Disputatio de linea curvata,

quae respondet aequationi

$$x^3 + ay^2 + b^2x = 0$$

Disputatio de linea curvata,

quae respondet aequationi

$$x^3 + ay^2 + b^2x = 0.$$

Curvae secundae classis vel lineae tertii ordinis exprimuntur tertii gradus aequatione, cuius forma generalis haec est:

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0.$$

Huius aequationis specialis forma est aequatio

$$x^3 + ay^2 + b^2x = 0,$$

de qua iis, quae sequuntur, disputare placet. Systema coordinatarum adhibeatur orthogonium.

1.

Aequatione $x^3 + ay^2 + b^2x = 0$ traducta in formam

$$y = \pm \sqrt{\frac{-x^3 - b^2x}{a}} = \pm \sqrt{\frac{-x(x^2 + b^2)}{a}},$$

quod attinet ad qualitatem curvae huic aequationi respondentis eveniunt haecce: Si valor abscissae x positive ponitur, valor ordinatae y imaginarius, sin autem negative ponitur, valor y realis prodibit, ita quidem, ut magis atque magis crescente valore negativae abscissae x valor y crescat in infinitum.

Quam ob rem curva aequationi respondens in secundo atque tertio quadrante sita erit ibique in infinitum abibit.

Quum porro ex uno quoque negativo valore abscissae x duo aequales, sed inter se oppositi valores ordinatae y sequantur, elucet, bina curvae puncta paribus intervallis ab x axe distare. Denique posito $x = 0$ etiam erit valor $y = 0$; quare curva originem coordinatarum transibit.

Geometricae constructioni aequationis difficultates non occurrunt. Nam formae

$$y^2 = -\frac{x(x^2 + b^2)}{a} \text{ respondet}$$

proportio $a : x = x^2 + b^2 : y^2$

vel posito $x^2 + b^2 = p^2$

proportio $a : x = p^2 : y^2$.

Est igitur nobis propositum invenire quadratum y^2, quod sic se habeat ad datum quadratum p^2, ut data linea x ad datam lineam a. Sit (Fig. 1) $OA = a$, $OX' = x$, $OB = b$. Jam, si lineam rectam a puncto X' usque ad punctum B duxerimus, erit

$$OX'^2 + OB^2 = X'B^2 = p^2.$$

Tum diametro AX' describatur semicirculus, cuius peripheria secetur y axis in puncto D. Ductis etiam lineis DX' et DA proportio emanat haec:

$$OA : OX' = AD^2 : DX'^2,$$

et si linea X'D per punctum D producta et in puncto A linea perpendicularis erecta erit lineam productam in puncto F secans, ob triangula ADX' et AFX' similia fiet proportio:

$$AD^2 : DX'^2 = FA^2 : AX'^2$$

Ducatur porro per punctum X' linea ad y axem parallela; sit linea $X'C = X'B$; linea CE parallela X axi, EG parallela FA, Tum propter triangula FAX' et EGX' similia erit:

$$FA^2 : AX'^2 = EG^2 : GX'^2;$$

itaque $OA : OX' \quad = EG^2 : GX'^2$

$a : x \quad = \quad p^2 : y^2.$

Describatur denique centro X' et radio X'G semicirculus, quo secetur linea X'C in punctis J et H: erunt J et H duo puncta curvae, cuius forma Fig. 2 nobis ante oculos proponitur.

2.

Conjungitur aequatio curvae cum aequatione lineae rectae.

a. Sit generalis aequatio lineae rectae

$$y = mx + n;$$

substituto hoc valore y in data aequatione curvae

$$x^3 + ay^2 + b^2x = 0$$

nascetur aequatio:

$$x^3 + am^2x^2 + (2amn + b^2)\,x + an^2 = 0.$$

Quae tertii gradus aequatio quum aut tres aut unam tantum radicem realem habere possit, concludere nobis licet, lineam rectam aut in tribus aut in uno puncto cum curva convenire.

b. Si aequatione lineae rectae $y = mx$ utimur, substituendo valore y evadet aequatio:

$$x^3 + am^2x^2 + b^2x = 0 \quad \text{vel} \quad x\,(x^2 + am^2x + b^2) = 0.$$

Cui aequationi tres radices respondent:

$$x_{,} = 0;\; x_{,,} = -\frac{am^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2m^4 - 4b^2}$$

$$x_{,,,} = -\frac{am^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2m^4 - 4b^2}$$

Quae quum ita sint, jam intellegitur, lineam rectam per originem coordinatarum ductam in tribus punctis curvam secare posse.

c. Sumta rectae lineae aequatione: $y = p$ substituendo sequetur aequatio:

$$x^3 + ap^2 + b^2 x = 0;$$

cui aut una aut tres radices reales esse possunt; unde deduci potest lineam y axi parallelam et curvam aut in uno tantum aut in tribus punctis inter se concurrere.

d. Denique si ponimus $x = n$, substituto hoc valore prodibit aequatio:

$$n^3 + ay^2 + b^2 n = 0.$$

$$\text{vel } y^2 = \pm \sqrt{-n^3 - b^2 n} = \pm \sqrt{-n(n^2 + b^2)}.$$

Quae formula docet, omnes lineas, quae in secundo atque tertio quadrante y axi parallelae ducantur, curvam secare in duobus punctis.

3.

Coniungitur aequatio curvae cum aequatione circuli.

Sit aequatio circuli $x^2 + y^2 = r^2$; sequitur $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$. Quem valorem in ea, de qua agimus, curvae aequatione si substituimus, exoritur aequatio:

$$(r^2 - y^2 + b^2) \sqrt{r^2 - y^2} + ay^2 = 0.$$

vel multiplicando et reducendo:

$$y^6 + y^4 (a^2 - 2b^2 - 3r^2) + y^2 (4b^2 r^2 + b^4 + 3r^4) - r^2 (b^4 + 2r^2 b^2 + r^4) = 0.$$

Quia haec aequatio sexti gradus membrum absolutum negativum habet, iam colligere nobis licet, duas saltem radices reales adesse. Itaque concludi potest, circulum, cuius centrum coincidat in originem coordinatarum, in duobus certe punctis curvam secturum esse.

4.

a. *Quaeritur tangens.*

Quum ex legibus calculi differentialis pro functione implicita emanet generalis aequatio tangentis:

$$y - y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} (x - x')$$

atque quum ex data curvae aequatione $x^3 + ay^2 + b^2 x = 0$ differentiando evadat: $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + b^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 2ay$, his valoribus in generali tangentis formula substitutis eveniet:

$$y - y' = - \frac{3x'^2 + b^2}{2ay'} (x - x')$$

$$\text{vel } y = - \frac{3x'^2 + b^2}{2ay'} x + \frac{3x'^2 + b^2 x'}{2ay'} + y'.$$

Nullum negotium nobis nascetur investigantibus ex quantitate $-\frac{3x'^2+b^2}{2ay'}$, quo spectet tangens, vel ex quantitate $+\frac{3x'^2+b^2x'}{2ay'}+y'$ diiudicantibus, quam longe distet ab origine coordinatarum punctum, in quo tangens sectura sit y axem.

Si $\frac{3x'^2+b^2}{2ay'}=\infty$ vel $2ay'=0$ ponitur, tangens parellela y axi evadet. Sed quum hoc pacto et valor $y'=0$ et valor $x'=0$ sit, linea recta, quae in origine coordinatarum curvam tangit, cum y axe coalescet.

b. *Quaeritur subtangens.*

Jam calculus differentialis generalem formulam subtangentis praestat:

$$x''-x'=y'\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Si in hac formula valores $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial x}$, quos jam supra invenimus, substituerimus, haec aequatio subtangentis prodibit:

$$x''-x'=y'\frac{2ay'}{3x'^2+b^2}=\frac{2ay'^2}{3x'^2+b^2}.$$

c. *Reperitur aequatio normalis.*

Quum generalis aequatio normalis sit:

$$y-y'=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}(x-x'),$$

substitutis valoribus $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ in ea, de qua nos agimus, curva prodibit aequatio nomalis

$$y-y'=\frac{2ay'}{3x'^2+b^2}x-\frac{2ay'x'}{3x'^2+b^2},$$

$$\text{vel } y=\frac{2ay'}{3x'^2+b^2}x-\frac{2ay'x'}{3x'^2+b^2}+y'.$$

In hac formula quantitas $\frac{2ay'}{3x'^2+b^2}=0$ fiet, si ponitur $y'=0$, quo pacto etiam $x'=0$ erit; itaque hoc loco curvae, id est in origine coordinatarum, normalis erit perpendicularis ad y axem.

d. *Tandem in generali aequatione subnormalis:* $x'''-x''=-y'\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ substituendis substitutis pro data curva formula subnormalis prodibit haec:

$$x''' - x'' = - y' \frac{3x'^2 + b^2}{2ay'} = - \frac{3x'^2 + b^2}{2a}.$$

5.

Quod jam ex forma curvae intellegimus neque *maximum* curvae esse neque *minimum*, id nunc legibus calculi differentialis probare in animo est. Erit,

$$\text{si } f'(x) = 0 \begin{cases} f''(x) > 0, \text{ quoddam minimum;} \\ f''(x) < 0, \text{ quoddam maximum.} \end{cases}$$

Jam est:

$$f'(x) = - \frac{3x^2 + b^2}{2a\sqrt{\frac{-3x^2 - b^2}{a}}}.$$

Sed quum haec quantitas nullo valore abscissae x evanescere possit, iam indicium adest, curvam carere et maximo et minimo.

Item sub oculos cadit, curvam carere *asymptotis.*

6.

De curvae concavitate et convexitate.

Formulae generales, ex quibus cognosci potest, utrum curva arithmetica obvertat x axi concavitatem an convexitatem, hae sunt:

$$\text{si } yf''(x) < 0, \text{ curva concava;}$$
$$\text{si quidem } yf''(x) > 0 \text{ convexa ad x axem erit.}$$

Derivandum igitur erit differentiale secundum quantitatis x.

$$\text{Est autem } f''(x) = \frac{3x^4 + 6b^2x^2 - b^4}{4a^2y^3},$$

$$\text{inde } yf''(x) = \frac{3x^4 + 6b^2x^2 - b^4}{-4ax^3 - 4ab^2x}.$$

Huius inventae fractionis denominator $-4ax^3 - 4ab^2x$ quolibet pacto positivus erit, quia ex qualitate curvae quantitas x sumi non licet nisi negativa, contra numerator $3x^4 + 6b^2x^2 - b^4$ et positivus et negativus esse potest.

Negativus quidem vel < 0 numerator $3x^4 + 6b^2x^2 - b^4$ erit, si

$$3x^4 + 6b^2x^2 < b^4$$

$$\text{vel } x^2(x^2 + 2b^2) < \frac{b^4}{3};$$

positivus quidem vel > 0 fiet, si $\quad x^2(x^2 + 2b^2) > \frac{b^4}{3}.$

Quum utrumque fieri possit, colligi potest curvam partim concavitatem, partim convexitatem x axi obvertere.

Iam restat abscissam eius puncti cognoscere, quod separat partem concavam a parte convexa, id est *punctum flexus contrarii.*

Quum igitur ab hac parte puncti flexus centrarii $f''(x) > 0$, ab illa parte $f''(x) < 0$ sit, necesse erit in ipso flexus contrarii puncto $f''(x)$ aequari aut nihilo aut infinito.

Est autem $f''(x) = \frac{3x^4 + 6b^2x^2 - b^4}{4a^2y^3}$; qui quotus aequabitur nihilo, si erit:

$$3x^4 + 6b^2x^2 = b^4$$

$$\text{vel} \quad x^4 + 2b^2x^2 = \frac{b^4}{3}.$$

Posito $x^2 = z$ patebit secundi gradus aequatio:

$$z^2 + 2b^2z = \frac{b^4}{3},$$

$$\text{atque inde } z = -b^2 \pm \sqrt{\frac{4}{3} b^4}$$

$$z = -b^2 \pm \frac{2b^2}{3} \sqrt{3},$$

et tandem restituto valore x:

$$x^2 = z = -b^2 \pm \frac{2b^2}{3} \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{-b^2 \pm \frac{2b^2}{3} \sqrt{3}}$$

$$x = b \sqrt{0{,}15470 \ldots}$$

$$x = 0{,}393 \ldots b\,.$$

Quam ob rem in eo puncto, cuius abscissa — x valorem $0{,}393 \ldots b$ habet, concavitas curvae in convexitatem vertitur.

7.

Quaeritur differentiale arcus.

Differentiale arcus reperitur comparanda longitudine infinite parvi arcus ds cum longitudine relativarum coordinatarum dx et dy ad eum arcum pertinentium. Quae quidem tres lineolae quum efficiant triangulum orthogonium, in quo arcus vicem hypotenusae praebet, ea ratione inter se sunt, ut sit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

$$\text{erit igitur } ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Inde, si substituitur pro $\frac{dy}{dx}$ valor iam antea inventus, evenit formula:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{-3x^2 - b^2}{2ay}\right)^2}$$

$$\text{vel } ds = dx \sqrt{\frac{9x^4 - 4ax^3 + 6x^2b^2 - 4ab^2x + b^4}{-4a\,(x^3 + b^2x)}}.$$

8.

Angulus, quem fingunt duae tangentes, quarum puncta contactus in curva infinite vicina sunt, exprimitur formula:

$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

$$\text{est autem } \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + b^2}{2a\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}$$

$$\text{et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^4 + 6x^2b^2 - b^4}{4a\,(-x^3 - xb^2)\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}.$$

Quibus valoribus substitutis in formula generali prodit aequatio:

$$d\varphi = \frac{\frac{3x^4 + 6x^2b^2 - b^4}{4a\,(-x^3 - xb^2)\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}\,dx}{1 + \left(\frac{-3x^2 - b^2}{2a\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}\right)^2}$$

vel reducendis reductis

$$d\varphi = \frac{(3x^4 + 6x^2b^2 - b^4)\,dx}{(9x^4 - 4x^3a + 6x^2b^2 - 4xab^2 + b^4)\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}.$$

9.

Si quidem valor huius anguli dividitur longitudine eius arcus, qui inter puncta contactus intercedit, *media arcus curvatura* reperietur. Itaque quum intellegamus esse

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

substitutis iam supra inventis valoribus pro $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$ erit

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{3x^4 + 6x^2b^2 - b^4}{4a^2y^3}}{\left(1 + \left[\frac{-3x^2 - b^2}{2a\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

vel peracta reductione

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2a\,(3x^4 + 6x^2b^2 - b^4)}{\sqrt{(9x^4 - 4x^3a + 6x^2b^2 - 4xab^2 + b^4)^3}}.$$

Deinde si comparatur curvae in aliqua parte curvatura cum constante circuli curvatura, in quo est $ds = R.\ d\varphi$, patet esse $R = \frac{ds}{d\varphi}$.

Itaque formula $R = \frac{ds}{d\varphi}$ exprimitur *radius osculi,* id est radius eius circuli, qui eandem quam curva in hac parte curvaturam habet.

Substitutis igitur valoribus pro ds et $d\varphi$ sequitur fore

$$R = \frac{\sqrt{(9x^4 - 4x^3a + 6x^2b^2 - 4xab^2 + b^4)^3}}{2a\,(3x^4 + 6x^2b^2 - b^4)}.$$

Iam breviore modo exprimi poterit quantitas R, si valor longitudinis normalis N introductus erit;

$$\text{nam quum sit } N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\text{sequetur} \quad R = \frac{N^3}{y^3\,\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ergo substitutis valoribus pro y^3 et $\frac{d^2y}{dx^2}$ etiam erit

$$R = \frac{N^3}{\frac{3x^4 + 6x^2b^2 - b^4}{4a^2}}.$$

Pro eo puncto curvae, cuius abscissa x aequatur nihilo, id est pro origine coordinatarum, ex formula inventa, posito $x = o$, prodit et simplicissima constructuque facillima

$$\text{expressio} \quad R = -\frac{\sqrt{b^{12}}}{2ab^4} = -\frac{b^2}{2a}.$$

10.

De rectificando curvae arcu ejusque area investiganda.

Quum tota curva constet ex infinitesimis suis elementis, consummatis his elementis longitudo curvae evadet. Jam supra (7) invenimus, differentiale arcus esse $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, quare integrando prodibit

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ergo, si in hac formula generali substituitur valor $\frac{dy}{dx}$, eveniet arcus

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(-\frac{3x^2 + b^2}{2a\sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}}\right)^2}$$

$$\text{vel } s = \int dx \sqrt{1 + \frac{9x^4 + 6x^2b^2 + b^4}{4a\,(-x^3 - xb^2)}}\,.$$

Quae quantitas radicalis quum nullo alio pacto nisi resolvendo in seriem infinitam integrari, idque haud commode fieri possit, iam disputatione huius casus omissa ad reperiendam curvae aream transeamus.

Sit area curvae λ: erit elementum areae $d\lambda = y dx$ ipsaque area $\lambda = \int y dx$;

$$\text{vel substituto valore } y = \sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}$$

$$\lambda = \int \sqrt{\frac{-x^3 - xb^2}{a}}\, dx\,.$$

In hac quantitate integranda nobis licebit pro $-x$ ponere $+x$; hac enim re nihil aliud efficitur, quam ut, conservata omnino curvae forma, ipsa curva ex secundo et tertio transferatur in primum et quartum quadrantem. Quo facto expressio supra inventa etiam sic exhiberi potest:

$$\lambda = \int \left(\frac{x^3 + xb^2}{a}\right)^{1/2} dx$$

$$\text{vel} \quad \lambda = \int \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} \left(1 + b^2x^{-2}\right)^{1/2} dx\,.$$

Quae functio accurate integrari posset, si valor fractionis $\frac{3/2 + 1}{-2}$ aequaretur aut alicui numero integro aut nihilo. Sed quum valor fractionis $\frac{3/2 + 1}{-2} = -\frac{5}{4}$ sit, confugiendum est ad approximationem ope seriei infinitae obtinendam. Est autem

$$(1 + b^2x^{-2})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} b^2x^{-2} - \frac{1}{2!\,2^2} b^4x^{-4} + \frac{1.3}{3!\,2^3} b^6x^{-6} - \frac{1.3.5}{4!\,2^4} b^8x^{-8} + \ldots$$

$$\frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} (1 + b^2x^{-2})^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(x^{3/2} + \frac{1}{2} b^2x^{-1/2} - \frac{1}{2!\,2^2} b^4x^{-5/2} + \frac{1.3}{3!\,2^3} b^6x^{-9/2} - \ldots\right).$$

Itaque integratione peracta fiet:

$$\int \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} (1 + b^2x^{-2})^{1/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{2}{5} x^{5/2} + b^2x^{1/2} + \frac{1}{2!2.3} b^4x^{-3/2} + \ldots\right) + C.$$

Si quidem desiderabitur finita pars areae, in hac generali formula primum $x = x_{\prime}$, tum $x = x_{\prime\prime}$ ponendum et haec series ab illa subtrahenda erit.

11.

De corpore, quod curvae plano circa x axem rotando nascitur.

Quum jam nobis indagantibus, quae sit superficies corporis, quod gignitur curvae plano circa x axem rotando, irrationale haudque accurate integrale polynomium sese offerat, scrutatio huius casus praetermittenda est et potius operam dare placet, ut ipsum corpus, quantum sit, et abscissa centri gravitatis reperiatur.

Elementum huius corporis infinite parvum exprimitur formula: $y^2\pi dx$; inde si designatur littera J summa elementorum vel solidum corporis, sequitur esse $J = \int y^2\pi dx$.

In hac formula substituto valore y^2 (translata quidem curva, ut iam antea (10) factum est, in quadrantem primum et quartum)

$$\text{efficitur:} \quad J = \int \frac{\pi}{a} (x^3 + xb^2)\, dx, \quad \text{tum peracta}$$

$$\text{integratione } J = \frac{\pi}{a}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 b^2}{2}\right) + C$$

et pro finita aliqua corporis parte:

$$\text{(I)} \quad J = \int_{x_,}^{x_{,,}} \frac{\pi}{a} (x^3 + xb^2)\, dx = \frac{\pi}{a}\left(\frac{x_,^4 - x_{,,}^4}{4} + \frac{(x_,^2 - x_{,,}^2)\, b^2}{2}\right).$$

Restat tandem, ut investigemus *abscissam centri gravitatis*. Si significat $x;$ hanc abscissam, erit:

$$Jx; = \int_{x_,}^{x_{,,}} \pi y^2 x dx = \frac{\pi}{a}\int_{x_,}^{x_{,,}} (x^4 + x^2 b^2)\, dx$$

vel integrando:

$$\text{(II)} \quad Jx; = \frac{\pi}{a}\left(\frac{x_,^5 - x_{,,}^5}{5} + \frac{(x_,^3 - x_{,,}^3)\, b^2}{3}\right).$$

Denique si dividitur aequatio (II) per aequationem (I), evenit abscissa centri gravitatis:

$$x; = \frac{\frac{\pi}{a}\left(\frac{x_,^5 - x_{,,}^5}{5} + \frac{(x_,^3 - x_{,,}^3)\, b^2}{3}\right)}{\frac{\pi}{a}\left(\frac{x_,^4 - x_{,,}^4}{4} + \frac{(x_,^2 - x_{,,}^2)\, b^2}{2}\right)}$$

$$x; = \frac{12\,(x_,^5 - x_{,,}^5) + 20\,(x_,^3 - x_{,,}^3)\, b^2}{15\,(x_,^4 - x_{,,}^4) + 30\,(x_,^2 - x_{,,}^2)\, b^2}.$$

De corpore, qu… nascitur.

Quum jam nobis indaga… quod gignitur curvae plano circa x axem rotando, i… lynomium sese offerat, scrutatio huius casus praeter… cet, ut ipsum corpus, quantum sit, et abscissa cent…

Elementum huius corpo… $y^2\pi dx$; inde si designatur littera J summa eleme… sse $J = \int y^2 \pi dx$.

In hac formula substi… va, ut iam antea (10) factum est, in quadrantem p…

efficitur: … peracta

integratio…

et pro finita aliqua corporis p…

$$\text{(I)} \quad J = \int_{x_{,}}^{x_{,,}} \frac{\pi}{a} (x^3 + xb^2 \ldots \ldots {}_{,,}{}^2)\, b^2 \Big).$$

Restat tandem, ut in… Si significat x; hanc abscissam, erit:

$$Jx \ldots dx$$

vel integrando:

$$\text{(II)} \quad Jx; = \frac{\pi}{a} \Big(\frac{x_{,}^5 - x_{,,}^5}{5} \ldots$$

Denique si dividitur ae… scissa centri gravitatis:

$$x; = \ldots$$

$$x; = \ldots$$

Fig. 1.

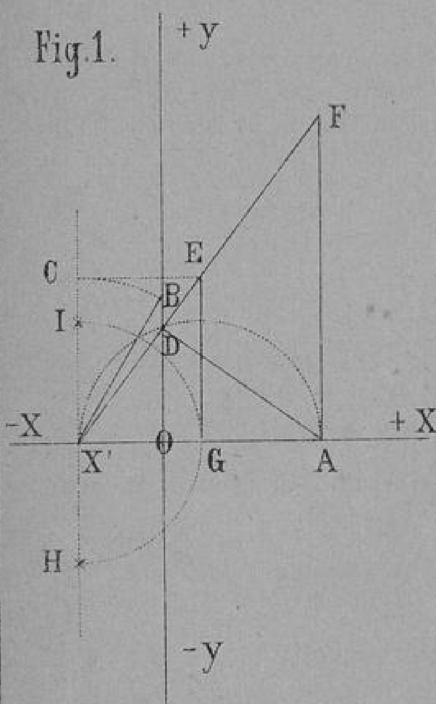

Fig. 2.