I.

Berechnung der Konoiden.

§. 1.

Unter **Konoiden** versteht man im Allgemeinen kegelähnliche Körper, die, (gleichwie der Kegel oder Konus durch Umdrehung zweier unter einem bestimmten Winkel sich schneidenden geraden Linien um die eine derselben entsteht,) durch Umdrehung einer Curve um eine Axe erzeugt werden, vorausgesetzt, daß die Curve die Axe schneidet, und die zur Axe senkrechten Ordinaten nach einander wachsen.

Vorzugsweise führen aber den Namen „Konoiden" jene bemerkenswerthen Körper, welche durch Umdrehung der Kegelschnitts-Linien um eine Axe erzeugt werden; und zwar:

1) das **elliptische Konoid**, d. i. derjenige Körper, der durch Herumbewegung eines Ellipsen-Quadranten oder eines Zweiges davon um die große oder kleine Halbaxe entsteht. Wird die ganze Ellipse um die eine oder die andere Axe gedreht, so heißt der dadurch entstehende Körper das ganze **Rotations-Ellipsoid**.
2) das **parabolische Konoid** oder das **Rotations-Paraboloid**, welches bei Umdrehung der Parabel um die Axe derselben gebildet wird.
3) das **hyperbolische Konoid** oder das **Rotations-Hyperboloid**, welches in gleicher Weise durch die Hyperbel gebildet wird.

§. 2.

Gleichwie es mit Hülfe der Integralrechnung keine Schwierigkeiten hat, den körperlichen Inhalt eines jeglichen Ellipsoids, ferner des elliptischen und hyperbolischen Paraboloids, des einfachen und getheilten Hyperboloids zu bestimmen, so ist es mit Hülfe jener Rechnung insbesondere leicht, für die Volumina der vorhin unter 1, 2 und 3 erklärten Rotationskörper einfache Formeln herzuleiten. Die Herleitung ist folgende:

Für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte im Scheitel der Curve und mit der (großen) Axe als Abscissen-Linie lautet:

α) die Gleichung für die Ellipse: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$; worin x die Abscisse, y die zur Abscisse senkrechte Ordinate, a die große und b die kleine Halbaxe bezeichnet.

β) die Gleichung für die Parabel: $y^2 = 2px$, worin p den halben Parameter der Parabel, d. i. den doppelten Abstand des Brennpunktes vom Scheitel bezeichnet.

γ) die Gleichung für die Hyperbel: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$.

Bezeichnen wir nun mit V das Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung einer der Kegelschnitts-Linien um die Abscisse x entsteht, (wobei der von der Ordinate y bei der Umdrehung beschriebene Kreis die ebene Begränzung, die von der Curve beschriebene Fläche des zweiten Grades die krumme Begränzung des Volumens bildet,) so ist allgemein:

$$V = \int y^2 \pi . dx + \text{const.}$$

Aus dieser Formel ergeben sich sofort durch die einfachste Integrirung die Volumina jener Rotationskörper in folgender Weise:

1) Da für die Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ ist, so ist für das Rotations-Ellipsoid:

$$V = \int \frac{b^2}{a^2} . \pi \, (2ax - x^2) . dx + \text{const., oder:}$$

$$V = \frac{b^2}{a^2} \pi . \left[2a . \int x . dx - \int x^2 dx \right] + \text{const.}$$

$$V = \frac{b^2}{a^2} \pi . \left(2a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \text{const.}$$

$$V = b^2 \pi . \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{3a^2} \right) + \text{const.}$$

Für $x = 0$ erhält man hieraus $V = \text{const.}$ Weil wir aber den Körper vom Anfangspunkte der Abscissen an rechnen, so ist für $x = 0$ auch $V = 0$, mithin hier $\text{const.} = 0$.

Das Rotations-Ellipsoid, welches zur Abscisse x gehört, mit andern Worten, dessen Höhe $= x$ ist, ist demnach

$$= b^2 \pi . \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{3a^2} \right)$$

2) Für das Rotations-Paraboloid, dessen Höhe $= x$ ist, erhält man, indem man der Gleichung der Parabel zufolge $y^2 = 2px$ setzt,:

$$V = \int 2 \pi p x . dx + \text{const.}; \text{ const. hier } = 0.$$

$$= 2 \pi p . \int x . dx$$

$$= 2 \pi p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$V = p x^2 \pi.$$

3) Das Volumen des hyperbol. Konoids, dessen Höhe $= x$ ist, ergibt sich ebenso mit Benutzung der Gl. für die Hyperbel: $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax + x^2)$.

Man erhält hier:

$$V = \int \frac{b^2\pi}{a^2} (2ax + x^2) \cdot dx + \text{const.}; \text{ const.} = 0.$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2} \cdot \left[2a \cdot \int x \cdot dx + \int x^2 dx \right]$$

$$V = b^2\pi \cdot \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} \right).$$

§. 3.

Auch ohne Hülfe der Integralrechnung lassen sich die im vorigen § aufgestellten Formeln für die Volumina der drei Rotationskörper ohne besondere Schwierigkeiten herleiten. Verschiedene Wege führen hier mehr oder minder rasch zum Ziele.

Um z. B. den körperlichen Inhalt des parabolischen Konoids zu bestimmen, denke man die Axe desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegt und durch die (n) Theilpunkte senkrecht zur Axe Schnitte geführt. Auf jeder (kreisförmigen) Schnittfläche des Konoids denke man sowohl nach der einen als nach der andern Seite hin einen geraden Cylinder errichtet, welcher jedesmal bis zur nächsten Schnittfläche reicht. Auf diese Weise entstehen zwei Reihen von Cylindern, und zwar eine Reihe von sog. äußeren Cylindern, (in Fig. 1 stellen **abcd, efgh, iklm,** u. s. w. die Rechtecke vor, welche bei der Umdrehung diese äußeren Cylinder beschreiben,) und eine Reihe von inneren Cylindern, (in Fig. 1 dargestellt durch **cdnp, ghqr,** u. s. w.) Die Summe der n äußeren Cylinder ist größer als das Konoid, die Summe der (n—1) inneren Cylinder kleiner als das Konoid. Der Inhalt desselben liegt mithin zwischen den beiden Summen. Bestimmt man nun diese beiden Summen (die Gränzen des Konoids), und zieht man dann die Gränzen immer enger, so ergibt sich dadurch der Inhalt des parab. Konoids.

Mit Hülfe einer ähnlichen Betrachtungsweise lassen sich auch die Volumina des elliptischen und des hyperbolischen Konoids bestimmen.

Einfacher jedoch als auf dem hiermit bezeichneten Wege kann man die Inhaltsbestimmung der Konoiden durch Vergleichung derselben mit Cylinder, Kegel und Kugel erreichen. Auf den nachfolgenden Blättern möge nun diese Art der Berechnung Platz finden, wobei außer den vorzüglichsten Lehrsätzen der Stereometrie nur die in §. 2 aufgestellten Gleichungen für die Ellipse, Parabel und Hyperbel als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 4.

Berechnung des halben Rotations-Ellipsoids.

A E B D (Fig. 2) sei eine Ellipse. Ueber der kleinen Halbaxe C E sei das Rechteck C E F A construirt, und C mit F verbunden. Bei der vollen Umdrehung um die andere Halbaxe A C erzeugt das Rechteck A C E F einen Cylinder, der Ellipsen-Quadrant A C E ein halbes Ellipsoid, und das rechtwinkl. Dreieck A C F einen Kegel. Man denke nun die gemeinschaftliche Höhe der drei Körper, A C, in unendlich viele gleiche Theile getheilt und durch die Theilpunkte parallel zu den Grundflächen der Körper Schnitte geführt. Auf diese Weise kann man sich die drei Körper in unendlich viele entsprechende Theile (Elemente) zerlegt vorstellen, von denen jeder wegen der unendlich kleinen Höhe als ein Cylinder angesehen werden kann.

Können wir nun zeigen, daß alle die einzelnen Ellipsoid-Elemente in einer bestimmten, sich gleichbleibenden Beziehung zu den entsprechenden (auf derselben Schnittfläche ruhenden) Kegel- und Cylinder-Elementen stehen, so ist damit auch die Beziehung des vollständigen halben Ellipsoids zum vollständigen Kegel und vollständigen Cylinder gefunden. Denn wenn die entsprechenden Elemente der Körper in einer constanten Beziehung zu einander stehen, so müssen auch die summirten Elemente der einzelnen Körper, d. h. die Körper selbst, eben dieselbe Beziehung zu einander haben.

Die Beziehung, worin die entsprechenden Elemente der drei Körper zu einander stehen, soll nun hergeleitet werden.

P sei ein beliebiger Theilpunkt; durch denselben sei parallel mit der Grundfläche des halben Ellipsoids ein Schnitt geführt, welcher für jeden der drei Körper eine Kreisfläche ist.

Der Radius der Schnittfläche durch den Cylinder sei P Q (Fig. 2)
" " " " durch das Ellipsoid: P M
" " " " durch den Kegel: P N

Cyl. D E F G bedeute den Cylinder, der durch die volle Umdrehung des Rechteckes A C E F um A C entsteht. Eine ähnliche Bezeichnung gelte von den anderen Körpern. $AC = a$; $AF = CE = b$.

Da P M die zur Abscisse A P ($= x$) gehörige Ordinate (y) der Ellipse ist, so ist der Gleichung der Ellipse zufolge:

$$PM^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2a \,.\, AP - AP^2)$$

$$AP = AC - CP = a - CP$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke C P N und C A F ist:

$$\frac{CP}{PN} = \frac{CA}{AF} = \frac{a}{b}; \text{ mithin:}$$

$$CP = \frac{a}{b} \cdot PN$$

$$AP = a - \frac{a}{b} \cdot PN \;\ldots\ldots\; (\mathfrak{A})$$

Multiplizirt man die beiden Seiten dieser Gleichung (A) 1) mit 2a, und quadrirt man dann 2) dieselbe Gleichung (A), so erhält man:

$$1)\ 2a\,.\,AP = 2a^2 - \frac{2a^2}{b}\cdot PN$$

$$2)\ AP^2 = a^2 - \frac{2a^2}{b}\cdot PN + \frac{a^2}{b^2}\cdot PN^2$$

$$-\qquad -\ +\qquad -$$

Folglich: $2a\,.\,AP - AP^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}\cdot PN^2$

$$PM^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}\cdot PN^2\right)$$

$„ = b^2 - PN^2$. Es ist aber $b = CE = PQ$, folglich:

$PM^2 = PQ^2 - PN^2$; daher auch:

$PM^2\,.\,\pi = PQ^2\,.\,\pi - PN^2\,.\,\pi$

Diese Gleichung drückt den Satz aus:

Jede zur Grundfläche des Cylinders parallele Schnittfläche durch das Ellipsoid ist so groß als die entsprechende Schnittfläche durch den Cylinder vermindert um die entsprechende Schnittfläche durch den Kegel. —

Bezeichnen wir nun mit **h** die unendlich kleine Höhe der Körper-Elemente, und multipliciren wir mit derselben die vorangehende Gleichung, so erhalten wir die Formel:

$PM^2\,.\,\pi\,.\,h = PQ^2\,\pi\,h - PN^2\,\pi\,h\ .\ .\ .\ .\ .$ (B)

Wie man sofort sieht, bedeuten die einzelnen Glieder dieser Formel die Volumina von Cylinderchen, welche auf den entsprechenden Schnittflächen durch die drei Körper stehen und dieselbe (unendlich kleine) Höhe **h** haben.

Die durch Formel (B) ausgedrückte Beziehung, worin diese Cylinderchen zu einander stehen, können wir aber, weil **h** beliebig verkleinert werden kann, auch als die Beziehung ansehen, welche die Elemente der drei Hauptkörper, mithin auch diese Körper selbst, zu einander haben. Dabei beachte man, daß die unendlich kleinen Fehler, die man begeht, wenn man statt der Cylinderchen ($PM^2\pi h$ und $PN^2\pi h$) die wirklichen Ellipsoid- und Kegel-Elemente nimmt, in der Formel (B) sich noch gegenseitig aufheben, weil das eine Cylinderchen um ein unendlich Kleines *größer*, das andere um ein unendlich Kleines *kleiner* als das zugehörige Element ist.

Wir dürfen somit den Satz aufstellen: „Das Ellipsoid-Element ist so groß als das Cylinder-Element vermindert um das Kegel-Element.“ In derselben Beziehung stehen aber auch die drei *Hauptkörper selbst* und *gleich hohe Theile der Körper*. (I.)

Es ist daher das halbe Ellipsoid **DAE** gleich Cylinder **DEFG** vermindert um Kegel **GCF**.

Das halbe Ellipsoid DAE = Cyl. $DEFG$ — Keg. GCF

" " " " $= CE^2\pi . AC - \frac{AF^2\pi . AC}{3}$

" " " " $= b^2\pi . a - \frac{b^2\pi . a}{3}$

" " " " $= \frac{2}{3} . b^2\pi a$; d. h.:

Das halbe Rotations-Ellipsoid ist gleich zwei Dritttheilen des Cylinders, welcher gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit dem Ellipsoid hat, — oder gleich dem doppelten Kegel, welcher gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit demselben hat. (II.)

Das ganze Rotations-Ellipsoid ist daher $= \frac{4}{3} . b^2\pi a$ (III.)

§. 5.

Berechnung eines elliptischen Konoids von beliebiger Höhe.

Die gegebene Höhe des ellipt. Konoids, welches zu der Ellipse, deren große Halbaxe = a und deren kleine Halbaxe = b ist, gehört, sei $= AP = x$. (Fig. 2.)

Das ellipt. Konoid LAM, welches diese Höhe AP hat, ist dem Satze I. in §. 4 zufolge so groß als der Cylinder $VQFG$ vermindert um den abgestumpften Kegel $GRNF$. Also:

Konoid LAM = Cyl. $VQFG$ — abgest. Keg. $GRNF$.

Cyl. $VQFG = PQ^2\pi . AP = b^2\pi . x$

Abg. Keg. $GRNF = \left(AF^2\pi + PN^2\pi + \sqrt{AF^2\pi . PN^2\pi}\right) . \frac{AP}{3}$

Abg. Keg. $GRNF = \left(b^2 + PN^2 + b . PN\right) . \pi . \frac{x}{3}$

$\frac{PN}{PC} = \frac{AF}{AC} = \frac{b}{a}$, daher:

$PN = \frac{b}{a} . PC = \frac{b}{a} . (AC - AP) = \frac{b}{a} . (a - x)$

$PN = b - \frac{bx}{a}$. Hieraus erhält man:

1) $PN^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$

2) $b . PN = b^2 - \frac{b^2x}{a}$

Folglich ist: $PN^2 + b . PN = 2b^2 - \frac{3b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$

$$\text{Abg. Keg. } \mathbf{GRNF} = \left(3b^2 - \frac{3b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}\right)\pi \cdot \frac{x}{3}$$

$$\text{„ „ „} = b^2\pi \cdot \left(x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

$$\text{Konoid } \mathbf{LAM} = b^2\pi x - b^2\pi \cdot \left(x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

$$\text{Konoid } \mathbf{LAM} = b^2\pi \cdot \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{3a^2}\right). \qquad \text{(IV.)}$$

Vergl. № 1 in §. 2.

Zusatz 1. Der körperliche Inhalt des abgestumpften halben Ellipsoids **DLME** läßt sich in gleicher Weise, wie der des halben Ellipsoids (s. §. 4), oder auch durch Subtraction des Konoids **LAM** vom halben Ellipsoid **DAE** bestimmen. Setzt man die Höhe (**CP**) des abgest. Konoids = **H**, so findet man auf die eine und die andere Weise, daß das abgest. Halbellipsoid **DLME**, dessen eine Grundfläche = $b^2\pi$ ist, ein Volumen = $b^2\pi \cdot \left(H - \frac{H^3}{3a^2}\right)$ hat.

Zusatz 2. Mit Benutzung der im vorigen Zusatz für das abgestumpfte Halbellipsoid aufgestellten Formel und der in §. 4 für das vollständige Halbellipsoid entwickelten Formel oder auch noch leichter durch Subtraction des Konoids **LAM** vom ganzen Ellipsoid **AEBDA** ergibt sich, daß auch auf das beliebige abgestumpfte Ellipsoid **LMEBDL** die in diesem §. bei **IV.** stehende Formel Anwendung findet, wenn man $x = PB$ nimmt.

Zusatz 3. Dreht sich die Ellipse um die kleine Axe statt um die große, so bleibt die ganze Entwicklung dieselbe; nur muß man überall die große und die kleine Halbaxe mit einander vertauschen. Man erhält somit für den körperlichen Inhalt des halben Ellipsoids auf der großen Axe die Formel: $\frac{2}{3} a^2\pi \cdot b$

Zusatz 4. Gleichwie der Kreis als eine Ellipse angesehen werden kann, in welcher die Excentricität = o, also die große Axe gleich der kleinen ist, so kann auch die Kugel als ein Ellipsoid mit gleichen Axen betrachtet werden.

Setzen wir daher in dem für das Ellipsoid bei **III.** in §. 4 gefundenen Ausdrucke $a = b = r$, so erhalten wir als Formel für den Kugelinhalt: $\frac{4\pi}{3} \cdot r^3$.

§. 6.

Berechnung des parabolischen Konoids.

Die Höhe (oder Axe) des zu berechnenden parab. Konoids sei **AP** (= x) (Fig. 3); der Radius der Grundfläche desselben sei **PM** (= y).

Die Berechnungsweise ist im Allgemeinen dieselbe, wie in §. 4. Das dort im Anfange Gesagte ist auf das parab. Konoid (**mutatis mutandis**) zu übertragen; nur wird hier, wie sich im

Verlaufe der Entwicklung zeigen wird, außer Cylinder und Kegel noch ein anderer Körper, die Kugel, mit in die Vergleichung zu ziehen sein. — G sei ein beliebiger Theilpunkt der Höhe A P.

Der Gleichung der Parabel (s. §. 2) zufolge ist:

1) $PM^2 = 2p.AP$

$PM = GD$, daher auch:

$GD^2 = 2p.AP;$

2) $GC^2 = 2p.AG$

Mithin: $GD^2 - GC^2 = 2p.(AP - AG) = 2p.GP$

$GD^2 - GC^2 = 2p.GP.$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke P G N und P A B ist:

$$\frac{GP}{GN} = \frac{AP}{AB} = \frac{x}{y}, \text{ daher } GP = \frac{x}{y}.GN$$

Durch Substitution erhält man:

$$GD^2 - GC^2 = \frac{2px}{y}.GN$$

Da nach der Gleichung der Parabel $2px = y^2$ ist, so ist $\frac{2px}{y} = y = PM = GD$; folglich:

$GD^2 - GC^2 = GD.GN = (GN + ND).GN$

$GD^2 - GC^2 = GN^2 + GN.ND$

$GC^2 = GD^2 - GN^2 - GN.ND$

Für $GN.ND$ d. i. für das Product aus den Stücken des (constanten) Radius der Schnittfläche durch den Cylinder können wir das Quadrat der mittleren geom. Proportionale zwischen diesen Stücken G N und N D substituiren.

Man erhält diese Proportionale, wenn man, nachdem über P M (= G D) ein Halbkreis beschrieben, von dem Punkte N aus die Linie N S parallel mit der Axe der Parabel zieht. Es ist alsdann die zum Diameter P M senkrechte halbe Sehne R S die mittlere Proportionale zwischen den Stücken des Diameters; mithin:

$RS^2 = PR.RM = GN.ND.$ Folglich:

$GC^2 = GD^2 - GN^2 - RS^2$, und:

(V.) $GC^2\pi = GD^2\pi - GN^2\pi - RS^2\pi$

Gleichwie $GC^2\pi$, $GD^2\pi$, $GN^2\pi$ die durch denselben Schnitt hervorgebrachten Schnittflächen durch das parab. Konoid, durch den Cylinder und durch den Kegel bezeichnen, so drückt $RS^2\pi$ die dem veränderlichen Punkte N correspondirende (zu P M senkrechte) Schnittfläche durch die Kugel aus, welche durch Umdrehung des Halbkreises P S M um den Diameter P M entsteht. — Denken wir uns nun zur Zerlegung der Körper in ihre Elemente zunächst die Linie A P in unendlich viele gleiche Theile getheilt und dann auch die Linie P M in ebenso viele (als A P) correspondirende Theilchen zerlegt, so sind auch letztere unter sich gleich, und die einzelnen unendlich kleinen Theile der Linie **AP**, welche (Theile) wir mit **h** bezeichnen wollen, sind als die Höhen der einzelnen Elemente der drei ersten Körper (des parab. Konoids, des Cylinders und des Kegels), und die Theilchen der Linie **P M**, deren jedes wir mit **i** bezeichnen wollen, als die Höhen der Kugelelemente anzusehen. Weil wir uns die beiden Linien **AP** und **PM** in gleich viele Theilchen zerlegt vorstellen, so verhält sich ein Theilchen der Linie **AP** zu einem Theilchen der Linie **P M**, wie **AP** zu **PM**. Es ist daher:

$\frac{h}{i} = \frac{AP}{PM} = \frac{x}{y}$, wie sich auch, wenn (in Fig. 3) $Gn = Nq$ als h, und $Ru = qp$ als i angesehen wird, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Nqp und BMP ergibt. Somit ist:

$$h = i \cdot \frac{x}{y} \cdot - \left(\frac{x}{y} \text{ ist bei einem und demselben parab. Konoid constant.}\right)$$

Um jetzt zur Bestimmung und Vergleichung der Körperelemente selbst überzugehen, haben wir die Glieder der oben bei **V.** stehenden Gleichung mit **h** zu multipliziren. Bei der Multiplication des letzten Gliedes aber nehmen wir, um das zum Kugelelement gehörige **i** in den Ausdruck zu bringen, statt **h** den vorhin gefundenen Werth: $i \cdot \frac{x}{y}$. Wir erhalten auf diese Weise:

$$GC^2 \pi h = GD^2 \pi h - GN^2 \pi h - RS^2 \pi i \cdot \frac{x}{y} \qquad \text{(VI.)}$$

Schließen wir nun von den in dieser Formel durch $GC^2 \pi h$, $GD^2 \pi h$, $GN^2 \pi h$, $RS^2 \pi i$ ausgedrückten Cylinderchen auf die correspondirenden Elemente der vier Hauptkörper, und von den einzelnen Elementen auf die summirten Elemente, d. i. auf die Körper selbst, so ergibt sich aus der Gleichung **VI.** der Satz:

Der körperliche Inhalt des parabolischen Konoids **FAM** ist gleich dem Reste, den man erhält, wenn man den Inhalt des Cylinders **FMBE** ($= PM^2 \pi . AP$) vermindert 1) um den Inhalt des Kegels **BPE** $\left(= \frac{AB^2 \pi . AP}{3}\right)$ und noch 2) um den mit $\frac{x}{y}$ multiplizirten Inhalt der Kugel, deren Durchmesser **PM** ist, $\left(\text{d. i. um } \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{PM}{2}\right)^3 \cdot \frac{x}{y}\right)$. Also ist:

$$\text{das parab. Konoid } FAM = PM^2 \pi AP - \frac{AB^2 \pi . AP}{3} - \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{PM}{2}\right)^3 \cdot \frac{x}{y}$$

$$'' \quad = y^2 \pi . x - \frac{y^2 \pi . x}{3} - \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^3 \cdot \frac{x}{y}$$

$$'' \quad = \frac{2 y^2 \pi x}{3} - \frac{4\pi . y^3 x}{24 y}$$

$$'' \quad = \frac{2 y^2 \pi x}{3} - \frac{y^2 \pi x}{6}.$$

Parab. Konoid $= \frac{y^2 \pi . x}{2}$, oder, da $y^2 = 2px$ ist,

$$'' \quad = \frac{2px . \pi . x}{2} = p x^2 \pi.$$

Der körperliche Inhalt des parab. Konoids, an welchem der Radius der Grundfläche $= y$, und dessen Höhe $= x$ ist, ist somit $= p . x^2 \pi$ oder $= \frac{y^2 \pi . x}{2}$, d. h. gleich dem halben Cylinder, welcher mit dem Konoid dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.

Zusatz. Das Volumen des abgestumpften parab. Konoids HJMF ist die Differenz des Konoids HAJ $\left(= \frac{OJ^2 \pi . AO}{2}\right)$ und des Konoids FAM $\left(= \frac{PM^2 \pi . AP}{2}\right)$.

$$\text{Abgest. parab. Konoid HJMF} = \frac{OJ^2 \pi . AO}{2} - \frac{PM^2 \pi . AP}{2}$$

$$'' \quad '' \quad '' \quad '' = \frac{OJ^2 \pi . (AP + PO)}{2} - \frac{PM^2 \pi . AP}{2}$$

$$'' \quad '' \quad '' \quad '' = \frac{(OJ^2 - PM^2) \pi . AP}{2} + \frac{OJ^2 \pi . PO}{2}$$

Der Gleichung der Parabel zufolge ist:

$$1) \; OJ^2 = 2p . AO$$
$$2) \; PM^2 = 2p . AP$$
$$- \quad -$$

daher: $OJ^2 - PM^2 = 2p(AO - AP) =$

$$OJ^2 - PM^2 = 2p . PO; \; . \; . \; . \; (a)$$

und da $AP = \frac{PM^2}{2p}$ ist, so ist:

$$(OJ^2 - PM^2) \cdot AP = PO . PM^2$$

$$\text{Abgest. parab. Konoid HJMF} = \frac{PO . PM^2 \pi}{2} + \frac{OJ^2 \pi . PO}{2}$$

$$= \frac{(PM^2 + OJ^2) \pi . PO}{2}$$

Der Inhalt eines senkrecht zur Axe abgestumpften parab. Konoids ist mithin gleich dem arithmetischen Mittel der Volumina zweier Cylinder, welche mit dem Konoid dieselbe Höhe (PO) haben, und von denen der eine den einen Endkreis ($PM^2 . \pi$) des abg. Konoids, der andere den anderen Endkreis ($OJ^2 . \pi$) als Grundfläche hat.

Setzt man statt PO den aus Gleichung α sich ergebenden Werth $\frac{OJ^2 - PM^2}{2p}$ in die vorhin für das abg. parab. Konoid entwickelte Formel, so erhält man noch:

$$\text{Abg. parab. Konoid HJMF} = (OJ^2 + PM^2) . (OJ^2 - PM^2) . \frac{\pi}{4p}$$

$$= (OJ^4 - PM^4) . \frac{\pi}{4p}$$

§. 7.

Berechnung des hyperbolischen Konoids.

In Fig. 4 sei **AC** (= a) die große Halbaxe der Hyperbel, und **AB** (= b) sei gleich der kleinen Halbaxe. **AP** (= x) sei die Höhe des zu berechnenden Konoids, **PM** (= y) der Radius der Grundfläche; derselbe sei verlängert bis zur Linie **CN**, d. i. bis zu der einen Asymptote. **ABGP** sei ein Rechteck aus **AB** und **AP**.

Bei der Umdrehung erzeugt **AMP** das zu berechnende hyperb. Konoid, **ABGP** einen Cylinder und **ABNP** einen abgestumpften Kegel.

Aus der im Nachfolgenden zu entwickelnden Beziehung, worin diese drei Körper zu einander stehen, ergibt sich der Inhalt des Konoids.

HL bedeute einen beliebigen zur Axe senkrechten Schnitt durch die drei Körper.

Nach der Gleichung der Hyperbel ist:

$$DF^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a \cdot AD + AD^2) \quad \ldots \quad \text{(VII.)}$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke **CDL** und **CAB** ist $\frac{DL}{AB} = \frac{CD}{CA}$ oder $\frac{DL}{b} = \frac{a + AD}{a}$, deshalb $DL = \frac{b}{a}(a + AD)$ und:

$$DL^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + 2a \cdot AD + AD^2) \quad \ldots \quad \text{(VIII.)}$$

Subtrahirt man Gl. VII. von Gl. VIII., so erhält man:

$DL^2 - DF^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot a^2 = b^2 = AB^2 = DE^2$, daher:

$DF^2 = DL^2 - DE^2$

$DF^2 \pi = DL^2 \pi - DE^2 \pi$

$DF^2 \pi h = DL^2 \pi h - DE^2 \pi h.$

h bezeichne wieder die unendlich kleine Höhe der Körperelemente. — Schließen wir nun auch hier von den Cylinderchen auf die Elemente, und von den Elementen auf die Hauptkörper selbst, so läßt sich behaupten:

Das hyperbolische Konoid **RAM** ist so groß als der abgestumpte Kegel **VJBN** vermindert um den Cylinder **KJBG**.

$$\text{Der abg. Keg. } VJBN \text{ ist} = (PN^2 + AB^2 + PN \cdot AB)\pi \cdot \frac{AP}{3} \quad \text{(IX.)}$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke **CPN** und **CAB** ist $\frac{PN}{CP} = \frac{AB}{CA} = \frac{b}{a}$, daher $PN = \frac{b}{a} \cdot CP = \frac{b}{a} \cdot (a + AP)$. Substituirt man diesen Werth in Gl. IX., und setzt man $AB = b$, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\text{Abg. Kegel } VJBN = b^2 \pi \left(x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

$$\text{Cylinder } KJBG = PG^2 \pi \cdot AP = b^2 \pi \cdot x$$

Es ist daher das hyperb. Konoid $= b^2 \pi \left(x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right) - b^2 \pi . x$

$$= b^2 \pi . \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right)$$ Vergl. IV. in §. 5.

Zusatz. Der Inhalt des (senkrecht zur Axe) abgestumpften hyperbolischen Konoids RWFM ergibt sich, indem man von dem Inhalte des hyperbolischen Konoids RAM $\left(= b^2 \pi \cdot \left[\frac{AP^2}{a} + \frac{AP^3}{3a^2}\right]\right)$ den Inhalt des hyp. Konoids WAF $\left(= b^2 \pi \cdot \left[\frac{AD^2}{a} + \frac{AD^3}{3a^2}\right]\right)$ subtrahirt. Es ist somit:

Das abg. hyp. Konoid RWFM $= b^2 \pi . \left(\frac{AP^2}{a} + \frac{AP^3}{3a^2}\right) - b^2 \pi \cdot \left(\frac{AD^2}{a} + \frac{AD^3}{3a^2}\right)$

$$= b^2 \pi . \left(\frac{AP^2 - AD^2}{a} + \frac{AP^3 - AD^3}{3a^2}\right).$$

Der Gleichung der Hyperbel zufolge ist:

1) $PM^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2a . AP + AP^2)$.

2) $DF^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2a . AD + AD^2)$.

Löſt man die erste dieser beiden Gleichungen in Bezug auf AP, die zweite in Bezug auf AD auf, und setzt man der Kürze halber $\sqrt{b^2 + PM^2} = w$ und $\sqrt{b^2 + DF^2} = w_1$, so erhält man:

1) $AP = \frac{a}{b} \cdot w - a$

2) $AD = \frac{a}{b} \cdot w_1 - a$

und hieraus:

α) $AP^2 - AD^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot (w^2 - w_1^2) - \frac{2a^2}{b} \cdot (w - w_1)$.

β) $AP^3 - AD^3 = \frac{a^3}{b^3} \cdot (w^3 - w_1^3) - \frac{3a^3}{b^2} \cdot (w^2 - w_1^2) + \frac{3a^3}{b} \cdot (w - w_1)$

Durch Einführung dieser Werthe (α) und (β) in die oben stehende Gleichung ergibt sich:

Abg. hyp. Konoid RWFM $= b^2 \pi . \left[\frac{a}{3b^3} \cdot (w^3 - w_1^3) - \frac{a}{b} \cdot (w - w_1)\right]$

Beachtet man noch, daß

$w^3 - w_1^3 = (w - w_1) . (w^2 + w_1^2 + w . w_1)$, und daß $w^2 + w_1^2 = PM^2 + DF^2 + 2b^2$ ist, so findet man nach gehöriger Reduction:

Abg. hyp. Konoid RWFM $= \frac{a\pi}{3b} \cdot (PM^2 + DF^2 + w . w_1 - b^2) . (w - w_1)$.

Für das Volumen (V) eines nach beiden Seiten senkrecht zur Axe abgestumpften Rotations-Ellipsoids, an welchem der Radius des einen (kleineren) Endkreises $= \mathbf{P\,M}$, der Radius des anderen (größeren) Endkreises $= \mathbf{D\,F}$ ist, erhält man, wenn man hier $\sqrt{b^2 - \mathbf{P\,M}^2}$ mit w und $\sqrt{b^2 - \mathbf{D\,F}^2}$ mit w_1 bezeichnet, ganz in derselben Weise, wie eben beim abgest. hyperb. Konoid, die durchaus ähnliche Formel:

$$V = \frac{a\,\pi}{3\,b} \cdot (P\,M^2 + D\,F^2 - w\,.\,w_1 + b^2)\,.\,(w - w_1).$$

Für das Volumen (V) eines nach beiden Seiten senkrecht zur Axe abgestumpften Rotations-Ellipsoids, an welchem der Radius des einen (kleineren) Endkreises $= PM$, der Radius des anderen (größeren) Endkreises $= DF$ ist, erhält man, wenn man hier $\sqrt{b^2 - PM^2}$ mit w und $\sqrt{b^2 - DF^2}$ mit w_1 bezeichnet, ganz in derselben Weise, wie eben beim abgest. hyperb. Konoid, die durchaus ähnliche Formel:

$$V = \frac{a\pi}{3b} \cdot (PM^2 + DF^2 - w \cdot w_1 + b^2) \cdot (w - w_1).$$

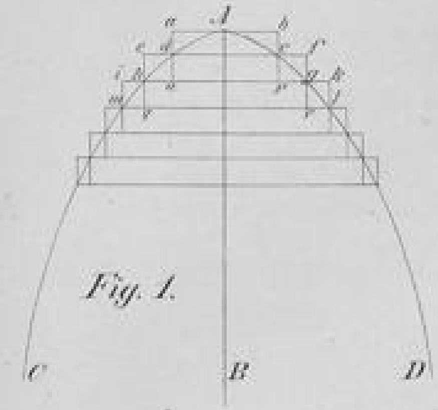

Fig. 1.

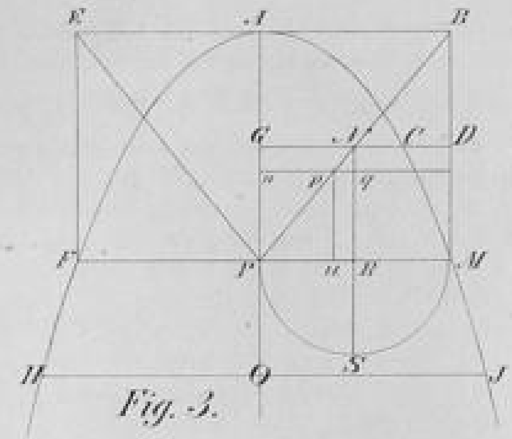

Fig. 3.

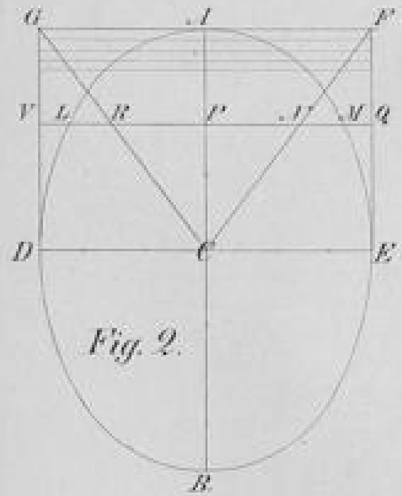

Fig. 2.

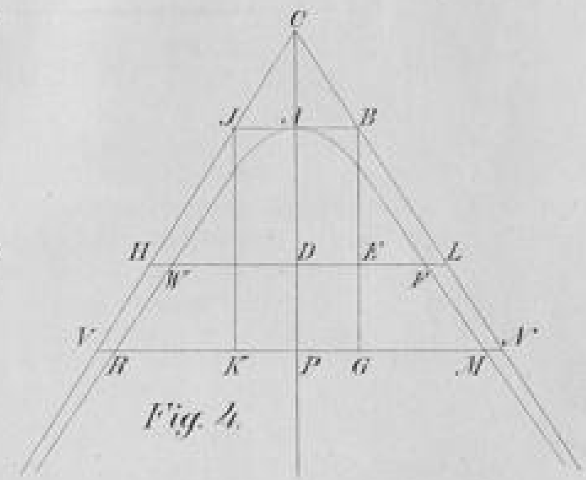

Fig. 4.

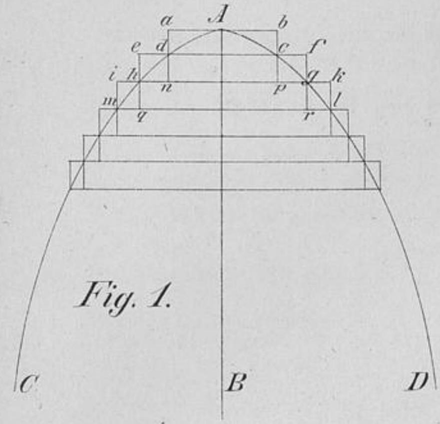

Fig. 1.

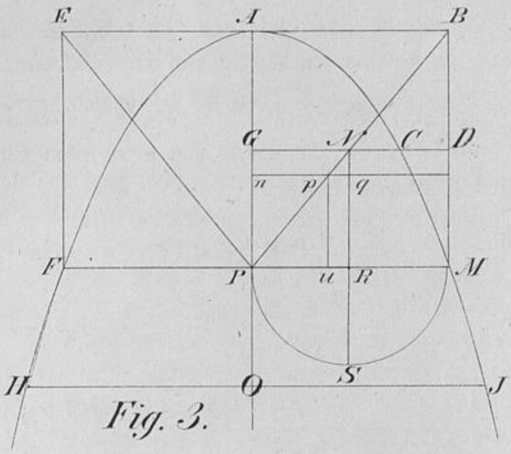

Fig. 3.

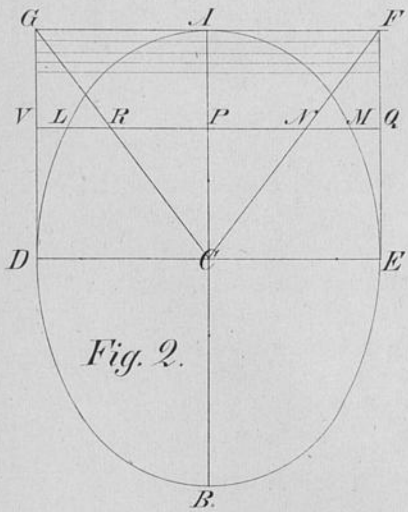

Fig. 2.

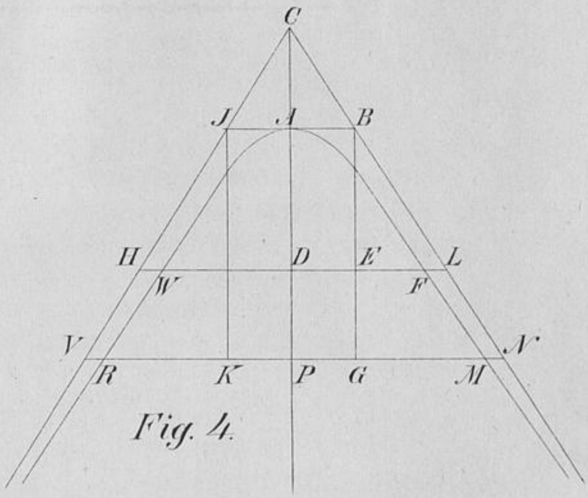

Fig. 4.