

1832

AVGS  
2

Herrn Joseph von ...  
Freunde von ...  
Brüggemann

der ...

UEBER DAS PROBLEM  
DES  
APOLLONIUS VON PERGA  
VON DEN  
**BERÜHRUNGEN.**

**EINLADUNGS - SCHRIFT**

ZU DER

AUF DEN XXXI. AUGUST FESTGESETZTEN

**FEIERLICHEN**

**PREISE-VERTHEILUNG**

AN DEM

*KOENIGLICHEN GYMNASIUM ZU St. ANNA*

IN

AUGSBURG.

VON

**DR. JOH. THOM. AHRENS,**

KOENIGLICHEM LYCEAL-PROFESSOR.



---

1 8 5 2.

G E D R U C K T B E I J . C . W I E T H .

BERÜHRUNGEN  
VON DEN  
APOLLONIUS VON PERGA  
DES  
LEBEN DAS THEOREM

PREISE-VERTEILUNG  
KONIGLICHES GYMNASIUM  
ZU  
PRAKTISCHEN  
ZUR BEZUGLICHST FÜRGESETZTEN  
ZWEITEN  
ZWEITEN - SCHNITT





---

*Ueber das Problem des Apollonius von Perga  
von den Berührungen.*

---

Die Aufgabe,

*wenn von Punkten, geraden Linien oder Kreisen drei in einer Ebene, die geraden Linien der Lage, die Kreise der Lage und Gröfse nach, gegeben sind, einen Kreis zu finden, der die gegebenen Punkte, Linien oder Kreise berührt,*

ist auf verschiedene Weise von ältern und neuern Mathematikern bearbeitet worden.

Apollonius von Perga in Pamphylien, von den Alten der große Geometer genannt, der, unter der Regierung des Ptolomäus Evergetes I. geboren, besonders unter Ptolomäus Philopator, etwa 220 Jahre vor Anfang der christlichen Zeitrechnung, seine grösste wissenschaftliche Thätigkeit äufserte, schrieb zwei Bücher über die Berührungen (*περὶ ἐπαφῶν*), in welchen er die Aufgabe für drei gegebene Elemente vollständig durchführte. Leider sind sie verloren gegangen, und wir wissen von denselben nur das, was Pappus, der um das Jahr 380 nach Christi zu Alexandrien lebte, uns

in seinen *collectaneis mathematicis* \*) davon aufbewahrt hat. So schätzbar die Nachrichten sind, die uns Pappus von der Arbeit des Apollonius giebt; so lassen sie uns doch den Verlust des Originals sehr bedauern. Uebrigens blieb diese Schrift des Pappus immer die Quelle, aus welcher die Neuere schöpften, welche das Werk des Apollonius wieder herzustellen versucht haben.

Franciscus Vieta, zu Fontenay in Poitou 1540 geboren und gestorben 1603, gab eine kleine Schrift, betitelt: *Apollonius Gal- lus, Parisiis 1600*, heraus, in welcher er die Hauptfälle dieser Aufgabe des Apollonius geometrisch construirt. Obwohl man diese Schrift nicht für eine Wiederherstellung der Schrift des Apollonius gelten lassen kann, so ist sie doch an sich sehr schätzenswerth. Vieta sucht jede folgende Aufgabe auf eine vorhergehende schon aufgelöste zurückzuführen. So zeigt er z. B. bei seiner letzten nicht ganz leichten Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der drei andere der Lage und Größe nach gegebene Kreise berührt, daß die Auflösung dieser Aufgabe darauf beruhe, einen Kreis zu finden, der durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise berührt. Diese Aufgabe aber führt er auf die zurück, einen Kreis zu finden, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt. Die von Vieta angegebene Construction des Falles, zu drei der Lage und Größe nach gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der diese berührt, ist daher nicht ganz so einfach, als sie auf den ersten Blick zu seyn scheint, wenn sie wirklich vollständig ausgeführt werden soll, da sie aus mehreren Constructionen zusammengesetzt ist; indessen sind

---

\*) Die mathematischen Sammlungen des Pappus bestanden aus acht Büchern, es sind aber nur die sechs letzten Bücher und die letzten Sätze des zweiten Buches im Manuscript vorhanden. Die einzige Ausgabe, welche jene sechs Bücher vollständig enthält, ist eine lateinische Uebersetzung von Fr. Commandinus: *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Frederico Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae. Pisauri ap. Hieron. Concordiam 1588.*

Eine zweite Ausgabe erschien 1602, und eine dritte, die *Karl Manolessius* besorgte, und die im wesentlichen von den frühern nicht verschieden ist, *Bononiae 1660.*

die Auflösungen des Vieta scharfsinnig und elegant. Sie gefielen dem Adrianus Romanus, einem niederländischen Geometer, welchem Vieta den obenerwähnten Hauptfall, zu drei Kreisen einen vierten zu finden, der diese berührt, zur Auflösung vorgelegt, der aber einen unzulässigen Weg eingeschlagen hatte, so sehr, daß er von Würzburg aus, wo er sich damals aufhielt, nach Frankreich reiste, um mit Vieta über mathematische Gegenstände sich zu besprechen.

Marinus Ghetaldi von Ragusa behandelte einige von Vieta übergangene Fälle in seinem zu Venedig 1607 erschienenen *Supplementum Apollonii Galli*.

Von Anderson erschien ein *Supplementum Apollonii redivi*, Paris 1612., Schwenter erläuterte ein Paar von Ghetaldis Fällen in seiner *practischen Geometrie*; von einigen andern Fällen handelt Joh. Heinrich Rahm in seiner *deutschen Algebra*, Zürich 1618, und Joh. Aufustus von Genua soll eine Schrift unter dem Titel: *Apollonius Ligor* verfaßt haben, die aber wahrscheinlich gar nicht im Druck erschienen, da von derselben nichts weiter bekannt ist, als was Gassendi in seinen Werken (1725) erwähnt.

Descartes, geb. 1596, gest. 1650, hat den Hauptfall, zu drei Kreisen einen vierten zu finden, der die drei gegebenen Kreise berührt, ebenfalls untersucht. Er fand zwei Auflösungen, von welchen er selbst gesteht, daß sie so verwickelt waren, daß er den Versuch nicht wagte, eine Construction aus denselben abzuleiten. \*) Er wechselte auch darüber ein paar Briefe mit der Prinzessin Elisabeth (der Tochter des Churfürsten Friedrich von der Pfalz, der eine kurze Zeit König von Böhmen war), die sich ebenfalls mit dieser Aufgabe beschäftigte. Sie hatte ihm eine analytische Auflösung geschickt, die er sehr rühmt.

\*) *Cartesii epistolae* T. III. ep. 72 und 73, und *Histoire des Mathematiques* par J. F. Montucla. T. I. p. 252. Paris, an VII.



Newton, geb. 1642, gest. 1727, hat in seiner *arithm. univers. probl. XLIII. bis XLVII.* und in den *philosoph. natur. princip. mathem. Lib. I. lemm. XIV. (T. I. pag. 96. edit. J. Tessanek. Prag 1780)* verschiedene der vorzüglichern Fälle dieser Aufgabe behandelt. Er führt wie Vieta die Aufgabe von drei berührenden Kreisen auf die zurück: einen Kreis zu finden, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Der Marquis de l'Hospital zeigt in seinem Werke über die Kegelschnitte \*), wie für den bereits mehrmals berührten Hauptfall dieser Aufgabe eine Gleichung gefunden werden könne. Weil aber diese Gleichung, wie er fand, auf eine ungemein beschwerliche Construction geführt haben würde, so leitet er eine Construction aus der Gleichung des Falles ab, bei welchem zwei der gegebenen Kreise gleich sind. Die Aufgabe hat bei ihm eine andere Form.

Thomas Simson giebt in seiner Algebra \*\*) und in seiner Geometrie die Auflösungen von einigen Fällen des Apollonischen Problems, welche von denen des Vieta verschieden sind. Robert Simson betrachtet besonders den Fall, wo Ein Punkt und zwei Kreise gegeben sind, und von John Lawson erschien: *The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies etc.* London 1771, worin die Auflösungen des Vieta und Ghetaldi enthalten sind.

Die polnische Gräfin Skorzewska, die lange zu Berlin mit den mathematischen Wissenschaften sich beschäftigte, hatte Holland, einem Freund Lamberts, die Aufgabe von drei zu berührenden Kreisen vorgelegt, zu dem Zwecke, wenn ein Uhr rad gefunden werden sollte, das drei Räder von gegebener Lage und Gröfse zu treiben hätte. Seine Auflösung führte ihn auf eine Gleichung vom vierten Grade. \*\*\*) Lambert, der von derselben Dame über diese Aufgabe befragt worden war, giebt in einem Briefe an seinen Freund Holland zwei Auflösungen von derselben, †) deren eine auf tri-

\*) *Traité analytique des sections coniques etc. Paris MDCCXX. p. 377.*

\*\*) *Treatise of Algebra. London 1745.*

\*\*\*) *Lamberts deutscher, gelehrter Briefwechsel I. S. 303.*

†) *Ebendasselbst S. 311.*



gonometrischen Gründen beruht. Eine Auflösung dieses Falles gibt auch Oberreit, die auf der Formel für den Inhalt eines Dreieckes aus den drei Seiten beruht. \*)

Auch Euler hat noch in den letzten Jahren seines Lebens sich mit dieser Aufgabe beschäftigt. In den *nov. act. Academ. Petropolit. T. X. p. 95. seqq.* 1788 ist eine Auflösung und Construction Eulers enthalten, und ebendasselbst noch zwei andere analytische Auflösungen von Fufs. Aus einer dieser letzten hat Fufs eine Construction abgeleitet, die in Rücksicht auf die Beschaffenheit der Aufgabe noch bequem genug seyn soll.

Tempelhof hat in den Zusätzen zu seiner Uebersetzung von Clairauts Algebra einige Aufgaben über die Berührungen an Kreisen trigonometrisch aufgelöst, unter welchen auch die, wo drei Kreise zu berühren sind. Von den Aufgaben, welche Schwab seiner Ausgabe von Euclids Data beifügte, gehören die Aufgaben 16, 18, 19, 22 und 29 hierher. Im Jahre 1793 erschien zu Kopenhagen eine Abhandlung von Wöldike, *Problema de describendo circulo, qui tres datos extrinsecus tangat.*

Camerer hat 1795 die Schrift des Vieta mit den Hilfssätzen des Pappus herausgegeben, welche letztere hier zum ersten Male griechisch erschienen, und fügte beiden Schriften Zusätze und Berechnungen bei. Er löst einige Hauptfälle dieser Aufgabe durch eine geometrische Rechnung auf, und fügt eine Auflösung des Hauptfalles bei, die ihm von Pfleiderer, und eine andere, die ihm von Rothe mitgetheilt worden ist. Dieses empfehlenswerthe Werkchen, aus welchem mehrere der obigen historischen Notizen entnommen sind, führt den Titel: *Apollonii de tactionibus, quae supersunt ac maxime lemmata Pappi etc. Gothae et Amstelodami 1795.*

Eine ausführlichere und geschickte Bearbeitung des Problems haben wir seitdem, wie uns Kries in seiner Geometrie \*\*) berichtet, (der Verfasser

\*) Ebendasselbst Band V. S. 252.

\*\*) Lehrbuch der reinen Mathematik von Friedr. Kries. Jena 1826. S. 372.

dieser Abhandlung hat in der Kürze der Zeit dieses Werkchen sich nicht verschaffen können,) von C. G. Haumann \*) erhalten, und mit einer sehr allgemeinen Bearbeitung beschenkte uns W. C. Christmann durch seine Schrift: *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum*. Tubing. 1821. 8; sie ist aber, wie Kries an angeführten Orte sagt und womit wir vollkommen einverstanden sind, nicht im Geiste des Apollonius geschrieben.

Dann wurden auch durch G. U. A. Vieth in einer eigenen Schrift \*\*) die zahlreichen Fälle aufgezählt, welche das Apollonische Problem, in Hinsicht auf die gegebenen drei Elemente, in sich faßt.

Endlich hat auch der Verfasser dieses Programms eine analytische Auflösung des Falles, zu drei gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der jene berührt, in den Zusätzen zu seiner Uebersetzung von Biots analytischer Geometrie \*\*\*) versucht und die Gleichungen für die übrigen Fälle des Vieta aufgestellt.

Die hier folgende analytische Auflösung des Falles, zu drei gegebenen Kreisen, die einander weder schneiden noch berühren und ausser einander liegen, einen Kreis zu finden, der diese berührt, ist nicht verschieden von der, die Camerer von Rothe erhalten zu haben berichtet; sie ist indessen hier nicht nur im Allgemeinen, sondern auch für die verschiedenen Fälle, die hinsichtlich der Lage des vierten Kreises gegen die drei gegebenen Kreise statt finden können, vollständig ausgeführt. Hiebei haben wir uns vorzüglich die Aufgabe gesetzt, eine geometrische Construction für den vorliegenden Fall aus dieser Auflösung abzuleiten.

---

\*) Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen. Breslau 1817. 8.

\*\*) Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius, von F. Vieta. Dessau 1820. 4.

\*\*\*) Versuch einer analytischen Geometrie. Nürnberg 1817. S. 378. u. f.

Es ist leicht einzusehen, daß die Berührung dreier Kreise durch einen vierten auf verschiedene Weise geschehen kann. Die drei gegebenen Kreise liegen entweder alle drei ausserhalb oder alle drei innerhalb des berührenden Kreises; der Kreis A liegt ausserhalb und die andern beiden Kreise B und C liegen innerhalb, oder umgekehrt, der Kreis A innerhalb, die andern beiden Kreise B und C ausserhalb des berührenden Kreises. Das Nämliche kann in Beziehung auf den gegebenen Kreis B und den gegebenen Kreis C statt finden. Der zu suchende vierte Kreis kann demnach acht von einander verschiedene Lagen haben. Vorerst wollen wir die Auflösung für den Fall suchen, in welchem die drei gegebenen Kreise ausserhalb des berührenden Kreises liegen, die Auflösungen für die übrigen Fälle werden dann aus dieser sich leicht ableiten lassen.

Es seyen A, B, C, (Fig. I.) die Mittelpunkte der gegebenen Kreise,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , die Halbmesser derselben, D der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher die gegebenen Kreise so berührt, daß sie alle drei ausserhalb desselben liegen. Ferner sey  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $\alpha - \beta = d$ ,  $\gamma - \beta = \delta$ ,  $BD = x$ ,  $ABC = m$  und  $CBD = y$ ; so ist  $AD = x + d$ ,  $DC = x + \delta$ , und man hat im Dreieck ABD

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD \cos ABD,$$

im Dreieck BCD

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BC \times BD \cos CBD.$$

Das ist

- 1)  $(x + d)^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos (m + y)$
- 2)  $(x + \delta)^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos y.$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$b(a^2 - d^2) \cos y - a(b^2 - \delta^2) \cos (m + y) = (b^2 - \delta^2)d - (a^2 - d^2)\delta$$

oder

$$b \cos y - \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2} \cos (m + y) = \frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} - \delta.$$

B

Setzen wir nun

$$\frac{a(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} = B,$$

$$\frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} - \delta = A,$$

so ist

$$b \cos y - B \cos(m + y) = A,$$

woraus, wenn  $\cos(m + y)$  entwickelt wird,

$$B \sin m \sin y = A - (b - B \cos m) \cos y$$

folgt. Erhebt man diese Gleichung in das Quadrat und führt für  $\sin y$  den  $\cos y$  ein, so wird

$$(b^2 - 2bB \cos m + B^2) \cos^2 y - 2A(b - B \cos m) \cos y = B^2 \sin^2 m - A^2,$$

oder wenn

$$b^2 - 2bB \cos m + B^2 = \Omega,$$

$$A(b - B \cos m) = \Psi,$$

$$B^2 \sin^2 m - A^2 = \Phi,$$

gesetzt wird,

$$\Omega \cos^2 y - 2\Psi \cos y = \Phi,$$

woraus

$$\cos y = \frac{\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

folgt. Aus Gleichung 2) aber ist

$$x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}$$

und man hat dann für  $r$ , den Halbmesser des gesuchten Kreises, in unserm Falle

$$r = x - \beta = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta.$$



Will man diese Auflösung dem entgegengesetzten Falle anpassen, in welchem die drei gegebenen Kreise innerhalb des berührenden Kreises liegen; so darf man nur die Zeichen der Halbmesser der gegebenen Kreise in die entgegengesetzten verwandeln, weil in diesem Falle die Berührung auch auf der entgegengesetzten Seite statt findet. Man erhält dann für diesen Fall, wenn man die nämliche Bezeichnung beibehält,

$$b \cos y - B \cos(m + y) = -A,$$

woraus dann

$$\cos y = \frac{-\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

folgt. Für die andere Unbekannte und den Halbmesser des gesuchten Kreises erhält man

$$x = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y}$$

$$r = x + \beta = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y} + \beta$$

Die Werthe, welche wir für  $\cos y$  in diesem letzten Falle, in welchem der berührende Kreis die drei gegebenen Kreise einschließt, erhalten haben, sind, in umgekehrter Ordnung genommen, die entgegengesetzten weiter oben für  $\cos y$  gefundenen zwei Werthe. Wenn daher  $\cos \eta$  jenem zweiten weiter oben für  $\cos y$  gefundenen Werth entspricht, nämlich

$$\cos y = \frac{\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

und

$$\cos \eta = \frac{\Psi - \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega},$$

so ist

$$-\cos \eta = \frac{-\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

B\*

Wenn also, gemäß unserer Annahme, der Mittelpunkt D des gesuchten Kreises, der die gegebenen Kreise so berührt, daß sie alle drei außerhalb desselben liegen, auf der geraden BD liegt, die mit BC einen Winkel  $CBD = y$  bildet, so liegt der Mittelpunkt des andern berührenden Kreises, der die gegebenen einschließt, auf einer geraden  $V''D'$ , die mit BC den Winkel  $V''BC = 180^\circ - \eta$  oder, welches einerlei, den negativen Winkel  $CBD' = \eta$  bildet.

Umgekehrt, wenn die Gerade, auf welcher der Mittelpunkt des berührenden Kreises liegt, der die gegebenen Kreise einschließt mit BC einen Winkel  $\eta$  bildet und die Lage dieses Winkels als positiv betrachtet, also

$$\cos \eta = \frac{-\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

gesetzt wird, so ist der andere Werth von  $\cos \eta$

$$\frac{-\Psi - \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega} = -\cos y.$$

Der Mittelpunkt des andern Berührungskreises, der die gegebenen Kreise auf der entgegengesetzten Seite, nämlich so berührt, daß die gegebenen Kreise außerhalb desselben liegen, liegt dann auf einer Geraden, welche mit BC den Winkel  $NBC = 180 - y$  oder den negativen Winkel  $CBD = y$  bildet.

Die Auflösung kann leicht so abgeändert werden, daß sie auch den übrigen Lagen, die der Berührungskreis haben kann, entspricht, wenn man nämlich die Halbmesser der Kreise, die auf der entgegengesetzten Seite berührt werden sollen, mit entgegengesetztem Zeichen in die Rechnung einführt. In folgender Tabelle sind die Gleichungen für  $\cos y$ ,  $x$ ,  $r$ , für die acht Fälle, die überhaupt hier statt finden können, dargestellt. Es wurde in denselben  $\alpha + \beta = s$ ,  $\gamma + \delta = \sigma$  gesetzt; durch  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $\delta$ ,  $r$ , sind die nämlichen Größen wie oben bezeichnet.

Liegen von den gegebenen Krei- sen A, B, C, außer- halb des berüh- renden,		inner- halb des berüh- renden,	so hat man für $\cos y$ , $x$ , $r$ die Gleichungen.	
A, B, C,	- - -		$b \cos y - B \cos (m + y) = A,$ $x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta.$	$B = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2},$
- - -	A, B, C,		$b \cos y - B \cos (m + y) = -A,$ $x = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y} + \beta.$	$A = \frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} - \delta.$
A, C,	B,		$b \cos y - B' \cos (m + y) = A',$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y} + \beta.$	$B' = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - s^2},$
B,	A, C,		$b \cos y - B' \cos (m + y) = -A',$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y} - \beta.$	$A' = \frac{(b^2 - \sigma^2)s}{a^2 - s^2} - \sigma.$
A,	B, C,		$b \cos y - B'' \cos (m + y) = A'',$ $x = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y} + \beta.$	$B'' = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - s^2},$
B, C,	A,		$b \cos y - B'' \cos (m + y) = -A''$ $x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta.$	$A'' = \frac{(b^2 - \delta^2)s}{a^2 - s^2} + \delta.$
A, B,	C,		$b \cos y - B''' \cos (m + y) = A'''$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y} - \beta.$	$B''' = \frac{a(b^2 - \sigma^2)}{a^2 - d^2},$
C,	A, B,		$b \cos y - B''' \cos (m + y) = -A'''$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y}, r = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y} + \beta.$	$A''' = \frac{(b^2 - \sigma^2)d}{a^2 - d^2} + \sigma.$



Substituirt man in den Werthen von  $\Omega$ ,  $\Psi$  und  $\Phi$ , nach und nach  $B'$ ,  $B''$  und  $B'''$ ,  $A'$ ,  $A''$  und  $A'''$ , deren Werthe in der Tabelle angegeben sind, für  $B$  und  $A$ , so findet man auch die entwickelten Werthe von  $\cos y$  und dann auch die Werthe von  $x$  und  $r$  für die übrigen Fälle.

Die Formen der in dieser Tabelle aufgestellten Gleichungen für die acht verschiedenen Lagen, die der berührende Kreis haben kann, wenn durch denselben drei Kreise zu berühren sind, welche auseinander liegen, und einander weder berühren noch schneiden, sind nicht wesentlich von einander verschieden; es wird daher hinreichend seyn, wenn wir die Construction der beiden Fälle erläutern, in welchen die gegebenen Kreise sämmtlich außerhalb oder sämmtlich innerhalb des berührenden Kreises liegen, (Fig. I.); um so mehr, da diese Erläuterung auf die in Fig. II, III. und IV. dargestellten Constructionen der übrigen Fälle auch fast wörtlich paßt, wenn man auf die geringen Modificationen Rücksicht nimmt, die durch die Gleichungen für die verschiedenen Lagen des berührenden Kreises angedeutet sind.

Wenn  $B$  der Mittelpunkt des kleinen,  $A$  und  $C$  die Mittelpunkte der beiden größern gegebenen Kreise sind (Fig. I.); so beschreibt man aus  $A$  mit dem Halbmesser  $d = \alpha - \epsilon$ , aus  $C$  mit dem Halbmesser  $\delta = \gamma - \beta$ , Kreise, zieht  $BA$  und  $BC$  und verlängert diese Linien bis sie diesen eben beschriebenen Kreisen in  $F$  und  $G$  begegnen. Hierauf zieht man  $FG$ , durch  $A$ , mit  $FG$  parallel, die Gerade  $AK$ , macht  $BH' = BH$ ,  $BI' = BI$ , zieht  $H'I'$  und, mit  $H'I'$  parallel, durch  $K$  die Gerade  $KL$ ; zieht dann  $LC$  und beschreibt über  $LC$  als Durchmesser einen Kreis. Alsdann schneidet man auf der Geraden  $BA$ , von  $B$  aus, ein Stück  $BP = d = \alpha - \beta$  ab, zieht durch  $P$  eine Gerade  $PQ \neq AK$ , durch  $Q$  eine Gerade  $QR \neq KL$  und schneidet von  $BR$  ein Stück  $RS = \delta = \gamma - \beta$  ab.  $BS$  wird dann von  $C$  nach  $M$  und  $M'$  in dem über  $CL$  beschriebenen Kreis als Sehne eingetragen,  $LM^*$  und  $LM'$  gezogen und über  $BL$  als Durchmesser ein Halbkreis (oder nöthigenfalls ein ganzer Kreis) beschrieben, welcher die geraden Linien  $LM$  und  $LM'$  gerade zu, oder in ihren Verlängerungen in  $V$  und  $V'$ , schneiden wird. Auf den durch  $B$  und  $V$  und durch  $B$  und  $V'$  gezogenen Geraden werden dann die Mittelpunkte der Berührungskreise liegen, die die gegebenen Kreise so berühren, daß diese alle drei ausserhalb oder innerhalb des berührenden Kreises liegen.



Nimmt man nun auf der Verlängerung von BV das Stück  $BN = AF = d = \alpha - \beta$ , zieht NA und errichtet aus T, der Mitte von NA, eine Senkrechte, so wird diese BV in D schneiden und den Mittelpunkt des einen Berührungskreises geben, der die gegebenen Kreise nicht einschließt. Schneidet man  $BN' = AF = d = \alpha - \beta$  ab, zieht N'A und errichtet aus T', der Mitte von N'A, eine Senkrechte, so wird diese die Linie BV' in D' schneiden und D' ist der Mittelpunkt des andern Berührungskreises, der die drei gegebenen Kreise einschließt.

Die Richtigkeit der Construction kann auf folgende Weise dargethan werden. Da  $AK \neq FG$  und  $KL \neq H'I'$ , so ist

$$BF : BG = BA : BK,$$

$$BI' : BH' = BK : BL,$$

oder, weil  $BI' = BI$ ,  $BH' = BH$ ,

$$BI : BH = BK : BL.$$

Durch Zusammensetzung der Proportionen erhält man

$$BF \times BI : BG \times BH = BA : BL,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} BL &= \frac{BA \times BG \times BH}{BF \times BI} = \frac{BA (BC + CG) (BC - CG)}{(BA + AF) (BA - AF)} = \\ &= \frac{a (b + \delta) (b - \delta)}{(a + d) (a - d)} = \frac{a (b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2} = B. \end{aligned}$$

Es ist ferner auch  $PQ \neq FG$ ,  $RQ \neq LK \neq H'I'$ , und daher

$$BF : BG = BP : BQ,$$

und

$$BQ : BR = BI' : BH' = BI : BH$$

oder

$$BI : BH = BQ : BR;$$

folglich

$$BF \times BI : BG \times BH = BP : BR,$$

woraus

$$\begin{aligned} BR &= \frac{BG \times BH \times BP}{BF \times BI} = \frac{(BC + CG)(BC - CG) AF}{(BF + FA)(BA - AF)} = \\ &= \frac{(b + \delta)(b - \delta)d}{(a + d)(a - d)} = \frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} \end{aligned}$$

folgt; demnach

$$CM = CM' = BS = BR - RS = \frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} - \delta = A.$$

Nun ist  $LMC = R = LVB$ , und, wenn man  $CW \neq LV$  zieht, auch  $CVB = R$ ; daher

$$BW = BC \cos CBW, \quad BV = BL \cos (m + CBW),$$

und, da  $BW - BV = VW = CM$ ,

$$BC \cos CBW - BL \cos (m + CBW) = CM,$$

das ist

$$b \cos CBW - B \cos (m + CBW) = A.$$

Folglich ist

$$CBW = y.$$

Man hat ferner

$$BW' = BC \cos CBW',$$

$$BV' = BL \cos (m - CBW'),$$

dann ist auch

$$BW' - BV' = -W'V',$$

also

$$BC \cos CBW' - BL \cos(m - CBW') = -CM',$$

oder

$$b \cos CBW' - B \cos(m - CBW') = -A;$$

demnach

$$y = -CBW'$$

gerade so, wie wir bereits weiter oben diesen Winkel gefunden haben.

Da ferner  $DX = DN - NX = DA - a$ , so wird der mit dem Halbmesser  $DX$  aus  $D$  beschriebene Kreis die Kreise  $B$  und  $A$  berühren, und zugleich auch den Kreis  $C$ , weil sein Mittelpunkt sowohl in der Senkrechten  $TD$  als auch in  $BV$  liegt.

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß der aus  $D'$  mit dem Halbmesser  $D'Y$  beschriebene Kreis die drei gegebenen Kreise auf der entgegengesetzten Seite berührt.

Die Construction bleibt im Wesentlichen die Nämliche, wenn  $m = R$  oder  $m > R$  ist; sie ändert sich aber etwas, wenn  $m = 0$ , das ist, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen.

Man hat, wenn die gegebenen Kreise diese Lage haben,

$$(b - B) \cos y = +A.$$

Der Winkel  $y$  wird für diese beiden Fälle durch folgende Construction gefunden. Man ziehe von  $B$  aus (Fig. V.) eine Gerade  $BL$ , die mit  $BC$  einen beliebigen, nicht allzuspitzigen Winkel bildet, nehme auf derselben  $BF' = BE$ ,  $BA' = BA$ ,  $BH' = BH$  und  $BP = AF$ , ziehe  $FG$  und  $HI$ , durch  $A'$  und  $P$  die Geraden  $A'K$  und  $PQ$  mit  $F'G$  parallel, durch  $Q$  und  $K$  die Geraden  $QR$  und  $KL$  mit  $HI$  parallel. Hierauf nimmt man auf der verlängerten  $BC$  von  $C$  aus ein Stück  $CE = BL$ , beschreibt über  $BE$  als Durchmesser einen Kreis und trägt, nachdem von  $BR$  das Stück  $RS = CG = CH$  abgeschnitten worden,  $BS$  von  $B$  nach  $M$  und nach  $M'$  als Sehnen in diesen Kreis ein. Auf diesen rückwärts verlängerten Sehnen liegen die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise. Nimmt man  $BN = BN' = CG$ , zieht  $CN$  und  $CN'$  und errichtet aus der Mitte von diesen Linien Senkrechte, so geben die Durchschnitte  $D$  und  $D'$  die Mittelpunkte derselben.

C

Da in unserm Beispiel (Fig. V.) der mittlere gegebene Kreis größer ist, als jeder der beiden übrigen, so kann die Berührung auf den entgegengesetzten Seiten der gegebenen Kreise nur so geschehen, daß jeder Berührungskreis die gegebenen Kreise einschließt. Das Entgegengesetzte würde stattfinden, wenn der mittlere Kreis kleiner wäre, als die andern beiden gegebenen Kreise. Die Richtigkeit des bei dieser Construction beobachteten Verfahrens ist leicht einzusehen.

Wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht in gerader Linie liegen, die Halbmesser dieser Kreise aber gleich sind, (Fig. VI.) so ist

$$a \cos y - b \cos(m + y) = 0.$$

Die Construction des Winkels  $y$  wird für diesen Fall sehr einfach; man verlängere BA, mache  $BL = BC$ ,  $BA' = BA$ , beschreibe über BL einen Halbkreis, ziehe  $LA'$  und verlängere diese Linie, wenn es nöthig ist, bis sie dem Halbkreis in V begegnet, dann ist, wenn BV gezogen wird,  $CBV = y$ . Eine aus der Mitte von CA oder CB errichtete Senkrechte giebt durch ihren Durchschnitt mit BV den gesuchten gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Berührungskreise. In diesem Fall kann übrigens der Punkt D auch gefunden werden, wenn man den Mittelpunkt eines Kreises sucht, der durch die Mittelpunkte A, B, C der gegebenen Kreise geht.

Läßt man die Halbmesser und etwa auch noch die Lage der Mittelpunkte der gegebenen Kreise sich ändern, so erhält man, außer dem betrachteten Fall, in welchem die gegebenen Kreise außer einander liegen und sich nicht berühren, in Beziehung auf die Lage, die die gegebenen drei Kreise gegen einander haben können, noch ein und dreißig für die Auflösung mögliche Fälle. Es finden dann aber nicht mehr die acht verschiedenen Lagen des Berührungskreises bei jedem dieser Fälle statt, wie bei dem Fall, den wir untersucht haben, sondern es wird bald die eine, bald die andere Lage des berührenden Kreises in diesen Fällen für die Aufgabe unmöglich.

Der beschränkte Raum dieser Blätter gestattet nicht, die Untersuchung dieser verschiedenen Fälle, die sämmtlich in obiger Auflösung begriffen sind, weiter zu verfolgen, und wir müssen die Fortsetzung dieser Abhandlung einer andern Gelegenheit aufbewahren.



Da in uns  
ist, als jeder der  
gesetzten Seiten  
rungskreis die  
stattfinden, wenn  
gegebenen Kreise.

Verfahrens ist l  
Wenn die  
liegen, die Halb

Die Const  
man verlängere  
Halbkreis, ziehe  
dem Halbkreis in  
Eine aus der Mi  
Durchschnitt mit  
Berührungskreise  
werden, wenn n  
telpunkte A,B,C

Läfst ma  
punkte der gege  
teten Fall, in w  
nicht berühren,  
gen einander hal  
Fälle. Es finder  
rührungskreises  
sucht haben, son  
renden Kreises i

Der besch  
dieser verschied  
weiter zu verfolg  
andern Gelegen

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN Gray Scale



ere gegebene Kreis größer  
erührung auf den entgegen  
schehen, daß jeder Berüh  
das Entgegengesetzte würde  
als die andern beiden ge  
Construction beobachteten

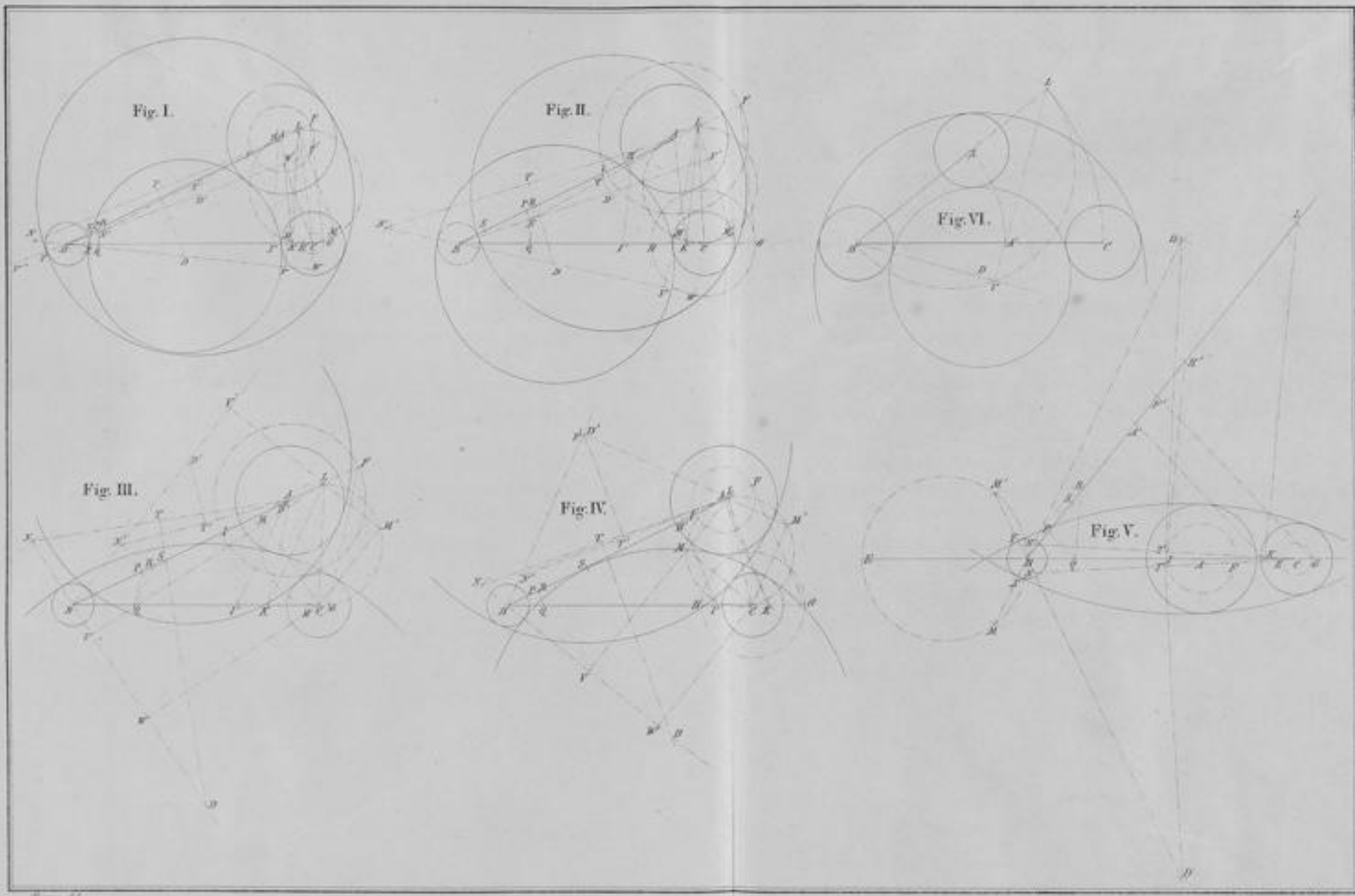
reise nicht in gerader Linie  
ind, (Fig. VI.) so ist

diesen Fall sehr einfach;  
A, beschreibe überBL einen  
wenn es nöthig ist, bis sie  
gezogen wird,  $CBV = y$ .  
enkrechte giebt durch ihren  
ichen Mittelpunkt der beiden  
der Punkt D auch gefunden  
sucht, der durch die Mit

h noch die Lage der Mittel  
ilt man, aufser dem betrach  
ser einander liegen und sich  
ie gegebenen drei Kreise ge  
g für die Auflösung mögliche  
verschiedenen Lagen des Be  
bei dem Fall, den wir unter  
die andere Lage des berüh  
unmöglich.

ttet nicht, die Untersuchung  
ger Auflösung begriffen sind,  
ung dieser Abhandlung einer





Barrow del.

Tabulae. tom. I. p. 140.



