Eine

Reihe trigonometrischer Aufgaben über das Dreieck mit aequidifferenten Seiten,

von dem

Oberlehrer **Dr. J. E. Boner.**

Vorbemerkung. Die nachstehenden Aufgaben sind vor und nach mit den Schülern durchgearbeitet, und in dieser Ueberarbeitung zunächst für Schüler, und für Lehrer nur in so weit bestimmt, als sie in der Schule benutzt werden können. Daher ist nur Weniges hinzugefügt, was blos den Lehrer interessiren kann.

§. 1.

1) Berechnet man fig. 1. in dem bekannten rechtwinkligen $\triangle ABC$, dessen Seiten 3, 4, 5 sind, die Winkel, so wird:

$$\cos A = \frac{4^2+5^2-3^2}{2.4.5} = \frac{32}{40} = 0{,}8, \text{ also}$$

$$\log\cos A = \log 0{,}8 = \bar{9}{,}9030900 = \log\cos 36^0\ 52'$$

$$\cos C = \frac{3^2+5^2-4^2}{2.3.5} = \frac{18}{30} = 0{,}6, \text{ daher}$$

$$\log\cos C = \log 0{,}6 = \bar{9}{,}7781513 = \log\cos 53^0\ 8',$$

$$\cos B = \frac{3^2+4^2-5^2}{2.3.4} = 0 - - - - = \cos 90^0.$$

2) In dem rechtwinkligen $\triangle ABC$ fig. 2, dessen Winkel 30^0, 60^0, 90^0 sind, findet man, die kleinste Seite $BC = 1$ gesetzt, $AC = 2$, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3} = 1{,}73205$.

3) Wir haben somit ein Dreieck, worin die Seiten, ein anderes, worin die Winkel gleichmäßig wachsen; daher entsteht die Frage, ob nicht ein Dreieck möglich sei, welches beide Eigenschaften hätte, d. h. worin Seiten und Winkel gleichmäßig wachsen.

Setzen wir, um dieses zu untersuchen, in fig. 3. die Seite $BC = 1$, W. $A = \alpha$ und nennen die gleiche Differenz der Seiten x, die der Winkel y, so haben wir bekanntlich $\alpha + (\alpha + y) + (\alpha + 2y) = 2R$, daher $3\alpha + 3y = 2R$ und $\alpha + y = \frac{2}{3}R$. Also ist $\cos(\alpha + y) = \cos\frac{2}{3}R = \frac{1}{2}$ (A). Es ist aber auch in ABC $\cos(\alpha + y) = \frac{1 + (1 + 2x)^2 - (1 + x)^2}{2(1 + 2x)} = \frac{1 + 1 + 4x + 4x^2 - 1 - 2x - x^2}{2(1 + 2x)}$ $= \frac{1 + 2x + 3x^2}{2(1 + 2x)}$ (B). Nun folgt aus A und B:

$\frac{1 + 2x + 3x^2}{2(1 + 2x)} = \frac{1}{2}$, also $1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2x$, also $3x^2 = 0$, daher $x = 0$.

Es ist also das in Rede stehende Dreieck das gleichseitige, worin Seiten und Winkel beide eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz Null ist; und es ist also nur in diesem Falle die Aequidifferenz der Seiten und Winkel in einem Dreiecke möglich.

§. 2.

1) Lassen wir nun die Aequidifferenz der Winkel fallen, und halten nur die der Seiten fest; so sehen wir sofort, wenn die eine Seite $BC = 1$ und die gleiche Differenz der Seiten $= x$ gesetzt wird, daß für ein positives x die größte Seite $1 + 2x < 1 + (1 + x)$, also $x < 1$ sein muß. Für ein negatives x muß die größte Seite $1 < (1 - x) + (1 - 2x)$, also (absolut) $x < \frac{1}{3}$ oder $x < 0{,}3333$ sein.

2) Für $x = 1$ wird fig. 3. $BC = 1$, $CB = 2$, $AB = 3$; daher wird $\triangle ABC$ als Gerade mit AB zusammenfallen, es werden W. $C = 180^0$, W. $A = B = 0$, wie auch trigonometrisch sich zeigt, nämlich:

$$\cos C = \frac{1^2 + 2^2 - 3^2}{2 \, . \, 2} = -\frac{4}{4} = -1 = \cos 180^0,$$

$$\cos B = \frac{1^2 + 3^2 - 2^2}{2 \, . \, 3} = \frac{6}{6} = 1 = \cos 0^0,$$

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 1^2}{2 \, . \, 2 \, . \, 3} = \frac{12}{12} = 1 = \cos 0^0,$$

3) Für $x = -\frac{1}{3}$ wird $B'C' = 1$, $C'A' = \frac{2}{3}$, $A'B' = \frac{1}{3}$ und $\triangle A'B'C'$ wird wieder zur geraden Linie; fällt aber nun mit BC zusammen, so daß W. $A' = 180^0$, W. $B' = C' = 0^0$ werden. Multiplicirt man die Seiten $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ mit 3, so entsteht ein dem in Rede stehenden ähnliches Dreieck, dessen Seiten $B''C'' = 3$, $C''A'' = 2$, $A''B'' = 1$ werden. Wir haben also dasselbe Dreieck, wie vorhin und also

W. $A'' = C = 180^0$, W. $B'' = B = 0^0$, W. $C'' = A = 0^0$.

4) Weil man auf diese Weise zu jedem aus einer als Einheit angenommenen Seite und einer negativen Differenz berechneten oder construirten Dreiecke ein ähnliches mit einer positiven Seitendifferenz berechnen und construiren kann, oder mit anderen Worten, da man in jedem Dreiecke jede Seite als Einheit zum Maße für die übrigen Seiten annehmen kann; so wird das in Rede stehende Dreieck schon alle möglichen Formen annehmen, wenn die gleiche Seitendifferenz x von 1 bis 0 abnimmt.

Da nun, wie wir gesehen haben, für $x = 1$ W. $C = 180^0$, W. $A = B = 0$, bei $x = 0$ aber W. $C = A = B = 60^0$ ist; so muß bei der allmäligen Abnahme von x offenbar W. C alle vielfachen von A und B durchlaufen.

Die Winkel A und B wachsen allerdings bei gleichmäßiger Abnahme von x nicht gleichmäßig mit einander, vielmehr wächst im Anfange B schneller als A, am Ende A am schnellsten *); ob aber B irgendwo ein Vielfaches von A werden kann,

---

*) Es ist eine leichte, nicht ganz uninteressante Aufgabe für die höhere Analysis, den Werth von x zu ermitteln, bei welchem W. A und B gleichmäßig zunehmen. Es ist dieses offenbar der Werth von x, der die Differentiale der beiden Winkel A und B gleich macht. Setzt man nun in fig. 6. W. $A = \varphi$ und W. $B = \psi$, so hat man

$$\cos\varphi = \cos A = \frac{(1+x)^2 + (1+2x)^2 - 1}{2(1+x)\,(1+2x)} = \frac{1+6x+5x^2}{2(1+x)(1+2x)} = \frac{(1+x)(1+5x)}{2(1+x)(1+2x)},$$

also $\cos\varphi = \dfrac{1+5x}{2(1+2x)}$ ($\mathfrak{A}$).

$$\cos\psi = \cos B = \frac{1+(1+2x)^2-(1+x)^2}{2(1+2x)} = \frac{1+2x+3x^2}{2(1+2x)} \quad (\mathfrak{B}).$$

Differentiirt man nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so wird

$$d\cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2(1+2x)\,5\,dx - (1+5x)\,4dx}{4(1+2x)^2} = \frac{3\,dx}{2(1+2x)^2},$$

also $d\varphi = -\dfrac{3\,dx}{2(1+2x)^2 . \sin\varphi}$ ($\mathfrak{C}$).

$$d\cos\psi = -\sin\psi d\psi = \frac{2(1+2x)(2+6x)\,dx - (1+2x+3x^2)4dx}{4(1+2x)^2} = \frac{3(x+x^2)dx}{(1+2x)^2},$$

also $d\psi = -\dfrac{3(x+x^2)\,dx}{(1+2x)^2 . \sin\psi}$ ($\mathfrak{D}$). Im $\triangle$ ABC ist auch

$\sin\psi : \sin\varphi = 1 + x : 1$, also $\sin\psi = (1+x)\sin\varphi$, daher wird

$$d\psi = -\frac{3(x+x^2)\,dx}{(1+2x)^2(1+x)\sin\varphi} = -\frac{3x(1+x)\,dx}{(1+2x)^2(1+x).\sin\varphi} = -\frac{3x\,dx}{(1+2x)^2.\sin\varphi} \quad (\mathfrak{E}).$$

das läßt von vorne herein sich nicht beurtheilen. Um daher nicht zu weitläufig zu werden und auch nicht auf zu hohe Gleichungen zu stoßen, wollen wir uns folgende 6 Aufgaben stellen.

Setzt man nun der Aufgabe gemäß $d\varphi = d\psi$, also nach C und C:

$$-\frac{3\,dx}{2(1+2x)^2 . \sin\varphi} = -\frac{3\,x\,dx}{(1+2x)^2 . \sin\varphi},$$ so wird sofort $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Und in der That ist, wenn man $x = 0{,}5$ setzt, nach A und B

$$\cos A = \cos\varphi = \frac{1+5x}{2(1+2x)} = \frac{1+2{,}5}{2(1+1)} = \frac{3{,}5}{4},$$ also

$$\begin{aligned} \log\cos\varphi &= \log 3{,}5 = 0{,}5440680 \\ -\log 4 &= 0{,}6020600 \\ &\overline{9{,}9420080} = \log\cos 28^0\,57'\,18'',\,11. \end{aligned}$$

$$\cos B = \cos\psi = \frac{1+2x+3x^2}{2(1+2x)} = \frac{1+1+0{,}75}{2(1+1)} = \frac{2{,}75}{4},$$ daher

$$\begin{aligned} \log\cos\psi &= \log 2{,}75 = 0{,}4393327 \\ -\log 4 &= 0{,}6020600 \\ &\overline{9{,}8372727} = \log\cos 46^0\,34'\,2'',\,88. \end{aligned}$$

Setzt man nun $dx = -0{,}0001$ also $x = 0{,}4999$, so hat man

$$\cos A_1 = \cos\varphi_1 = \frac{1+5\,.\,0{,}4999}{2(1+2\,.\,94999)} = \frac{3{,}4995}{3{,}9996},$$ also

$$\begin{aligned} \log\cos\varphi_1 &= \log 3{,}4995 = 0{,}5440060 \\ -\log 3{,}9996 &= 0{,}6020166 \\ &\overline{9{,}9419894} = \log\cos 28^0\,57'\,34'',\,08. \end{aligned}$$

$$\cos B_1 = \cos\psi_1 = \frac{1+2\,.\,0{,}4999+3\,.\,0{,}4999^2}{2(1+2\,.\,0{,}4999)} = \frac{2{,}7495}{3{,}9996},$$ also

$$\begin{aligned} \log\cos\psi_1 &= \log 2{,}7495 = 0{,}4392537 \\ -\log 3{,}9996 &= 0{,}6020166 \\ &\overline{9{,}8372371} = \log\cos 46^0\,34'\,18'',\,88. \end{aligned}$$

Es ist also $\triangle\varphi = \varphi_1 - \varphi = 28^0\,57'\,34'',\,08 - 28^0\,57'\,18'',\,11 = 15'',\,97$

$\triangle\psi = \psi_1 - \psi = 46^0\,34'\,18'',\,88 - 46^0\,34'\,2'',\,88 = 16'',\,00,$

wo der Unterschied von $0'',\,03$, um welche ψ mehr zugenommen hat als φ, darin liegt, daß bei 7stelligen Logarithmen die Hunderttheile der Secunden nicht mehr zuverläßlich werden. Zudem ist $dx = -0{,}0001$ wohl absolut noch zu groß, als daß noch in den Hunderttheilen der Secunden $\triangle\varphi = d\varphi$ und $\triangle\psi = d\psi$ werden müßte.

Nro. 1. Kann für ein x im $\triangle ABC$ der W. $B=3A$, oder
" 2. " " " " W. $B=2A$ werden?
" 3. Für welches x wird im $\triangle ABC$ der W. $C=3B$,
" 4. " " " " W. $C=2B$,
" 5. " " " " W. $C=3A$,
" 6. " " " " W. $C=2A$?

§. 3.

Aufgabe Nro. 1. Kann man fig. 4. in ABC der gleichen Seitendifferenz x einen solchen Werth geben, daß $B=3A$ wird?

1) Lösung. $\cos A = \cos\alpha = \frac{(1+x)^2+(1+2x)^2-1}{2(1+x)(1+2x)} = \frac{1+6x+5x^2}{2(1+x)(1+2x)}$ $= \frac{(1+x)(1+5x)}{2(1+x)(1+2x)}$, also $\cos\alpha = \frac{1+5x}{2(1+2x)}$ (𝔄). Es ist aber auch im $\triangle ABC$ $BC : AB = \sin A : \sin B$, oder $1 : 1+x = \sin\alpha : \sin 3\alpha$, oder auch, da $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$ ist,
$1 : 1+x = \sin\alpha : \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$, oder $1 : 1+x = 1 : 4\cos^2\alpha - 1$, also $4\cos^2\alpha - 1 = 1+x$, daher $4\cos^2\alpha = 2+x$ und $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+x}}{2}$ (𝔅).

Nun folgt aus 𝔄 und 𝔅:

$\frac{\sqrt{2+x}}{2} = \frac{1+5x}{2(1+2x)}$, oder $\sqrt{2+x} = \frac{1+5x}{1+2x}$, also $2+x = \left(\frac{1+5x}{1+2x}\right)^2$, oder
$(2+x)(1+4x+4x^2) = 1+10x+25x^2$, oder
$2+9x+12x^2+4x^3 = 1+10x+25x^2$, und endlich
$4x^3-13x^2-x+1=0$. (ℭ). Setzt man $x=0{,}25$, so wird
$0{,}0625 - 0{,}8125 - 0{,}25 + 1 = 0$. Also ist $x_1 = 0{,}25$ eine Wurzel der Gleichung und $x - 0{,}25$ eine Wurzelgleichung. Ferner ist
$\frac{4x^3-13x^2-x+1}{x-0{,}25} = 4x^2-12x-4=0$, oder $x^2-3x-1=0$, oder
$x^2-3x=1$, also $x = \frac{3 \pm \sqrt{4+9}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{3 \pm 3{,}60555}{2}$, also

$$x_2 = \frac{+\,6{,}60555}{2} = +\;3{,}30277,\ \text{und}$$

$$x_3 = \frac{-\,0{,}60555}{2} = -\;0{,}30277.\ \text{Dazu aus Obigem}$$

$$x_1 = \qquad\qquad +\;0{,}25\ \ \text{addirt, gibt als Summe der}$$

sämmtlichen Wurzeln $+\,3{,}25 = \frac{13}{4}$, dem Coefficienten des zweiten Gliedes der Gleichung C, wenn man denselben durch den Coefficienten von x^3 dividirt und das Vorzeichen in das entgegengesetzte ändert.

2) Untersuchung der Wurzeln. a) Die Wurzel $x_2 = -\,3{,}30277$ ist ein durch die Elimination von $\cos\alpha$ eingeschlichener, der vorliegenden Aufgabe fremder Werth von x, welcher nach §. 2. 1. keinem Dreiecke entspricht.

b) Die Wurzel $x_1 = 0{,}25$ gibt die Dreieckseiten $BC = 1$, $CA = 1{,}25$, $AB = 1{,}5$, oder wenn man alle Seiten mit 4 multiplicirt, ein gleichwinkliges $\triangle ABC$ mit den Seiten $BC = 4$, $CA = 5$, $AB = 6$. Hierin sind die Winkel:

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2\,.\,5\,.\,6} = 0{,}75,\ \text{also}$$

$$\log\cos A = \log 0{,}75 = \bar{9},8750613 = \log\cos 41^\circ\ 25'$$

$$\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2\,.\,4\,.\,6} = 0{,}5625,\ \text{daher}$$

$$\log\cos B = \log 0{,}5625 = \bar{9},750\ 1225 = \log\cos 55^\circ\ 46'$$

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2\,.\,4\,.\,5} = 0{,}125,\ \text{somit}$$

$$\log\cos C = \log 0{,}125 = \bar{9},0969100 = \log\cos 82^\circ\ 49'.$$

Hier ist nicht $B = 3A$, wohl aber bis auf einen kleinen aus den Vernachlässigungen entstandenen Unterschied ist $\sin 3A = \sin B$, nämlich $\sin 124^\circ\ 15' = \sin(180^\circ - 124^\circ\ 15') = \sin 55^\circ\ 45'$.

c) Die Wurzel $x_3 = -\,0{,}30277$ gibt die Seiten $BC = 1$, $CA = 0{,}69723$ $AB = 0{,}39445$ und hiernach die Winkel des Dreiecks:

$$\cos A = \frac{0{,}39446^2 + 0{,}69723^2 - 1}{2\,.\,0{,}39446\,.\,0{,}69723} = -\,0{,}65135,\ \text{also}$$

$$\log\cos A = (\log 0{,}65135)_n = \bar{9},8138144_n = \log\cos(180^\circ - 49^\circ 21') = \mathrm{l.\,c.}\ 130^\circ\ 39',$$

$$\cos B = \frac{1 + 0{,}39446^2 - 0{,}69723^2}{2\,.\,0{,}39446} = 0{,}84859,\ \text{daher}$$

$$\log\cos B = \log 0{,}84859 = \bar{9},9286979 = \log\cos 31^\circ\ 56',$$

$$\cos C = \frac{1 + 0{,}69723^2 - 0{,}39446^2}{2 \cdot 0{,}69723} = 0{,}95415, \text{ daher}$$

$$\log \cos C = \log 0{,}95415 = \bar{9}{,}9796167 = \log \cos 17^0\ 25',$$

wo abermals nicht $B = 3A$, wohl aber für unsere Rechnung genau genug $\sin 3A = \sin B$ und $\cos 3A = \cos B$, nämlich $\sin 3A = \sin 3\ (130^0\ 39') = \sin 391^0\ 57' = \sin (391^0\ 57' - 360^0) = \sin 31^0\ 56'$; und eben so für den cosinus.

3) Zusatz. Es muß nicht befremden, daß wir statt $B = 3A$ unter b) nur $\sin B = \sin 3A$ und unter c) sowohl $\sin B = \sin 3A$ als $\cos B = \cos 3A$ fanden. Wir gingen von trigonometrischen Gleichungen aus, daher kann das Resultat auch nur diesen genügen; und da wir sowohl den sinus, als den cosinus benutzt haben, so genügt auch schon derjenige Werth von x, welcher nur $\sin B = \sin 3A$ macht.

§. 4.

Aufgabe Nro. 2. Gibt es in fig. 5. einen Werth für x, so daß Winkel $B = 2A$ wird?

1) Lösung. Zunächst haben wir wie §. 3. 1) $\cos \alpha = \frac{1 + 5x}{2\ (1 + 2x)}$ ($\mathfrak{A}$). Dann $BC : AC = \sin \alpha : \sin 2\alpha$ oder, da $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ist, auch $1 : 1 + x = \sin \alpha : 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, oder $1 : 1 + x = 1 : 2 \cdot \cos \alpha$, also $2 \cdot \cos \alpha = 1 + x$ und $\cos \alpha = \frac{1 + x}{2}$ ($\mathfrak{B}$). Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt:

$\frac{1 + 5x}{2(1 + 2x)} = \frac{1 + x}{2}$, oder $1 + 5x = (1 + x)\ (1 + 2x)$, oder $1 + 5x = 1 + 3x + 2x^2$, also $2x^2 - 2x = 0$, oder $x^2 - x = 0$, daher $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2) Untersuchung der Wurzeln. a) Die Wurzel $x_1 = 0$ gibt das gleichseitige Dreieck und W. $A = B = C = 60^0$; und es ist auch

$\sin 2A = \sin 120^0 = \sin 60^0 = \sin B$. Vergl. §. 3. 3) Zus.

b) Die Wurzel $x_2 = 1$ macht, wie wir §. 2. 2) gesehen haben, das Dreieck zu einer geraden Linie und W. $C = 180^0$, W. $A = B = 0$, daher ist $\sin 2A = \sin B = 0$ und $\cos 2A = \cos B = 1$.

§. 5.

1) Es kann also nach den beiden vorhergehenden §§. W. B kein Vielfaches von W. A werden; d. h. es kann nicht $B = nA$ werden, so daß $n > 1$ und eine

ganze Zahl ist. Vielmehr ist schon $B = 2A$ die unerreichbare Gränze, der sich A und B um so mehr nähern, je näher $x = 1$ wird, die aber darum nicht erreicht werden kann, weil nicht $x = 1$ werden darf. Nimmt man die beiden §. 2. 4. in der Note stehenden Gleichungen für cos A und cos B, nämlich:

$\cos A = \frac{1+5x}{2(1+2x)}$ und $\cos B = \frac{1+2x+3x^2}{2(1+2x)}$ und setzt nach einander $x = 0,9$; $x = 0,99$; $x = 0,999$, so hat man:

a) Für $x = 0,9$ $\cos A = \frac{1+4,5}{2+3,6} = \frac{5,5}{5,6}$, also

$$\begin{aligned} \log \cos A &= \log 5,5 = 0,7403627 \\ &- \log 5,6 = 0,7481880 \\ &\overline{9,9921747} = \log \cos 10^\circ\ 50'\ 38'',46. \end{aligned}$$

$\cos B = \frac{1+1,8+2,43}{2+3,6} = \frac{5,23}{5,6}$, daher

$$\begin{aligned} \log \cos B &= \log 5,23 = 0,7185017 \\ &- \log 5,6 = 0,7481880 \\ &\overline{9,9703137} = \log \cos 20^\circ\ 56'\ 39'',33, \text{ also} \end{aligned}$$

$$2A - B = 21^\circ 41'\ 6'',92 - 20^\circ\ 56'\ 39'',33 = 44'\ 26'',59.$$

b) Für $x = 0,99$ ist $\cos A = \frac{1+4,95}{2+3,96} = \frac{5,95}{5,96}$, daher

$$\begin{aligned} \log \cos A &= \log 5,95 = 0,7745170 \\ &- \log 5,96 = 0,7752463 \\ &\overline{9,9992707} = \log \cos 3^\circ\ 19'\ 10'',00. \end{aligned}$$

$\cos B = \frac{1+1,98+2,9403}{2+3,96} = \frac{5,9203}{5,96}$, mithin

$$\begin{aligned} \log \cos B &= \log 5,9203 = 0,7723437 \\ &- \log 5,96 = 0,7752463 \\ &\overline{9,9970974} = \log \cos 6^\circ\ 37'\ 0'',82, \text{ daher} \end{aligned}$$

$$2A - B = 6^\circ\ 38'\ 20'',00 - 6^\circ\ 37'\ 0'',82 = 1'\ 19'',18.$$

c) Für $x = 0,999$ ist $\cos A = \frac{1+4,995}{2+3,996} = \frac{5,995}{1,996}$, und

$$\begin{aligned} \log \cos A &= \log 5,995 = 0,7777892 \\ &- \log 5,996 = 0,7778616 \\ &\overline{9,9999276} = \log \cos 1^\circ\ 2'\ 46'',67. \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1 + 1{,}998 + 2{,}99403}{2 + 3{,}996} = \frac{5{,}992003}{5{,}996}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log\cos B = \log 5{,}982003 &= 0{,}7775720 \\ -\log 5{,}996 &= 0{,}7778616 \\ \hline 9{,}9997104 &= \log\cos 2^0\,5'\,31'',25, \text{ also} \end{aligned}$$

$$2A - B = 2^0\,5'\,33'',34 - 2^0\,5'\,31'',25 = 2'',09.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, daß der Unterschied zwischen 2A und B immer kleiner wird, aber nicht eher schwindet, als bei $x = 1$ $A = B = 0$, also auch $2A = B$ wird.

2) Diese Resultate überzeugen uns zugleich von der §. 2. 4) aufgestellten Behauptung. Noch klarer sieht man dieses, wenn x gleichmäßig abnimmt. Läßt man z. B. x durch Zehntheile von 1 bis 0 und weiter bis — 0,3 abnehmen, berechnet nach obigen Formeln W. A, B und C, so wie $\triangle A$, $\triangle B$ und $\triangle C$, oder den jedesmaligen Zuwachs, so liefern die Ergebnisse folgende Uebersicht: *)

---

*) Will hierbei W. C unabhängig von A und B berechnen, so hat man

$$\cos C = \frac{1 + (1+x)^2 - (1+2x)^2}{2(1+x)} = \frac{1 + 1 + 2x + x^2 - 1 - 4x - 4x^2}{2(1+x)}, \text{ also}$$

$$\cos C = \frac{1 - 2x - 3x^2}{2(1+x)^2} = \frac{(1+x)(1-3x)}{2(1+x)} = \frac{1-3x}{2}.$$

x	A	△ A	B	△ B	C	△ C
1	0		0		180°	
		10° 51′		20° 57′		— 31° 48′
0,9	10° 51′		20° 57′		148° 12′	
		5° 6′		8° 41′		— 13° 47′
0,8	15° 57′		29° 38′		134° 25′	
		4° 15′		6° 38′		— 11° 3′
0,7	20° 22′		36° 16′		123° 22′	
		4° 15′		5° 32′		— 9° 47′
0,6	24° 37′		41° 48′		113° 35′	
		4° 20′		4° 46′		— 9° 6′
0,5	28° 57′		46° 34′		104° 29′	
		4° 36′		4° 8′		— 9° 44′
0,4	33° 33′		50° 42′		95° 45′	
		5° 4′		3° 32′		— 8° 36′
0,3	38° 37′		54° 14′		87° 9′	
		5° 48′		2° 53′		— 8° 41′
0,2	44° 25′		57° 7′		78° 28′	
		6° 54′		2° 3′		— 8° 57′
0,1	51° 19′		59° 10′		69° 31′	
		8° 41′		50′		— 9° 31′
0,0	60°		60°		60°	
		11° 47′		— 1° 15′		— 10° 32′
— 0,1	71° 47′		58° 45′		49° 28′	
		18° 13′		— 5° 37′		— 12° 36′
— 0,2	90°		53° 8′		36° 52′	
		38° 41′		— 20° 1′		— 18° 40′
— 0,3	128° 41′		33° 7′		18° 12′	

Diese Tafel bestätigt vollkommen das §. 2. 4) Gesagte, und zeigt uns außerdem, welche Resultate wir bei den noch zu lösenden Aufgaben ungefähr zu erwarten haben. Dann aber sehen wir, wie W. A anfangs rasch, dann langsamer, zuletzt wieder rasch zunimmt, wie W. B von $x = 1$ bis $x = 0$ immer langsamer wächst, von $x = 0$ aber bis $x = -0{,}3$ abnimmt; wie W. C anfangs rascher, dann langsamer, zuletzt wieder rascher abnimmt *).

---

*) Alles dieses gibt die Differentialrechnung viel bestimmter.

1) Setzt man fig. 6. §. 2. 4. C. in $d\varphi = -\dfrac{3dx}{2(1+2x)^2 \sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1+5x}{2(1+2x)}\right)^2}$, so wird

§. 6.

Aufgabe Nro. 3. Für welchen Werth von x wird C = 3B?

$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{3}{(1+2x)\ (3+6x-9x^2)}$; sucht man nun die größten und kleinsten Werthe für φ, so wird φ = W. A

bei $x = 1$ ein Minimum, nämlich $\varphi = A = 0$

bei $x = -\frac{1}{3}$ ein Maximum, nämlich $\varphi = A = 180°$.

Differentiirt man noch einmal, so wird

$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{27 + 27x - 108x^2}{(1+2x)^2\,(3+6x-9x^2)^{3/2}}$, und dieses gibt für den Zuwachs $\triangle\varphi = \triangle A$

bei $x = 0{,}64$ . . ein Minimum,

bei $x = 1$ ein Maximum,

bei $x = -\frac{1}{3}$ ein Maximum.

2) Verfährt man eben so mit E (§. 2. 4.), so wird

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{3x}{(1+2x)^2 . \sin\varphi} = -\frac{6x\,dx}{(1+2x)\ \sqrt{3+6x-9x^2}}.$$

Hieraus wird ψ = W. B

bei $x = 0$ ein Maximum, nämlich $B = 60°$;

bei $x = 1$ ein Minimum, nämlich $B = 0$;

bei $x = -\frac{1}{3}$ ein Minimum, nämlich $B = 0$.

Die zweite Differentiation gibt in derselben Weise

$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{18+18x-36x^2+162x^3}{(1+2x)^2\ (3+6x-9x^2)^{3/2}}$, woraus für $\triangle\psi = \triangle B$

bei $x = 1$ ein Maximum, bei $x = -\frac{1}{3}$ ein Minimum wird.

3) Differentiirt man das oben in der Note gefundene $\cos C = \cos\xi = \frac{1-3x}{2}$,

so wird $d\cos\xi = -\sin\xi\,d\xi = -\frac{3dx}{2}$; also

$$d\xi = \frac{\triangle 3dx}{2 . \sin\xi} = \frac{3d\xi}{2\sqrt{1-\cos^2\xi}} = \frac{3dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{1-3x}{2}\right)^2}},$$ also

$\frac{d\xi}{dx} = \frac{3}{\sqrt{3+6x-9x^2}}$. Und so kommt für ξ = W. C

1. Lösung. Wir haben fig. 7. im $\triangle ABC$

$CA : AB = \sin\alpha : \sin 3\alpha$, oder, da $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$

$1 + x : 1 + 2x = \sin\alpha : \sin\alpha\,(4 \,.\, \cos^2\alpha - 1)$, oder

$1 + x : 1 + 2x = 1 : 4 \,.\, \cos^2\alpha - 1$; daher $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}}$ ($\mathfrak{A}$). Ferner

$CB : CA = \sin A : \sin B$, oder da $\sin A = \sin(B + C) = \sin 4\alpha$

$1 : 1 + x = \sin 4\alpha : \sin\alpha$ und, da $\sin 4\alpha = \sin\alpha\,(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha)$,

$1 : 1 + x = \sin\alpha\,(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha) : \sin\alpha$, oder $1 : 1 + x = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha : 1$,

daher $8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha = \frac{1}{1+x}$ ($\mathfrak{B}$). Hierin $\mathfrak{A}$ substituirt gibt:

$$\frac{8}{8}\left(\frac{2+3x}{1+x}\right)\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}} - \frac{4}{2}\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}} = \frac{1}{1+x}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{2+3x}{1+x} - 2\right)\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}} = \frac{1}{1+x}, \text{ oder } \frac{x}{1+x}\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}} = \frac{1}{1+x}, \text{ also}$$

$$x\sqrt{\frac{2+3x}{1+x}} = 1 \text{ und } x^2\left(\frac{2+3x}{1+x}\right) = 1, \text{ oder } 2x^2 + 3x^3 = 1 + x, \text{ endlich}$$

$3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ ($\mathfrak{C}$). Durch Versuche findet man $x > 0,6$ und $x < 0,7$, daher setzen wir $x = 0,6 + h$, und finden

$$\begin{array}{rcrrl}
3x^3 & = & 0,648 & + 3,24 & h + \ldots \\
+ 2x^2 & = & + 0,72 & + 2,4 & h + \ldots \\
- x & = & - 0,6 & - 1 & h \\
- 1 & = & - 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$-0,232 + 4,64\,h = 0, \text{ also } h = \frac{0,232}{4,64} = 0,05, \text{ daher}$$

$x = 0,6 + 0,05 = 0,65$ und wiederum $x = 0,65 + k$, also

---

bei $x = 1$ ein Maximum $C = 180^0$

bei $x = -\frac{1}{3}$ ein Minimum $C = 0$.

Ferner wird $\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{3 - 9x}{(1+2x-3x^2)(3+6x-9x^2)^{1/2}}$ und hiernach $\triangle\xi = -\triangle C$

bei $x = \frac{1}{3}$ ein algebraisches Maximum oder absolutes Minimum

bei $x = 1$ ein algebraisches Minimum oder absolutes Maximum,

bei $x = -\frac{1}{3}$ ein algebraisches Minimum oder absolutes Maximum.

Zusatz. Man kann noch ähnliche Verhältnißpunkte des Zuwachses finden, wie dieses §. 2. 4. in der Note geschehen ist.

$$\begin{array}{rlll} 3x^3 = & 0{,}823875 & + 3{,}8025 & k + \ldots \\ + 2x^2 = & + 0{,}8450 & + 2{,}60 & k + \ldots \\ - x = & - 0{,}65 & - 1 & k \\ - 1 = & - 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$+ 0{,}018875 + 5{,}4025\ k = 0, \text{ daher } k = -\frac{0{,}018875}{5{,}4025} = -0{,}0035 \ldots$$

und $x_1 = 0{,}65 - 0{,}0035 = 0{,}5465$ . . . Nehmen wir dieses als Wurzel, so ist

$$\frac{3x^3 + 2x^2 - x - 1}{x - 0{,}6465} = 3x^2 + 3{,}9395\ x + 1{,}5468 = 0, \text{ und hiernach}$$

x_2 und $x_3 = 0{,}6566 \pm \sqrt{-0{,}8156 + 0{,}6566^2}$, beide unmöglich.

2) Prüfung der Wurzeln. Die Werthe x_2 und x_3 fallen aus. Die Wurzel $x_1 = 0{,}6465$ gibt die Seiten $BC = 1$; $CA = 1{,}6465$; $AB = 2{,}2930$. Die Winkel berechnen wir am besten nach §. 4. 1. a., §. 2. 4. B. und §. 5. 2, nämlich:

$$\cos A = \frac{1 + 5x}{2 + 4x} = \frac{1 + 3{,}2325}{2 + 2{,}586} = \frac{4{,}2325}{4{,}586}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log \cos A = \log 4{,}2325 &= 0{,}6265970 \\ - \log 4{,}586 &= 0{,}6614341 \\ \hline &\ 9{,}9651629 = \log \cos 22^0\ 39' \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1 + 2x + 3x^2}{3 + 4x} = \frac{1 + 1{,}293 + 1{,}2539}{4{,}586} = \frac{3{,}5469}{4{,}586}, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} \log \cos B = \log 3{,}5469 &= 0{,}5498489 \\ - \log 4{,}586 &= 0{,}6614341 \\ \hline &\ 9{,}8884148 = \log \cos\ 39^0\ 20' \end{aligned}$$

$$\cos C = \frac{1 - 3x}{2} = \frac{1 - 1{,}9395}{2} = -\frac{0{,}9395}{2} = -0{,}46975, \text{ und}$$

$\log \cos C = (\log 0{,}9395]_n = 9{,}6718668_n = \log \cos (180^0 - 61^0\,59') = \text{l. c. } 118^0\ 1'$. Es ist also genau genug $3B = 3\,(39^0\,20') = 118^0 = C$, und das Resultat stimmt mit der Tafel §. 5. 2., woraus wir sehen, daß zwischen $x = 0{,}7$ und $x = 0{,}6$ der Winkel $C = 3B$ werden mußte.

§. 7.

Aufgabe Nro. 4. Für welches x wird in fig. 8. W. C = 2B?...

1) Lösung. Wir haben im $\triangle ABC$
$AC : AB = \sin\alpha : \sin 2\alpha$, oder, da $\sin 2\alpha = \sin\alpha\,(2\cos\alpha)$ ist,
$1 + x : 1 + 2x = \sin\alpha : \sin\alpha\,(2\cos\alpha)$, also $1 + x : 1 + 2x = 1 : 2\cos\alpha$ und

$$\cos\alpha = \frac{1+2x}{2(1+x)} = \frac{1+2x}{2+2x} \; (\mathfrak{A}). \text{ Ferner ist}$$

$CB : CA = \sin A : \sin A$, oder, da $\sin A = \sin(B + C) = \sin 3\alpha$,
$1 : 1 + x = \sin 3\alpha : \sin\alpha$ und, weil $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$,
$1 : 1 + x = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1) : \sin\alpha$, oder $1 : 1 + x = 4\cos^2\alpha - 1 : 1$, also

$$4\cos^2\alpha = \frac{1}{1+x} + 1 = \frac{1+1+x}{1+x} = \frac{2+x}{1+x}, \text{ also}$$

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{1+x}} \; (\mathfrak{B}). \text{ Aus } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ folgt:}$$

$$\frac{1+2x}{2(1+x)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{1+x}}, \text{ oder } \frac{1+2x}{1+x} = \sqrt{\frac{2+x}{1+x}}, \text{ daher}$$

$1 + 4x + 4x^2 = 2 + 3x + x^2$ und endlich $3x^2 + x = 1$ oder $x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$. Hieraus

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} = -\frac{1 \pm 3{,}60555}{6}, \text{ also}$$

$$x_1 = \frac{2{,}60555}{6} = 0{,}43426, \text{ und } x_2 = -\frac{4{,}60555}{6} = -0{,}76759.$$

$0{,}43426 - 0{,}76759 = -0{,}33333 = -\frac{1}{3}$, dem Coefficienten des 2. Gliedes entgegengesetzt.

2) Prüfung der Wurzeln. a) Die Wurzel x_2 ist nach §. 2. 1. absolut zu groß, sie ist ein durch Elimination eingeschwärzter Werth von x und der Aufgabe fremd.

b) Die Wurzel $x_1 = 0{,}43426$ gibt die Dreieckseiten
BC = 1; CB = 143426; 1, 86852.

Die Winkel berechnen wir wie vorhin; nur für B benutzen wir die für diesen speciellen Fall geltende bequemere Gleichung A dieses §. Daher

$$\cos A = \frac{1+5x}{2+4x} = \frac{1+2{,}17130}{2+1{,}73704} = \frac{3{,}1713}{3{,}73704}, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} \log\cos A &= \log 3{,}1713 = 0{,}5012373 \\ &- \log 3{,}73704 = \underline{0{,}5725277} \\ &\qquad 9{,}9287096 = \log\cos 31^0\ 56'\ 20''; \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1+2x}{2+2x} = \frac{1+0{,}86852}{2+0{,}86852} = \frac{1{,}86852}{2{,}36852}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log\cos B &= \log 1{,}86852 = 0{,}2714977 \\ &- \log 2{,}86852 = \underline{0{,}4576579} \\ &\qquad 9{,}8138398 = \log\cos 49^0\ 21'\ 13''; \end{aligned}$$

$$\cos C = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-1{,}\ 30278}{2} = -\frac{0{,}30378}{2} = -\ 0{,}15139, \text{ also}$$

$\log\cos C = (\log 0{,}15139)_n = 9{,}1800972_n = \mathrm{l.\ c.}(180^0 - 81^0\ 17'\ 33'') = \mathrm{l.\ c.}\ 98^0\ 42'\ 27''$.
Es ist wieder genau $2B = 98^0\ 42'\ 26'' = C$.

§. 8.

Aufgabe Nro. 5. Für welches x wird fig. 9. Winkel $C = 3A$?

1) Lösung. Zuerst die für alle unsere Fälle geltende Gleichung §. 3. 1. A.
$\cos A = \cos\alpha = \frac{1+5x}{2(1+2x)}$ (𝔄). Dann $BC : AB = \sin\alpha : \sin 3\alpha$, oder da $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$, $1 : 1+2x = \sin\alpha : \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$, oder $1 : 1+2x = 1 : 4\cos^2\alpha - 1$, also $4\cos^2\alpha = 2+2x$ und $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+2x}}{2}$ (𝔅).

Aus 𝔄 und 𝔅 folgt:

$$\frac{1+5x}{2(1+2x)} = \frac{\sqrt{2+2x}}{2}, \text{ also } \left(\frac{1+5x}{1+2x}\right)^2 = 2+2x, \text{ also auch}$$

$1 + 10x + 25x^2 = (1 + 4x + 4x^2)(2+2x) = 2 + 10x + 16x^2 + 8x^3$, daher $8x^3 - 9x^2 + 1 = 0$. Diese Gleichung wird für $x = 1$ zu 0. Daher ist $x_1 = 1$ und $x - 1 = 0$ eine Wurzelgleichung. Ferner ist

$$\frac{8x^3 - 9x^2 + 1}{x - 1} = 8x^2 - x - 1 = 0 \ (\mathfrak{C}), \text{ also } x^2 - \tfrac{1}{8}x = \tfrac{1}{8}, \text{ also}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2 \,.\, 16 + 1}}{16} = \frac{1 \pm 5{,}74456}{16}, \text{ daher}$$

$x_2 = 0{,}421535$; $x_3 = -0{,}296535$ und
$x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 0{,}421535 - 0{,}296535 = 1{,}25 = {}^5/_4$ dem entgegengesetzt bezeichneten Coefficienten des zweiten Gliedes in der eingerichteten Gleichung.

2) Prüfung der Wurzeln. a) Die Wurzel $x_1 = 1$ gibt die gerade Linie AB und W. $A = 0$ aber W. $C = 180$ (§. 2. 2.), und es ist $\sin 3A = \sin 0 = 0 = \sin 180^0 = \sin C$, der trigonometrischen Lösung gemäß.

b) Die Wurzel $x_2 = 0{,}4215$ gibt die Dreieckseiten $CB = 1$; $AC = 1{,}4215$; $AB = 1{,}8430$. Die Winkel sind

$$\cos A = \frac{1+5x}{2+4x} = \frac{1+2{,}1075}{2+1{,}6860} = \frac{3{,}1075}{3{,}6860}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log\cos A = \log 3{,}1075 &= 0{,}4924111 \\ -\log 3{,}6860 &= \underline{0{,}5665553} \\ & \quad 9{,}9258558 = \log\cos 32^0\ 32'. \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1+2x+3x^2}{2+4x} = \frac{1+0{,}8430+0{,}5328}{3{,}6860} = \frac{2{,}3758}{3{,}6860},$$

$$\begin{aligned} \log\cos B = \log 2{,}3758 &= 0{,}3758099 \\ -\log 3{,}6860 &= \underline{0{,}5665553} \\ & \quad \bar{9}{,}8092546 = \log\cos 49^0\ 52'. \end{aligned}$$

$$\cos C = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-1{,}2645}{2} = -\frac{0{,}2645}{2} = -0{,}13225,$$

$\log\cos C = (\log 0{,}13225)_n = \bar{9}{,}1213057_n = \log\cos(180^0 - 82^0\,24') = \text{l. c. } 97^0\,36'$, wo genau $3A = 3(32^0\,32') = 97^0\,36' = C$ ist.

c) Die Wurzel $x_3 = -0{,}296535$ gibt die Dreieckseiten $BC = 1$; $AC = 0{,}703465$; $AB = 0{,}40693$ und die Winkel

$$\cos A = \frac{1-1{,}432675}{2-1{,}186140} = -\frac{0{,}482675}{0{,}81386}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log\cos A = (\log 0{,}482675)_n &= \bar{9}{,}6836548_n \\ -\log 0{,}81386 &= \underline{\bar{9}{,}9105497} \\ & \quad \bar{9}{,}7731051_n = \log\cos(180^0 - 53^0\,37'\,30'') \\ & \quad = \log\cos 126^0\ 22'\ 30''. \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1-0{,}59307+0{,}26799}{2-1{,}18614} = \frac{0{,}670729}{0{,}81386}, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} \log\cos B = \log 0{,}670729 &= \bar{9}{,}8265471 \\ -\log 0{,}81386 &= \underline{\bar{9}{,}9105497} \\ & \quad \bar{9}{,}9159974 = \log\cos 34^0\ 29'\ 58''. \end{aligned}$$

$$\cos C = \frac{1 + 0{,}889605}{2} = 0{,}9448025, \text{ also}$$

$$\log \cos C = \log 0{,}9448025 = \bar{9}{,}9753410 = \log \cos 19^0\, 7'\, 32''.$$

Hier ist nicht $C = 3A$, wohl aber sowohl $\sin 3A = \sin C$, als $\cos 3A = \cos C$; denn $3A = 3\,(126^0\, 22'\, 30'') = 379^0\, 7'\, 30''$ und $379^0\, 7'\, 30'' - 360^0 = 19^0\, 7'\, 30'' = C$ bis auf den kleinen Unterschied von $2''$, welcher den approximativen Rechnungen zur Last gelegt werden muß.

§. 9.

Aufgabe Nro. 6. Bei welchem x ist fig. 10. Winkel $C = 2A$?

1) Lösung. Wir haben, wie vorhin $\cos \alpha = \frac{1+5x}{2(1+2x)}$ (A). Dann ist $BC : AB = \sin \alpha : \sin 2\alpha$, oder, da $\sin 2\alpha = \sin \alpha \,.\, 2 \cos \alpha$ ist, $1 : 1 + 2x = \sin \alpha : \sin \alpha \,.\, 2 \cos \alpha$, oder $1 : 1 + 2x = 1 : 2 \,.\, \cos \alpha$, daher $\cos \alpha = \frac{1 + 2x}{2}$ (B). Nun folgt aus A und B:

$\frac{1 + 2x}{2} = \frac{1 + 5x}{2(1 + 2x)}$, also $(1+2x)^2 = 1 + 5x$ und $1 + 4x + 4x^2 = 1 + 5x$, daher $4x^2 - x = 0$. Also ist die erste Wurzel $x_1 = 0$ und $\frac{4x^2 - x}{x} = 4x - 1 = 0$. Daher die zweite $x_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

2) Prüfung der Wurzeln. a) Die erste $x_1 = 0$ gibt das gleichseitige Dreieck und W. $A = C = 60$, also nicht $2A = C$, wohl aber $\sin 2A = \sin 2 \,.\, 60^0 = \sin 120^0 = \sin 60^0 = \sin C$.

b) Die zweite Wurzel $x_2 = \frac{1}{4}$ gibt die Dreieckseiten $BC = 1$; $AC = \frac{5}{4}$; $AB = \frac{6}{4}$, oder wenn wir mit 4 multipliciren, $BC = 4$; $AC = 5$; $AB = 6$, und daher sind die Winkel die §. 3. 2. b. gefundenen, nämlich $A = 40^0\, 25'$, $B = 55^0\, 46'$, $C = 82^0\, 49'$, wo bis auf eine Kleinigkeit, die nur in der Berechnung ihren Grund hat, W. $C = 2A$ ist.

§. 10.

Somit ist die §. 2. 4. gestellte Aufgabe gelöset, und das einzige Resultat dieser trigonometrischen Uebungen besteht in der merkwürdigen Eigenschaft des Dreiecks, dessen Seiten sich wie 4 : 5 : 6 verhalten, daß darin der größte Winkel genau das Doppelte des kleinsten ist (§. 9.) und daß in eben demselben der sinus des dreifachen kleinsten Winkels dem sinus des mittleren gleicht §. 3. Die erste dieser Eigenschaften war das bis dahin mir unbekannte Resultat einer mit meinen Schülern bearbeiteten Aufgabe; aus dieser Aufgabe sind die anderen entstanden.

Im Allgemeinen gilt der Satz, daß alle trigonometrisch gelöseten Aufgaben, so lange sie nicht von numerisch gegebenen Winkeln abhangen, auch ohne Beihülfe der Trigonometrie gelöset werden können, wenn auch oft diese Auflösungen sich sehr verwickeln. Auch dieses habe ich mit meinen Schülern versucht; ich will zwei dieser Auflösungen als Beispiele hersetzen.

§. 11.

Die Aufgabe Nor. 6. geometrisch. Wann wird fig. 11. W. $C = 2A$?

1) Lösung. Da W. $C = 2A$ sein soll, so denke man sich W. C durch CD halbirt; dann ist Euclid. VI. 3.
$BC : CA = BD : DA$, oder nach den Bezeichnungen der Figur,
$1 : 1 + x = y : 1 + 2x - y$, oder $1 : 2 + x = y : 1 + 2x$, also
$y = \frac{1 + 2x}{2 + x}$ (𝔄). Es ist aber in den Dreiecken CBD und CBA W. $B = B$ und außerdem nach der Construction W. $m = p$, also ist $\triangle CBD \sim CBA$ und daher $BD : CB = CB : AB$, oder nach der Bezeichnung der Figur $y : 1 = 1 : 1 + 2x$, also $y = \frac{1}{1 + 2x}$ (𝔅). Daher aus 𝔄 und 𝔅 $\frac{1 + 2x}{2 + x} = \frac{1}{1 + 2x}$, also
$1 + 4x + 4x^2 = 2 + x$, also $4x^2 + 3x = 1$, und $x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}$, also
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8}$, daher $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.

2) Zusatz. Die Wurzel $x_1 = \frac{1}{4}$ ist die §. 9. als x_2 gefundene; die Wurzel $x_2 = -1$ ist durch Elimination von y eingeschlichen und der Aufgabe fremd. Die §. 9. gefundene Wurzel $x_1 = 0$ könnte hier nur durch einen Zufall wie $x_2 = -1$ vorkommen; denn in der geometrischen Auflösung, wo bei der Construction $C = 2A$ vorausgesetzt war, hat sie nur noch die Bedeutung, daß in dem gleichseitigen $\triangle ABC$, wenn $m = p$ gemacht wird, noch $BC : AC = BD : AD$, oder $1 : 1 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ ist; $BD : CB = CB : AB$ hätte hier keinen Sinn. Vergl. §. 3. 3.

§. 12.

Die Aufgabe Nro. 5. geometrisch. Wann ist fig. 12. W. $C = 3A$?

1) Lösung. Da Winkel $C = 3A$ sein soll, so denke man sich den W. C durch CD und CE in 3 gleiche Theile getheilt, so daß also W. $m = n = p = q$ wird. Da nun W. $B = B$ und W. $m = q$ ist, so ist $\triangle BCD \backsim ABC$, also $BD : BC = BC : AB$, oder nach der Bezeichnung der Figur $y : 1 = 1 : 1 + 2x$, daher $y = \frac{1}{1 + 2x}$ (A). Weil W. $m = n$ ist, so ist nach Euclid. VI. 3. $BC : CE = BD : DE$, oder nach den Bezeichnungen der Figur $1 : \psi = y : z$, und wenn man A substituirt, $1 : \psi = \frac{1}{1 + 2x} : z$, also $z = \frac{\psi}{1 + 2x}$ (B). Eben so folgt aus W. $n = p$ (nach Euclid. VI. 3) $DC : CA = DE : EA$, oder nach den Bezeichnungen $\varphi : 1 + x = z : 1 + 2x - y - z$, oder, wenn man A und B substituirt, $\varphi : 1 + x = \frac{\psi}{1 + 2x} : 1 + 2x - \frac{1}{1 + 2x} - \frac{\psi}{1 + 2x}$, oder

$\varphi : 1 + x = \frac{\psi}{1 + 2x} : \frac{1 + 4x + 4x^2 - 1 - \psi}{1 + 2x}$, oder

$\varphi : 1 + x = \psi : 4x + 4x^2 - \psi$, also $\varphi = \frac{\psi\,(1 + x)}{4x + 4x^2 - \psi}$ (C).

Aus W. $n = p$ und W. $CDE = CDA$ folgt $\triangle CDE \backsim CDA$, also $CE : CA = DE : CD$, oder nach der Bezeichnung $\psi : 1 + x = z : \varphi$, also, wenn man B und C substituirt, $\psi : 1 + x = \frac{\psi}{1 + 2x} : \frac{\psi\,(1 + x)}{4x + 4x^2 - \psi}$, oder durch Aufhebung $1 : 1 = \frac{1}{1 + 2x} : \frac{\psi}{4x + 4x^2 + \psi}$, also $\frac{1}{1 + 2x} = \frac{\psi}{4x + 4x^2 - \psi}$, daher $4x + 4x^2 - \psi = (1 + 2x)\,\psi = \psi + 2\psi x$, oder

$4x + 4x^2 = 2\psi + 2\psi x = \psi\,(2 + 2x)$, also $\psi = \frac{4x + 4x^2}{2 + 2x}$, also

$\psi = 2x$ (D). Dieses substituirt in B gibt

$z = \frac{\psi}{1 + 2x} = \frac{2x}{1 + 2x}$ (E), und dieses in C gesetzt, macht

$\varphi = \frac{\psi\,(1 + x)}{4x + 4x^2 - \psi} = \frac{2x\,(1 + x)}{4x + 4x^2 - 2x} = \frac{2x\,(1 + x)}{2x + 4x^2} = \frac{2x\,(1 + x)}{2x\,(1 + 2x)} = \frac{1 + x}{1 + 2x}$ (F).

Endlich folgt aus Winkel $m + n = n + p$ nach Euclid. VI. 15. $\triangle BCE : \triangle DCA = CB \cdot CE : DC \cdot CA$. Es ist aber auch Eucl. VI 1. $\triangle BCE : \triangle DCA = BE : DA$, also $CB \cdot CE : DC \cdot CA = BE : DA$, oder nach der Bezeichnung $\psi : \varphi(1 + x) = y + z : 1 + 2x - y$, oder, wenn man aus den Gleichungen A, D, E und F für y, z, φ und ψ substituirt,

$$2x : \frac{(1+x)^2}{1+2x} = \frac{1}{1+2x} + \frac{2x}{1+2x} : 1 + 2x - \frac{1}{1+2x}, \text{ oder}$$

$$2x : \frac{(1+x)^2}{1+2x} = 1 : \frac{4x+4x^2}{1+2x}, \text{ oder } 2x : (1+x)^2 = 1 : 4x + 4x^2, \text{ oder}$$

$2x : (1+x)^2 = 1 : 4x(1+x)$, oder $2x : 1 + x = 1 : 4x$, also $8x^3 = 1 + x$, $8x^2 - x - 1 = 0$, wie §. 8. C. Also wie dort $x_1 = 0{,}421545$; $x_2 = -0{,}296535$.

2) Zusatz. a) Die §. 8. gefundene Wurzel $x_1 = 1$ konnte hier nicht zum zum Vorscheine kommen. Vergl. §. 11. 2.

b) Die Wurzel $x_1 = 0{,}421535$ leistet der Aufgabe ein Genüge, wie §. 8. gezeigt ist.

c) Aber die Wurzel $x_2 = -0{,}296535$ muß für die geometrische Auflösung als eine fremdartige durch die Eliminationen eingeführte angesehen werden, weil sie geometrisch keinen Sinn gibt. Warum aber gerade dieser Werth von x, welcher noch eine trigonometrische Bedeutung hat, sich hier einschlich, das könnte der Gegenstand einer neuen Untersuchung werden, welche ich hier als zu weit liegend übergehen muß Ich hätte dann früher §. 3. 2. a. eben so auch zeigen müssen, wie die der Aufgabe fremden Werthe von x entstanden waren, welches mich zu weit von dem vorgesteckten Ziele abgeführt haben würde. — Der denkende Mathematiker (nicht der formelnkramende Rechenmeister) kennt übrigens in seiner Wissenschaft keinen Zufall; er muß jedes Resultat aus den vorliegenden Umständen klar hervorgehen sehen.

§. 13.

1) Wir sahen in den beiden letzten §§. bei der geometrischen Lösung der beiden letzten Aufgaben, daß fig. 13. schon dann $\triangle BDC \backsim ABC$ war, wenn nur W. $s = q$ wurde, weil beide Dreiecke den W. B gemein haben. Hieraus ergibt sich der allgemeine Lehrsatz:

Wenn in einem $\triangle ABC$ von einem größeren W. C ein Stück BCD so abgeschnitten wird, daß es einem kleineren Winkel A des Dreiecks gleicht, und mit diesem Winkel A nicht an derselben Seite AC liegt; dann ist das abgeschnittene $\triangle$ BDC, welches diesen abgeschnittenen W. $BCD = A$ hat, dem ganzen $\triangle$ ABC ähnlich, und die Seite BC, woran der Winkel $BCD = A$ liegt, ist die mittlere Proportionale zwischen BD, dem darunter liegenden Stücke der geschnittenen Dreiecksseite und dieser ganzen Seite AB. Weil nämlich nach der Construction W. $s = p$ und W. $r = r$, so ist $\triangle BDC \sim ABC$ und $BD : BC = BC : AB$.

2) Dieses ist der allgemeinere Satz, woraus Euclid. VI. 8. als besonderer Fall hergeleitet werden kann. Denn ist das $\triangle$ ABC an C rechtwinklig; dann ist Winkel $s + q = p + r = R$ und also, wenn $s = p$ gemacht ist, auch $r = q$, außerdem W. $p = p$, also auch $\triangle CDA \sim ABC$, daher $\triangle ABC \sim BCD \sim ABC$ und W. $m = n = s + q = R$, aus welcher Aehnlichkeit dann die bekannten drei Proportionen folgen, worunter auch die des Euclid.

Zugabe.

Um den noch übrigen Raum zu füllen, will ich für den im Vorhergehenden mehrmals angeführten allgemein bekannten Satz, daß bei jeder Elimination einer Unbekannten neue Werthe für die übrigen Unbekannten sich einschleichen können, einen elementaren Beweis hersetzen, den ich mich nicht erinnere, sonst gefunden zu haben.

Setzen wir, um ein Beispiel zu haben, $x = 2$, $y = 3$ und bilden die beiden Gleichungen $y = \frac{7 + 4x}{1 + 2x}$ und $y = 1 + x$; so folgt daraus allerdings $\frac{7 + 4x}{1 + 2x} = 1 + x$. Diese Gleichung gibt uns aber nicht blos den Werth von x, bei welchem nur $\frac{7 + 4x}{1 + 2x} = 1 + x = 3$ ist, sondern alle diejenigen Werthe von x, bei welchen nur $\frac{7 + 4x}{1 + 2x} = 1 + x$ wird. Da nun diese Gleichung quadratisch wird, so gibt es dieser Werthe zwei, und jedem x entspricht ein y, wenn auch der Aufgabe nach nur ein x und y stattfinden können. Weil aber unter allen möglichen Werthen von x, welche $\frac{7 + 4x}{1 + 2x} = 1 + x$ machen, auch derjenige sein muß, durch welchen wirklich $\frac{7+4x}{1+2x} = y = 1 + x$ geworden ist, so kann der wahre, der Aufgabe entsprechende Werth von x nicht verloren gehen. In der That haben wir aus $\frac{7+4x}{1+2x} = 1 + x$ sofort $7 + 4x = 1 + 3x + 2x^2$, oder $2x^2 - x = 6$, also $x^2 - \frac{1}{2}x = 3$, also $x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{2 + \frac{1}{16}} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1+7}{4}$, also $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, also $y_1 = x_1 + 1 = 3$ und $y_2 = x_2 + 1 = -\frac{1}{2}$. Und $-\frac{1}{2}$ ist die Zahl, welcher für $x = -\frac{3}{2}$ sowohl $\frac{7+4x}{1+2x}$ als $x + 1$ gleich werden.

Allgemein. Ist $y = Fx$ und $y = fx$, wo Fx und fx beliebige algebraische Verbindungen mit x (Functionen von x) bezeichnen; so ist $Fx = fx$. Löset man nun die Gleichung $Fx = fx$ auf, so erhält man nicht blos den Werth von x, welcher $Fx = y = fx$ macht, sondern alle möglichen Werthe von x, welche nur $Fx = fx$ machen; unter allen diesen möglichen muß natürlich auch derjenige Werth von x sein, welcher $Fx = fx = y$ macht. Es können also durch die Elimination der Unbenkanten y neue, der unspünglichen Aufgabe fremde Werthe von x sich einschleichen, aber der wahre, durch die Aufgabe bedingte kann nicht verloren gehen.

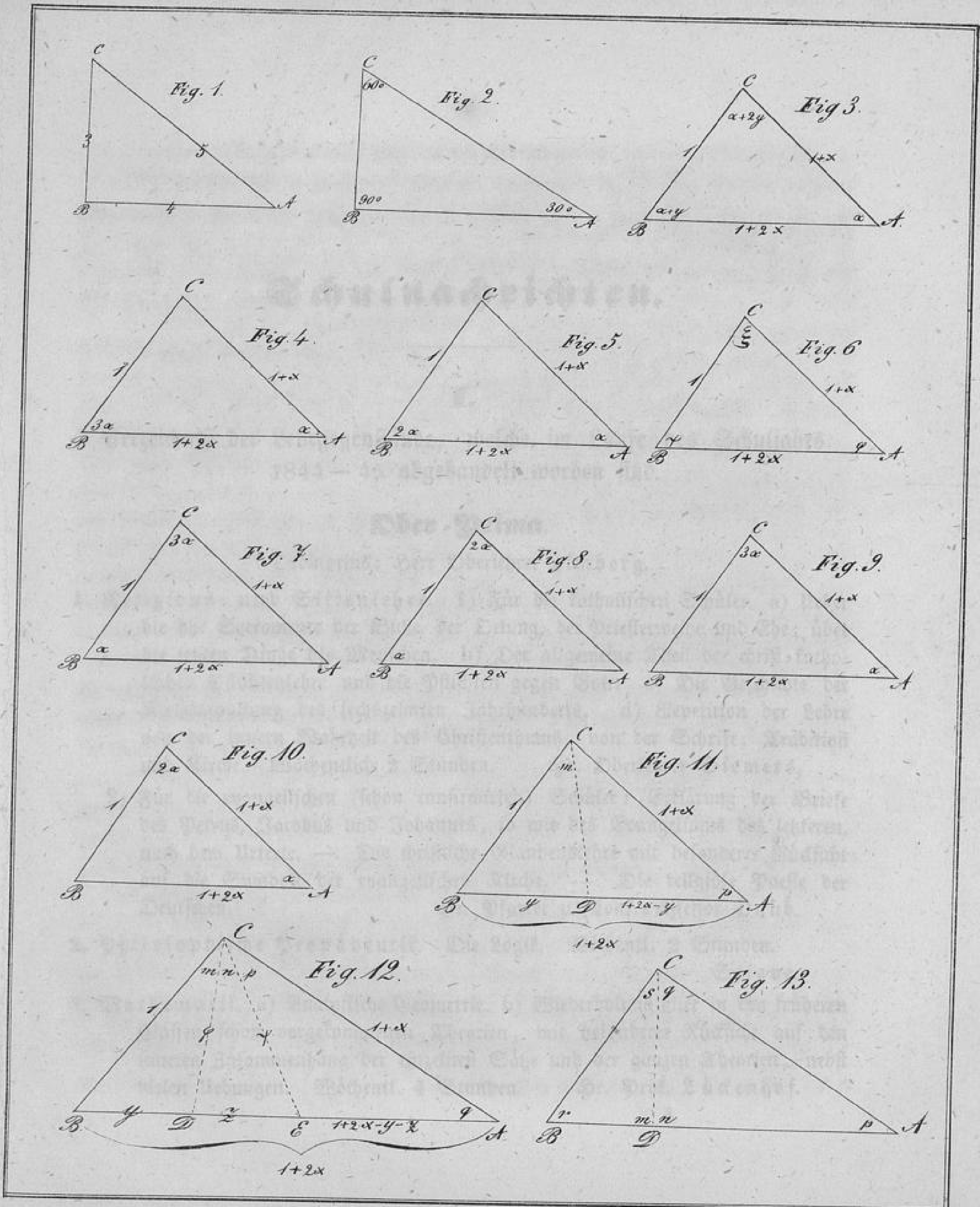
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.