Ueber das Problem des Apollonius von Perga von den Berührungen.

Die Aufgabe,

> *wenn von Punkten, geraden Linien oder Kreisen drei in einer Ebene, die geraden Linien der Lage, die Kreise der Lage und Gröſse nach, gegeben sind, einen Kreis zu finden, der die gegebenen Punkte, Linien oder Kreise berührt,*

ist auf verschiedene Weise von ältern und neuern Mathematikern bearbeitet worden.

Apollonius von Perga in Pamphylien, von den Alten der groſse Geometer genannt, der, unter der Regierung des Ptolomäus Evergetes I. geboren, besonders unter Ptolomäus Philopator, etwa 220 Jahre vor Anfang der christlichen Zeitrechnung, seine gröſste wissenschaftliche Thätigkeit äuſserte, schrieb zwei Bücher über die Berührungen (περὶ ἐπαφῶν), in welchen er die Aufgabe für drei gegebene Elemente vollständig durchführte. Leider sind sie verloren gegangen, und wir wissen von denselben nur das, was Pappus, der um das Jahr 380 nach Christi zu Alexandrien lebte, uns in seinen *collectaneis mathematicis* *) davon aufbewahret hat. So schätzbar die Nachrichten sind, die uns Pappus von der Arbeit des Apollonius giebt; so lassen sie uns doch den Verlust des Originals sehr bedauern. Uebrigens blieb diese Schrift des Pappus immer die Quelle, aus welcher die Neueren schöpften, welche das Werk des Apollonius wieder herzustellen versucht haben.

Franciscus Vieta, zu Fontenay in Poitou 1540 geboren und gestorben 1603, gab eine kleine Schrift, betitelt: Apollonius Gallus, Parisiis 1600, heraus, in welcher er die Hauptfälle dieser Aufgabe des Apollonius geometrisch construirt. Obwohl man diese Schrift nicht für eine Wiederherstellung der Schrift des Apollonius gelten lassen kann, so ist sie doch an sich sehr schätzenswerth. Vieta sucht jede folgende Aufgabe auf eine vorhergehende schon aufgelöste zurückzuführen. So zeigt er z. B. bei seiner letzten nicht ganz leichten Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der drei andere der Lage und Gröfse nach gegebene Kreise berührt, dafs die Auflösung dieser Aufgabe darauf beruhe, einen Kreis zu finden, der durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei der Lage und Gröfse nach gegebene Kreise berührt. Diese Aufgabe aber führt er auf die zurück, einen Kreis zu finden, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt. Die von Vieta angegebene Construction des Falles, zu drei der Lage und Gröfse nach gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der diese berührt, ist daher nicht ganz so einfach, als sie auf den ersten Blick zu seyn scheint, wenn sie wirklich vollständig ausgeführt werden soll, da sie aus mehreren Constructionen zusammengesezt ist; indessen sind

---

*) Die mathematischen Sammlungen des Pappus bestunden aus acht Büchern, es sind aber nur die sechs letzten Bücher und die letzten Sätze des zweiten Buches im Manuscript vorhanden. Die einzige Ausgabe, welche jene sechs Bücher vollständig enthält, ist eine lateinische Uebersetzung von Fr. Commandinus: *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Frederico Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae. Pisauri ap. Hieron. Concordiam* 1588.

Eine zweite Ausgabe erschien 1602, und eine dritte, die *Karl Manolessius* besorgte, und die im wesentlichen von den frühern nicht verschieden ist, *Bononiae* 1660.

die Auflösungen des Vieta scharfsinnig und elegant. Sie gefielen dem Adrianus Romanus, einem niederländischen Geometer, welchem Vieta den obenerwähnten Hauptfall, zu drei Kreisen einen vierten zu finden, der diese berührt, zur Auflösung vorgelegt, der aber einen unzuläfsigen Weg eingeschlagen hatte, so sehr, dafs er von Würzburg aus, wo er sich damals aufhielt, nach Frankreich reiste, um mit Vieta über mathematische Gegenstände sich zu besprechen.

Marinus Ghetaldi von Ragusa behandelte einige von Vieta übergangene Fälle in seinem zu Venedig 1607 erschienenen Supplementum Apollonii Galli.

Von Anderson erschien ein Supplementum Appollonii redivivi, Parisiis 1612., Schwenter erläuterte ein Paar von Ghetaldis Fällen in seiner practischen Geometrie; von einigen andern Fällen handelt Joh. Heinrich Rahm in seiner deutschen Algebra, Zürch 1618, und Joh. Aufustius von Genua soll eine Schrift unter dem Titel: Apollonius Ligur verfafst haben, die aber wahrscheinlich gar nicht im Druck erschienen, da von derselben nichts weiter bekannt ist, als was Gassendi in seinen Werken (1723) erwähnt.

Descartes, geb. 1596, gest. 1650, hat den Hauptfall, zu drei Kreisen einen vierten zu finden, der die drei gegebenen Kreise berührt, ebenfalls untersucht. Er fand zwei Auflösungen, von welchen er selbst gesteht, dafs sie so verwickelt waren, dafs er den Versuch nicht wagte, eine Construction aus denselben abzuleiten. *) Er wechselte auch darüber ein paar Briefe mit der Prinzessin Elisabeth (der Tochter des Churfürsten Friedrich von der Pfalz, der eine kurze Zeit König von Böhmen war), die sich ebenfalls mit dieser Aufgabe beschäftigte. Sie hatte ihm eine analytische Auflösung geschickt, die er sehr rühmt.

*) *Cartesii epistolae T. III. ep.* 72 und 73, und *Histoire des Mathematiques par J. F. Montucla. T. I. p.* 252. *Paris. an VII.*

Newton, geb. 1642, gest. 1727, hat in seiner *arithm. univers. probl. XLIII.* bis *XLVII.* und in den *philosoph. natur. princip. mathem. Lib. I. lemm. XIV.* (*T. I. pag.* 96. *edit. J. Tessanek. Prag* 1780) verschiedene der vorzüglichern Fälle dieser Aufgabe behandelt. Er führt wie Vieta die Aufgabe von drei berührenden Kreisen auf die zurück: einen Kreis zu finden, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Der Marquis de l'Hospital zeigt in seinem Werke über die Kegelschnitte *), wie für den bereits mehrmals berührten Hauptfall dieser Aufgabe eine Gleichung gefunden werden könne. Weil aber diese Gleichung, wie er fand, auf eine ungemein beschwerliche Construction geführt haben würde, so leitet er eine Construction aus der Gleichung des Falles ab, bei welchem zwei der gegebenen Kreise gleich sind. Die Aufgabe hat bei ihm eine andere Form.

Thomas Simson giebt in seiner Algebra **) und in seiner Geometrie die Auflösungen von einigen Fällen des Apollonischen Problems, welche von denen des Vieta verschieden sind. Robert Simson betrachtet besonders den Fall, wo Ein Punkt und zwei Kreise gegeben sind, und von John Lawson erschien: *The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies etc.* London 1771, worin die Auflösungen des Vieta und Ghetaldi enthalten sind.

Die polnische Gräfin Skorzewska, die lange zu Berlin mit den mathematischen Wissenschaften sich beschäftigte, hatte Holland, einem Freund Lamberts, die Aufgabe von drei zu berührenden Kreisen vorgelegt, zu dem Zwecke, wenn ein Uhrrad gefunden werden sollte, das drei Räder von gegebener Lage und Gröſse zu treiben hätte. Seine Auflösung führte ihn auf eine Gleichung vom vierten Grade. ***) Lambert, der von derselben Dame über diese Aufgabe befragt worden war, giebt in einem Briefe an seinen Freund Holland zwei Auflösungen von derselben, †) deren eine auf tri-

*) *Traité analytique des sections coniques etc. Paris MDCCXX. p.* 377.
**) *Treatise of Algebra.* London 1745.
***) *Lamberts* deutscher, gelehrter Briefwechsel I. S. 303.
†) Ebendaselbst S. 311.

gonometrischen Gründen beruht. Eine Auflösung dieses Falles gibt auch Oberreit, die auf der Formel für den Inhalt eines Dreieckes aus den drei Seiten beruht. *)

Auch Euler hat noch in den letzten Jahren seines Lebens sich mit dieser Aufgabe beschäftigt. In den *nov. act. Academ. Petropolit. T. X. p.* 95. *seqq.* 1788 ist eine Auflösung und Construction Eulers enthalten, und ebendaselbst noch zwei andere analytische Auflösungen von Fuſs. Aus einer dieser letzten hat Fuſs eine Construction abgeleitet, die in Rücksicht auf die Beschaffenheit der Aufgabe noch bequem genug seyn soll.

Tempelhof hat in den Zusätzen zu seiner Uebersetzung von Clairauts Algebra einige Aufgaben über die Berührungen an Kreisen trigonometrisch aufgelöst, unter welchen auch die, wo drei Kreise zu berühren sind. Von den Aufgaben, welche Schwab seiner Ausgabe von Euclids Data beifügte, gehören die Aufgaben 16, 18, 19, 22 und 29 hieher. Im Jahre 1793 erschien zu Koppenhagen eine Abhandlung von *Wöldike, Problema de describendo circulo, qui tres datos extrinsecus tangat.*

Camerer hat 1795 die Schrift des Vieta mit den Hilfssätzen des Pappus herausgegeben, welche letztere hier zum ersten Male griechisch erschienen, und fügte beiden Schriften Zusätze und Berechnungen bei. Er löst einige Hauptfälle dieser Aufgabe durch eine geometrische Rechnung auf, und fügt eine Auflösung des Hauptfalles bei, die ihm von Pfleiderer, und eine andere, die ihm von Rothe mitgetheilt worden ist. Dieses empfehlenswerthe Werkchen, aus welchem mehrere der obigen historischen Notizen entnommen sind, führt den Titel: *Apollonii de tactionibus, quae supersunt ac maxime lemmata Pappi etc. Gothae et Amstelodami* 1795.

Eine ausführlichere und geschickte Bearbeitung des Problems haben wir seitdem, wie uns Kries in seiner Geometrie **) berichtet, (der Verfasser

*) Ebendaselbst Band V. S. 252.

**) Lehrbuch der reinen Mathematik von Friedr. Kries. Jena 1826. S. 372.

dieser Abhandlung hat in der Kürze der Zeit dieses Werkchen sich nicht verschaffen können,) von C. G. Haumann *) erhalten, und mit einer sehr allgemeinen Bearbeitung beschenkte uns W. C. Christmann durch seine Schrift: *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum. Tubing.* 1821. 8; sie ist aber, wie Kries am angeführten Orte sagt und womit wir vollkommen einverstanden sind, nicht im Geiste des Apollonius geschrieben.

Dann wurden auch durch G. U. A. Vieth in einer eigenen Schrift **) die zahlreichen Fälle aufgezählt, welche das Apollonische Problem, in Hinsicht auf die gegebenen drei Elemente, in sich faſst.

Endlich hat auch der Verfasser dieses Programms eine analytische Auflösung des Falles, zu drei gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der jene berührt, in den Zusätzen zu seiner Uebersetzung von Biots analytischer Geometrie ***) versucht und die Gleichungen für die übrigen Fälle des Vieta aufgestellt.

Die hier folgende analytische Auflösung des Falles, zu drei gegebenen Kreisen, die einander weder schneiden noch berühren und ausser einander liegen, einen Kreis zu finden, der diese berührt, ist nicht verschieden von der, die Camerer von Rothe erhalten zu haben berichtet; sie ist indessen hier nicht nur im Allgemeinen, sondern auch für die verschiedenen Fälle, die hinsichtlich der Lage des vierten Kreises gegen die drei gegebenen Kreise statt finden können, vollständig ausgeführt. Hiebei haben wir uns vorzüglich die Aufgabe gesetzt, eine geometrische Construction für den vorliegenden Fall aus dieser Auflösung abzuleiten.

---

*) Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen. Breslau 1817. 8.

**) Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius, von F. Vieta. Dessau 1820. 4.

***) Versuch einer analytischen Geometrie. Nürnberg 1817. S. 378. u. f.

Es ist leicht einzusehen, daſs die Berührung dreier Kreise durch einen vierten auf verschiedene Weise geschehen kann. Die drei gegebenen Kreise liegen entweder alle drei ausserhalb oder alle drei innerhalb des berührenden Kreises; der Kreis A liegt ausserhalb und die andern beiden Kreise B und C liegen innerhalb, oder umgekehrt, der Kreis A innerhalb, die andern beiden Kreise B und C ausserhalb des berührenden Kreises. Das Nämliche kann in Beziehung auf den gegebenen Kreis B und den gegebenen Kreis C statt finden. Der zu suchende vierte Kreis kann demnach acht von einander verschiedene Lagen haben. Vorerst wollen wir die Auflösung für den Fall suchen, in welchem die drei gegebenen Kreise ausserhalb des berührenden Kreises liegen, die Auflösungen für die übrigen Fälle werden dann aus dieser sich leicht ableiten lassen.

Es seyen A, B, C, (Fig. I.) die Mittelpunkte der gegebenen Kreise, α, β, γ, die Halbmesser derselben, D der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher die gegebenen Kreise so berührt, daſs sie alle drei ausserhalb desselben liegen. Ferner sey $AB = a$, $BC = b$, $\alpha - \beta = d$, $\gamma - \beta = \delta$, $BD = x$, $ABC = m$ und $CBD = y$; so ist $AD = x + d$, $DC = x + \delta$, und man hat im Dreieck ABD

$$\overline{AD}^{\square} = \overline{AB}^{\square} + \overline{BD}^{\square} - 2\,AB \times BD \cos ABD,$$

im Dreieck BCD

$$\overline{CD}^{\square} = \overline{BC}^{\square} + \overline{BD}^{\square} - 2\,BC \times BD \cos CBD.$$

Das ist

$$1)\quad (x + d)^2 = a^2 + x^2 - 2\,ax \cos (m + y)$$
$$2)\quad (x + \delta)^2 = b^2 + x^2 - 2\,bx \cos y.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$b\,(a^2 - d^2) \cos y - a\,(b^2 - \delta^2) \cos (m + y) = (b^2 - \delta^2)\,d - (a^2 - d^2)\,\delta$$

oder

$$b \cos y - \frac{a\,(b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2} \cos (m + y) = \frac{(b^2 - d^2)\,d}{a^2 - d^2} - \delta.$$

Setzen wir nun

$$\frac{a(b^2 - \delta^2)\,d}{a^2 - d^2} = B,$$

$$\frac{(b^2 - \delta^2)\,d}{a^2 - d^2} - \delta = A,$$

so ist

$$b \cos y - B \cos(m + y) = A,$$

woraus, wenn $\cos(m + y)$ entwickelt wird,

$$B \sin m \ \sin y = A - (b - B \cos m) \cos y$$

folgt. Erhebt man diese Gleichung in das Quadrat und führt für $\sin y$ den $\cos y$ ein, so wird

$$(b^2 - 2bB \cos m + B^2) \cos^2 y - 2A(b - B \cos m) \cos y = B^2 \sin^2 m - A^2,$$

oder wenn

$$b^2 - 2bB \cos m + B^2 = \Omega,$$

$$A(b - B \cos m) = \Psi,$$

$$B^2 \sin^2 m - A^2 = \Phi,$$

gesetzt wird,

$$\Omega \cos^2 y - 2\Psi \cos y = \Phi,$$

woraus

$$\cos y = \frac{\Psi \pm \sqrt{\Phi\,\Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

folgt. Aus Gleichung 2) aber ist

$$x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}$$

und man hat dann für r, den Halbmesser des gesuchten Kreises, in unserm Falle

$$r = x - \beta = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta.$$

Will man diese Auflösung dem entgegengesetzten Falle anpassen, in welchem die drei gegebenen Kreise innerhalb des berührenden Kreises liegen; so darf man nur die Zeichen der Halbmesser der gegebenen Kreise in die entgegengesetzten verwandeln, weil in diesem Falle die Berührung auch auf der entgegengesetzten Seite statt findet. Man erhält dann für diesen Fall, wenn man die nämliche Bezeichnung beibehält,

$$b \cos y - B \cos (m + y) = - A,$$

woraus dann

$$\cos y = \frac{- \Psi \pm \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

folgt. Für die andere Unbekannte und den Halbmesser des gesuchten Kreises erhält man

$$x = \frac{b^2 - \delta^2}{- 2\delta + 2 b \cos y}$$

$$r = x + \beta = \frac{b^2 - \delta^2}{- 2\delta + 2 b \cos y} + \beta$$

Die Werthe, welche wir für cos y in diesem letzten Falle, in welchem der berührende Kreis die drei gegebenen Kreise einschliefst, erhalten haben, sind, in umgehehrter Ordnung genommen, die entgegengesetzten weiter oben für cos y gefundenen zwei Werthe. Wenn daher $\cos \eta$ jenem zweiten weiter oben für cos y gefundenen Werth entspricht, nämlich

$$\cos y = \frac{\Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

und

$$\cos \eta = \frac{\Psi - \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega},$$

so ist

$$- \cos \eta = \frac{- \Psi + \sqrt{\Phi \Omega + \Psi^2}}{\Omega}.$$

Wenn also, gemäſs unserer Annahme, der Mittelpunkt D des gesuchten Kreises, der die gegebenen Kreise so berührt, daſs sie alle drei auſserhalb desselben liegen, auf der geraden BD liegt, die mit BC einen Winkel CBD $= y$ bildet, so liegt der Mittelpunkt des andern berührenden Kreises, der die gegebenen einschlieſst, auf einer geraden $V'' D'$, die mit BC den Winkel $V'' BC = 180° - \eta$ oder, welches einerlei, den negativen Winkel $CBD' = \eta$ bildet.

Umgekehrt, wenn die Gerade, auf welcher der Mittelpunkt des berührenden Kreises liegt, der die gegebenen Kreise einschlieſst mit BC einen Winkel η bildet und die Lage dieses Winkels als positiv betrachtet, also

$$\cos \eta = \frac{-\Psi + \sqrt{\Phi\,\Omega + \Psi^2}}{\Omega}$$

gesetzt wird, so ist der andere Werth von $\cos \eta$

$$\frac{-\Psi - \sqrt{\Phi\,\Omega + \Psi^2}}{\Omega} = -\cos y.$$

Der Mittelpunkt des andern Berührungskreises, der die gegebenen Kreise auf der entgegengesetzten Seite, nämlich so berührt, daſs die gegebenen Kreise auſserhalb desselben liegen, liegt dann auf einer Geraden, welche mit BC den Winkel $NBC = 180 - y$ oder den negativen Winkel $CBD = y$ bildet.

Die Auflösung kann leicht so abgeändert werden, daſs sie auch den übrigen Lagen, die der Berührungskreis haben kann, entspricht, wenn man nämlich die Halbmesser der Kreise, die auf der entgegengesetzten Seite berührt werden sollen, mit entgegengesetztem Zeichen in die Rechnung einführt. In folgender Tabelle sind die Gleichungen für cos y, x, r, für die acht Fälle, die überhaupt hier statt finden können, dargestellt. Es wurde in denselben $\alpha + \beta = s$, $\gamma + \beta = \sigma$ gesetzt; durch a, b, d, δ, r, sind die nämlichen Gröſsen wie oben bezeichnet.

Liegen von den gegebenen Kreisen A, B, C, aufserhalb des berührenden,	innerhalb des berührenden,	so hat man für cos y, x, r die Gleichungen.	
A,B,C,	- - -	$b \cos y - B \cos(m+y) = A$, $x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta$.	$B = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2}$,
- - -	A,B,C,	$b \cos y - B \cos(m+y) = -A$, $x = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y} + \beta$.	$A = \frac{(b^2 - \delta^2)d}{a^2 - d^2} - \delta$.
A, C,	B,	$b \cos y - B' \cos(m+y) = A'$, $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y} + \beta$.	$B' = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - s^2}$,
B,	A, C,	$b \cos y - B' \cos(m+y) = -A'$, $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y} - \beta$.	$A' = \frac{(b^2 - \sigma^2)s}{a^2 - s^2} - \sigma$.
A,	B, C,	$b \cos y - B'' \cos(m+y) = A''$, $x = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \delta^2}{-2\delta + 2b \cos y} + \beta$.	$B'' = \frac{a(b^2 - \delta^2)}{a^2 - s^2}$,
B, C,	A,	$b \cos y - B'' \cos(m+y) = -A''$ $x = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \delta^2}{2\delta + 2b \cos y} - \beta$.	$A'' = \frac{(b^2 - \delta^2)s}{a^2 - s^2} + \delta$.
A, B,	C,	$b \cos y - B''' \cos(m+y) = A'''$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \sigma^2}{-2\sigma + 2b \cos y} - \beta$.	$B''' = \frac{a(b^2 - \sigma^2)}{a^2 - d^2}$,
C,	A, B,	$b \cos y - B''' \cos(m+y) = -A'''$ $x = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y}$, $r = \frac{b^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2b \cos y} + \beta$.	$A''' = \frac{(b^2 - \sigma^2)d}{a^2 - d^2} + \sigma$.

Substituirt man in den Werthen von Ω, Ψ und Φ, nach und nach B', B'' und B''', A', A'' und A''', deren Werthe in der Tabelle angegeben sind, für B und A, so findet man auch die entwickelten Werthe von $\cos y$ und dann auch die Werthe von x und r für die übrigen Fälle.

Die Formen der in dieser Tabelle aufgestellten Gleichungen für die acht verschiedenen Lagen, die der berührende Kreis haben kann, wenn durch denselben drei Kreise zu berühren sind, welche auseinander liegen, und einander weder berühren noch schneiden, sind nicht wesentlich von einander verschieden; es wird daher hinreichend seyn, wenn wir die Construction der beiden Fälle erläutern, in welchen die gegebenen Kreise sämmtlich aufserhalb oder sämmtlich innerhalb des berührenden Kreises liegen, (Fig. I.); um so mehr, da diese Erläuterung auf die in Fig. II, III. und IV. dargestellten Constructionen der übrigen Fälle auch fast wörtlich pafst, wenn man auf die geringen Modificationen Rücksicht nimmt, die durch die Gleichungen für die verschiedenen Lagen des berührenden Kreises angedeutet sind.

Wenn B der Mittelpunkt des kleinen, A und C die Mittelpunkte der beiden gröfsern gegebenen Kreise sind (Fig. I.); so beschreibt man aus A mit dem Halbmesser $d = \alpha - \beta$, aus C mit dem Halbmesser $\delta = \gamma - \beta$, Kreise, zieht BA und BC und verlängert diese Linien bis sie diesen eben beschriebenen Kreisen in F und G begegnen. Hierauf zieht man FG, durch A, mit FG parallel, die Gerade AK, macht $BH' = BH$, $BI' = BI$, zieht $H'I'$ und, mit $H'I'$ parallel, durch K die Gerade KL; zieht dann LC und beschreibt über LC als Durchmesser einen Kreis. Alsdann schneidet man auf der Geraden BA, von B aus, ein Stück $BP = d = \alpha - \beta$ ab, zieht durch P eine Gerade $PQ \neq AK$, durch Q eine Gerade $QR \neq KL$ und schneidet von BR ein Stück $RS = \delta = \gamma - \beta$ ab. BS wird dann von C nach M und M' in dem über CL beschriebenen Kreis als Sehne eingetragen, LM und LM' gezogen und über BL als Durchmesser ein Halbkreis (oder nöthigenfalls ein ganzer Kreis) beschrieben, welcher die geraden Linien LM und LM' gerade zu, oder in ihren Verlängerungen in V und V', schneiden wird. Auf den durch B und V und durch B und V' gezogenen Geraden werden dann die Mittelpunkte der Berührungskreise liegen, die die gegebenen Kreise so berühren, dafs diese alle drei ausserhalb oder innerhalb des berührenden Kreises liegen.

Nimmt man nun auf der Verlängerung von BV das Stück $BN = AF = d = \alpha - \beta$, zieht NA und errichtet aus T, der Mitte von NA, eine Senkrechte, so wird diese BV in D schneiden und den Mittelpunkt des einen Berührungskreises geben, der die gegebenen Kreise nicht einschliefst. Schneidet man $BN' = AF = d = \alpha - \beta$ ab, zieht N'A und errichtet aus T', der Mitte von N'A, eine Senkrechte, so wird diese die Linie BV' in D' schneiden und D' ist der Mittelpunkt des andern Berührungskreises, der die drei gegebenen Kreise einschliefst.

Die Richtigkeit der Construction kann auf folgende Weise dargethan werden. Da $AK \neq FG$ und $KL \neq H'I'$, so ist

$$BF : BG = BA : BK,$$
$$BI' : BH' = BK : BL,$$

oder, weil $BI' = BI$, $BH' = BH$,

$$BI : BH = BK : BL.$$

Durch Zusammensetzung der Proportionen erhält man

$$BF \times BI : BG \times BH = BA : BL,$$

woraus folgt

$$BL = \frac{BA \times BG \times BH}{BF \times BI} = \frac{BA\,(BC + CG)\,(BC - CG)}{(BA + AF)\,(BA - AF)} =$$

$$= \frac{a\,(b + \delta)\,(b - \delta)}{(a + d)\,(a - d)} = \frac{a\,(b^2 - \delta^2)}{a^2 - d^2} = B.$$

Es ist ferner auch $PQ \neq FG$, $RQ \neq LK \neq H'I'$, und daher

$$BF : BG = BP : BQ,$$

und

$$BQ : BR = BI' : BH' = BI : BH$$

oder

$$BI : BH = BQ : BR;$$

folglich

$$BF \times BI : BG \times BH = BP : BR,$$

woraus

$$BR = \frac{BG \times BH \times BP}{BF \times BI} = \frac{(BC + CG)\,(BC - CG)\,AF}{(BF + FA)\,(BA - AF)} =$$

$$= \frac{(b + \delta)\,(b - \delta)\,d}{(a + d)\,(a - d)} = \frac{(b^2 - \delta^2)\,d}{a^2 - d^2}$$

folgt; demnach

$$CM = CM' = BS = BR - RS = \frac{(b^2 - \delta^2)\,d}{a^2 - d^2} - \delta = A.$$

Nun ist $LMC = R = LVB$, und, wenn man $CW \neq LV$ zieht, auch $CWB = R$; daher

$$BW = BC \cos CBW,\; BV = BL \cos (m + CBW),$$

und, da $BW - BV = VW = CM$,

$$BC \cos CBW - BL \cos (m + CBW) = CM,$$

das ist

$$b \cos CBW - B \cos (m + CBW) = A.$$

Folglich ist

$$CBW = y.$$

Man hat ferner

$$BW' = BC \cos CBW',$$

$$BV' = BL \cos (m - CBW'),$$

dann ist auch

$$BW' - BV' = - W'V',$$

also

$$BC \cos CBW' - BL \cos (m - CBW') = - CM',$$

oder

$$b \cos CBW' - B \cos (m - CBW') = - A;$$

demnach

$$y = - CBW'$$

gerade so, wie wir bereits weiter oben diesen Winkel gefunden haben.

Da ferner $DX = DN - NX = DA - \alpha$, so wird der mit dem Halbmesser DX aus D beschriebene Kreis die Kreise B und A berühren, und zugleich auch den Kreis C, weil sein Mittelpunkt sowohl in der Senkrechten TD als auch in BV liegt.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dafs der aus D′ mit dem Halbmesser D′Y beschriebene Kreis die drei gegebenen Kreise auf der entgegengesetzten Seite berührt.

Die Construction bleibt im Wesentlichen die Nämliche, wenn $m = R$ oder $m > R$ ist; sie ändert sich aber etwas, wenn $m = o$; das ist, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen.

Man hat, wenn die gegebenen Kreise diese Lage haben,

$$(b - B) \cos y = \pm A.$$

Der Winkel y wird für diese beiden Fälle durch folgende Construction gefunden. Man ziehe von B aus (Fig. V.) eine Gerade BL, die mit BC einen beliebigen, nicht allzuspitzigen Winkel bildet, nehme auf derselben $BF' = BF$, $BA' = BA$, $BH' = BH$ und $BP = AF$, ziehe F G und H′I, durch A′ und P die Geraden A′K und PQ mit F′G parallel, durch Q und K die Geraden QR und KL mit H I parallel. Hierauf nimmt man auf der verlängerten BC von C aus ein Stück $CE = BL$, beschreibt über BE als Durchmesser einen Kreis und trägt, nachdem von BR das Stück $RS = CG = CH$ abgeschnitten worden, BS von B nach M und nach M′ als Sehnen in diesen Kreis ein. Auf diesen rückwärts verlängerten Sehnen liegen die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise. Nimmt man $BN = BN' = CG$, zieht CN und CN′ und errichtet aus der Mitte von diesen Linien Senkrechte, so geben die Durchschnitte D und D′ die Mittelpunkte derselben.

Da in unserm Beispiel (Fig. V.) der mittlere gegebene Kreis gröfser ist, als jeder der beiden übrigen, so kann die Berührung auf den entgegengesetzten Seiten der gegebenen Kreise nur so geschehen, dafs jeder Berührungskreis die gegebenen Kreise einschliefst. Das Entgegengesetzte würde stattfinden, wenn der mittlere Kreis kleiner wäre, als die andern beiden gegebenen Kreise. Die Richtigkeit des bei dieser Construction beobachteten Verfahrens ist leicht einzusehen.

Wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht in gerader Linie liegen, die Halbmesser dieser Kreise aber gleich sind, (Fig. VI.) so ist

$$a \cos y - b \cos (m + y) = o.$$

Die Construction des Winkels y wird für diesen Fall sehr einfach; man verlängere BA, mache BL = BC, BA′ = BA, beschreibe über BL einen Halbkreis, ziehe LA′ und verlängere diese Linie, wenn es nöthig ist, bis sie dem Halbkreis in V begegnet, dann ist, wenn BV gezogen wird, CBV = y. Eine aus der Mitte von CA oder CB errichtete Senkrechte giebt durch ihren Durchschnitt mit BV den gesuchten gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Berührungskreise. In diesem Fall kann übrigens der Punkt D auch gefunden werden, wenn man den Mittelpunkt eines Kreises sucht, der durch die Mittelpunkte A,B,C der gegebenen Kreise geht.

Läfst man die Halbmesser und etwa auch noch die Lage der Mittelpunkte der gegebenen Kreise sich ändern, so erhält man, aufser dem betrachteten Fall, in welchem die gegebenen Kreise aufser einander liegen und sich nicht berühren, in Beziehung auf die Lage, die die gegebenen drei Kreise gegen einander haben können, noch ein und dreifsig für die Auflösung mögliche Fälle. Es finden dann aber nicht mehr die acht verschiedenen Lagen des Berührungskreises bei jedem dieser Fälle statt, wie bei dem Fall, den wir untersucht haben, sondern es wird bald die eine, bald die andere Lage des berührenden Kreises in diesen Fällen für die Aufgabe unmöglich.

Der beschränkte Raum dieser Blätter gestattet nicht, die Untersuchung dieser verschiedenen Fälle, die sämmtlich in obiger Auflösung begriffen sind, weiter zu verfolgen, und wir müssen die Fortsetzung dieser Abhandlung einer andern Gelegenheit aufbewahren.

Da in uns … ere gegebene Kreis gröfser
ist, als jeder der … erührung auf den entgegen-
gesetzten Seiten … schehen, dafs jeder Berüh-
rungskreis die … as Entgegengesetzte würde
stattfinden, wenn … als die andern beiden ge-
gebenen Kreise. … Construction beobachteten
Verfahrens ist l …

Wenn di … eise nicht in gerader Linie
liegen, die Halb … sind, (Fig. VI.) so ist

Die Const … r diesen Fall sehr einfach;
man verlängere … A, beschreibe über BL einen
Halbkreis, ziehe … wenn es nöthig ist, bis sie
dem Halbkreis i … gezogen wird, CBV = y.
Eine aus der Mi … enkrechte giebt durch ihren
Durchschnitt mit … ichen Mittelpunkt der beiden
Berührungskreise … der Punkt D auch gefunden
werden, wenn m … s sucht, der durch die Mit-
telpunkte A,B,C …

Läfst ma … h noch die Lage der Mittel-
punkte der gege … ilt man, aufser dem betrach-
teten Fall, in w … ser einander liegen und sich
nicht berühren, … ie gegebenen drei Kreise ge-
gen einander hal … g für die Auflösung mögliche
Fälle. Es finden … verschiedenen Lagen des Be-
rührungskreises … bei dem Fall, den wir unter-
sucht haben, son … die andere Lage des berüh-
renden Kreises i … unmöglich.

Der besch … ttet nicht, die Untersuchung
dieser verschied … ger Auflösung begriffen sind,
weiter zu verfol … ung dieser Abhandlung einer
andern Gelegenh …

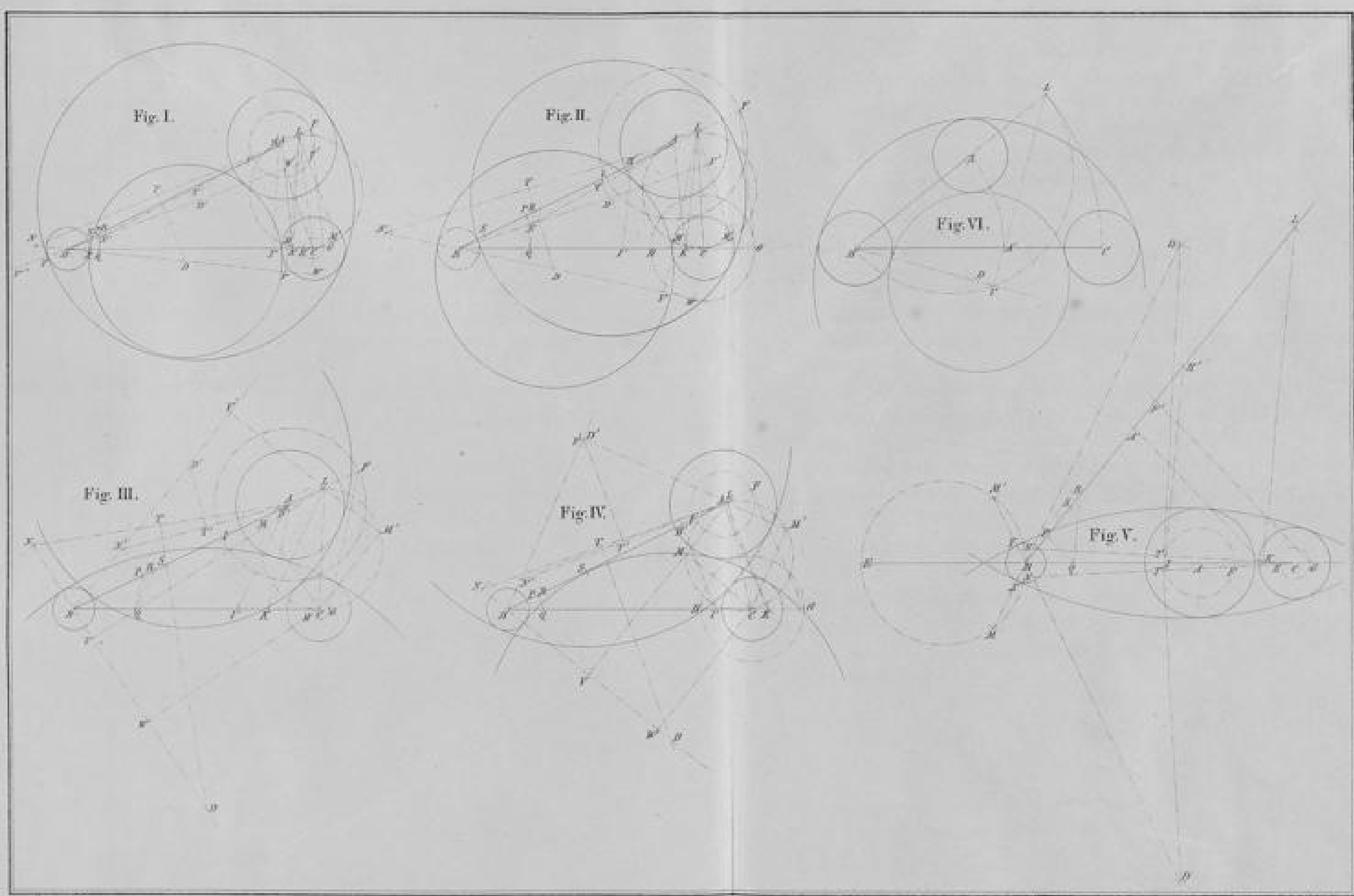
Fig. I.
Fig. II.
Fig. VI.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.