$$d^2 \tang^2 \phi = b^2 (\tang^2 \phi - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; B.$$

Aus den Gleichungen A und B findet sich

$$\tang^2 \phi - 1 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad d^2 \tang^2 \phi = \frac{b^4}{a^2}.$$

Setzt man für $\tang^2 \phi - 1$ und $d^2 \tang^2 \phi$ die entsprechenden Werthe in die Gleichung

$$y^2 = \frac{(\tang^2 \phi - 1)^2 x^2 - d^2 \tang^2 \phi}{\tang^2 \phi - 1};$$

so erhält man

$$y^2 = \frac{\frac{b^4 x^2}{a^4} - \frac{b^4}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2}},$$

woraus

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

folgt.

Dieses ist die Gleichung für die Curve, auf der die Punkte M, M′, M″ . . . liegen, wenn $\phi > 45°$ angenommen wird.

Es giebt also vier Arten von Curven, auf welchen diese Punkte M, M′, M″, M‴ . . . liegen können, je nachdem der Winkel, den die Linien AB und AX unter einander bilden, 0°, 0° bis 45°, 45°, oder 45° bis 90° beträgt. Die Gleichungen dieser Curven sind, in der Ordnung, wie wir sie aufgefunden haben,

$$1)\quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

$$2)\quad y^2 + x^2 = R^2,$$

$$3)\quad y^2 = 2 d x,$$

$$4)\quad a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2.$$

Unterwirft man diese Gleichungen einer fernern Untersuchung, so findet sich, daß die durch die erste Gleichung dargestellte Curve eine auf Mittelpunkt und Axen bezogene Elipse ist, deren Halbaxen a und b sind. Die zweite Gleichung gehört einem Kreise an, dessen Halbmesser = R ist. Die dritte Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Parameter 2 d ist, und durch die vierte Gleichung wird eine Hyperbel dargestellt, deren beide Halbaxen a und b sind. Sind also die Linien AB und AX einander parallel, so liegen die Punkte M, M′, M″ . . . auf einem Kreise; ist der Winkel, den sie mit einander bilden, > 0 und $< 45°$, so liegen sie auf einer Elipse; ist dieser Winkel $= 45°$, so liegen sie auf einer Parabel, und ist endlich dieser Winkel $> 45°$ und $< 90°$, so liegen sie auf einer Hyperbel.

dritte Gleichung stellt eine Parabel dar, deren … erte Gleichung wird eine Hyperbel dargestellt, deren beide Hal… inien AB und AX einander parallel, so liegen die Punkte M, … t der Winkel, den sie mit einander bilden, > 0 und < 45 … dieser Winkel $= 45°$, so liegen sie auf einer Parabel, u… und $< 90°$, so liegen sie auf einer Hyperbel.