Geometrische Darstellung

der

hyperbolischen Funktionen.

Die Reihen für die Kreisfunktionen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad \text{(I.)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{(II.)}$$

wo wir nach Gauß i für $\sqrt{-1}$ gesetzt haben, erhalten bekanntlich, wenn sie in Funktionen imaginärer Bogen umgewandelt werden, wieder eine reelle Form, die zugleich durch Combinationen der Basis e des natürlichen Logarithmensystems mit reellen Exponenten dargestellt werden kann. Es ist

$$\frac{\sin xi}{i} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ aus (I.)}$$

$$\cos xi = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \frac{e^x + e^{x}}{2} \text{ aus (II.)}$$

Die Vermuthung liegt nahe, daß so einfache Ausdrücke sich in ähnlicher Weise geometrisch werden deuten lassen, wie es bei den complicirteren der Kreisfunktionen der Fall ist. In der That wies schon Lambert[1]) nach, daß diese Funktionen in einer analo-

[1]) Lambert: Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Tab. XVIII, wo auch mehre Formeln entwickelt sind. Vergl. auch Klügel: Mathemat. Wörterbuch, Artikel: Goniometrie.

gen Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel stehen, wie die Kreisfunktionen zum Kreise. Auch machte er aufmerksam auf den Nutzen, den diese Funktionen bei gewissen Berechnungen leisten.[1]) Die Schwierigkeit ihrer praktischen Anwendung lag hauptsächlich in dem Umstande begründet, daß solche Tafeln fehlten, wie wir sie bei den Kreisfunktionen besitzen. Gudermanns Arbeiten haben bekanntlich diesen Mangel gehoben[2]); seine Tafeln machen die Anwendung der hyperbolischen Funktionen auf die Rechnung ebenso einfach, wie die der Kreisfunktionen. Ueberdieß hat sich Gudermann auch dadurch um die Mathematik verdient gemacht, daß er diesen Funktionen eine erweiterte Bedeutung in der höheren Analysis gab, indem er ihre Zweckmäßigkeit zur Herstellung gewisser Klassen von Integralen nachwies und hierdurch zu Resultaten gelangte, die die Entwicklungen früherer Analytiker in ihrer Einfachheit[3]) weit übertrafen. Wenn es demnach nicht zweifelhaft sein kann, daß die hyperbolischen Funktionen in der höheren Analysis einst eine große Bedeutung gewinnen werden, sobald die in ihrer Darstellung oft schwierigen Arbeiten Gudermanns mehr bekannt geworden sind, als es leider bis jetzt der Fall ist, so wird man den Versuch entschuldigt finden, die Formeln, zu denen Lambert und Gudermann durch analytische Untersuchungen gelangten, hier auf rein geometrische Weise darzustellen.

Folgende leicht geometrisch nachzuweisende Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel müssen bei diesen Entwicklungen vorausgesetzt werden:

1) Je zwei conjugirte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich.
2) Zwei conjugirte Durchmesser bilden mit den Asymptoten, also verschiedene Paare conjugirter Durchmesser unter sich gleiche Winkel.

---

[1]) Lambert: Zusätze rc. §. 97, Anwendung dieser Funktionen auf die Auflösung der kubischen Gleichungen.

[2]) Gudermann: Theorie der Potenzial- und cyclisch-hyperbolischen Funktionen.

[3]) Derselbe: Modularfunktionen. Vergl. auch in dessen Potenzialfunktionen §. 75 ff. die einfache Darstellung der Gleichung der Kettenlinie.

3) Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist auf jedes Paar conjugirter Durchmesser bezogen von derselben Form. ($x'^2 - y'^2 = d'^2$, wo d' der bezügliche Halbmesser.)

Der hyperbolische Sektor.

Bekanntlich ist der Inhalt eines am Hauptdurchmesser AB (Fig. 1) liegenden Sektors, wenn man den halben Durchmesser gleich 1 setzt

$$CAB = \frac{1}{2}\, l\,(x' + y') = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1}{x' - y'} = -\frac{1}{2}\, l\,(x' - y')\ ^{1)},$$

wo l den natürlichen Logarithmus bedeutet. Setzt man

$$\alpha = l\,(x' + y'), \text{ so ist}$$
$$-\alpha = l\,(x' - y')$$

und der Sektor $CAB = \frac{1}{2}\,\alpha$.

Man findet alsdann:

$$e^{\alpha} = x' + y'$$
$$e^{-\alpha} = x' - y'$$

und $x' = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$

$$y' = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den durch die Analysis für sin xi und cos xi gefundenen, so ergibt sich:

$$x' = \cos xi,\ y' = \frac{\sin xi}{i}.$$

Analog nun den bei dem Kreise gefundenen Funktionen nennt man x' den hyperbolischen Cosinus, y' den hyperbolischen Sinus, wo dem doppelten Kreissektor, der für den Radius gleich 1 dem

---

[1] Ueber die Bestimmung des Inhalts eines hyperbolischen Sektors auf rein geometrischem Wege vergl. Grunerts Archiv Theil 25, Heft 1. und Theil 27, Heft 1.

Bogen substituirt werden kann, der doppelte hyperbolische Sektor entspricht.

Man sieht sogleich ein, daß die Funktionen in diesem speziellen Falle nicht so allgemein bezeichnet sind, wie beim Kreise; denn diese Erklärung gilt eben nur für den Fall, daß der Sektor der Hauptaxe anliegt, während beim Kreise allgemein das Verhältniß zwischen Ordinate und Radius sinus, das Verhältniß zwischen Abscisse und Radius cosinus heißt. Da aber die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel auf beliebige conjugirte Durchmesser bezogen stets dieselbe Form annimmt, so kann leicht die Frage entstehen, ob es nicht möglich ist, daß auch hier die Funktionen eine allgemeinere Bedeutung haben.

Zur Beantwortung dieser Frage ist es durchaus nothwendig, den Inhalt eines von zwei beliebigen Halbmessern begränzten Sektors zu bestimmen. Der Sektor CAH (Fig. 1), dessen Inhalt bestimmt werden soll, ist gleich der Differenz der beiden der Hauptaxe anliegenden Sektoren CAB und HAB; da nun

$$CAB = \frac{1}{2}\, l\,(AM + CM)$$

$$HAB = \frac{1}{2}\, l\,(AE + HE)$$

so ist $$CAH = \frac{1}{2}\, l\,(AM + CM) - \frac{1}{2}\, l\,(AE + HE)$$

$$= \frac{1}{2}\, l\, \frac{AM + CM}{AE + HE}.$$

$\frac{AM + CM}{AE + HE}$ soll nun ausgedrückt werden durch Coordinaten, die sich auf AH als Durchmesser beziehen, also durch CI und AI, so wie durch AH selbst.

Zieht man $IN \parallel AM,\ IK \parallel CM$, so ist

$$AM = AK + IN$$
$$CM = CN + IK.$$

Da nun wegen Gleichheit der Winkel ICN und HAE

$$\text{Dr. } ICN \sim IAK \sim HAE,$$

so ist $$AK = \frac{AI}{AH}\, AE;$$

$$IN = \frac{IC}{AH} \cdot HE;$$

$$CN = \frac{IC}{AH} \cdot AE;$$

$$IK = \frac{AI}{AH} \cdot HE.$$

Demnach

$$AM + CM = AE\left(\frac{AI}{AH} + \frac{IC}{AH}\right) + HE\left(\frac{AI}{AH} + \frac{IC}{AH}\right)$$

$$= (AE + HE)\left(\frac{AI}{AH} + \frac{IC}{AH}\right).$$

Folglich $\frac{AM + CM}{AE + HE} = \frac{AI}{AH} + \frac{IC}{AH}.$

Also der Sektor $CAH = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{AI}{AH} + \frac{IC}{AH}\right).$

Drückt man daher den Inhalt eines an einem beliebigen Durchmesser AH liegenden Sektors CAH durch die auf diesen Durchmesser bezogenen Coordinaten aus, so erhält man einen Ausdruck, der dem für den Sektor CAB gefundenen ganz analog ist. Setzt man $IC = y$, $AI = x$, $AH = d$, so ist

$$CAH = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{x}{d} + \frac{y}{d}\right).$$

Da $x^2 - y^2 = d^2$, oder

$$\left(\frac{x}{d} + \frac{y}{d}\right)\left(\frac{x}{d} - \frac{y}{d}\right) = 1, \quad \text{so ist auch}$$

$$CAH = -\frac{1}{2}\, l\left(\frac{x}{d} - \frac{y}{d}\right);$$

Wie vorher, ergibt sich nun, daß, wenn

$$\alpha = l\left(\frac{x}{d} + \frac{y}{d}\right),$$

$$-\alpha = l\left(\frac{x}{d} - \frac{y}{d}\right),$$

$$e^{\alpha} = \frac{x}{d} + \frac{y}{d};\ e^{-\alpha} = \frac{x}{d} - \frac{y}{d}$$

also $\frac{x}{d} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$

$\frac{y}{d} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$.

Demnach $\frac{x}{d} = \cos xi$, $\frac{y}{d} = \frac{\sin xi}{i}$.

Aus der angestellten Untersuchung lassen sich einige Folgerungen ziehen, die nicht übersehen werden dürfen. Zunächst ergibt sich der Satz:

„Sektoren der gleichseitigen Hyperbel sind gleich, wenn die Verhältnisse zwischen den Abscissen oder Ordinaten und den zugehörigen Halbmessern, an denen die Sektoren liegen, gleich sind."

Das Verhältniß $\frac{x}{d}$ ist nämlich bestimmt durch das andere $\frac{y}{d}$; (da $x^2 - y^2 = d^2$); wenn daher $\frac{x}{d}$ gegeben ist, so ist eben dadurch auch $\frac{y}{d}$ bestimmt und durch analoge Combination beider Verhältnisse wird eben der Inhalt des Sektors ausgedrückt.

Einfach wird hierdurch die Halbirung oder Verdoppelung eines Sektors. Soll der Sektor DAD' (Fig. 2) halbirt werden, so ziehe man DD', halbire diese Linie und verbinde C mit A; es ist alsdann der Sektor DAB = D'AB. Soll dagegen der Sektor DAB verdoppelt werden, so construire man in B die Tangente BH und ziehe DD' || BH; verbindet man D' mit A, so ist DAD' = 2 DAB.

Ist die Aufgabe gestellt, den Sektor DAB an einen andern Halbmesser, etwa an AM anzutragen, so ziehe man zuerst BM, dann CN || BM, und durch N die zum Durchmesser AM gehörige Ordinate NP; verbindet man P mit A, so ist der Sektor PAM = BAD.

Die hyperbolischen Funktionen und ihre Werthe.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen kann man die hyperbolischen Funktionen folgender Maßen erklären: unter Sinus eines hyperbolischen Sektors versteht man das Verhältniß der Ordinate zum Halbmesser, unter Cosinus das Verhältniß der Abscisse zum Halbmesser. Um diese Beziehungen einfach zu bezeichnen, wählt man zum Unterschiede von der Bezeichnung der Kreisfunktionen die deutsche Schrift [1]), so daß

der hyperbolische Sinus x bezeichnet wird mit Sin x,

der hyperbolische Cosinus x mit Cos x.

Analog den übrigen Kreisfunktionen haben wir auch hier einige andere Funktionen einzuführen; wie beim Kreise setzt man

$$\mathfrak{Tang}\ x = \frac{\mathfrak{Sin}\ x}{\mathfrak{Cos}\ x},$$

$$\mathfrak{Cot}\ x = \frac{\mathfrak{Cos}\ x}{\mathfrak{Sin}\ x}.$$

Die Funktionen Sek x und Cosek x übergehen wir, weil ihre einfachen Beziehungen zum Cos x und Sin x dieselben wie beim Kreise überflüssig machen.

Wenn wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, statt des doppelten Sektors den einfachen nehmen, und Sektor DAB (Fig. 2) mit α bezeichnet wird, so ist nach der Erklärung:

$$\mathfrak{Sin}\ \alpha = \frac{DC}{AB},$$

$$\mathfrak{Cos}\ \alpha = \frac{AC}{AB},$$

demnach $$\mathfrak{Tang}\ \alpha = \frac{DC}{AC},$$

oder weil die in B construirte Tangente FB parallel DC ist, also $\frac{DC}{AC} = \frac{FB}{AB}$

$$\mathfrak{Tang}\ \alpha = \frac{FB}{AB}.$$

---

[1]) Diese Bezeichnung ist von Gudermann eingeführt worden; Lambert bezeichnet dieselben mit sin. h. x. ꝛc.

Außerdem ist

$$\text{Cot}\,\alpha = \frac{AC}{DC} = \frac{BA}{BF}.$$

Auch dieser können wir einen anderen mehr entsprechenden Ausdruck geben. Ist AE der zu AB conjugirte Durchmesser, AE = AB, und zieht man EG || AB bis zum Durchschnitt mit AD in G, so ist Dr. AEG $\sim$ ADC,

daher $$\frac{AC}{DC} = \frac{EG}{AE}$$

also $$\text{Cot}\,\alpha = \frac{EG}{AB}.$$

Beschäftigen wir uns mit der Frage, wie die Größe der Funktionen von der Größe des Sektors abhängig ist, so ist zunächst leicht einzusehen, daß der Sektor 0 ist, wenn AD und AB zusammenfallen, dagegen ∞, wenn der begrenzende Halbmesser AD mit der Asymptote zusammenfällt. Da die Ordinate für den Fall, daß die Punkte F und B zusammenfallen, 0 ist, so ist

$$\text{Sin}\ 0 = 0,$$

für den Fall aber, daß DA mit der Asymptote zusammenfällt, ∞ ist,

$$\text{Sin}\ \infty = \infty.$$

Verlängert man DC bis zum ferneren Durchschnitt mit der Hyperbel in D', so wird, wenn A mit D' verbunden ist,

$$\text{Sektor}\ D'AB = DAB.$$

D'AB hat aber zu DAB die entgegengesetzte Lage; die Ordinate D'C zu DC ebenfalls, und bezeichnen wir diese Lage durch das negative Vorzeichen, so ist

$$D'AB = -\alpha$$

und $$\text{Sin} -\alpha = \frac{D'C}{AB} = -\frac{DC}{AB} = -\text{Sin}\,\alpha$$

Es ist also auch

$$\text{Sin} -\infty = -\infty.$$

Hiernach hat der hyperbolische Sinus die Grenzen ∞ und $-\infty$.

Auch die Abscisse wird für den Fall, daß der Punkt D in unendlicher Entfernung liegt, ∞ werden, und daher folgt augenblicklich, daß ebenfalls

$$\text{Cos}\ \infty = \infty.$$

Für den Punkt B aber ist $x = AB$, und daher ist, wenn F mit B zusammenfällt, d. h. der Sektor 0 ist,

$$\text{Cos}\ 0 = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Für den auf entgegengesetzter Seite des Durchmessers liegenden Sektor D'AB ist

$$\text{Cos} - \alpha = \frac{AC}{AB},$$

also $$\text{Cos} - \alpha = \text{Cos}\ \alpha$$

und $$\text{Cos} - \infty = \infty.$$

Der Cosinus nimmt also sowohl für positive als negative α von 0 bis ∞ zu.

Ist der Sektor 0, so ist auch

$$\text{Tang}\ 0 = 0;$$

ist der Sektor unendlich, d. h. fällt AD mit der Asymptote zusammen, so kann die Tangente dennoch nicht größer werden, als BH,

daher $$\text{Tang}\ \infty = \frac{BH}{AB} = 1$$

Leicht ist einzusehen, daß

$$\text{Tang} - \alpha = - \text{Tang}\ \alpha$$

$$\text{und Tang} - \infty = - 1;$$

daher nimmt für wachsende α die Tangente von 0 bis 1 zu, für negative α von 0 bis -1 ab.

Wenn $\alpha = 0$, so ist, da $EG \parallel AC$

$$\text{Cot}\ 0 = \infty,$$

wenn aber $\alpha = \infty$, so ist

$$\text{Cot}\ \infty = \frac{EH}{EA},$$

und da $EH = EA$,

$$\text{Cot}\ \infty = 1$$

Auch ergibt sich leicht, daß

$$\text{Cot} - \alpha = - \text{Cot}\ \alpha$$

und

$$\text{Cot} - \infty = - 1$$

Die Cotangente hat demnach durch ∞ die Grenzen 1 und — 1.

Beziehungen zwischen den Funktionen eines und desselben Sektors.

1) Nach der Erklärung ist

$$\text{Tang}\ \alpha = \frac{\text{Sin}\ \alpha}{\text{Cos}\ \alpha},$$

$$\text{Cot}\ \alpha = \frac{\text{Cos}\ \alpha}{\text{Sin}\ \alpha};$$

daher können wir diese Formeln hier übergehen. Unmittelbar aber folgt aus denselben

$$\text{Tang}\ \alpha\ \text{Cot}\ \alpha = 1.$$

2) Nach der Gleichung der Hyperbel ist

$$AC^2 - DC^2 = AB^2,$$

woraus

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = 1,$$

und da $\frac{AC}{AB} = \text{Cos}\ \alpha, \frac{DC}{AB} = \text{Sin}\ \alpha,$

$$\text{Cos}\ \alpha^2 - \text{Sin}\ \alpha^2 = 1.$$

3) Dividiren wir in vorstehender Formel jedes Glied durch $\text{Cos}\ \alpha^2$, so ist

$$1 - \frac{\text{Sin}\ \alpha^2}{\text{Cos}\ \alpha^2} = \frac{1}{\text{Cos}\ \alpha^2},$$

oder

$$1 - \text{Tang}\ \alpha^2 = \frac{1}{\text{Cos}\ \alpha^2},\ ^{1)}$$

---

1) Aus der Figur ergibt sich diese Formel auch so:

$$AB^2 : BF^2 = AC^2 : CD^2\ \text{(Fig. 2)}.$$

$$AB^2 - BF^2 : AB^2 = AC^2 - CD^2 : AC^2;$$

dividirt man durch AB^2, so ist

$$1 - \text{Tang}\ \alpha^2 : 1 = 1 : \text{Cos}\ \alpha^2 \text{ und } 1 - \text{Tang}\ \alpha^2 = \frac{1}{\text{Cos}\ \alpha^2}.$$

woraus $\quad \text{Cos}\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{Tang}\ \alpha^2}},$

und da $\dfrac{1}{\text{Cos}\ \alpha} = \dfrac{\text{Tang}\ \alpha}{\text{Sin}\ \alpha}$, so ist auch

$$\frac{\text{Tang}\ \alpha^2}{\text{Sin}\ \alpha^2} = 1 - \text{Tang}\ \alpha^2,$$

und $\quad \text{Sin}\ \alpha = \dfrac{\text{Tang}\ \alpha}{\sqrt{1 - \text{Tang}\ \alpha^2}}.$

Beziehungen zwischen den Funktionen verschiedener Sektoren.

Wie beim Kreise, so sind wir auch bei der Hyperbel im Stande, die Funktionen der Summe oder Differenz zweier Sektoren aus den Funktionen der einzelnen Sektoren zu bestimmen.

Es sei (Fig. 3) der Sektor DAH $= \alpha$, DAF $= \beta$; zu bestimmen sei Sin $(\alpha + \beta)$. Zur Axe AG ziehen wir die Ordinate FG; dann ist

$$\text{Sin}\ (\alpha + \beta) = \frac{FG}{AH},$$

und daher durch

$$\text{Sin}\ \alpha = \frac{DC}{AH},\ \text{Cos}\ \alpha = \frac{AC}{AH},\ \text{Sin}\ \beta = \frac{FE}{AD},\ \text{und Cos}\ \beta = \frac{AE}{AD}$$

auszudrücken.

Ist EM $\parallel$ AG, EN $\parallel$ FG, so ist

$$\frac{FG}{AH} = \frac{MG}{AH} + \frac{FM}{AH} = \frac{EN}{AH} + \frac{FM}{AH}.$$

Da W. EFM = DAC, weil die Winkel, die von zweien Paaren conjugirter Durchmesser unter einander gebildet werden, gleich sind (W. DAH = W. BAI, und weil AB $\parallel$ FG und AI $\parallel$ PF, W. BAI = EFM) so ist

$$\text{Dr. EFM} \sim \text{DAC} \sim \text{EAN};$$

daher $\qquad EN = DC \cdot \frac{AE}{AD},$

oder $\qquad \frac{EN}{AH} = \frac{DC}{AH} \cdot \frac{AE}{AD} = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta;$

ferner $\qquad FM = \frac{EF}{AD} \cdot AC,$

und $\qquad \frac{FM}{AH} = \frac{EF}{AD} \cdot \frac{AC}{AH} = \text{Sin}\,\beta\ \text{Cos}\,\alpha;$

deshalb

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta\ \text{Cos}\,\alpha. \qquad \text{(I.)}$$

Es ist ferner

$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \frac{AG}{AH},$$

und $\qquad \frac{AG}{AH} = \frac{AN}{AH} + \frac{NG}{AH} = \frac{AN}{AH} + \frac{EM}{AH}.$

Weil aber Dr. EFM $\sim$ DAC $\sim$ EAN, so ist

$$AN = AC \cdot \frac{AE}{AD},$$

und $\qquad \frac{AN}{AH} = \frac{AC}{AH} \cdot \frac{AE}{AD} = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta;$

$$EM = DC \cdot \frac{EF}{AD},$$

und $\qquad \frac{EM}{AH} = \frac{DC}{AH} \cdot \frac{EF}{AD} = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta.$

Demnach $\qquad \text{Cos}\,(\alpha+\beta) = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta. \qquad \text{(II.)}$

Um Sin $(\alpha - \beta)$ zu bestimmen, verlängern wir EF bis zum Durchschnitt mit der Hyperbel in P, und ziehen PA. Es ist alsdann, weil EF = EP,

$$\text{Sektor } PAD = DAF = \beta.$$

Also $\qquad \text{Sektor } PAH = (\alpha - \beta)$

und $\qquad \text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \frac{PQ}{AH}.$

Zieht man $PR \parallel AG$, so ist

$$\frac{PQ}{AH} = \frac{RN}{AH} = \frac{EN}{AH} - \frac{FM}{AH}.$$

Es ist aber bei (I.) gefunden worden, daß

$$\frac{EN}{AH} = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta,$$

$$\frac{FM}{AH} = \text{Sin}\,\beta\ \text{Cos}\,\alpha;$$

Also $\quad \text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta. \quad$ (III.)

Zur Bestimmung von Cos $(\alpha - \beta)$ wenden wir dieselbe Construktion an, wie vorher. Man findet dann:

$$\text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \frac{AQ}{AH},$$

und

$$\frac{AQ}{AH} = \frac{AN}{AH} - \frac{NQ}{AH} = \frac{AN}{AH} - \frac{PR}{AH} = \frac{AN}{AH} - \frac{EM}{AH}.$$

Bei (II.) haben wir aber gefunden:

$$\frac{AN}{AH} = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta,$$

$$\frac{EM}{AH} = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta.$$

Also

$$\text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta. \qquad \text{(IV.)}$$

Aus den Formeln für Sin $(\alpha \pm \beta)$ und Cos $(\alpha \pm \beta)$ sind die für Tang $(\alpha \pm \beta)$ und Cot $(\alpha \pm \beta)$ leicht zu entwickeln. Es ist

$$\text{Tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}{\text{Cos}\,(\alpha + \beta)},$$

$$= \frac{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta};$$

und wenn man Zähler und Nenner durch Cos α Cos β dividirt:

$$\text{Tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{Tang}\,\alpha + \text{Tang}\,\beta}{1 + \text{Tang}\,\alpha\ \text{Tang}\,\beta}. \qquad \text{(V.)}$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$\text{Tang}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta - \text{Cos}\ \alpha\ \text{Sin}\ \beta}{\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta - \text{Sin}\ \alpha\ \text{Sin}\ \beta},$$

$$= \frac{\text{Tang}\ \alpha - \text{Tang}\ \beta}{1 - \text{Tang}\ \alpha\ \text{Tang}\ \beta}. \qquad \text{(VI.)}$$

$$\text{Cot}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Sin}\ \alpha\ \text{Sin}\ \beta}{\text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Cos}\ \alpha\ \text{Sin}\ \beta}$$

und wenn Zähler und Nenner durch Sin α Sin β dividirt:

$$\text{Cot}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{Cot}\ \alpha\ \text{Cot}\ \beta + 1}{\text{Cot}\ \beta + \text{Cot}\ \alpha}. \qquad \text{(VII.)}$$

Ebenso

$$\text{Cot}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{Cot}\ \alpha\ \text{Cot}\ \beta - 1}{\text{Cot}\ \beta - \text{Cot}\ \alpha}. \qquad \text{(VIII.)}$$

Setzt man in der Formel

$$\text{Sin}\ (\alpha + \beta) = \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Sin}\ \beta\ \text{Cos}\ \alpha$$

$\alpha = \beta$, so findet man

$$\text{Sin}\ 2\ \alpha = 2\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \alpha.$$

Für Cos 2 α findet man aus der Formel für Cos $(\alpha + \beta)$

$$\text{Cos}\ 2\alpha = \text{Cos}\ \alpha^2 + \text{Sin}\ \alpha^2,$$
$$= 1 + 2\ \text{Sin}\ \alpha^2,$$
$$= 2\ \text{Cos}\ \alpha^2 - 1.$$

Die Sinus und Cosinus der Vielfachen der Sektoren lassen sich mit Hülfe dieser Formeln leicht darstellen. So ist z. B.

$$\text{Sin}\ 3\ \alpha = \text{Sin}\ 2\ \alpha\ \text{Cos}\ \alpha + \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ 2\ \alpha,$$
$$= 2\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \alpha^2 + \text{Cos}\ \alpha^2\ \text{Sin}\ \alpha + \text{Sin}\ \alpha^3,$$
$$= 3\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \alpha^2 + \text{Sin}\ \alpha^3;$$

oder auch:

$$\text{Sin}\ 3\ \alpha = 2\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ \alpha^2 + (2\ \text{Cos}\ \alpha^2 - 1)\ \text{Sin}\ \alpha,$$
$$= \text{Sin}\ \alpha\ (4\ \text{Cos}\ \alpha^2 - 1),$$

woraus außerdem noch

$$\text{Sin } 3\,\alpha = 4 \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha^2 - 4 \text{ Sin } \alpha + 3 \text{ Sin } \alpha,$$
$$= 4 \text{ Sin } \alpha (\text{Cos } \alpha^2 - 1) + 3 \text{ Sin } \alpha,$$
$$= 4 \text{ Sin } \alpha^3 + 3 \text{ Sin } \alpha,$$
$$\text{Cos } 3\,\alpha = (1 + 2 \text{ Sin } \alpha^2) \text{ Cos } \alpha + 2 \text{ Sin } \alpha^2 \text{ Cos } \alpha$$
$$= \text{Cos } \alpha\,(1 + 4 \text{ Sin } \alpha^2).$$

Woraus

$$\text{Cos } 3\,\alpha = 4 \text{ Cos } \alpha\,(1 + \text{Sin } \alpha^2) - 3 \text{ Cos } \alpha$$
$$= 4 \text{ Cos } \alpha^3 - 3 \text{ Cos } \alpha. \quad ^{1)}$$

Aus der Formel $\text{Cos } 2\,\alpha = 1 + 2 \text{ Sin } \alpha^2$

schließen wir $\text{Cos } \alpha = 1 + 2 \text{ Sin } \frac{\alpha}{2}^2$

woraus $\text{Sin } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Cos } \alpha - 1}{2}}$;

Ferner aus $\text{Cos } 2\,\alpha = 2 \text{ Cos } \alpha^2 - 1$,

$$\text{Cos } \alpha = 2 \text{ Cos } \frac{\alpha^2}{2} - 1,$$

$$\text{Cos } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Cos } \alpha + 1}{2}}.$$

Aus beiden Formeln folgt:

$$\text{Tang } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Cos } \alpha - 1}{\text{Cos } \alpha + 1}}.$$

Eine andere Formel für $\text{Tang } \frac{1}{2}\alpha$ findet man auf folgende Weise. Es ist

$$\text{Tang } \frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha} = \frac{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos } \frac{1}{2}\alpha}{2 \text{ Cos } \frac{1}{2}\alpha^2}$$
$$= \frac{\text{Sin } \alpha}{2 \text{ Cos } \frac{1}{2}\alpha^2},$$

---

1) Letztere Formel ist von Wichtigkeit bei der Auflösung der kubischen Gleichungen. Vergl. Gudermann: Potenzialfunktionen 2c. §. 90.

und da $\quad 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^{2} = \mathrm{Cos}\,\alpha + 1,$

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1}. \quad ^{1})$$

Oder auch: $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}^{2}}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\;\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}^{2}}{\mathrm{Sin}\,\alpha}.$

Nun ist aber $\quad 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}^{2} = \mathrm{Cos}\,\alpha - 1;$

also $\quad \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}. \quad ^{2})$

Unmittelbar folgt daraus

$$\mathrm{Cot}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

und $\quad \mathrm{Cot}\,\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}.$

Ferner $\quad 2\,\mathrm{Cot}\,\alpha - \mathrm{Cot}\,\frac{\alpha}{2} = \dfrac{2\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha} - \dfrac{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\mathrm{Sin}\,\alpha};$$

$$2\,\mathrm{Cot}\,\alpha - \mathrm{Cot}\,\frac{\alpha}{2} = \mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Also $\quad \mathrm{Cot}\,\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha + \mathrm{Cot}\,\frac{1}{2}\alpha\right).$

---

1) Man konnte diese Formel auch auf folgende Weise entwickeln:

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1}} = \frac{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\alpha^{2} - 1}}{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1}.$$

2) Dieselbe Formel fand man auch auf folgende Weise:

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\mathrm{Cos}\,\alpha + 1}} = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\alpha^{2} - 1}} = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha - 1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}.$$

oder auch, wenn 2α für α gesetzt wird:

$$\mathrm{Cot}\, 2\alpha = \frac{1}{2} (\mathrm{Tang}\, \alpha + \mathrm{Cot}\, \alpha)$$

Die Formeln für Tang 2α und Cot 2α ergeben sich unmittelbar aus denen für Tang $(\alpha + \beta)$ und Cot $(\alpha + \beta)$. Nämlich

$$\mathrm{Tang}\, 2\alpha = \frac{2\, \mathrm{Tang}\, \alpha}{1 + \mathrm{Tang}\, \alpha^2},$$

$$\mathrm{Cot}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{Cot}\, \alpha^2 + 1}{2\, \mathrm{Cot}\, \alpha}.$$

Die letztere Formel gewinnt die oben angegebene Gestalt, wenn man Cot $\alpha^2 + 1$ wirklich durch 2 Cot α dividirt. Dann ist:

$$\mathrm{Cot}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{Cot}\, \alpha}{2} + \frac{\mathrm{Tang}\, \alpha}{2} = \frac{1}{2} (\mathrm{Cot}\, \alpha + \mathrm{Tang}\, \alpha).$$

Bestimmung der Summe oder Differenz der Funktionen verschiedener Sektoren.

Soll Sin x + Sin y bestimmt werden, so gehen wir aus von den Formeln

$$\mathrm{Sin}\, (\alpha + \beta) = \mathrm{Sin}\, \alpha\, \mathrm{Cos}\, \beta + \mathrm{Cos}\, \alpha\, \mathrm{Sin}\, \beta$$
$$\mathrm{Sin}\, (\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}\, \alpha\, \mathrm{Cos}\, \beta - \mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, \alpha.$$

Setzt man hierin $\alpha + \beta = x,$

$\alpha - \beta = y,$

so ist $\alpha = \frac{1}{2} (x + y),$

$\beta = \frac{1}{2} (x - y).$

Daher

$$\mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \mathrm{Cos}\, \frac{x-y}{2} + \mathrm{Cos}\, \frac{x+y}{2}\, \mathrm{Sin}\, \frac{x-y}{2};$$

$$\mathrm{Sin}\, y = \mathrm{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \mathrm{Cos}\, \frac{x-y}{2} - \mathrm{Cos}\, \frac{x+y}{2}\, \mathrm{Sin}\, \frac{x-y}{2}.$$

Daraus $\quad \text{Sin}\, x + \text{Sin}\, y = 2\, \text{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Cos}\, \frac{x-y}{2}.$

Dagegen $\quad \text{Sin}\, x - \text{Sin}\, y = 2\, \text{Sin}\, \frac{x-y}{2}\, \text{Cos}\, \frac{x+y}{2}.$

Nehmen wir eine gleiche Substitution bei den Formeln für $\text{Cos}\,(\alpha + \beta)$ und $\text{Cos}\,(\alpha - \beta)$ vor, so gehen diese über in:

$$\text{Cos}\, x = \text{Cos}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Cos}\, \frac{x-y}{2} + \text{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Sin}\, \frac{x-y}{2},$$

$$\text{Cos}\, y = \text{Cos}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Cos}\, \frac{x-y}{2} - \text{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Sin}\, \frac{x-y}{2},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\text{Cos}\, x + \text{Cos}\, y = 2\, \text{Cos}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Cos}\, \frac{x-y}{2},$$

$$\text{Cos}\, x - \text{Cos}\, y = 2\, \text{Sin}\, \frac{x+y}{2}\, \text{Sin}\, \frac{x-y}{2}.$$

Einfache Beziehungen finden sich noch in folgenden Ausdrücken:

$$1)\quad \frac{\text{Sin}\, \alpha + \text{Sin}\, \beta}{\text{Sin}\, \alpha - \text{Sin}\, \beta} = \frac{\text{Tang}\, \frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{Tang}\, \frac{\alpha-\beta}{2}};$$

$$2)\quad \frac{\text{Sin}\, a + \text{Sin}\, \beta}{\text{Cos}\, \alpha + \text{Cos}\, \beta} = \text{Tang}\, \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$3)\quad \frac{\text{Sin}\, \alpha + \text{Sin}\, \beta}{\text{Cos}\, \alpha - \text{Cos}\, \beta} = \text{Cot}\, \frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$4)\quad \frac{\text{Sin}\, \alpha - \text{Sin}\, \beta}{\text{Cos}\, \alpha + \text{Cos}\, \beta} = \text{Tang}\, \frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$5)\quad \frac{\text{Sin}\, \alpha - \text{Sin}\, \beta}{\text{Cos}\, \alpha - \text{Cos}\, \beta} = \text{Cot}\, \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$6)\quad \frac{\text{Cos}\, \alpha + \text{Cos}\, \beta}{\text{Cos}\, \alpha - \text{Cos}\, \beta} = \text{Cot}\, \frac{\alpha+\beta}{2}\, \text{Cot}\, \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Andere einfache Formeln für die Summe oder Differenz der Funktionen zweier Sektoren ergeben sich noch für folgende Ausdrücke:

$$\mathrm{Tang}\,\alpha + \mathrm{Tang}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{\mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,\beta} = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta};$$

$$\mathrm{Tang}\,\alpha - \mathrm{Tang}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta)}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta};$$

$$\mathrm{Cot}\,\alpha + \mathrm{Cot}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta+\alpha)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta};$$

$$\mathrm{Cot}\,\alpha - \mathrm{Cot}\,\beta = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta-\alpha)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta};$$

$$\mathrm{Cot}\,\alpha - \mathrm{Tang}\,\alpha = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,2\,\alpha};$$

$$\mathrm{Cot}\,\beta \pm \mathrm{Tang}\,\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,(\alpha \pm \beta)}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta};$$

$$\frac{\mathrm{Tang}\,\alpha + \mathrm{Tang}\,\beta}{\mathrm{Cot}\,\alpha + \mathrm{Cot}\,\beta} = \mathrm{Tang}\,\alpha\,\mathrm{Tang}\,\beta.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - \mathrm{Sin}\,\beta^2 &= (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta)\,(\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\beta)\\ &= 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\\ &= \mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise:

$$\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 = \mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta).$$

Demnach:

$$\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - \mathrm{Sin}\,\beta^2 = \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2;$$

$$\mathrm{Tang}\,\alpha^2 - \mathrm{Tang}\,\beta^2 = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta)}{\mathrm{Cos}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\beta^2};$$

$$\mathrm{Cot}\,\alpha^2 - \mathrm{Cot}\,\beta^2 = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta+\alpha)\,\mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha)}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Sin}\,\beta^2}.$$

Der transcendente Winkel.

Als das Größenverhältniß der Funktionen für zunehmende Sektoren bestimmt wurde, fanden sich folgende Grenzen für die Funktionen:

1) Der hyperbolische Sinus hat für positive α die Grenzen 0 und ∞;
2) Der hyperbolische Cosinus die Grenzen 1 und ∞;

3) Die hyperbolische Tangente die Grenzen 0 und 1;

4) Die hyperbolische Cotangente ∞ und 1;

sämmtlich für positive α, während der Sektor von 0 bis ∞ zunimmt. Der hyperbolische Sinus hat also dieselben Grenzen mit der Kreistangente, der Cosinus mit dem reciproken Kreiscosinus, die Tangente mit dem Kreissinus, die Cotangente mit dem reciproken Kreissinus. Diese Aehnlichkeit muß nothwendiger Weise auf den Gedanken einer Vergleichung der hyperbolischen und Kreisfunktionen führen. In der That läßt sich einfach beweisen, daß, wenn der Sinus eines Winkels a gleich ist der Tangente eines Hyperbelsektors α, also

$$\sin a = \mathrm{Tang}\ \alpha,$$

auch

$$\frac{1}{\cos a} = \mathrm{Cos}\ \alpha;$$

$$\mathrm{tng}\ a = \mathrm{Sin}\ \alpha;$$

$$\frac{1}{\sin a} = \mathrm{Cot}\ \alpha.$$

Um geometrisch diese Beziehungen anschaulich zu machen, wählen wir eine Lage des Sektors, bei der das Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, indem auch beim Kreise nur senkrechte Ordinaten in ihren Beziehungen die verschiedenen Funktionen des bezüglichen Winkels ergeben. Daher möge (Fig. 4) der Sektor GAB $= \alpha$ an der Hauptaxe MB liegen [1]), und zwar

$$\frac{GH}{AB} = \mathrm{Sin}\ \alpha; \ \frac{AH}{AB} = \mathrm{Cos}\ \alpha, \ \frac{BE}{AB} = \mathrm{Tang}\ \alpha, \ \frac{QN}{AB} = \mathrm{Cot}\ \alpha.$$

Beschreibt man über MB als Durchmesser einen Halbkreis, construirt von H aus an diesen eine Tangente HC, errichtet ferner in B auf MB die Senkrechte FB, so wird, wenn man A mit C verbindet und diese Linie bis zum Durchschnitt mit FB verlängert,

$$FB = GH.$$

---

1) Der Sektor konnte auch an einem beliebigen Durchmesser liegen; in diesem Falle konnte man diesen entweder an die Hauptaxe anlegen, oder man konnte auch die Ordinate in ihrer gegebenen Größe senkrecht aufrichten und dann dieselbe Construktion wie hier anwenden. Die Beziehungen wären aber hierdurch unklarer, die Untersuchungen weitläufiger und der Beweis einer wichtigen Formel bedeutend erschwert worden.

Denn, da Tr. FAB $\cong$ ACH, so ist HC = FB, und HC = HG weil sowohl $HC^2 = HA^2 - AC^2$, als $HG^2 = HA^2 - AB^2$. Zieht man noch CE, so wird

$$CE \parallel FG \parallel AH,$$

weil $$GA : AE = AH : AB = AF : AC.$$

Den Winkel FAB bezeichnen wir mit a; es ist nun DC = BE; also, da

$$\frac{DC}{AB} = \sin a,$$

$$\sin a = \mathfrak{Tang}\,\alpha.$$

Ferner $$\frac{BF}{AB} = \frac{GH}{AB} = \operatorname{tang} a = \mathfrak{Sin}\,\alpha;$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{\cos a} = \mathfrak{Cos}\,\alpha.$$

Endlich, da: $$QN : QR = AN : AE = AP : AC,$$

und $$QR = AB = AC,$$
$$QN = AP,$$

oder $$\mathfrak{Cot}\,\alpha = \frac{1}{\sin a}.$$

Die Funktionen des Winkels a stehen also zu denen des hyperbolischen Sektors in der oben angegebenen Beziehung. Ein Winkel nun, dessen sinus gleich der Tangente eines Hyperbelsektors ist, heißt nach Lambert[1]) der transcendente Winkel[2]) des Hyperbelsektors. Wegen dieser Beziehung ist es nicht schwierig, die Hyperbelfunktionen aus Kreisfunktionen herzuleiten. Es kommt eben nur darauf an, den transcendenten Winkel zu be-

---

[1]) Lambert: Zusätze ꝛc. §. 97.

[2]) Gudermann hat für diesen Winkel eine andere Bezeichnung. Vergl. Gudermann: Theorie der Potenzialfunktionen §. 37. Die angeführte Construktion ist ebenfalls Lambert entnommen. Lamb.: Zusätze ꝛc. Tab. XXXIII. Die von Gudermann angegebene Construktion ist zwar einfacher, gibt aber keine so deutliche Uebersicht, wie die Lambert'-

stimmen [1]). Es kann hier der Ort nicht sein, weiter auf diese Entwickelungen einzugehen [2]).

Eine einfache Beziehung zwischen den Funktionen des hyperbolischen Sektors und denen des transcendenten Winkels möge noch geometrisch nachgewiesen werden.

Verbindet man M mit C und C mit G, so ist MCG eine gerade Linie. Denn W. HCG = W. HGC, W. CHG = CAH = 2 MCA; demnach

$$2\,MCA + 2\,HCG = 2\,R,$$

und

$$MCA + HCG = 1\,R;$$

daher

$$MCA + HCA + HCG = 2\,R,$$

mithin MCG eine gerade Linie [3]). Zieht man GB, halbirt diese Linie in I und verbindet A mit I, so wird AI den Hyperbelsektor GAB halbiren.

---

sche. Sie ist folgende: Man trage (Fig. 4) von H auf HA die halbe Axe AB ab, es sei HS, ziehe GS; dann ist W. GSH = a. Man sieht ein, daß

$$\sin a = \frac{GH}{GS} = \frac{GH}{AH} = \frac{BE}{AB} = \mathfrak{Tang}\,\alpha;$$

$$\frac{1}{\cos a} = \frac{SG}{SH} = \frac{AH}{AB} = \mathfrak{Cos}\,\alpha;$$

$$\operatorname{tng} a = \frac{GH}{SH} = \frac{GH}{AB} = \mathfrak{Sin}\,\alpha;$$

$$\frac{1}{\sin a} = \frac{SG}{GH} = \frac{AH}{GH} = \frac{QN}{AQ} = \mathfrak{Cot}\,\alpha.$$

1) Vergl. dieserhalb Gudermann: Theorie der Potenzialfunktionen und Lambert: Zusätze 2c. §. 98.

2) Der transcendente Winkel kann auch theilweise zur Verifizirung der im Vorigen entwickelten Formeln dienen; denn wenn wir die betreffenden äquivalenten Funktionen einsetzen, müssen wir auf bekannte Formeln für Kreisfunktionen kommen. Hierbei ist aber zu bemerken, daß nur von Beziehungen zwischen Funktionen einzelner Winkel die Rede sein kann, da der transcendente Winkel des doppelten Sektors nicht dem Doppelten des einfachen Sektors gleich sein kann.

3) Die Linie MG wird von FA und FB harmonisch getheilt; denn

$$GX : XC = FG : CE = AG : AE = MG : MC.$$

So wird jede von M nach dem andern Zweige der Hyperbel gezogene gerade Linie von dem Kreise und der Tangente harmonisch getheilt.

Ferner ist

$$AI \parallel MG,$$

also W. IAB = CMA, und da W. CMA $= \frac{1}{2}$FAB, so wird AI auch den transcendenten Winkel FAB halbiren. Es ist nun:

$$\mathrm{tng}\ \frac{1}{2}\mathrm{a} = \frac{BK}{AB},$$

$$\mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{BK}{AB};$$

also

$$\mathrm{tng}\ \frac{1}{2}\mathrm{a} = \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}\alpha.$$

Auf gleiche Weise ist auch

$$\mathrm{cotng}\frac{1}{2}\mathrm{a} = \mathrm{Cot}\ \frac{1}{2}\alpha,$$

eine Beziehung, die ebenfalls an der Figur zu erkennen ist, da

$$\mathrm{cot}\ \frac{1}{2}\mathrm{a} = \frac{QT}{AB},$$

und auch

$$\mathrm{Cot}\frac{1}{2}\alpha = \frac{QT}{AB}.$$

Fig. 1.

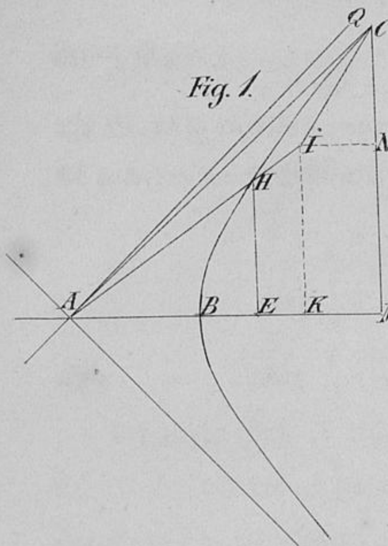

Fig. 2.

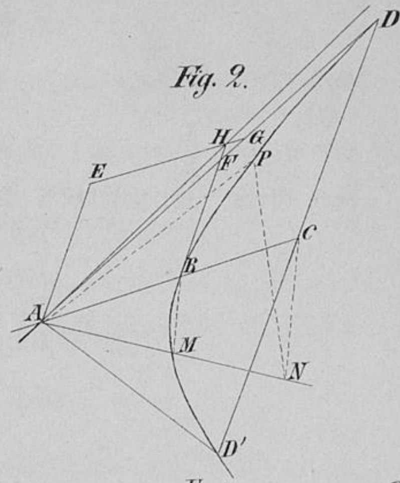

Fig. 4.

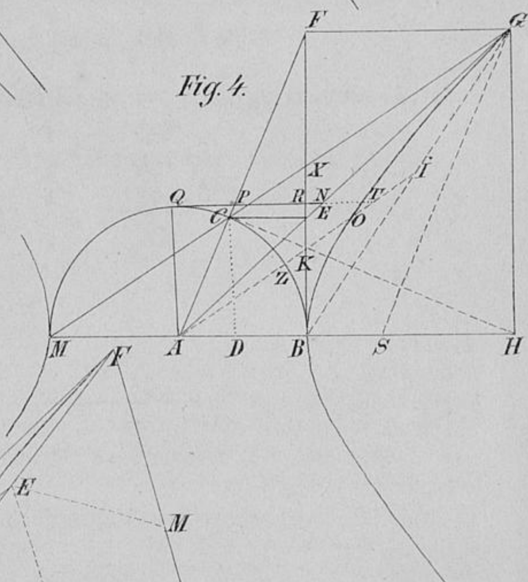

Fig. 3.