Die Enveloppe der Axen der einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln.

§ 1.

Der Ort der Brennpunkte der einem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabeln ist der dem Dreieck umgeschriebene Kreis.*) Fällt man von einem beliebigen Punkte F der Kreislinie K^2 die Lote auf die Seiten des Dreiecks A B C, so liegen die Fußpunkte derselben in einer Geraden S, welche die Scheiteltangente derjenigen Parabel ist, die durch den Punkt F als Brennpunkt und irgend zwei Seiten des Dreiecks eindeutig bestimmt ist.**) Die Gerade S nennen wir die zum Punkte F gehörige Fußpunktenlinie in Bezug auf das Dreieck A B C. Zieht man nun von einer Ecke A des Dreiecks A B C den Durchmesser A A′ (Fig. 1) und von derselben Ecke A das Lot auf S, welches K^2 zum zweitenmal in R trifft, so ist, da $\sphericalangle A R A' = 90^0$, $A'R \parallel S$ und $RF \parallel BC$. Denn da die Strahlen vom Durchschnitte zweier Tangenten der Parabel nach den Brennpunkten (wovon der eine der unendlich ferne Punkt der Axe ist, so daß der entsprechende Strahl senkrecht zur Scheiteltangente ist) mit den Tangenten gleiche Winkel bilden,***) so ist:

$$\sphericalangle F A C = R A B,$$

woraus der Parallelismus von F R und B C folgt. Deshalb ist der Winkel F R A′ (oder dessen Nebenwinkel) gleich φ, wenn φ der Winkel ist, unter welchem die dem Punkte A gegenüberliegende Seite B C von S geschnitten wird. Fällt man von A′ auf S das Lot, welches das Lot von F auf B C in f trifft, so ist der Winkel A′ f F (oder dessen Nebenwinkel) gleich φ. Demnach liegen die 4 Punkte A′, R, f, F auf einem Kreise, d. h. die Lote von A′ auf S und von F auf B C treffen sich in einem Punkte f des Kreises K^2.

Konstruiert man das dem Dreieck A B C parallel umgeschriebene Dreieck A_1 B_1 C_1 sowie den diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreis K_1^2 und zieht die Höhe A_1 a des Dreiecks A_1 B_1 C_1, so geht, da der Punkt a auf dem Kreise K^2 liegt (Feuerbach), diese Linie durch A′ und ist parallel F f.

Der Höhenpunkt H_1 des Dreiecks A_1 B_1 C_1 ist der äußere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise K^2 und K_1^2, und wenn M und M_1 die Mittelpunkte von K^2 und K_1^2 sind, so ist $H_1 M_1 = 2 H_1 M$, und die Radien der beiden Kreise verhalten sich wie 1 : 2.†)

---

*) Steiner-Geiser, Theor. d. Kegelschn. Aufl. 2. S. 121.

**) Steiner-Geiser, a. a. O. S. 107.

***) Steiner-Geiser, a. a. O. S. 114.

†) Baltzer, Elemente d. Math. Aufl. 5. Bd. II. Buch IV. § 12, 8.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zieht man im Kreise K^2 den Radius M F und die Linie H_1 F, welche den im Kreise K_1^2 zu M F parallel gezogenen Radius in P trifft, so liegt P auf dem Kreise K_1^2, und es ist $H_1 F = F P$.

Zieht man durch P zu F f die Parallele (also die Normale zu B C oder $B_1 C_1$), welche K_1^2 zum zweitenmal in p trifft, so liegen die 3 Punkte H_1, f, p auf einer Geraden. Ist α_1 der Schnitt von P p mit $B_1 C_1$, so ist $\alpha_1 F \parallel f A'$ und somit senkrecht zu S, wie sich in folgender Weise ergiebt. Der senkrechte Abstand der beiden Geraden A' a und P p wird durch die Gerade F f halbiert. Trifft nun A a die Gerade F f in O, und das Lot von A' auf F f dieselbe in O_1, so ist, da $f O = F O_1$, und $O \alpha_1 = A' O_1$ ist, $\triangle O_1 A' f \cong O \alpha_1 f$, woraus der Parallelismus von $\alpha_1 F$ und F A' folgt; also ist auch $\alpha_1 F \perp S$.

In gleicher Weise zeigt sich, daß, wenn β_1 und γ_1 analog die Fußpunkte der von P auf $A_1 C_1$ und $A_1 B_1$ gefällten Lote sind, $\beta_1 F \perp S$ und $\gamma_1 F \perp S$ ist. Also die Gerade $\mathfrak{A}$, die die Fußpunkte der von P auf die Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ gefällten Lote enthält, geht durch F und ist senkrecht zu S; d. h. die Gerade $\mathfrak{A}$ ist die Axe der dem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabel, die den Punkt F zum Brennpunkt hat. Man erhält somit die Axe der durch einen beliebigen Punkt F des Kreises K^2 als Brennpunkt bestimmten Parabel, die dem Dreieck A B C eingeschrieben ist, indem man den Höhenpunkt H_1 des dem Dreieck A B C parallel umgeschriebenen Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ mit F verbindet, den Schnitt P von $H_1 F$ mit dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreis K_1^2 aufsucht, der auf der durch M_1 zu M F gezogenen Parallelen liegt, und zum Punkte P die Fußpunktenlinie in Bezug auf das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ konstruiert. Oder die Axe irgend einer dem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabel erhält man, indem man zu irgend einem Punkte P des Kreises K_1^2 die Fußpunktenlinie in Bezug auf das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ konstruiert. Die Enveloppe der Axen der dem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabeln ist also identisch mit der Enveloppe der zu den Punkten des Kreises K_1^2, der dem dem Dreieck A B C parallel umgeschriebenen Dreieck $A_1 B_1 C_1$ umgeschrieben ist, gehörenden Fußpunktenlinien in Bezug auf das Dreieck $A_1 B_1 C_1$.*)

§ 2.

Zu jedem Punkt P des Kreises K_1^2 gehört eine und nur eine Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}$ und umgekehrt. Es giebt keine zwei Fußpunktenlinien, die einander parallel sind.**) Also giebt es auch zu jedem Punkte F des Kreises K^2 eine und nur eine Axe der dem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabeln; es giebt keine zwei dem Dreiecke A B C eingeschriebenen Parabeln, die parallele Axen haben.

Die sämtlichen von den Punkten P des Kreises K_1^2 auf die Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ gefällten Lote bilden drei Parallelstrahlenbüschel mit den Scheiteln $A\infty$, $B\infty$, $C\infty$, wenn wir mit $A\infty$, $B\infty$, $C\infty$ die unendlich fernen Punkte der zu $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ senkrechten Richtungen bezeichnen. Diese drei Parallelstrahlenbüschel sind projektiv, indem solche Elemente dieser Büschel zugeordnet sind, welche durch denselben Punkt P des Kreises K_1^2 hindurchgehen. — Treffen die Strahlen des Strahlenbüschels $A\infty$ die Gerade $B_1 C_1$ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$, die Strahlen des Büschels $B\infty$ die Gerade $A_1 C_1$ in $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots$, die Strahlen des Büschels $C\infty$ die Gerade

---

*) Vergl. K. Dörholt, Inauguraldissertation, Münster 1884. § 20. Steiner's Ges. Werke, Bd. II. S. 677 und 641.

**) Geiser, Einl. in d. synth. Geom. S. 21 und 22.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$A_1 B_1$ in $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ldots$, so sind die entstehenden Punktreihen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ldots$ beziehlich perspektiv mit den Strahlenbüscheln $A\infty$, $B\infty$, $C\infty$ und in Folge dessen untereinander projektiv; also ist:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\ \Pi\ (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\ \Pi\ (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4).$$

Projiziert man diese drei Punktreihen aus einem beliebigen Punkte x der Ebene, so erhält man um x drei Paare projektiver Strahlenbüschel, nämlich:

$$x\ (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\ \Pi\ x\ (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4),$$
$$x\ (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\ \Pi\ x\ (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4),$$
$$x\ (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\ \Pi\ x\ (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4).$$

Man hat also um x drei Paare konjektiver Strahlenbüschel. Die Doppelstrahlen derselben mögen heißen: g, h bez. g', h'; g'', h''. Wie kommen diese Doppelstrahlen zu Stande? Fassen wir die Punktreihen auf irgend zwei Seiten des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ ins Auge, etwa die Punktreihen $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ und $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)$ auf den Seiten $B_1\ C_1$ und $C_1\ A_1$, so haben diese stets die besondere Lage zu einander, daß in dem Schnitt C_1 ihrer Träger entsprechende Punkte vereinigt liegen, sind also perspektiv. Denn durchläuft der Punkt P die Kreislinie K_1^2, so werden, wenn P in C_1 kommt, die Fußpunkte der von P auf $A_1\ C_1$ und $B_1\ C_1$ gefällten Lote in C_1 zusammenfallen. Demnach ist der eine Doppelstrahl des Systems $x\ (\alpha_1\ \beta_1,\ \alpha_2\ \beta_2 \ldots)$ die Verbindungslinie des Punktes x mit C_1. Der andere Doppelstrahl verbindet zwei getrennte entsprechende Punkte α, β; ist also eine der oben genannten Fußpunktenlinien, also eine Tangente der Enveloppe, die von den Axen sämtlicher dem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabeln umhüllt wird. Ebenso zeigt sich, daß von den Doppelstrahlen der beiden anderen Strahlsysteme um x einer die Verbindungslinie des Punktes x mit einer Ecke des Dreieck $A_1\ B_1\ C_1$ ist, während der andere eine Tangente unserer Enveloppe ist. Es laufen also durch einen beliebigen Punkt x der Ebene drei Tangenten unserer Enveloppe, d. h. die Enveloppe ist von der dritten Klasse. Wir gewinnen somit den Satz:

Die Axen der einem Dreieck A B C eingeschriebenen Parabeln umhüllen eine Kurve dritter Klasse.

§ 3.

Fällt der Punkt P beim Durchlaufen des Kreises K_1^2 mit einer Ecke des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ etwa mit A_1 zusammen, so ist die zugehörige Fußpunktenlinie die Höhe des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ aus der Ecke A_1. **Also die Höhen des dem Dreieck A B C parallel umgeschriebenen Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ sind Tangenten unserer Kurve C_3.**

Zieht man von einer Ecke A_1 des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ den Durchmesser $A_1\ A_1'$ des Kreises K_1^2 (Fig. 1) und fällt von A'_1 die Lote auf die Seiten des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$, so sind die Fußpunkte zweier dieser Perpendickel die beiden Ecken B_1 und C_1 des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$; also ist $B_1\ C_1$ die zum A_1' gehörende Fußpunktenlinie. Ebenso sind $C_1\ A_1$ und $A_1\ B_1$ die Fußpunktenlinien, die zu den den Dreiecksecken B_1 und C_1 diametral gegenüberliegenden Punkten B_1' und C_1' gehören. Oder **die Seiten des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ sind ebenfalls Tangenten unserer Kurve C_3.** Wie jede zu einem Punkte des Kreises K_1^2 gehörende Fußpunktenlinie, so sind auch die zu den unendlich fernen Kreispunkten J und J' gehörenden Fußpunktenlinien Tangenten unserer Kurve C_3. Zum Punkte J sowohl als zum Punkte J' gehört aber offenbar die unendlich ferne Gerade $G\infty$ als Fußpunktenlinie; also ist $G\infty$ Doppeltangente unserer C_3. Da aber, wie im Anfang des § 2 hervorgehoben, keine endlichen Tangenten der C_3 parallel sind, und von jedem Kurvenpunkte außer den beiden auf-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einanderfolgenden noch eine dritte Tangente an die Kurve geht, so hat die Kurve keinen reellen unendlich fernen Punkt; dieselbe ist vielmehr eine im Endlichen geschlossene Kurve. Die $G\infty$ ist deshalb eine ideelle Doppeltangente. Ebenso wie keine endlichen Tangenten parallel sind, fallen auch keine zwei zusammen (§ 2). Also ist die $G\infty$ die einzige (ideelle) Doppeltangente der Kurve C_3. Nach den Erörterungen des § 1 bildet irgend eine zu einem Punkte P gehörige Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}$ mit irgend einer Dreiecksseite $B_1\ C_1$ einen Winkel, der gleich ist dem Peripheriewinkel im Kreise K_1^2 über dem Bogen $P\ A_1'$, wo A_1' der zur Geraden $B_1\ C_1$ als Fußpunktenlinie gehörige Punkt ist. Daraus folgt, daß der Winkel χ, den 2 beliebige zu den Punkten P und P_1 gehörende Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ mit einander bilden, gleich ist dem Peripheriewinkel im Kreise K_1^2 über dem Bogen $P\ P_1$. Denn sind φ und ψ die Winkel, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ mit $B_1\ C_1$ bilden, so ist unter Berücksichtigung des Vorzeichens

$$\measuredangle\, \varphi = \frac{P\,M_1\,A'_1}{2},\ \psi = \frac{A'_1\,M_1\,P_1}{2}, \text{ somit}$$

$$\measuredangle\, \chi = \varphi + \psi = \frac{P\,M_1\,A'_1}{2}, + \frac{A'_1\,M_1\,P_1}{2} = \frac{P\,M_1\,P_1}{2}.$$

Die Fußpunktenlinien, die zu den Endpunkten eines Durchmessers gehören, sind somit zu einander senkrecht. Unsere Kurve C_3 hat also unendlich viele rechtwinklige Tangentenpaare.

§ 4.

Sucht man zu den Endpunkten P und P_1 eines Durchmessers $P\ M_1\ P_1$ die zugehörigen Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, so gehen diese durch die Punkte F und F_1 des Kreises K^2, die man erhält, wenn man zu $P\ P_1$ den parallelen Durchmesser $F\ M\ F_1$ zieht (§ 1). Und da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zu einander rechtwinklig sind (§ 3), so scheiden sich dieselben auf dem Kreise K^2 in einem Punkt S. Zwei zu einander rechtwinklige Fußpunktenlinien nennen wir schlechthin ein Paar und den Punkt S den Scheitel des Paares, während wir die Punkte F und F_1 als die Mittelpunkte der Fußpunktenlinien bezeichnen. Der Kreis K^2 ist der Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Tangentenpaare. Die Kurve C_3 hat also mit den Kegelschnitten die Eigenschaft gemeinsam, daß der Ort der Punkte, von denen rechtwinklige Tangentenpaare an dieselbe gehen, ein Kreis ist.

Nehmen wir irgend ein solches Paar $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1$, das den Durchmesserendpunkten P, P_1 zugehört, mit den bez. Mittelpunkten F und F_1 und dem gemeinschaftlichen Scheitel S (Fig. 2) und dazu eine beliebige andere Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}_2$, die dem Punkte P_2 zugehört und deren Mittelpunkt F_2, deren Scheitel S_2 heiße. Trifft dann die Gerade $\mathfrak{A}_2$ die Linien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten λ und λ_1, so ist, da die Sehne $F\ F_2 = \frac{P\ P_2}{2}$ ist, und die Radien der Kreise K_2 und K_1^2 sich verhalten wie $1:2$, der Grad-Bogen $\widehat{FF_2} = \widehat{PP_2}$, also ist auch der Winkel $F\ S\ F_2$ gleich dem Peripheriewinkel über $P\ P_2$ im Kreise K_1^2 und somit gleich dem Winkel $F_2\ \lambda\ F$ (oder dessen Nebenwinkel) (§ 3). Demnach ist $S\ F_2 = F_2\ \lambda$. Ebenso ist der Grad-Bogen $\widehat{F_1F_2} = \widehat{P_1P_2}$ und daher der Winkel $F_2\ S\ F_1 = F_2\ \lambda_1\ F_1$ (oder dessen Nebenwinkel), woraus folgt, daß $S\ F_2 = F_2\ \lambda_1$ ist. Also ist auch $F_2\ \lambda = F_2\ \lambda_1$. Jede Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}_2$ wird somit von irgend einem Paar in 2 Punkten λ und λ_1 getroffen, die gleichweit vom Mittelpunkte F_2 der Geraden $\mathfrak{A}_2$ abstehen. Hieraus folgt, daß, wenn wir $F_2\ T_2 = F_2\ S_2$ machen, T_2 der Berührungspunkt der Geraden $\mathfrak{A}_2$ mit der Kurve C_3 ist. Denn die Fuß-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

punktenlinie $\mathfrak{A}_3$, die mit $\mathfrak{A}_2$ ein Paar bildet, ist die Normale in S_2 zu $\mathfrak{A}_2$. Jede andere Fußpunktenlinie, also auch die Nachbartangente $\mathfrak{A}'_2$ von $\mathfrak{A}_2$ an die Kurve C_3 wird vom Paare $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$ in 2 solchen Punkten geschnitten, die gleichweit vom Mittelpunkte dieser Fußpunktenlinie abstehen. Die Geraden $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}'_2$ bilden als konsekutive Tangenten der Kurve C_3 einen unendlich kleinen Winkel mit einander, folglich ist auch der Bogen, den die zu den Geraden $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}'_2$ gehörenden Punkte P_2 und P'_2 des Kreises K_1^2 begrenzen, und deshalb der Bogen F_2 F'_2 zwischen den Mittelpunkten der beiden Fußpunktenlinien auf dem Kreise K^2 unendlich klein. Es liegt also der Punkt P'_2 dem Punkte P_2, der Punkt F'_2 dem Punkt F_2 und somit der Scheitel S'_2 der Geraden $\mathfrak{A}'_2$ dem Scheitel S_2 der Geraden $\mathfrak{A}_2$ unendlich nahe. Da nun $\mathfrak{A}'_2$ von der senkrechten Richtung zu $\mathfrak{A}_3$ unendlich wenig abweicht, so ist der Schnitt der Geraden $\mathfrak{A}'_2$ mit $\mathfrak{A}_3$ der Punkt $S'_2 = S_2$. Der Schnitt der Geraden $\mathfrak{A}'_2$ mit $\mathfrak{A}_2$ d. i. der Berührungspunkt der beliebigen Geraden $\mathfrak{A}_2$ mit der Kurve C_3 ist demnach der Punkt T_2, der ebensoweit von $F'_2 = F_2$ absteht als der Punkt S_2.

§ 5.

Verbindet man den gemeinsamen Scheitel S eines Paares $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ mit dem Höhenpunkt H_1 des Dreiecks A_1 B_1 C_1, und ist P_4 derjenige Schnitt dieser Verbindungslinie mit K_1^2, der zu S so liegt, daß $M_1 P_4 \parallel M S$ und somit $H_1 S = S P_4$ ist, so gehört zu P_4 eine Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}_4$, die S zum Mittelpunkte hat; und die Normale zu der Geraden in ihrem Scheitel S_4 ist die Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}_5$, die mit $\mathfrak{A}_4$ ein Paar bildet. Trifft die Gerade $\mathfrak{A}_5$ die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten T und T_1, so ist, wenn F_5 der Mittelpunkt von $\mathfrak{A}_5$ ist, $F_5 T = F_5 T_1 = F_5 S$ (§ 4). Folglich ist $\sphericalangle F_5 S T = F_5 T S$; und da Dreieck F M S gleichschenklig ist, so ist $\sphericalangle S F F_1 = F S M = F S F_5$, weil $S F_5$ ein Durchmesser des Kreises K^2 ist. Also ist $F F_1 \parallel F_5 S_4$, und somit $F T = F S$, und $F_1 T_1 = F_1 S$ d. h. T und T_1 sind die Berührungspunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ mit der Kurve C_3 (§ 4). Also die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Geraden eines Paares ist allemal wieder eine Tangente der Kurve C_3, und diejenige Gerade, die mit letzterer ein Paar bildet, geht durch den Scheitel des ersten Paares.

Die Berührungssehne T T_1 hat eine konstante Länge. Es ist nämlich $T T_1 = 2 F F_1 = 4 r = 2 r_1$, wo r und r_1 die Radien der Kreise K^2 und K_1^2 sind. Die Kurve C_3 schneidet also jede ihrer Tangenten (außer im Berührungspunkte) in 2 Punkten, deren Abstand von einander konstant und zwar gleich dem Durchmesser des Kreises K_1^2, oder gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises K^2 ist, und die Tangenten in diesen Schnitten bilden allemal ein Paar.

Auch jede andere Gerade trifft die C_3 in 4 und nur in 4 Punkten. Um dieses zu erkennen, betrachten wir die Punktsysteme, die die Tangenten der C_3 auf einer beliebigen Geraden X einschneiden. Wird die Gerade X von einer Geraden $\mathfrak{A}$ im Punkte y geschnitten, und nennen wir y_1 den Schnittpunkt von X mit $\mathfrak{A}_1$, so ist, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ ein Paar bilden, y_1 durch y bestimmt, y_1 dem Punkte y zugeordnet. Wird die Gerade X von der Geraden $\mathfrak{A}_5$, die durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ geht, in y_5 und von der Geraden $\mathfrak{A}_4$, die durch den Scheitel S des Paares $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ geht und senkrecht zu $\mathfrak{A}_5$ ist, in y_4 getroffen, so sind auch die Punkte y_4 und y_5 durch den Punkt y auf X eindeutig bestimmt, also dem Punkte y zugeordnet. Jedem Punkte y entsprechen also drei Punkte y_1, y_4, y_5. Da umgekehrt durch die Geraden $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_1$, die durch die Punkte y_5, y_4, y_1 hindurchgehen, die Gerade $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt ist, so ist den drei Punkten y_5, y_4, y_1 eindeutig der Punkt y zugeordnet. Wir erhalten somit auf der Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

X zwei Punktsysteme, die in einer ein- dreideutigen Beziehung stehen, d. h. jedem Punkte der ersten Reihe entsprechen 3 Punkte der zweiten Reihe, und durch 3 zusammengehörige Punkte der zweiten Reihe ist eindeutig ein Punkt der ersten Reihe bestimmt. Nach Chales Korrespondenzprinzip fallen $(1 + 3)$ mal entsprechende Punkte zusammen, d. h. die Gerade x trifft die Kurve im allgemeinen in 4 Punkten. **Also ist die Kurve dritter Klasse von der vierten Ordnung.**

§ 6.

Errichtet man in den Berührungspunkten T und T_1 der Geraden eines Paares $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1$ die Normalen zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche sich in Q treffen, und fällt von Q das Lot $Q\,T_5$ auf $T\,T_1$, so ist, da ja Q S die Gerade $T\,T_1$, als Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}_5$, in ihrem Mittelpunkte F_5 trifft, $\triangle\, Q\, T_5\, F_5 \cong S\, F_5\, S_4$, wo S_4 der Scheitel von $\mathfrak{A}_5$ ist; folglich ist $F_5\, T_5 = F_5\, S_4$, daher ist F_5 der Berührungspunkt der Geraden A_5 mit der Kurve C_3^4 (§ 4). Hieraus ergiebt sich der Satz: **Errichtet man in dem Berührungspunkte und in den Schnittpunkten einer Tangente der C_3^4 mit der C_3^4 die Normalen, so treffen sich diese stets in einem Punkte Q.** — Nun ist $M\,Q = 3\,M\,F_5 = 3\,r$; also liegt der Punkt Q auf einem Kreise $\mathfrak{K}^2$, der mit K^2 konzentrisch ist und einen dreimal so großen Radius als K^2 hat.

Nach § 3 ist $G\infty$ eine Doppeltangente unserer Kurve C_3^4. Die Berührungspunkte der $G\infty$ mit der Kurve C_3^4 können wir jetzt genauer angeben. Jede Tangente der C_3^4 wird außer im Berührungspunkte noch in 2 Punkten von der Kurve getroffen. Beide Punkte haben vom Mittelpunkte der Tangente gleichen Abstand (§ 5). Daraus folgt, daß bei einer Doppeltangente der C_3^4 die Berührungspunkte mit den dieser Doppeltangente zukommenden Mittelpunkten zusammenfallen müssen. Denn fassen wir die Doppeltangente, die ja aus zwei zusammenfallenden Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bestehend zu denken ist, als Gerade $\mathfrak{A}$ auf und nennen den einen Berührungspunkt etwa y, so muß die Gerade $\mathfrak{A}$ die Kurve noch in 2 Punkten treffen, die gleichweit von dem der Geraden $\mathfrak{A}$ zukommenden Mittelpunkt abstehen. Und da die beiden weiteren Schnitte der Geraden $\mathfrak{A}$ und C_3^4 in dem zweiten Berührungspunkt y' zusammenfallen, so muß dieser zweite Berührungspunkt der Mittelpunkt der Geraden $\mathfrak{A}$ sein; ebenso muß der erste Berührungspunkt y mit dem Mittelpunkte der Geraden $\mathfrak{A}'$ zusammenfallen. Nun sind offenbar die Mittelpunkte der $G\infty$ als doppelte Gerade $\mathfrak{A}$ gedacht, ihre Schnitte mit K^2, also die beiden imaginären Kreispunkte J und J'. **Folglich berührt die $G\infty$ die Kurve C_3^4 in den Punkten J und J'.**

§ 7.

Sind die Schnitte der Seiten des Dreiecks $A_1\, B_1\, C_1$ mit K^2 beziehlich A, $\mathfrak{a}$; B, $\mathfrak{b}$; C, $\mathfrak{c}$ (Fig. 3), so ist mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Bogen:

$$\overset{\frown}{C\mathfrak{c}} + \overset{\frown}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\mathfrak{b}} + \overset{\frown}{\mathfrak{b}B},$$

$$\overset{\frown}{A\mathfrak{b}} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} + \overset{\frown}{\mathfrak{a}A}, \text{ also}$$

$$\overset{\frown}{C\mathfrak{c}} + \overset{\frown}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = \overset{\frown}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} + \overset{\frown}{\mathfrak{a}A} + \overset{\frown}{\mathfrak{b}B},$$

$$\overset{\frown}{C\mathfrak{c}} = \overset{\frown}{\mathfrak{a}A} + \overset{\frown}{\mathfrak{b}B}. \text{ Ferner ist}$$

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{A\mathfrak{b}} = \overset{\frown}{\mathfrak{c}A}, \text{ folglich}$$

$$\overset{\frown}{BC} + \tfrac{1}{3}\,\overset{\frown}{C\mathfrak{c}} + \tfrac{1}{3}\,\overset{\frown}{\mathfrak{b}B} = \overset{\frown}{A\mathfrak{b}} + \tfrac{1}{3}\,\overset{\frown}{\mathfrak{a}A} + \tfrac{2}{3}\,\overset{\frown}{\mathfrak{b}B} = \overset{\frown}{\mathfrak{c}A} + \tfrac{1}{3}\,\overset{\frown}{A\mathfrak{a}} + \tfrac{2}{3}\,\overset{\frown}{C\mathfrak{c}}.$$

Wird also von den über den Seiten des Dreiecks $A_1\, B_1\, C_1$ liegenden Bogen A $\mathfrak{a}$, B $\mathfrak{b}$, C $\mathfrak{c}$ von den Mitten A, B, C dieser Seiten aus durch die Punkte U, V, W je ein Drittel

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

abgeschnitten, so daß $\widehat{A\,U} = \frac{1}{3}\,\widehat{A\,a}$. $\widehat{B\,V} = \frac{1}{3}\,\widehat{B\,b}$, $\widehat{C\,W} = \frac{1}{3}\,\widehat{C\,c}$ ist, so teilen die Punkte U, V, W die Peripherie des Kreises K^2 in 3 gleiche Teile, so daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks U V W sind. Es ist nämlich

$$\widehat{U\,V} = \tfrac{1}{3}\,\widehat{a\,A} + \widehat{A\,b} + \tfrac{2}{3}\,\widehat{b\,B},$$
$$\widehat{V\,W} = \tfrac{1}{3}\,\widehat{b\,B} + \widehat{B\,C} + \tfrac{1}{3}\,\widehat{C\,c},$$
$$\widehat{W\,U} = \tfrac{2}{3}\,\widehat{C\,c} + \widehat{c\,A} + \tfrac{1}{3}\,\widehat{A\,a}.$$

Ein besonderes Interesse verdienen die Fußpunktenlinien u, v, w, die beziehlich die Punkte U, V, W zu Mittelpunkten haben. Die Fußpunktenlinie u, die U zum Mittelpunkt hat, gehört zum Punkte P_u des Kreises K_1^2, den wir erhalten, wenn wir zu M U den gleichgerichteten parallelen Radius $M_1\,P_u$ des Kreises K_1^2 ziehen. Der Winkel, den die Gerade u mit einer Dreiecksseite etwa $B_1\,C_1$ bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im Kreise K_1^2 über dem Bogen $P_u\,A_1'$, wenn der Punkt A_1' der Punkt des Kreises K_1^2 ist, dem die Gerade $B_1\,C_1$ als Fußpunktenlinie zugehört (§ 3). Die Fußpunktenlinie $B_1\,C_1$ hat den Punkt A zum Mittelpunkt, also ist der Winkel, den u mit $B_1\,C_1$ bildet, auch gleich dem Peripheriewinkel im Kreise K^2 über dem Bogen A U. Zieht man nun in U die Tangente an K^2, welche $B_1\,C_1$ in x trifft, so ist $\sphericalangle\,(180^0 - a\,U\,x) = \frac{1}{2}\,U\,M\,a = U\,M\,A = U\,x\,a + U\,a\,x = U\,x\,a + \frac{1}{2}\,U\,M\,A$: folglich ist $U\,x\,a = \frac{1}{2}\,U\,M\,A$. Demnach ist die Tangente in U an K^2 die Fußpunktenlinie u, die U zum Mittelpunkt hat. Ebenso zeigt sich, daß die Fußpunktenlinien v und w, welche beziehlich V und W zu Mittelpunkten haben, die Tangenten in V und W an den Kreis K^2 sind. Diejenigen Fußpunktenlinien u_1, v_1, w_1, die mit u, v, w bez. ein Paar bilden, sind Durchmesser des Kreises K^2. Hieraus ergiebt sich, daß nicht mehr Fußpunktenlinien den Kreis K^2 berühren können, da durch den Mittelpunkt M des Kreises K^2 nur 3 Tangenten an unsere Kurve C_3^4, d. i. 3 Fußpunktenlinien hindurchgehen. Bei den Geraden u, v, w fallen Mittelpunkt und Scheitel und deshalb auch der Berührungspunkt mit der Kurve C_3^4 (s. § 4) zusammen im Punkte U bez. V und W. Also berührt die Kurve C_3^4 den Kreis K^2 in den Punkten U, V, W. Da bei allen anderen Fußpunktenlinien Mittelpunkt und Scheitel getrennte Punkte sind, so liegen bei denselben die Berührungspunkte mit der Kurve C_3^4 stets außerhalb des Kreises K^2. Die Kurve C_3^4 nähert sich also in den Punkten U, V, W dem Kreise K^2 am meisten, so daß diese Punkte auch Scheitel der Kurve C_3^4 sind.

Die Fußpunktenlinie u_1 die mit u ein Paar bildet, hat zum Mittelpunkte ihren zweiten Schnitt U_1 mit dem Kreise K^2 und da $U_1\,U = 2\,r$ ist, so hat der Berührungspunkt U_2 der Geraden u_1 mit der Kurve C_3^4 von U den Abstand 4 r, liegt also auf dem oben in § 6 erwähnten Kreise $\mathfrak{K}^2$. Ebenso liegen die Berührungspunkte V_2, W_2 der Geraden v_1, w_1 mit C_3^4 auf dem Kreise $\mathfrak{K}^2$. Da ferner jede Fußpunktenlinie außer im Berührungspunkte von der C_3^4 noch in 2 Punkten getroffen wird, die gleichweit von ihrem Mittelpunkte abstehen (§ 4 und 5), so muß, da $U\,U_1 = U_1\,U_2$, $V\,V_1 = V_1\,V_2$, $W\,W_1 = W_1\,W_2$ ist, bei den Geraden u_1, v_1, w_1 ein solcher Schnitt jedesmal mit dem Berührungspunkte U_2 bez. V_2, W_2 zusammenfallen, so daß die Geraden u_1, v_1, w_1 beziehlich in den Punkten U_2, V_2, W_2 mit der Kurve C_3^4 3 aufeinanderfolgende Punkte gemeinsam haben.

Die Tangente u im Punkte U der Kurve C_3^4 trifft die Kurve noch in 2 Punkten $\lambda\,\lambda_1$, die vom Mittelpunkte U der Geraden u gleichweit abstehen (§ 4). Die Punkte sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die ein Paar bilden und ihren gemeinsamen Scheitel im

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mittelpunkte U_1 der mit u ein Paar bildenden Tangente u_1 haben. Die Punkte λ und λ_1 haben von einander den Abstand 4 r (§ 5). Die Geraden $U_1 \lambda$ und $U_1 \lambda_1$ sind also Tangenten unserer Kurve C_3^4. Ebenso finden wir auf den Tangenten v, w die weiteren Schnitte mit der Kurve C_3^4, indem wir die Punkte μ, μ_1 bez. ν, ν_1 aufsuchen, die von V bez. W den Abstand 2 r haben. Die Linien $V_1 \mu$, $V_1 \mu_1$, $W_1 \nu$, $W_1 \nu_1$ sind weitere Tangente der Kurve C_3^4.

§ 8.

Die Geraden M U_2, M V_2, M W_2 berühren die Kurve C_3^4 in den Punkten U_2, V_2, W_2 und haben außerdem noch einen dritten Punkt dort mit der Kurve gemeinsam. Die 3 Punkte U_2, V_2, W_2 sind daher besondere Punkte der C_3^4. Um die Punkte näher zu charakterisieren, stellen wir folgende Betrachtung an: Wir suchen den Punkt P des Kreises K_1^2, der der Geraden M U als Fußpunktenlinie zugehört, indem wir den Höhenpunkt H_1 des Dreiecks A_1 B_1 C_1 mit dem Mittelpunkt U_1 der Fußpunktenlinie M U_2 (Fig. 4) verbinden und den Schnitt P dieser Linie mit K_1^2 aufsuchen, so daß $M_1 P \parallel M U_1$ ist (§ 1). Dann nehmen wir in der Nähe von P zu beiden Seiten auf K_1^2 2 Punkte P_1, P_2, so daß $\widehat{P_1 P} = \widehat{P P_2}$ ist, und suchen zu P und P_2 die Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Diese bilden mit M U_2 Winkel, die gleich dem Peripheriewinkel über $\widehat{P_1 P}$ bez. $\widehat{P P_2}$ sind und liegen auf verschiedenen Seiten von M U_2, da die Punkte P_1 und P_2 zu verschiedenen Seiten von P gewählt sind. Die Berührungspunkte T_1, T_2 der Geraden $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ mit der Kurve C_3^4 findet man, indem man auf denselben von ihren resp. Mittelpunkten F_1, F_2 den Abstand von Scheitel und Mittelpunkt nach der entgegengesetzten Seite hin abträgt (§ 4). Sind die resp. Scheitel S_1 und S_2, so sind S_1 F_1 und S_2 F_2 Sehnen des Kreises K^2 und kleiner als 2 r; folglich liegen die Punkte T_1 und T_2 stets innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}^2$. Rücken die Punkte P_1 und P_2 gleichmäßig dem Punkte P näher, so werden die Peripheriewinkel über den Bogen P_1 P und P P_2 stets kleiner. Dementsprechend werden auch die Winkel, die die zu den Punkten P_1 und P_2 gehörenden Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ mit M U_2 bilden, stets kleiner. Die Sehnen S_1 F_1 und S_2 F_2 nähern sich immer mehr dem Mittelpunkte, werden also stets größer; damit werden auch die Abstände der Punkte T_1 und T_2 von S_1 und S_2 immer größer. Die Punkte T_1 und T_2 nähern sich immer mehr der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}^2$ und der Geraden M U_2. Fallen P_1 und P_2 mit P zusammen, so fallen die Punkte T_1 und T_2 mit dem Berührungspunkte U_2 der Geraden M U_2 zusammen. Die Kurve C_3^4 nähert sich somit der Geraden M U_2 von beiden Seiten in zwei Zweigen, die sich im Punkte U_2 vereinigen. Da außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}^2$ keine reellen Punkte der C_3^4 mehr liegen, so muß U_2 eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt der Kurve C_3^4, und die Gerade M U_2 eine Rückkehrtangente sein. Ebenso findet man, daß V_2, W_2 Rückkehrpunkte, M V_2, M W_2 Rückkehrtangenten der C_3^4 sind. Die Fußpunktenlinien, die zu zwei Punkten P_1 und P_2 gehören, die von P zu beiden Seiten gleichweit abstehen, liegen symetrisch zu M U_2, also auch deren Berührungspunkte T_1 und T_2 mit C_3^4. Folglich liegen die beiden Zweige der Kurve, die sich einer Rückkehrtangente nähern, symetrisch zu derselben.

§ 9.

Nehmen wir eine der drei Rückkehrtangenten und die mit ihr ein Paar bildende Gerade zu Axen eines Koordinatensystemes; sei also die Tangente in U die Y-axe, die Gerade U U_2 die X-axe. Nehmen wir dann irgend eine andere Tangente $\mathfrak{A}_1$ der Kurve C_3^4, die in T_1 berührt, den Punkt F_1 zum Mittelpunkt und S_1 zum Scheitel hat, so hat T_1 die Koordinaten: $x = z\,T_1$, $y = U\,z$, wenn wir mit z den Fußpunkt des Lotes von T_1 auf die Y-axe bezeichnen. Nennen wir den Winkel, den die Tangente $\mathfrak{A}_1$ mit der X-axe bildet, φ und den Schnitt von $\mathfrak{A}_1$ mit $U\,U_2$ etwa O, so ist:

$$x = U\,O - O\,T_1 \cos\varphi, \text{ und } y = O\,T_1 \sin\varphi.$$

Nun ist: $O\,T_1 = O\,F_1 - T_1\,F_1 = F_1\,U - F_1\,S_1$ (§ 4),

$O\,T_1 = 2\,r\cos\varphi - 2\,r\cos 3\,\varphi$, da der Winkel $M\,F_1\,S_1 = 3\,\varphi$ ist. Ferner ist, wenn wir von F_1 auf $U\,U_2$ das $F_1\,\sigma$ fällen,

$$U\,O = 2\,U\,\sigma = 2\,F_1\,U.\cos\varphi = 4\,r\cos^2\varphi.$$

Demnach ist:
$$x = 4\,r\cos^2\varphi - (2\,r\cos\varphi - 2\,r\cos 3\,\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = (2\,r\cos\varphi - 2\,r\cos 3\,\varphi)\sin\varphi; \text{ oder}$$
$$x = 4\,r\cos^2\varphi\,(1 - 2\sin^2\varphi),$$
$$y = 8\,r\sin^3\varphi.\cos\varphi.$$

Dies sind die Gleichungen unserer Kurve. — Bewegt sich die beliebig herausgekommene Tangente $\mathfrak{A}_1$ längs der Kurve, so durchläuft der Punkt T_1 die Kurve C_3^4; dabei bewegt sich φ zwischen den Grenzen 0^0 und 180^0. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes T erhält man, indem man in obige Gleichungen für φ irgend einen Werth zwischen 0^0 und 180^0 einsetzt.

Ist $\varphi = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0$, so ist

$$x = 4\,r, \frac{3\,r}{2}, 0, -\frac{r}{2}, 0, -\frac{r}{2}, 0, \frac{3\,r}{2}, 4\,r,$$

$$y = 0, \frac{r\sqrt{3}}{2}, 2\,r, \frac{3\,r\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{3\,r\sqrt{3}}{2}, -2\,r - \frac{r\sqrt{3}}{2}, 0.$$

Die Kurve trifft die X-axe und Y-axe je dreimal. Dieselbe geht durch die Punkte U_2, W, V_2, U, W_2, V und kehrt nach U_2 zurück. Zwischen W und V_2 und W_2 und V schneidet die Kurve die Y-axe in 2 Punkten, die vom Anfangspunkt den Abstand 2 r haben (vergl. § 7). Im Anfangspunkt U berührt die Kurve die Y-axe, da die Abcisse aus dem Negativen kommend Null wird und sofort wieder ins Negative zurückgeht.

§ 10.

Haben die Endpunkte einer Sehne $P\,P_1$ der Kurve C_3^4 die Koordinaten $(x\,y)$, $(x_1\,y_1)$, so ist $s^2 = P\,P_1^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2$, also $s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$. Sind P und P_1 zwei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve, so geht s über in d s, $(x - x_1)$ in d x, $(y - y_1)$ in d y, und man erhält $d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$.

Nun ist:
$$d\,x = \left[-8\,r\sin\varphi\cos\varphi\,(1-2\sin^2)\,\varphi - 16\,r\cos\varphi\sin\varphi\right]d\,\varphi,$$
$$d\,y = \left[24\,r\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 8\,r\sin^4\varphi\right]d\,\varphi; \text{ oder}$$
$$d\,x = -8\,r\sin\varphi\cos\varphi\,(3\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi)\,d\,\varphi,$$
$$d\,y = 8\,r\sin^2\varphi\,(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\,\varphi.$$

Also
$$d\,s = \sqrt{64\,r^2\sin^2\varphi\,(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2.(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\,\varphi^2},$$
$$= \pm\,8\,r\sin\varphi\,(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).\,d\,\varphi.$$

Bezeichnen wir die Länge des Kurvenbogens von U_2 bis W mit L, so ist

$$L = \pm\,8\,r\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\sin\varphi\,(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\,\varphi,$$

$$= \pm\,8\,r\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\sin\varphi\,(4\cos^2\varphi - 1)\,d\,\varphi; \text{ oder}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$L = \pm 8\, r \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} 4 \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \mp 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \sin\varphi \, d\varphi; \text{ alſo}$$

$$L = \pm 8\, r \left[-\tfrac{4}{3} \cos^3 0 + \tfrac{4}{3} \cos^3 \tfrac{\pi}{6} + \cos 0 - \cos \tfrac{\pi}{6} \right] = \mp \tfrac{8}{3}\, r.$$

Offenbar iſt aber der Bogen L $\frac{1}{6}$ der ganzen Länge der Kurve, da die Kurve ſymetriſch zu den 3 Rückkehrtangenten liegt; mithin beträgt die ganze Länge der Kurve 16 r; die Länge einer Seite des Kurvendreiecks iſt $5\frac{1}{3}$ r.

§ 11.

Um den Flächeninhalt des vom Kurvenbogen U_2 W, dem von W auf M U_2 gefällten Lote W D und U_2 D begrenzten Flächenſtücks zu berechnen, zerſchneiden wir das Flächenſtück parallel der Y-axe in unendlich dünne Streifen. Haben die Punkte P, P_1 des Bogens U_2 W die Koordinaten (x y) (x_1, y_1), ſo iſt der Inhalt des von den Ordinaten, der Abciſſenaxe und dem Kurvenſtück eingeſchloſſenen Flächenſtücks: $(x - x_1)\, y$ unter der Vorausſetzung, daß P und P_1 einander ſehr nahe liegen, ſo daß die Fläche als ſchmales Rechteck angeſehen werden kann. Liegen die Punkte unendlich nahe, ſo geht $x - x_1$ in d x über, und der Inhalt des elementaren Streifens iſt y. d x. Der Inhalt des ganzen Flächenſtückes iſt ſomit $Fl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y.\, dx$.

Es iſt $y = 8\, r \sin^3 .\cos\varphi$,

$dx = -8\, r \cos\varphi .\sin\varphi\, (3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi$,

folglich $Fl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} -64\, r^2 \cos^2\varphi \sin^4\varphi\, (3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi$,

$$Fl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} -64\, r^2 \cos^2\varphi \sin^4\varphi\, (4\cos^2\varphi - 1)\, d\varphi,$$

$$Fl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \left[64\, r^2 \cos^2\varphi \sin^4\varphi - 16\, {}^2r \sin^4 (2\varphi)\right] d\varphi,$$

$$Fl = 64\, r^4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \cos^2\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi - 16\, r^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi.$$

Betrachten wir nun zuerſt das unbeſtimmte Integral $\int \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi$. Es iſt

$$\int \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi = \int \sin^3 (2\varphi) .\sin (2\varphi)\, d\varphi = -\tfrac{1}{2} \cos (2\varphi) \sin^3 (2\varphi) + 3 \int \sin^2 (2\varphi) \cos^2 (2\varphi)\, d\varphi,$$

$$\int \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi = -\tfrac{1}{2} \cos (2\varphi) \sin^3 (2\varphi) + 3 \int \sin^2 (2\varphi) \left(1 - \sin^2 (2\varphi)\right) d\varphi,$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cos (2\varphi) \sin^3 (2\varphi) + 3 \int \sin^2 (2\varphi)\, d\varphi - 3 \int \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi,$$

$$4 \int \sin^4 (2\varphi)\, d\varphi = -\tfrac{1}{2} \cos (2\varphi) \sin^3 (2\varphi) + 3 \int \sin^2 (2\varphi)\, d\varphi.$$

Nun iſt $\int \sin^2 (2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} \int \left(1 - \cos (4\varphi)\right) d\varphi$,

$$\int \sin^2 (2\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{8} \sin (4\varphi).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also ergiebt sich:

$$4 \int \sin^4 (2\,\varphi)\, d\,\varphi = -\tfrac{1}{2} \cos (2\,\varphi).\ \sin^3 (2\,\varphi) - \tfrac{3}{8} \sin (4\,\varphi) + \tfrac{3}{2}\,\varphi,$$

$$\int \sin^4 (2\,\varphi)\, d\,\varphi = -\tfrac{1}{8} \cos (2\,\varphi).\ \sin^3 (2\,\varphi) - \tfrac{3}{16} \sin (2\,\varphi).\ \cos (2\,\varphi) + \tfrac{3}{8}\,\varphi,$$

$$\int \sin^4 (2\,\varphi)\, d\,\varphi = -\left[\tfrac{1}{8} \sin^3 (2\,\varphi) + \tfrac{3}{16} \sin (2\,\varphi)\right] \cos (2\,\varphi) + \tfrac{3}{8}\,\varphi.$$

Für das Integral $\int \sin^4 \varphi.\ \cos^2 \varphi.\ d\,\varphi$ ergiebt sich folgendes. Es ist:

$$\int \sin^4 \varphi.\ \cos^2 \varphi.\ d\,\varphi = -\frac{\sin^3 \varphi.\ \cos^3 \varphi}{3} + \int \sin^2 \varphi.\ \cos^4 \varphi.\ d\,\varphi,$$

und da $\sin^2 \varphi.\ \cos^4 \varphi = \sin^2 \varphi\,(1 - \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi.\ \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi.\ \cos^2 \varphi$ ist, so ist

$$\int \sin^4 \varphi.\ \cos^2 \varphi\ d\,\varphi = -\frac{\sin^3 \varphi.\ \cos^3 \varphi}{3} + \int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\,\varphi - \int \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi\, d\,\varphi,$$

folglich $2 \int \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi\ d\,\varphi = -\dfrac{\sin^3 \varphi.\ \cos^3 \varphi}{3} + \int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.\ d\,\varphi$, oder

$$\int \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi\ d\,\varphi = -\frac{\sin^3 \varphi.\ \cos^3 \varphi}{6} + \tfrac{1}{2} \int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\ d\,\varphi.$$

Es ist aber $\int \sin^2 \varphi.\ \cos^2 \varphi\ d\,\varphi = \int \sin^2 \varphi\,(1 - \sin^2 \varphi)\, d\,\varphi = \int \sin^2 \varphi\ d\,\varphi - \int \sin^4 \varphi\, d\,\varphi.$

Ferner ist $\int \sin^4 \varphi.\ d\,\varphi = -\tfrac{1}{4} \cos \varphi.\ \sin^3 \varphi + \tfrac{3}{4} \int \sin^2 \varphi\ d\,\varphi$, also

$$\int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.\ d\,\varphi = \tfrac{1}{4} \cos \varphi.\ \sin^3 \varphi + \tfrac{1}{4} \int \sin^2 \varphi.\ d\,\varphi,$$
$$= \tfrac{1}{4} \cos \varphi.\ \sin^3 \varphi + \tfrac{1}{8}\,\varphi - \tfrac{1}{16} \sin (2\,\varphi).$$

Somit ist $\int \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi\ d\,\varphi = -\dfrac{\sin^3 \varphi.\ \cos^3 \varphi}{6} + \tfrac{1}{8} \cos \varphi.\sin^3 \varphi - \tfrac{1}{32} \sin (2\,\varphi) + \dfrac{\varphi}{16},$

$$= \left(\frac{\sin^5 \varphi}{6} - \frac{\sin^3 \varphi}{24} - \frac{\sin \varphi}{16}\right) \cos \varphi + \frac{\varphi}{16}.$$

Setzt man die für die Intergrale gefundenen Werte in die Flächengleichung ein, so ergiebt sich

$$\mathrm{Fl} = 64\ r^2 \left[- \cos \tfrac{\pi}{6} \left(\frac{\sin^5 \frac{\pi}{6}}{6} - \frac{\sin^3 \frac{\pi}{6}}{24} - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{6}}{16}\right) - \tfrac{1}{16}\,\tfrac{\pi}{6}\right]$$
$$- 16\ r^2 \left[\left(\tfrac{1}{8} \sin^3 \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{3}{16} \sin \tfrac{\pi}{3}\right) \cos \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{3}{8}\,\tfrac{\pi}{6}\right],$$
$$\mathrm{Fl} = \frac{r^2\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\, r^2.$$

Das Flächenstück U_2 W D hat also einen Flächeninhalt gleich $\dfrac{r^2\,\pi}{3} - \dfrac{r^2 \sqrt{3}.}{8}$. Die verlängerte W D trifft den Kreis K^2 zum zweitenmale in V. Das Flächenstück U_2 V D ist kongruent dem Flächenstück U_2 W D, da ja die Kurve zur Geraden M U_2 symetrisch liegt; folglich ist das Flächenstück U_2 W V $= \dfrac{2\, r^2\, \pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, r^2$. Von derselben Größe sind die Flächenstücke V_2 U W und W_2 U V. Der Inhalt des Dreiecks U V W ist $\tfrac{3}{2}$ r. W D, und da W D $= \dfrac{r. \sqrt{3}}{2}$ ist, so ist U V W $= \dfrac{3.\ r^2 \sqrt{3}.}{4}$ Der Gesamtinhalt der von der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kurve C_3^4 eingeschlossenen Fläche ist somit $J = 2\pi r^2 - \frac{3 r^2 \sqrt{3}.}{4} + \frac{3 r^2 \sqrt{3}.}{4} = 2\pi r$. Der Inhalt der Kurve ist also doppelt so groß als der Inhalt des Kreises K^2, so daß der Inhält jeder der gleichen zwischen Kreis und Kurve liegenden Arbelen $\frac{1}{3}\pi r^2$ beträgt.

§ 12.

Eine Tangente der Kurve C_3^4, die einen der drei Zweige berührt, schneidet notwendig die beiden anderen Zweige, da die Zweige der Kurve ein geschlossenes Kurvendreieck bilden und einander die konvexe Seite zukehren. Zwei zu einander rechtwinklige Tangenten können nie denselben Kurvenzweig berühren; denn die Tangenten eines Zweiges schneiden sich unter einem Winkel, der kleiner ist als der Winkel der beiden den Kurvenzweig begrenzenden Rückkehrtangenten. Diese bilden aber mit einander einen Winkel von 60°. Demnach müssen die Geraden eines Paares stets verschiedene Zweige berühren.

Ist $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ irgend ein Paar Fußpunktenlinien mit den Mittelpunkten F und F_1 (Fig. 5) und dem gemeinsamen Scheitel S, ist $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ ein zweites Paar Fußpunktenlinien mit den resp. Mittelpunkten F_2, F_3 und dem gemeinschaftlichen Scheitel S_1, und wird $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in a und d, und $\mathfrak{A}_1$ von denselben Geraden in b und c getroffen, so sind die Geraden $a\,c$, $b\,d$ allemal ein drittes Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}$, wie sich aus folgendem ergiebt. Weil $F\,F_1$, $F_2\,F_3$ Durchmesser des Kreises K^2 sind, so ist $F\,F_2\,F_1\,F_3$ ein Rechteck; ferner ist $F_1\,c = b\,F_1$, $F_3\,c = d\,F_3$ (§ 4), folglich $F_1\,F_3 \parallel b\,d$; ebenso ist $F\,d = a\,F$, $F_3\,d = c\,F_3$, also $F\,F_3 \parallel a\,c$ und da $F\,F_3 \perp F_1\,F_3$, so ist $a\,c \perp b\,d$. Ist σ der Schnitt von $a\,c$ und $b\,d$, so liegt σ auf dem Kreise K_2; denn $c\,\sigma$ ist Höhe des Dreiecks $b\,d\,c$, und K^2 ist der Feuerbach'sche Kreis zum Dreieck $b\,d\,c$. Trifft $b\,d$ den Kreis K^2 zum zweiten Mal in F', so ist F' die Mitte von $b\,d$, $F'\,b_1 = d\,F'$. Und da ferner $F\,F_3 \parallel a\,c$, also $F\,F_3 \perp b\,d$, und $F_3\,F' \parallel c\,b$, also $F_3\,F' \perp a\,d$ ist, so ist der Peripheriewinkel über dem Bogen $F\,F'$ gleich dem Winkel der beiden Graden $a\,d$ und $b\,d$ d. i. der Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$, woraus folgt, daß $b\,d \equiv \mathfrak{G}$ die zum Punkte F' als Mittelpunkt gehörende Fußpunktenlinie ist. Ebenso ist die Gerade $\mathfrak{A}\,c \equiv \mathfrak{G}_1$ die Fußpunktenlinie, die zum Gegenpunkt F'' des Punktes F' im Kreise K^2 als Mittelpunkt gehört. Wird also irgend ein Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von einem anderen Paar $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ in den Punkten a, b, c, d getroffen, so sind die Geraden $a\,c$, $b\,d$ ein drittes Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}$ oder rechtwinklige Tangenten unserer C_3^4. — Ein solches Tripel von drei Paaren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ bilden die Seiten eines vollständigen Vierecks $a\,b\,c\,d$, dessen Gegenseiten zu einander senkrecht sind. Oder die 4 Punkte a, b, c, d haben eine solche Lage zu einander, daß jeder der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreicks ist. Ein solches Tripel sind auch die Seiten und zugehörigen Höhen des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ (§ 3).

Im Viereck $a\,b\,c\,d$ ist:

$$\overline{a\,d}^2 = \overline{\sigma\,d} + \overline{\sigma\,a}^2,\quad \overline{c\,d}^2 = \overline{\sigma\,c}^2 + \overline{\sigma\,d}^2$$

$$\overline{b\,c}^2 = \overline{\sigma\,c}^2 + \overline{\sigma\,b}^2;\quad \overline{a\,b}^2 = \overline{\sigma\,a}^2 + \overline{\sigma\,b}^2;\ \text{folglich}$$

$$\overline{a\,d}^2 + \overline{b\,c}^2 = \overline{\sigma\,d}^2 + \overline{\sigma\,c}^2 + \overline{\sigma\,b}^2 + \overline{\sigma\,a}^2 = \overline{c\,d}^2 + \overline{a\,b}^2.$$

Ebenso ist $\overline{a\,c}^2 = \overline{S\,a}^2 + \overline{S\,c}^2$, $\overline{c\,d}^2 = \overline{S\,c}^2 + \overline{S\,d}^2$,

$$\overline{b\,d}^2 = \overline{S\,b}^2 + \overline{S\,d}^2;\quad \overline{a\,b}^2 = \overline{S\,a}^2 + \overline{S\,b}^2;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also $\overline{a\,c}^2 + \overline{b\,d}^2 = \overline{S\,a}^2 + \overline{S\,b}^2 + \overline{S\,c}^2 + \overline{S\,d}^2 = \overline{c\,d}^2 + \overline{a\,b}^2$.

Mithin ist: $\overline{a\,c}^2 + \overline{b\,d}^2 = \overline{a\,b}^2 + \overline{c\,d}^2 = \overline{a\,d}^2 + \overline{b\,c}^2$

Also in allen Vierecken gebildet von einem Tripel rechtwinkliger Tangentenpaare unserer Kurve C_3^4 sind die Summen der Quadrate je zweier Gegenseiten einander gleich.

Unter Berücksichtigung des Vorzeichens ist ferner:

$$\begin{aligned}
\overline{c\,b}^2 &= 4\,(F_1\,S + S\,b)^2 = 4\,(F_1\,S + S\,c)^2 = 4\,(\overline{F_1\,S}^2 + \overline{S\,b}^2 + 2.\ F_1\,S.\ S\,b) \\
&= 4\,(\overline{F_1\,S}^2 + \overline{S\,c}^2 + 2\ F_1\,S.\ S\,c), \\
\overline{d\,a}^2 &= 4\,(F\,S + S\,a)^2 = 4\,(F\,S + S\,d)^2 = 4\,(\overline{F\,S}^2 + \overline{S\,a}^2 + 2\ F\,S.\ S\,a) \\
&= 4\,(\overline{F\,S}^2 + \overline{S\,d}^2 + 2\ F\,S.\ S\,d), \\
\overline{d\,b}^2 &= 4\,(F'\,\sigma + \sigma\,d)^2 = 4\,(F'\,\sigma + \sigma\,b)^2 = 4\,(\overline{F'\,\sigma}^2 + \overline{\sigma\,d}^2 + 2\ F'\,\sigma.\ \sigma\,d) \\
&= 4\,(\overline{F'\,\sigma}^2 + \overline{\sigma\,b}^2 + 2\ F'\,\sigma.\ \sigma\,b.), \\
\overline{c\,a}^2 &= 4\,(F''\,\sigma + \sigma\,a)^2 = 4\,(F''\,\sigma + \sigma\,c)^2 = 4\,(\overline{F''\,\sigma}^2 + \overline{\sigma\,a}^2 + 2\ F''\,\sigma.\ \sigma\,a) \\
&= 4\,(\overline{F''\,\sigma}^2 + \overline{\sigma\,c}^2 + 2\ F''\,\sigma.\ \sigma\,c), \\
\overline{c\,d}^2 &= 4\,(F_3\,S_1 + S_1\,d)^2 = 4\,(F_3\,S_1 + S_1\,c)^2 = 4\,(\overline{F_3\,S_1}^2 + \overline{S_1\,d}^2 + 2\,F_3\,S_1.\ S_1\,d) \\
&= 4\,(\overline{F_3\,S_1}^2 + \overline{S_1\,c}^2 + 2\,F_3\,S_1.\ S_1\,c), \\
\overline{a\,b}^2 &= 4\,(F_2\,S_1 + S_1\,b)^2 = 4\,(F_2\,S_1 + S_1\,a)^2 = 4\,(\overline{F_2\,S_1}^2 + \overline{S_1\,b}^2 + 2\,F_2\,S_1.\ S_1\,b) \\
&= 4\,(\overline{F_2\,S_1}^2 + \overline{S_1\,a}^2 + 2\,F_2\,S_1.\ S_1\,a)\cdot
\end{aligned}$$

Da $\overline{F_1\,S}^2 + \overline{F\,S}^2 = 4\,r^2$ und $\overline{S\,b}^2 + \overline{S\,a}^2 = \overline{a\,b}^2$ ist, und gleiches von den ähnlichen Größen gilt, so erhalten wir durch Addition

$$\begin{aligned}
\overline{c\,b}^2 + \overline{d\,a}^2 &= 4\,[4\,r^2 + \overline{a\,b}^2 + 2\,(F_1\,S.\ S\,b + F\,S.\ S\,a)] \\
&= 4\,[4\,r^2 + \overline{c\,d}^2 + 2\,(F_1\,S.\ S\,c + F\,S.\ S\,d)], \\
\overline{d\,b}^2 + \overline{c\,a}^2 &= 4\,[4\,r^2 + \overline{a\,d}^2 + 2\,(F'\,\sigma.\ \sigma\,d + F''\,\sigma.\ \sigma\,a)] \\
&= 4\,[4\,r^2 + \overline{b\,c}^2 + 2\,(F'\,\sigma.\ \sigma\,b + F''\,\sigma.\ \sigma\,c)], \\
\overline{c\,d}^2 + \overline{a\,b}^2 &= 4\,[4\,r^2 + \overline{b\,d}^2 + 2\,(F_3\,S_1.\ S_1\,d + F_2\,S_1.\ S_1\,b)] \\
&= 4\,[4\,r^2 + \overline{a\,c}^2 + 2\,(F_3\,S_1.\ S_1\,c + F_2\,S_1.\ S_1\,a)].
\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Summe der Quadrate der Seiten des vollständigen Vierecks a b c d mit Σ, so erhält man durch weitere Addition:

$$\begin{aligned}
2\,\Sigma = 4\,\Sigma + 96\,r^2 + 8\,[&F_1\,S\,(S\,b + S\,c) + F\,S\,(S\,a + S\,d) + F'\,\sigma\,(\sigma\,d + \sigma\,b) \\
&+ F''\,\sigma\,(\sigma\,a + \sigma\,c) + F_3\,S_1\,(S_1\,d + S_1\,c) + F_2\,S_1\,(S_1\,b + S_1\,a)].
\end{aligned}$$

Wenn wir die Berührungspunkte der Tangenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ der Reihe nach T, T_1, T_2, T_3, τ', τ'' nennen, so ist (§ 4):

$$\begin{aligned}
-\,2\,\Sigma = 96\,r^2 + 8\,[&F_1\,S.\ S\,T_1 + F\,S.\ S\,T + F'\,\sigma.\ \sigma\,\tau' + F''\,\sigma.\ \sigma\,\tau'' \\
&+ F_3\,S_1.\ S_1\,T_3 + F_2\,S_1.\ S_1\,T_2], \text{ oder}
\end{aligned}$$

$$-\,2\,\Sigma = 96\,r^2 + 8\,[-\tfrac{1}{2}\,\overline{S\,T_1}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{S\,T}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{\sigma\,\tau'}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{\sigma\,\tau''}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{S_1\,T_3}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{S_1\,T_2}^2]\cdot$$

Da nun $\overline{S\,T}^2 + \overline{S\,T_1}^2 = \overline{T\,T_1}^2 = 16\,r^2$ ist (§ 5), und von den ähnlichen Größen dasselbe gilt, so ist

$$-2\,\Sigma = 96\,r^2 - 8.\,24\,r^2 = -96\,r^2, \text{ also}$$
$$\Sigma = 48\,r^2. \text{ Folglich}$$
$$\overline{c\,b}^2 + \overline{d\,a}^2 = \overline{c\,d}^2 + \overline{a\,b}^2 = \overline{a\,c}^2 + \overline{b\,d}^2 = 16\,r^2;$$

d. i. die Summe der Quadrate je zweier Gegenseiten des vollständigen Vierecks a b c d **hat den konstanten Wert** $16\,r^2$.

§ 13.

Ist das Quadrupel a, b, c, d gebildet von einem Tripel rechtwinkiger Tangentenpaare unserer Kurve C_3^4 reell, so liegt stets ein Punkt etwa b innerhalb des von den drei Diagonalpunkten des vollständigen Vierecks a b c d gebildeten Dreiecks. Die Diagonalpunkte sind die Scheitel S, S_1, σ der drei Paare, und da diese auf dem Kreise K^2 liegen, so liegt ein Punkt b des Quadrupels stets innerhalb des Kreises K^2 und damit innerhalb der Kurve C_3^4. Die drei anderen Punkte a, c, d des Quadrupels liegen stets außerhalb des Kreises K^2, da sie zum Punkte b so liegen, daß ihre Verbindungslinien mit b durch den Kreis K^2 halbiert werden. Trägt man auf der Geraden b a eine Strecke $F_2\,T_2 = S_1\,F_2$ ab, so ist T_2 der Berührungspunkt der Geraden b a. Da nun a $F_2 = F_2$ b ist, und b innerhalb des Kreises K^2 liegt, so ist $F_2\,T_2 > F_2$ a d. i. der Berührungspunkt der Geraden a b liegt außerhalb des Dreiecks a c d; ebenso liegen die Berührungspunkte der Geraden c b, b d außerhalb a c d. Dagegen liegen die Berührungspunkte der Geraden c a, c d, a d zwischen den Punkten c und a, c und d, a und d. Denn da der Berührungspunkt der Geraden c a z. B. so liegt, daß $F''\,\tau'' = \sigma\,F''$ ist, so ist $F''\,\tau'' < F''$ c oder a F''; ebenso ist $F_3\,T_3 < F_3$ c oder d F_3 und F T < F a oder d F. Also liegt z. B. a innerhalb des von den Berührungssehnen $T_2\,T_1$, T_2 T gebildeten Winkels, und da a auch zwischen T_2 und b liegt, so muß a im Innern des Kurvendreiecks liegen. Was von a gilt, gilt auch von c und d. Also liegen alle Quadrupel a, b, c, d, deren Punkte reell sind, innerhalb des Kurvendreiecks der C_3^4. — Aber auch umgekehrt ist durch jeden innerhalb dieses Kurvendreiecks liegenden Punkt ein reelles Quadrupel bestimmt. Denn durch jeden Punkt d innerhalb des Kurvendreiecks gehen drei reelle Tangente an die Kurve, wie aus folgendem sich ergiebt. Liegt der Punkt d auf einer der drei Geraden M U_2, M V_2, M W_2 (Fig. 4), etwa auf M U_2, so geht durch d zunächst die Tangente M U_2. Bewegt sich dann eine Tangente längs des Kurvenzweiges $U_2\,V_2$, so wird diese Tangente nach und nach alle Punkte der Geraden M U_2 treffen, also auch einmal durch d gehen. Bewegt sich die Tangente dann weiter längs des Kurvenzweiges $V_2\,W_2$, so wird sie die Strecke M U_2 in keinem Punkte treffen. Bei der Bewegung längs des dritten Kurvenzweiges aber trifft die Tangente wieder nach und nach alle Punkte der Strecke M U_2, wird also nochmals durch d gehen. Demnach gehen durch jeden Punkt d der Strecken M U_2, M V_2 M, W_2, drei reelle Tangenten an die Kurve. Liegt der Punkt d auf keiner dieser drei Strecken, aber innerhalb des Kurvendreiecks, etwa in dem von M U_2, M V_2 und dem Kurvenzweig $U_2\,V_2$ begrenzten Flächenstück, so können wir uns immer eine Tangente t mit dem Berührungspunkte x denken, so daß d innerhalb des von t, M U_2, M V_2 gebildeten Dreiecks liegt. Bewegt sich nun eine Tangente längs des Kurvenzweiges $U_2\,V_2$ von U_2 bis x, so bestreicht dieselbe die Fläche des den Punkt d enthaltenden Dreiecks, muß also einmal durch d gehen. Bewegt sich dann die Tangente weiter von x bis V_2, so bestreicht sie dieselbe Dreiecksfläche, in der d liegt, noch einmal. Also geht eine zweite Tangente durch d. Bewegt sich die Tangente dann von V_2 über W_2 nach U_2, so bestreicht sie die ganze Dreiecksfläche U_2 M V_2 einmal, es muß also noch eine dritte Tangente durch d gehen. Liegt d auf der

Kurve selbst, etwa auf dem Zweige $U_2 V_2$, so gehen durch d zunächst zwei aufeinanderfolgende Tangenten. Außerdem geht auch in diesem Falle eine dritte reelle Tangente durch d. Denn wenn sich eine Tangente längs der beiden Zweige $V_2 W_2$, $W_2 U_2$ der Kurve bewegt, so geht sie nach und nach durch alle Punkte des Kurvenzweiges $U_2 V_2$, also auch einmal durch d. Wo also auch der Punkt d im Innern der Kurve liegen mag, stets gehen durch denselben drei reelle Tangenten an die Kurve. Nennen wir dieselben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{G}$, so wird durch diese und die zu diesen rechtwinkligen Tangenten ein reelles vollständiges Viereck bestimmt.

§ 14.

Liegt der gegebene Punkt d außerhalb des Kurvendreiecks $U_2 V_2 W_2$, so geht durch denselben nur eine reelle Tangente. Liegt nämlich d auf den Verlängerungen von $M U_2$, $M V_2$, $M W_2$, etwa auf $M U_2$, so geht durch d die Tangente $M U_2$. Da alle anderen Tangenten, soweit sie $M U_2$ treffen, ihren Schnittpunkt mit $M U_2$ innerhalb der Strecke $M U_2$ haben, so kann keine durch d gehen. Liegt d in einem der drei Räume, in welche die Ebene durch die drei Rückkehrtangenten $M U_2$, $M V_2$, $M W_2$ geteilt wird, so wird, da jeder dieser Räume, so weit er außerhalb der Kurve liegt, nur von den Tangenten der beiden Kurvenzweige, die nicht in diesem Raume liegen, einmal bestrichen wird, durch d eine aber auch nur eine reelle Tangente an die C_3^4 gehen. Die beiden anderen durch d an die Kurve gehenden Tangenten sind imaginär. Von dem Quadrupel a b c d ist noch ein weiterer Punkt etwa c reell. Er liegt auf der reellen durch d gehenden Tangente so, daß $d F_3 = F_3 c$, wo F_3 der Mittelpunkt der durch d gehenden reellen Tangente ist. Dieser Punkt c liegt ebenfalls außerhalb des Kurvendreiecks $U_2 V_2 W_2$. Denn da jede Tangente der C_3^4 die Kurve außer im Berührungspunkt in 2 Punkten λ und λ_1 trifft, und $F_3 d = F_3 c$ ist, so muß c ebensoweit über λ_1 hinausliegen als d über λ, wenn d und λ auf der einen, c und λ_1 auf der anderen Seite von F_3 liegen. c muß aber auch schon deshalb außerhalb der Kurve liegen, weil c sonst ein reelles Quadrupel bestimmte, das vollständig innerhalb des Kurvendreiecks läge, womit auch d innerhalb desselben sich befinden müßte. Diejenige Gerade, die mit d c ein Paar bildet, ist ebenfalls reell; es ist die Gerade, die im Scheitel S_1 der Geraden c d senkrecht zu c d ist. Dieselbe enthält die imaginären Quadrupelpunkte a und b. Die beiden anderen Paare, die durch dies Quadrupel bestimmt sind, sind imaginär. Von jedem dieser beiden Paare geht je eine Tangente durch c und d; dieselben treffen sich in den imaginären Punkten a und b.

§ 15.

Denkt man sich um die Dreiecke a b c, a b d, a c d, b c d des obigen Quadrupels a b c d Kreise mit den resp. Mittelpunkten δ, γ, β, α geschrieben, so sind die Radien aller dieser Kreise gleich 2 r, wenn r der Radius des Grundkreises K^2 ist; denn der Kreis K^2 geht durch die Mitten der Seiten dieser 4 Dreiecke, sein Radius ist also die Hälfte des dem einzelnen Dreieck umgeschriebenen Kreises.

Im Viereck $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (Fig. 6) ist, da c d senkrecht ist zur gemeinschaftlichen Sehne b a der Kreise um γ und δ, $\gamma\,\delta \parallel c\,d$; ebenso ist $\alpha\,\beta \parallel a\,b$; $\beta\,\gamma \parallel b\,c$; $\alpha\,\gamma \parallel a\,c$; $\alpha\,\delta \parallel a\,d$; $\beta\,\delta \parallel b\,d$. Die Vierecke a b c d und $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ sind also ähnlich und ähnlich gelegen; folglich gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt. Durch diesen Punkt gehen auch die Verbindungslinien der Mitten homologer Seiten. Die Mitten der Seiten der Vierecke sind die Mittelpunkte F, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 der Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, und zwar ist F z. B. die Mitte von a d, F_1 die Mitte von $\alpha\,\delta$. Allgemein sind die Mitten je

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2 homologer Seiten der Vierecke a b c d und $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises K^2. Demnach gehen die Linien a α, b β, c γ, d δ alle durch den Mittelpunkt M des Kreises K^2. Da nun das Dreieck a M F $\cong \alpha$ M F_1 ist, so ist auch a M = M α. Ebenso erkennt man, daß die Geraden b β, c γ, d δ in M halbiert werden. Folglich sind die Vierecken: c d $\gamma\ \delta$, a b $\alpha\ \beta$, b c $\beta\ \gamma$, c d $\gamma\ \delta$ 2c. Parallelogramme und a b = $\alpha\ \beta$, a c = $\alpha\ \gamma$, a d = $\alpha\ \delta$, b c = $\beta\ \gamma$, b d = $\beta\ \delta$, c d = $\gamma\ \delta$. Deshalb ist das Viereck a b c d $\cong$ $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Die Geraden $\alpha\ \beta$, $\alpha\ \gamma$, $\alpha\ \delta$, $\beta\ \gamma$, $\beta\ \delta$, $\gamma\ \delta$ werden beziehlich in den Punkten F_3, F_4, F_1, F, F_5, F_2 halbiert. Daher haben die den Dreiecken $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\alpha\ \beta\ \delta$, $\alpha\ \gamma\ \delta$, $\beta\ \gamma\ \delta$ umgeschriebenen Kreise beziehlich die Punkte d, c, b, a zu Mittelpunkten, und der Radius dieser Kreise ist, da F, $F_1 \ldots F_5$ auf K_2 liegen gleich 2 r. Die Gegenseiten des Vierecks $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, nämlich $\alpha\ \delta$, $\beta\ \gamma$; $\alpha\ \gamma$, $\beta\ \delta$; $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$ sind zu einander rechtwinklig und haben den Schnitt auf dem Kreise K^2, der ja für die Dreiecke $\alpha\ \beta\ \gamma$ 2c. der Feuerbachsche Kreis ist. Fassen wir die Geraden $\alpha\ \delta$, $\beta\ \gamma$; $\alpha\ \gamma$, $\beta\ \delta$, $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$ als rechtwinklige Tangentenpaare einer neuen Kurve auf, so läßt sich der Charakter dieser Kurve leicht angeben. Denn wenn wir die Geraden a d, b c; a c, b d; a b, c d unter sich fest verbunden denken und das vollständige Viereck a b c d um 180° drehen, so deckt das Viereck a b c d das Viereck $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Die Envelopve aller Geraden $\alpha\ \delta$, $\beta\ \gamma$ 2c. muß somit eine der Kurve C_3^4 gleiche Kurve $\mathfrak{C}_3^4$ sein, die sich von der Kurve C_3^4 nur dadurch unterscheidet, daß sie gegen dieselbe um 180° gedreht erscheint. Den Kreis K^2 berührt die Kurve $\mathfrak{C}_3^4$ in den oben (§ 7) mit U_1, V_1, W_1 (Fig. 3) bezeichneten Punkten. Die Kurve $\mathfrak{C}_3^4$ ist die Enveloppe der Axen derjenigen Parabeln, die dem Dreieck $A\ B\ \Gamma$ eingeschrieben sind, wenn Dreieck $A\ B\ \Gamma$ gleichfalls dem Kreise K^2 eingeschrieben ist, aber gegen das Dreieck A B C um 180° gedreht erscheint. — Alle reellen Quadrupel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ liegen innerhalb der Kurve $\mathfrak{C}_3^4$. Enthält das Quadrupel a b c d zwei imaginäre Punkte b und c, so sind auch die Punkte β und γ, also die Mittelpunkte der den Dreiecken a c d und a b d umgeschriebenen Kreise, und damit die Kreise selbst imaginär. Dagegen sind die Punkte α und δ reell und somit auch die Kreise, die den Dreiecken b c d und a b c umgeschrieben sind. Die Punkte α und δ müssen aber notwendig zur Kurve $\mathfrak{C}_3^4$ dieselbe Lage haben, wie die Punkte a und b zur Kurve C_3^4; sie liegen also in diesem Falle außerhalb der Kurve $\mathfrak{C}_3^4$.

§ 16.

Durch jedes der obigen Quadrupel a b c d geht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, deren Mittelpunkte alle auf K^2 liegen.*) Nehmen wir irgend einen Punkt S des Kreises K^2 als Mittelpunkt einer solchen gleichseitigen Hyperbel, die durch a, b, c, d geht, und fassen das System konjugierter Durchmesser dieser Hyperbel ins Auge. Dasselbe wird auf jeder Geraden der Ebene, also auch auf a d, eine Punkt-Involution hervorrufen. Die Doppelpunkte dieser Punkt-Involution werden eingeschnitten durch die Doppelstrahlen der Durchmesser-Involution d. h. durch die Asymptoten der Hyperbel. Sechs Paare konjugierter Durchmesser können wir sofort angeben. Es sind die jedesmaligen Verbindungslinien des Punktes S mit der Mitte der sechs bekannten Sehnen der Hyperbel und die zu den Sehnen parallel gezogenen Durchmesser. Die Asymptoten müssen mit jedem Paar konjugierter Durchmesser vier harmonische Strahlen bilden, müssen also a d und jede andere Sehne so treffen, daß die Schnitte gleichweit vom Mittelpunkt F der Sehne abstehen. Diese Eigenschaft hat das durch S gehende Paar rechtwinkliger Fuß-

*) Steiner-Schroeter a. a. O. S. 232 u. 233; Steiner-Geiser a. a. O. S. 207; K. Dörholt a. a. O. S. 63.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

punktenlinien (§ 4). Also hat die durch S, als Mittelpunkt, und a, b, c, d bestimmte gleichseitige Hyperbel das durch S gehende Paar Fußpunktenlinien zu Asymptoten. Die verschiedenen Asymptotenpaare des ganzen Büschels bestehen somit aus den gesamten Geraden $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ und sind Tangenten unserer Kurve C_3^4. Jede Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}$ ist also eine Asymptote einer dem Dreieck a b c umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbel H^2, welche notwendig durch den Höhenpunkt d des Dreiecks a b c geht und den Scheitel S von $\mathfrak{A}$ zum Mittelpunkt hat. Nimmt man insbesondere als Grundpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln die Ecken des Dreiecks A_1 B_1 C_1 und dessen Höhenpunkt H_1, so sind die Asymptoten aller dieser Hyperbeln Fußpunktenlinien für das Dreieck A_1 B_1 C_1. Folglich erhalten wir den Satz: *Die Enveloppe der Asymptoten aller einem Dreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist identisch mit der Enveloppe der diesem Dreieck zugehörigen Fußpunktenlinien, ist also eine besondere Kurve 3. Klasse 4. Ordnung.*

Den sämtlichen Quadrupeln a b c d ist eine Schar-Schar gleichseitiger Hyperbeln umgeschrieben. Jedes Paar Fußpunktenlinien ist Asymptotenpaar für je eine Hyperbel aus jedem der einfach unendlich vielen Büscheln a b c d. Wenn man sich also in Bezug auf jedes rechtwinklige Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ die Schar gleichseitiger Hyperbeln denkt, die durch dieselben als Asymptoten bestimmt ist, so erhält man dieselbe Schar-Schar. Je zwei dieser Hyperbeln schneiden sich in irgend einem Quadrupel, also nur innerhalb unserer Kurve, wofern die Schnitte alle reell sind. Berühren sich zwei Hyperbeln der Schar-Schar, indem etwa 2 Quadrupelpunkte a, d zusammenfallen, so berühren dieselben die Gerade a d in ihrem Mittelpunkte F, da ja, wie oben gesehen, a und d von F gleichen Abstand haben. Die Quadrupelpunkte a und d fallen aber nur dann zusammen, wenn der Scheitel des Paares $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$, das mit $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ das Quadrupel bildet, auf einer Geraden des ersten Paares, etwa auf $\mathfrak{A}$ liegt, so daß $\mathfrak{A}$ in zwei zusammenfallenden Punkten getroffen wird, d. h. wenn das Paar $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$ den Mittelpunkt der Geraden $\mathfrak{A}$ zum Scheitel hat. Die beiden anderen Schnitte b und c der Geraden $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$, mit $\mathfrak{A}_1$ liegen dann so, daß sie vom Mittelpunkt F_1 der Geraden $\mathfrak{A}_1$ gleichen Abstand haben, daß also $F_1 c = b F_1$ ist. Dann ist aber auch, da das Dreieck b F c rechtwinklig ist, $F_1 b = c F_1 = F F_1 = 2 r$. Die Punkte b, c liegen also so, daß sie vom Mittelpunkte F_1 der Geraden $\mathfrak{A}_1$ den Abstand 2 r haben, d. h. sie liegen auf der Kurve C_4^3 und sind die Berührungspunkte der Geraden $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$, deren Scheitel in F liegt (§ 5).

Durch ein beliebiges Quadrupel a b c d ist ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bestimmt, deren Asymptoten die rechtwinkligen Paare $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ sind und deren Mittelpunkte auf K^2 liegen Ein bestimmter Kegelschnitt des Büschels geht durch einen Punkt, etwa a', eines zweiten Quadrupels a' b' c' d. Diese Hyperpel H^2, die also durch die Punkte a, b, c, d und a' geht, hat einen bestimmten Punkt σ des Kreises K^2 zum Mittelpunkt und ein Paar Fußpunktenlinien, etwa L L_1 zu Asymptoten. Das Quadrupel a' b' c' d' bestimmt gleichfalls ein Büschel Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf K^2 liegen, und deren Asymptoten die Fußpunktenlinien-Paare $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ sind. Eine Hyperbel des letzten Büschels, etwa H_1^2 hat den oben genannten Punkt σ des Kreises K^2 zum Mittelpunkt und das Paar L L_1 zu Asymptoten. Die beiden gleichseitigen Hyperbeln H^2 und H_1^2 haben demnach den Mittelpunkt σ, die beiden Asymptoten L L_1 und den Punkt a' gemeinsam, sind also identisch. Also liegen die beiden Quadrupel a b c d und a' b' c' d' auf derselben Hyperbel H^2. Wir finden allgemein, daß je 2 Quadrupel auf einer und derselben Hyperbel liegen. Liegt insbesondere der Punkt a' auf einer Geraden des Paares L L_1, so geht die Hyperbel H^2

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in ein Linienpaar $L\ L_1$ über. In diesem Falle also liegen die Quadrupel $a\ b\ c\ d$ und $a'\ b'\ c'\ d'$ in demselben Paar $L\ L_1$.

Wenn irgend zwei gleichseitige Hyperbeln der obigen Schar-Schar, deren Asymptoten 2 Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{G}\ \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}'\ \mathfrak{G}'_1$ sind, sich berühren, so liegt dieser Berührungspunkt auf dem Kreise K^2, wie wir im Anfange dieses § gesehen haben. Schneiden sich die Asymptoten $\mathfrak{G}\ \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}'\ \mathfrak{G}'_1$ dieser beiden Hyperbel in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, so liegen die Mitten dieser Strecken $\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}\ \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}\ \mathfrak{b}$, die auf den Asymptoten der einen Hyperbel durch die Asymptoten der anderen Hyperbel begrenzt werden, sowie die Mittelpunkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ der Hyperbeln auf dem Kreise K^2. **Sind also in einer Ebene zwei rechte Winkel gegeben und sollen zwei Hyperbeln die Schenkel derselben zu Asymptoten haben, und einander berühren, so ist der Ort der Berührungspunke ein bestimmter Kreis K^2, der durch die Scheitel der Winkel und die Mitten der Strecken geht, welche auf den Schenkeln jedes Winkels durch die Schenkel des anderen Winkels begrenzt werden.**

§ 17.

Fällt man aus den Quadrupelpunkten a, b, c, d auf die Geraden eines Paares $\mathfrak{C}\ \mathfrak{C}_1$ die Senkrechten (Fig. 6), so ist, wenn man die von a auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ gefällten Lote x und y nennt, den Winkel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ oder $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1)$ mit φ bezeichnet, und a_1, b_1, c_1, d_1 die Schnitte von $\mathfrak{C}\ \mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1$ sind, $x = a\ a_1 \sin\varphi$, $y = d_1\ a \cos\varphi$. Bezeichnet man mit $x', y'; x'', y''; x''', y'''$ beziehlich die Lote von b, c, d auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$, so ist:

$$x' = b\ c_1 \cos\varphi,\ y' = b\ b_1 \sin\varphi;\ x'' = c_1\ c \cos\varphi,\ y'' = b_1\ c \sin\varphi;$$

$x''' = a_1\ d \sin\varphi,\ y''' = d\ d_1 \cos\varphi$; folglich

$$x.\ y = a\ a_1.\ d_1\ a \sin\varphi.\cos\varphi;\ x'.\ y' = b\ b_1.\ b\ c_1 \sin\varphi.\cos\varphi;$$

$$x''.\ y'' = c_1\ c.\ b_1\ c \sin\varphi.\cos\varphi,\ x'''.\ y''' = d_1\ d.\ d\ a_1 \sin\varphi.\cos\varphi.$$

Nun ist $a\ a_1 = d_1\ d$, $a\ d_1 = a_1\ d$ $b\ b_1 = c_1\ c$, $b\ c_1 = b_1\ c$ (§ 4);

folglich $x.\ y = x'''.\ y'''$ und $x'.\ y' = x''.\ y''$.

Bezeichnet man den Winkel $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ oder $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1)$ mit ψ und die Schnitte von $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ mit a_2, b_2, c_2, d_2, so ist:

$$x = a\ a_2 \sin\psi,\ y = a\ d_2.\cos\psi;\ x' = a_2\ b \sin\psi,\ y' = d_2\ b\ \cos\psi;$$

$$x'' = c\ c_2 \cos\psi,\ y'' = b_2\ c \sin\psi;\ x''' = d\ c_2 \cos\psi,\ y''' = b_2\ d \sin\psi.$$

Folglich: $x.\ y = a\ a_2.\ a\ d_2.\sin\psi.\cos\psi$, $x'.\ y' = a_2\ b.\ d_2\ b \sin\psi.\cos\psi$,

$x''.\ y'' = c\ c_2.\ b_2\ c \sin\psi.\cos\psi$, $x'''.\ y''' = d\ c_2.\ b_2\ d \sin\psi \cos\psi$.

Und da $a\ a_2 = d_2\ b$, $a\ d_2 = a_2\ b$, $c\ c_2 = b_2\ d$, $c\ b_2 = c_2\ d$ ist, so ist

$x.\ y = x'.\ y'$ und $x''.\ y'' = x'''.\ y'''$.

Also ist auch $x.\ y = x'.\ y' = x''.\ y'' = x'''.\ y'''$ d. h. die Rechtecke, unter den je zwei Perpendikeln, welche aus den Punkten eines Quadrupels auf ein beliebiges Paar gefällt werden, haben jedesmal unter sich gleichen Inhalt.

§ 18.

Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Fußpunktenlinie, also eine Tangente unserer Kurve C_3^4 mit dem Mittelpunkte P (Fig. 7), dem Scheitel S, und ist $\mathfrak{G}\ \mathfrak{G}_1$ irgend ein Paar Fußpunktenlinien mit dem Scheitel S_1, und werden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{A}$ in λ und λ_1 geschnitten, so ist, wenn man noch $S_1\ P$ zieht, $P\ S_1 = P\ \lambda_1$ (§ 4); folglich $\measuredangle\ P\ \lambda_1\ S_1 = P\ S_1\ \lambda_1$. Zieht man noch durch S_1 zu $\mathfrak{A}$ die Parallele $R\ Q$, so ist weiter $P\ \lambda\ S_1 = \lambda\ S_1\ Q = P\ S_1\ \lambda$ d. i. der Winkel $P\ S_1\ Q$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist durch $\mathfrak{G}$ halbiert. Hat man also irgend eine Fußpunktenlinie $\mathfrak{A}$, so findet man ein Paar rechtwinkliger Tangenten der Kurve C_3^4, indem man irgend einen Punkt S_1 des Kreises K^2 mit dem Mittelpunkt P der Geraden $\mathfrak{A}$ verbindet, durch S_1 zu $\mathfrak{A}$ die Parallele Q R zieht und die von den Geraden S_1 P und Q R gebildeten Winkel halbiert. Trifft die Halbierungslinie des Winkels P S_1 Q den Kreis K^2 zum zweiten Mal in P_1, so ist $S_1\,P_1$ eine Gerade $\mathfrak{G}$ und die Senkrechte in S_1 zu $S_1\,P_1$ die mit $S_1\,P_1$ ein Paar bildende Gerade $\mathfrak{G}_1$. Nimmt man auf K^2 einen weiteren Punkt S_2, verbindet denselben mit P und zieht durch S_2 zu S P die Parallele S_2 x, so bilden die Halbierungslinien der von S_2 x und S_2 P gebildeten Winkel gleichfalls ein Paar $\mathfrak{G}'\,\mathfrak{G}'_1$ rechtwinkliger Tangenten der Kurve C_3^4. Verbindet man einen weiteren Punkt S_3 des Kreises K^2 mit P und zieht durch S_3 zu S P die Parallele S_3 y und halbiert die von S_3 y und S_3 P gebildeten Winkel, so erhält man ein drittes Paar rechtwinkliger Tangenten $\mathfrak{G}''\,\mathfrak{G}''_1$ der C_3^4 u. s. w. — Zieht man $P\,z \parallel P_1\,S_1$, so ist mit Berücksichtigung des Vorzeichens

$$\overset{\frown}{S\,z} = \overset{\frown}{z\,S_1}, \text{ und } \overset{\frown}{S_1\,P} = \overset{\frown}{z\,P_1}; \text{ folglich}$$

$$\overset{\frown}{S\,S_1} = \overset{\frown}{S\,z} + \overset{\frown}{z\,P_1} + \overset{\frown}{P_1\,S_1} = \overset{\frown}{z\,S_1} + \overset{\frown}{S_1\,P} + \overset{\frown}{P_1\,S_1} = 2\,\overset{\frown}{S\,z}; \text{ also}$$

$$\overset{\frown}{P_1\,S_1} + \overset{\frown}{S_1\,P} = \overset{\frown}{S\,z} \text{ oder } \overset{\frown}{P_1\,P} = \overset{\frown}{S\,z}, \text{ somit } \overset{\frown}{S\,S_1} = -\,2\,\overset{\frown}{P\,P_1}.$$

Treffen die Halbierungslinien der Winkel P S_2 x und P S_3 y den Kreis K^2 zum zweiten Mal beziehlich in P_2 und P_3, so ist auch $\overset{\frown}{S\,S_2} = \overset{\frown}{S\,S_1} + \overset{\frown}{S_1\,S_2} = -\,2\,(\overset{\frown}{P\,P_1} + \overset{\frown}{P_1\,P_2}) = -\,2\,\overset{\frown}{P\,P_2}$ und $\overset{\frown}{S\,S_3} = 2\,\overset{\frown}{P\,P_3}$ u. s. w. Wenn man also die Punkte S und P in entgegengesetzten Richtungen auf K^2 sich bewegen läßt, so daß stets $S\,S_n = -\,2\,P\,P_n$ ist, so liefern alle Verbindungslinien $P_n\,S_n$ Tangenten unserer Kurve C_3^4. Die erste Sehne S P war eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}$, deren Richtung nur abhängt von der Lage des dem Kreise K^2 eingeschriebenen Dreiecks A B C. Nehmen wir das Dreieck A B C im Kreise K^2 beliebig, so wird die Lage der Sehne P S beliebig. Wenn man also zwei beliebige Radien M S und M P eines Kreises K^2 sich um den Mittelpunkt M so bewegen läßt, daß die von dem einen M S bestrichenen Flächen stets doppelt so groß sind als die von dem anderen M P bestrichenen, so ist die Enveloppe der durch die Endpunkte der Radien gelegten Geraden eine Kurve dritter Klasse vierter Ordnung.

Die Richtung der im Anfang des § erwähnten Geraden $\mathfrak{A}$ ist willkürlich. Somit erhält man auch das System der Geraden $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1$ in folgender Weise. Man nimmt auf dem Kreise K^2 einen beliebigen Punkt P und daneben eine Gerade q. Werden dann aus jedem Punkte S des Kreises K^2 zwei unbegrenzte Geraden gezogen, die eine durch P, die andere parallel q und die entstehenden Nebenwinkel halbiert, so bilden alle diese Halbierungslinien-Paare $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1$ ein dem früheren gleiches System und umhüllen eine Kurve C_3^4.

Nimmt man als Gerade q irgend eine Sehne $S_0\,S_1$ (Fig. 8) und den Punkt S_0 als festen Punkte (den wir oben P genannt haben) und konstruiert in allen Punkten S des Kreises K^2 die Halbierungslinien der Winkel, die entstehen, wenn man S mit S_0 verbindet und durch S zu $S_0\,S_1$ die Paralle zieht, so erhält man nach Obigem ein System von Geraden $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1$, die eine Kurve C_3^4 umhüllen. Zieht man von S_0 den Durchmesser S_0 M und von S_1 das Lot $S_1\,S_2$ auf S_0 M, dann durch S_2 zu $S_0\,S_1$ die Parallele S_2 x und verbindet S_2 mit S_0, so ist $\sphericalangle\,S_1\,S_2\,x = S_2\,S_1\,S_0 = S_0\,S_2\,S_1$, d. h. die Sehne $S_1\,S_2$ halbiert den Winkel $S_0\,S_2$ x, ist also eine eine der Geraden $\mathfrak{G}$. Das Lot in S_2 zu $S_2\,S_1$ ist ebenfalls eine Gerade $\mathfrak{G}$; sie bildet mit $S_1\,S_2$ ein Paar. Zieht man weiter den Durchmesser S_1 M und von S_1 M die Senkrechte $S_2\,S_3$, so ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn man noch durch S_3 zu $S_1 S_0$ die Parallele $S_3 y$ zieht und S_3 mit S_0 verbindet, der Winkel $S_0 S_3 y$ durch $S_2 S_3$ halbiert. Denn es ist der Bogen $\overset{\frown}{S_1 S_2} = \overset{\frown}{S_3 S_1} = 2\, \overset{\frown}{S_1 S_0} = 2\, \overset{\frown}{x S_1}$; folglich $\overset{\frown}{x S_1} = \frac{1}{2} \overset{\frown}{S_3 S_1} = \overset{\frown}{S_3 x} = \overset{\frown}{S_2 y} = \overset{\frown}{S_0 S_2}$, somit $\sphericalangle S_0 S_3 S_2 = S_2 S_3 y$. Also ist $S_2 S_3$ (sowie das Lot in S_3 zu $S_2 S_3$) eine der oben genannten Geraden G. Zieht man dann weiter $S_2 M$ und $S_3 S_4 \perp M S_2$ und durch S_4 die Parallele $S_4 z$ zu $S_0 S_1$, so ist, wenn man noch $S_0 S_4$ zieht, der Winkel $z S_4 S_0$ oder dessen Nebenwinkel) durch $S_3 S_4$ halbiert. Fällt wie in der Figur die Linie $S_3 S_4$ so, daß erst ihre Verlängerung in dem Winkel $S_0 S_4 z$ (oder dessen Nebenwinkel) liegt, so ziehe man zum Beweise $S_4 S'_3$, wenn S'_3 der Gegenpunkt von S_3 im Kreise K^2 ist, und bezeichne mit $S'_0\, S'_1\, S'_2 \ldots$ die zweiten Endpunkte der Durchmesser $S_0 M$, $S_1 M$, $S_2 M \ldots$ Dann ist:

$\overset{\frown}{S_3 S_2} = \overset{\frown}{S_2 S_4} = 2 \pi r - 2 . \overset{\frown}{S_2 S_1} = 2 \pi r - 4\, \overset{\frown}{S_0 S_1}$; ferner $\overset{\frown}{S'_3 S_0} = \pi r - \overset{\frown}{S_0 S_3} = \pi r - 3\, \overset{\frown}{S_0 S_1}$, und $\overset{\frown}{z S_0} = \overset{\frown}{z x} - \overset{\frown}{S_0 x} = \overset{\frown}{S_2 S_4} - 2\, \overset{\frown}{S_0 S_1} = 2 \pi r - 6\, \overset{\frown}{S_0 S_1}$. Folglich ist $\overset{\frown}{S'_3 S_0} = \frac{1}{2} \overset{\frown}{z S_0}$, und daher $\sphericalangle S_0 S_4 S'_3 = S'_3 S_4 z$. Also ist auch $S_3 S_4$, die zu $S_4 S'_3$ senkrecht ist, eine Gerade G. Zieht man weiter von S_4 das Lot $S_4 S_5$ zu $S_3 M$, durch S_5 zu $S_0 S_1$ die Parallele $S_5 u$ und verbindet S_5 mit S_0, so halbiert $S_4 S_5$ den Winkel $S_0 S_5 u$, ist somit auch eine Gerade G. Es ist nämlich $\overset{\frown}{S_5 S'_3} = \overset{\frown}{S'_3 S_4}$, $\overset{\frown}{z S'_3} = \overset{\frown}{S'_3 S_0}$, folglich $\overset{\frown}{S_5 z} = \overset{\frown}{S_4 u} = \overset{\frown}{S_0 S_4}$.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch die Senkrechte $S_5 S_6$ zu $S_4 M$ eine Gerade G ist u. s. w. *Wenn man also in einem Kreise K^2 eine beliebige Sehne $S_0 S_1$ zieht, sodann aus S_1 die zweite Sehne $S_1 S_2$ senkrecht auf den durch S_0 gehenden Durchmesser, ferner aus S_2 die dritte Sehne $S_2 S_3$ senkrecht zu dem durch S_1 gehenden Durchmesser und so durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorhergehenden Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht ist, so sind alle diese Sehnen Tangenten einer und derselben Kurve C^4_3.* — Ist der Bogen $S_0 S_1$ mit der Kreisperipherie inkommensurabel, so wird niemals ein Punkt S_n mit einem vorhergehenden Punkt S_p zusammenfallen. Bezeichnen wir nämlich den Bogen $S_0 S_1$ mit s, so ist unter Berücksichtigung des Vorzeichens und eventuell bei mehrfacher Umlaufung des Kreises $S_0 S_1 = s$, $S_1 S_2 = - 2 . s$, $S_2 S_3 = (-2)^2 . s$, $S_3 S_4 = (-2)^3 s \ldots . S_{n-1} S_n = (-2)^{n-1} s$. Die Summe Σ der Bogen $S_0 S_1 + S_1 S_2 + S_2 S_3 + \ldots S_{n-1} S_n$ ist $\Sigma = \frac{(-2)^n - 1}{-3} . s$. Ist s mit der Kreisperipherie inkommensurabel, so ist auch $\frac{(-2)^n - 1}{-3} . s$ mit $2 \pi r$ inkommensurabel. Es kann demnach niemals S_n mit S_0 zusammenfallen. Aber auch mit keinem anderen Punkte S_p fällt in diesem Falle S_n zusammen. Denn sonst müßte $S_0 S_1 + S_1 S_2 + \ldots S_{n-1} S_n = \frac{(-2)^n - 1}{-3} . s$ vermindert um $S_0 S_1 + S_1 S_2 + \ldots S_{p-1} S_p = \frac{(-2)^p - 1}{-3} s$ mit $2 \pi r$ kommensurabel sein. Es ist aber $\frac{(-2)^n - 1}{-3} s - \frac{(-2)^p - 1}{-3} s = \frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3} s$ mit $2 \pi r$ inkommensurabel, wenn s mit $2 \pi r$ inkommensurabel.

Wenn also $S_0 S_1 = s$ mit der Kreislinie nicht kommensurabel ist, so wird die obige Sehnenreihe unbegrenzt. Wird in ihrem zweiten Endpunkte auf jeder Sehne die Senkrechte errichtet, so berühren auch diese Senkrechten alle dieselbe Kurve C^4_3 und bilden mit den Sehnen die oftmals genannten Paare G G_1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 19.

Ist der Bogen $s_0\,s_1 = s$ mit der Kreisperipherie kommensurabel, ist etwa $s = \frac{\lambda}{\mu}\,2\,\pi\,r$, wo λ und μ relative Priemzahlen sind, so schließt sich die Reihe der Sehnen, und es entsteht im allgemeinen ein geschlossenes Polygon. Es ist nämlich nach § 18 der Bogen $\widehat{s_p\,s_n} = \frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3}\,s = \frac{\lambda}{\mu}.\,\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3}.\,2\,\pi\,r$. Wie nun auch μ beschaffen sein mag, immer giebt es zwei Zahlen n und p von solcher Beschaffenheit, daß der Ausdruck $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3}$ ein Vielfaches von μ ist, woraus folgt, daß es stets zwei Punkte s_p und s_n giebt, für welche der Bogen $\widehat{s_n\,s_p}$ ein Vielfaches von $2\,\pi\,r$ ist, so daß der Punkt s_n mit s_p zusammenfällt, sich also die Sehnenreihe schließt. Daß der Ausdruck $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3}$ ein Vielfaches von μ, oder daß $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3\,\mu}$ eine ganze Zahl ist (bei passender Wahl von n und p), ergiebt sich aus folgendem.

Es ist $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3\,\mu} = (-2)^p\,\frac{(-2)^{n-p} - 1}{-3.(2)^{\varkappa}.\,Z}$, wo $\varkappa = 0, 1, 2, 3 \ldots$ und Z ungrade ist.

Da $\frac{(-2)^p}{-(2)^{\varkappa}}$ stets eine ganze Zahl ist, wofern $p > \varkappa$ ist, so bleibt zu untersuchen, ob $\frac{(-2)^{n-p} - 1}{3\,Z}$, oder wenn wir abkürzend $n - p = m$ setzen, ob $\frac{(-2)^m - 1}{3\,Z}$ stets eine ganze Zahl ist bei ungradem Z. Die Zahl Z kann dann sein I. eine Priemzahl, II. ein Produkt zweier oder mehrerer Priemzahlen, III. eine Potenz einer Priemzahl, IV. ein Produkt von Potenzen mehrerer Priemzahlen. Da die Zahl 3 bei der folgenden Untersuchung eine besondere Eigentümlichkeit zeigt, so setzen wir voraus, daß in den Fällen I—IV unter den Faktoren von Z keine Potenz von 3 vorkommt. Es bleiben uns dann noch zu untersuchen die beiden weiteren Fälle, in denen V. Z eine Potenz von 3 ist, und VI. unter den Faktoren von Z eine Potenz von 3 vorkommt.

I. Ist Z eine Priemzahl (ausgenommen die Zahl 3), so ist $\frac{(-2)^m - 1}{3\,Z}$ eine ganze Zahl, wenn $m = Z - 1$ ist. Denn es ist, da $Z - 1$ eine gerade Zahl ist, $\frac{(-2)^{Z-1} - 1}{3\,Z} = \frac{2^{Z-1} - 1}{3\,Z}$. Nun ist $2^{Z-1} - 1$ stets teilbar durch 3, denn es ist $(2^{Z-1} - 1) : (2 + 1) = 2^{Z-2} - 2^{Z-3} + 2^{Z-4} - \ldots + 2 - 1$. Also ist $2^{Z-1} - 1$ durch $3\,Z$ teilbar, wenn auch $2^{Z-1} - 1$ durch Z teilbar ist.

Es ist aber $\frac{2^{Z-1} - 1}{Z} = \frac{2^Z - 2}{2\,Z} = \frac{(1+1)^Z - 2}{2\,Z}$.

Nun ist: $(1+1)^Z - 2 = 1 + Z + \frac{Z\,(Z-1)}{1.\,2} + \frac{Z\,(Z-1)\,(Z-2)}{1.\,2.\,3} + \ldots.\,Z + 1 - 2$

$$= 2\,Z + \frac{2\,Z\,(Z-1)}{1.\,2} + \frac{2\,Z\,(Z-1)\,(Z-2)}{1.\,2.\,3} + \ldots.$$

$$+ \frac{2\,Z\,(Z-1)\,(Z-2)\,(Z-3)\ldots.(Z - \frac{Z-3}{2})}{1.\,2.\,3.\,4\ldots.\;\frac{Z-1}{2}}.$$

Die Quotienten $\frac{Z-1}{1.\,2}$, $\frac{(Z-1)\,(Z-2)}{1.\,2.\,3.}$ u. s. w. sind ganze Zahlen, da die einzelnen Summanden der Reihe ganze Zahlen sind und in Nenner der Priemfaktor Z nicht vorkommt. Auch sind die einzelnen Summanden durch 2 Z teilbar, daher ist die ganze Summe durch 2 Z teilbar; also ist: $\frac{2^Z - 2}{2\,Z}$ oder $\frac{2^{Z-1}-1}{Z}$ eine ganze Zahl. Die Zahl $2^{Z-1}-1$ ist demnach sowohl durch 3 als durch Z teilbar, folglich muß dieselbe auch durch 3 Z teilbar sein.

II. Ist Z ein Produkt aus zwei oder mehreren Priemfaktoren etwa $Z = r.\,q$, wo r und q Priemzahlen sind und $r \gtrless q$ ist, dann ist $\frac{(-2)^{(r-1)\,(q-1)} - 1}{3\,Z} = \frac{2^{(r-1)\,(q-1)} - 1}{3\,Z}$ eine ganze Zahl.

Nach I. ist $\frac{2^{q-1}-1}{3\,q}$ eine ganze Zahl, folglich ist auch $\left(\frac{2^{q-1}-1}{3\,q}\right)^3$ eine ganze Zahl. Nun ist $(2^{q-1}-1)^3 = 2^{3(q-1)} - 3.2^{2(q-1)} + 3.\,2^{q-1} - 1 = (2^{3(q-1)}-1) - 3.\,2^{q-1}(2^{q-1}-1)$; und da $(2^{q-1}-1)^3$ und $3.\,2.^{q-1}(2^{q-1}-1)$ durch 3 q teilbar ist, so ist auch $(2^{3(q-1)}-1)$ durch 3 q teilbar. Ferner ist $(2^{q-1}-1)^5 = 2^{5(q-1)} - 5.2^{4(q-1)} + 10.\,2^{3(q-1)} - 10.2^{2(q-1)} + 5.\,2^{q-1} - 1$

$$= (2^{5(q-1)}-1) - 5.\,2^{q-1}.\,(2^{3(q-1)}-1) + 10.\,2^{2(q-1)}(2^{q-1}-1),$$

und da sowohl $(2^{q-1}-1)^5$ als auch $5.\,2^{q-1}.\,(2^{3(q-1)}-1)$ und $10.\,2^{2(q-1)}.\,(2^{q-1}-1)$ durch 3 q teilbar sind, so muß auch $(2^{5(q-1)}-1)$ durch 3 q teilbar sein. Allgemein ist, wenn u ungerade ist,

$$\begin{aligned}(2^{q-1}-1)^u &= 2^{u(q-1)} - u.\,2^{(u-1)(q-1)} + \frac{u\,(u-1)}{1.\,2}\,2^{(u-2)(q-1)} \\ &\quad - \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{1.\,2.\,3}\,2^{(u-3)(q-1)} + \ldots - \frac{u\,(u-1)}{1.\,2}\,2^{2(q-1)} + u.\,2^{q-1} - 1 \\ &= (2^{u(q-1)}-1) - u.\,2^{q-1}.\,(2^{(u-2)(q-1)}-1) \\ &\quad + \frac{u\,(u-1)}{1.\,2}\,2^{2(q-1)}\,(2^{(u-4)(q-1)}-1) - \ldots\ldots \\ &\quad \pm \frac{u\,(u-1)\,(u-2)\,\ldots.\,(u-\frac{u-3}{2})}{1.\,2.\,3\ldots.\,\frac{u-1}{2}}\,2^{\frac{u-1}{2}(q-1)}.\,(2^{q-1}-1).\end{aligned}$$

Da $(2^{q-1}-1)^u$ durch 3 q teilbar ist, so muß auch die Differenz $(2^{u(q-1)}-1)$ durch 3 q teilbar sein, wenn die ähnlichen Differenzen von der Form $(2^{(u-2)(q-1)}-1)$, $(2^{(u-4)(q-1)}-1)$ 2c. durch 3 q teilbar sind. Nun ist $(2^{5(q-1)}-1)$, $(2^{3(q-1)}-1)$, $2^{q-1}-1)$ durch 3 q teilbar, wie oben geschehen, also ist auch $(2^{7(q-1)}-1)$, $(2^{9(q-1)}-1)\ldots.\,(2^{u(q-1)}-1)$ (u ungerade) durch 3 q teilbar. Es ist aber auch, da $(2^{2(q-1)}-1) = (2^{q-1}-1)\,(2^{q-1}+1)$, und $(2^{q-1}-1)$ durch 3 q teilbar ist, $(2^{2(q-1)}-1)$ durch 3 q teilbar. Ebenso ist $2^{4(q-1)} = (2^{2(q-1)}-1)\,(2^{2(q-1)}+1)$ und allgemein $(2^{2v(q-1)}-1) = (2^{v(q-1)}-1)\,(2^{v(q-1)}+1)$ durch 3 q teilbar. Also ist überhaupt $\frac{2^{w(q-1)}-1}{3\,q}$ eine ganze Zahl, welchen ganzzahligen Wert auch w habe. Ebenso ist, wenn r eine Priemzahl ist, $(2^{w(r-1)}-1)$ durch 3 r teilbar. Folglich ist auch $\frac{(2^{(q-1)(r-1)}-1}{3.\,q.\,r}$ eine ganze Zahl, da der Zähler dieses Bruches durch jeden der drei Priemfaktoren des Nenners teilbar ist. Allgemein ergiebt sich, daß, wenn Z aus den unter einander verschiedenen Priemfaktoren $a, b, c, d \ldots$ besteht, die Zahl $(2^{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\ldots} - 1)$ durch $3\,Z$ teilbar ist.

III. Ist Z eine Potenz einer Priemzahl (3 ausgenommen) etwa $Z = K^p$, so ist nach II $(2^{K-1} - 1)$ teilbar durch $3\,K$ und ebenso jede Größe von der Form $(2^{\omega(K-1)} - 1)$. Folglich ist $(2^{K-1} - 1)^K$ teilbar durch $3\,K^K$ und durch jede Größe von der Form $3\,K^x$, wenn $X \leqq K$ ist. Nun ist

$$(2^{K-1} - 1)^K = 2^{K(K-1)} - K.\,2^{(K-1)(K-1)} + \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{(K-2)(K-1)} - \frac{K(K-1)(K-2)}{1.\,2.\,3.}\,.\,2^{(K-3)(K-1)} + \ldots\ldots - \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{2(K-1)} + K\,2^{K-1} - 1. = (2^{K(K-1)} - 1) - K.\,2.^{K-1}.\,(2^{(K-2)(K-1)} - 1) + \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{2(K-1)}.\,2^{(K-4)(K-1)} - 1) - \ldots\ldots \pm \frac{K(K-1)(K-2)\ldots(K-\frac{K-3}{2})}{1.\,2.\,3\ldots\frac{K-1}{2}}.\,2^{\frac{K-1}{2}.(K-1)}.\,(2^{K-1} - 1).$$

In dieser Reihe ist vom 2. Gliede an jeder Summand durch $3\,K^2$ teilbar, folglich muß auch, da die ganze Summe durch $3\,K^2$ teilbar ist, $(2^{K(K-1)} - 1)$ durch $3\,K^2$ teilbar sein. Es ist auch $(2^{K(K-1)} - 1)^3$ durch $3\,K^2$ teilbar, und da $(2^{K(K-1)} - 1)^3 = 2^{3K(K-1)} - 3.2^{2K(K-1)} + 3.\,2^{K(K-1)} - 1 = (2^{3K(K-1)} - 1) - 3.2^{K(K-1)}.\,(2^{K(K-1)} - 1)$ ist, so muß auch $(2^{3K(K-1)} - 1)$ durch $3\,K^2$ teilbar sein. In derselben Weise wie unter II findet man, daß auch $(2^{5K(K-1)} - 1)$ und allgemein $(2^{\omega K(K-1)} - 1)$ durch $3\,K^2$ teilbar ist (ω gerade oder ungerade).

Nun ist weiter

$$\begin{aligned}(2^{K(K-1)} - 1)^K &= 2^{K^2(K-1)} - K.\,2^{K(K-1)(K-1)} + \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{K(K-1)(K-2)}\\ &\quad - \frac{K(K-1)(K-2)}{1.\,2.\,3}\,2^{K(K-1)(K-3)} + \ldots - \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{2K(K-1)} + 2^{K(K-1)} - 1\\ &= (2^{K^2(K-1)} - 1) - K.\,2^{K(K-1)}.\,(2^{K(K-1)(K-2)} - 1)\\ &\quad + \frac{K(K-1)}{1.\,2}\,2^{2K(K-1)}.\,(2^{K(K-1)(K-4)} - 1) - \ldots\ldots \pm\\ &\quad \frac{K(K-1)(K-2)\ldots-(K-\frac{K-3}{2})}{1.\,2.\,3.\ldots\frac{K-1}{2}}\,2^{K(K-1)\frac{K-1}{2}}.\,(2^{K(K-1)} - 1).\end{aligned}$$

Vom 2. anfangend ist jeder Summand dieser Summe durch $3\,K^3$ teilbar, also ist auch, da die ganze Summe durch $3\,K^3$ teilbar ist, $(2^{K^2(K-1)} - 1)$ durch $3\,K^3$ teilbar. Durch eine ähnliche Verallgemeinerung wie unter II findet man, daß $(2^{K^{p-1}(K-1)} - 1)$ durch $3\,K^p$ teilbar, also $\dfrac{2^{K^{p-1}(K-1)} - 1}{3\,K^p}$ eine ganze Zahl ist.

IV. Ist Z ein Produkt von Potenzen mehrerer Priemzahlen, etwa $Z = a^p.\,b^q.\,c^r.\,d^u \ldots$ (a, b, c, d Priemzahlen,) so ist die Zahl $(2^{a^{p-1}(a-1).\,b^{q-1}(b-1).\,c^{r-1}(c-1).\,d^{u-1}(d-1)\ldots} - 1)$ durch $3\,Z$ teilbar. Denn da $(2^{a^{p-1}(a-1)} - 1)$ durch $3\,a^p$ teilbar ist, so ist auch jede Zahl von der Form $(2^{\omega a^{p-1}(a-1)} - 1)$ durch $3\,a^p$ teilbar, was sich in derselben Weise zeigen läßt, wie wir unter II gezeigt haben, daß $(2^{w(q-1)} - 1)$ durch $3\,q$ teilbar ist. Folglich muß, da ähnliches von den übrigen Potenzen gilt, die Zahl $(2^{a^{p-1}(a-1)\,b^{q-1}(b-1)\,c^{r-1}(c-1)\,d^{u-1}(d-1)\ldots} - 1)$ durch $3\,Z = 3\,a^q.\,b^q.\,c^r.\,d^u \ldots$ teilbar sein, da sie durch jeden dieser Faktoren teilbar ist.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

V. Ist Z eine Potenz von 3, oder kommt unter den Faktoren, in welche man Z zerlegen kann, eine Potenz von 3 vor, so ist unsere bisherige Folgerung nicht zutreffend. Denn wenn auch eine Zahl von der Form $(-2)^m - 1$ sowohl durch 3 als durch $Z = 3^K$ teilbar ist, so ist damit noch nicht gesagt, daß diese Zahl auch durch 3 Z teilbar ist. — Ist $Z = 3$, so erkennt man leicht, daß der Ausdruck $\frac{(-2)^3 - 1}{3.\,3}$ eine ganze Zahl ist; ebenso ist, wenn $Z = 3^2 = 9$ ist, $\frac{(-2)^9 - 1}{3.\,9} = \frac{-513}{27} = -19$ eine ganze Zahl. Wir dürfen vermuten, daß allgemein, wenn $Z = 3^K$ ist, $\frac{(-2)^Z - 1}{3.\,Z} = -\frac{2^Z + 1}{3\,Z}$, oder $\frac{2^Z + 1}{3\,Z}$ eine ganze Zahl ist. Es ist:

$$\frac{2^Z + 1}{3\,Z} = \frac{2^Z + 1}{(2+1)Z} = \frac{1}{Z}\,(2^{Z-1} - 2^{Z-2} + 2^{Z-3} - 2^{Z-4} + \ldots + 2^2 - 2 + 1).$$

Da $Z = 3^K$ vorausgesetzt ist, so lassen sich die Glieder in der Klammer der rechten Seite dieser Gleichung zu je dreien zusammenfassen und man erhält:

$$\frac{2^Z + 1}{(2+1)\,Z} = \frac{1}{Z}\,(1 - 2 + 2^2)\,(1 - 2^3 + 2^6 - 2^9 + 2^{12} \ldots - 2^{Z-6} + 2^{Z-3}).$$

In der 2. Klammer der rechten Seite der Gleichung sind noch 3^{K-1} Glieder; dieselben lassen sich abermals zu je dreien anordnen und man kann schreiben

$$\frac{2^Z + 1}{(2+1)Z} + \frac{1}{Z}\,(1 - 2 + 2^2)\,(1 - 2^3 + 2^6)\,(1 - 2^9 + 2^{18} - 2^{27} + \ldots + 2^{Z-9})$$

In gleicher Weise ergiebt sich:

$$\frac{2^Z + 1}{(2+1)Z} = \frac{1}{Z}\,(1 - 2 + 2^2)\,(1 + 2^3 + 2^{2.3})\,(1 - 2^{3^2} + 2^{2.3^3})\,(1 - 2^{3^3} + 2^{2.3^3}) \ldots$$
$$(1 - 2^{3^{K-1}} + 2^{2.3^{K-1}}).$$

Nun ist:

$$1 - 2 + 2^2 = 2\,(2 + 1) - (2^2 - 1),$$
$$1 - 2^3 + 2^{2.3} = 2.^3\,(2^3 + 1) - (2^4 - 1)$$
$$1 - 2^{3^2} + 2^{2.3^2} = 2^{3^2}\,(2^{3^2} + 1) - (2^{3^2+1} - 1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$1 - 2^{3^{K-1}} + 2^{2.3^{K-1}} = 2^{3^{K-1}}\,(2^{3^{K-1}} + 1) - (2^{3^{K-1}+1} - 1).$$

Also ist:

$$\frac{2^Z + 1}{(2+1)\,Z} = \frac{1}{3^K}\,[2\,(2+1) - (2^2 - 1)]\,[2^3\,(2^3 + 1) - (2^4 - 1)]\,[2^{3^2}(2^{3^2} + 1) - (2^{3^2+1} - 1)]$$
$$\ldots\ldots [2^{3^{K-1}}\,(2^{3^{K-1}} + 1) - (2^{3^{K-1}+1} - 1)].$$

Jede Größe von der Form $[2^p\,(2^p + 1) - (2^{p+1} - 1)]$ ist, da die einzelnen Summanden durch 3 teilbar sind (wie oben gesehen), durch 3 teilbar. Da wir K solche Faktoren haben, so ist das ganze Produkt durch 3^K teilbar. Also ist, wenn Z eine Potenz von 3 ist $-\frac{2^Z + 1}{3\,Z} = \frac{(-2)^Z - 1)}{3\,Z}$ eine ganze Zahl. — Die Zahl $(2^Z + 1)$ ist durch keine höhere Potenz von 3 teilbar. Denn jeder Summand von der Form $(2^{3^p+1} - 1)$ enthält den Faktor 3 nur einmal.

Es ist nämlich: $(2^{3^p+1} - 1) : (2+1) = 2^{3^p} - 2^{3^p-1} + 2^{3^p-2} \dots - 2^2 + 2 - 1,$

$$= 2\,\frac{(-2)^{3^p} - 1}{-3} - 1 = 2\,\frac{2^{3^p}+1}{3} - 1.$$

Nun ist $\frac{2^{3^p}+1}{3}$ eine ganze Zahl, also ist $\left(2\,\frac{2^{3^p}+1}{3} - 1\right)$ nicht mehr durch 3 teilbar

Demnach ist $(2^Z + 1) = (2^{3^K} + 1)$ die kleinste Zahl, die durch $3\,Z = 3^{K+1}$ teilbar ist.

VI. Kommt unter den Faktoren von Z eine Potenz von 3 vor, ist etwa $Z = 3^v . a^p . a^q . c^r \dots$, so erkennt man auf folgende Weise, daß die Zahl

$$\left[(-2)^{3^v . a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots} - 1\right] \left[= 2^{3^v . a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots} - 1\right]$$

durch 3 Z teilbar ist. Nach IV ist die Zahl $\left(2^{a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots} - 1\right)$ teilbar durch $3 a^p\, b^q\, c^r \dots$, oder wenn man abkürzend $a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots = w$ setzt, so ist $(2^w - 1)$ durch $3\, a^p\, b^q\, c^r \dots$ teilbar. Nun ist

$(2^w - 1)^3 = (2^{3w} - 1) - 3.2^w (2^w - 1),$

$(2^w - 1)^5 = (2^{5w} - 1) - 5.2^w (2^{3w} - 1) + 10.\, 2^{2w} (2^w - 1),$

$(2^w - 1)^7 = (2^{7w} - 1) - 7.2^w (2^{5w} - 1) + 21.\, 2^{2w} (2^{3w} - 1) - 35.\, 2^{3w} (2^w - 1),$

. . . .

$$(2^w - 1)^{2n+1} = (2^{(2n+1)w} - 1) - (2n+1).\, 2^w . (2^{(2n-1)w} - 1) + \frac{(2n+1).\, 2n}{1.\, 2}.$$
$$2^{2w} (2^{(2n-3)w} - 1) \dots \pm \frac{(2n+1).\, 2n.\, (2n-1) \dots (2n+1-(n-1))}{1.\, 2.\, 3 \dots n}\, 2^{nw} . (2^w - 1).$$

Da $(2^w - 1)$ durch $3\, a^p . b^q . c^r \dots$ teilbar ist und ebenso $(2^w - 1)^{2n+1}$, so muß auch der Reihe nach $(2^{3w} - 1)$, $(2^{5w} - 1)$, $(2^{7w} - 1), \dots (2^{(2n+1)w} - 1)$ durch $3\, a^p . b^q . c^r$. teilbar sein. Weiter ist $(2^{(2n+1)w} - 1) = (2^{(2n+1)w} + 1)\,(2^{2n+1)w} - 1)$ durch $3\, a^p . b^q . c^r$.. teilbar, da der 2. Faktor durch diese Zahl teilbar ist. Also ist allgemein $(2^{mw} - 1) = (2^{m.\, a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots} - 1)$ teilbar durch $3\, a^p . b^q . c^r$

In ganz gleicher Weise zeigt sich, daß für jeden ganzzahligen Werth für m die Zahl $(2^{m\, 3^v} - 1)$ durch $3.\, 3^v$ teilbar ist. Folglich ist die Zahl $(2^{3^v . a^{p-1}(a-1)\, b^{q-1}(b-1)\, c^{r-1}(c-1) \dots} - 1)$ sowohl durch $3.\, 3^v$ als durch $3.\, a^p . b^q . c^r$.. teilbar, deshalb ist sie auch durch $3.\, 3^v . a^p . b^q . c^r$ teilbar.

Wie demnach auch die Zahl μ beschaffen sein mag, es giebt stets 2 Zahlen n und p von der Beschaffenheit, daß $\frac{(-2^n - (-2)^p}{-3\,\mu}$ eine ganze Zahl ist.

§ 20.

Wenn der Bogen $S_0\, S_1 = s$ mit der Peripherie des Kreises K^2 kommensurabel ist, etwa $s = \frac{\lambda}{\mu}\, 2\, \pi\, r$ (λ und μ relativ priem), so schließt sich die gemäß § 18 im Kreise K^2 gezogene Reihe Sehnen, und es entsteht im allgemeinen ein geschlossenes Polygon. Es fällt nämlich einmal ein Punkt S_n mit einem vorhergehenden S_p zusammen, da der Bogen $\widehat{S_n\, S_p} =$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{\lambda}{\mu} \frac{(-2^n) - (-2)^p}{-3} 2 \pi r$ bei passender Wahl von n und p ein Vielfaches von $2 \pi r$ ist (§ 19). Wird für ein bestimmtes n bei gegebenem μ die Zahl $p = o$, so fällt der Punkt S_n mit dem Anfangspunkt S_0 zusammen d. h. die Sehnenreihe kehrt zum Anfangspunkt zurück. Es ist dies jedoch keineswegs immer der Fall; es kann p auch den Wert 1, 2, 3, 4... haben. Dann fällt der Punkt S_n resp. mit dem 1., 2., 3., 4... Endpunkt zusammen. Ist $p = o$, so ist

$$\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3} = \frac{(-2)^n - 1}{-(2+1)} = \frac{(-2)^n - 1.}{-2-1} = (-2)^{n-1} + (-2)^{n-2} + (-2)^{n-3} \ldots + 2 + 1$$

stets ungerade. Ist dagegen $p > o$, so ist $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3} = (-2)^p \frac{(-2)^{n-p} - 1}{-3}$ stets eine gerade Zahl. Da nun eine ungerade Zahl niemals durch eine gerade teilbar ist, so kann p niemals Null sein, wenn μ eine gerade Zahl ist. Also kehrt die Sehnenreihe niemals znm Anfangspunkt zurück, wenn μ eine gerade Zahl ist. Es kann die Sehnenreihe nur dann zum Anfangspunkt zurückkehren, wenn μ ungerade ist. Dann kehrt sie aber auch immer zum Anfangspunkt zurück. Denn nehmen wir an, daß für ein ungerades μ die Zahl $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{3 \mu}$ als ganze Zahl erkannt ist, so muß der nte mit dem pten Punkt zusammenfallen. Da aber $\frac{(-2)^n - (-2)^p}{-3 \mu} = (-2)^p \frac{(-2)^{n-p} - 1)}{-3 \mu}$, und $(-2)^p$ durch 3μ nicht teilbar ist, so muß $\frac{(-2)^{n-p} - 1}{-3 \mu}$ eine ganze Zahl sein, d. h. es fällt vorher schon der $(n-p)$te Punkt mit dem Anfangspunkt zusammen. — Ist der zur Anfangssehne gehörende Bogen $\widehat{S_0 S_1} = s = \frac{\lambda}{\mu}. 2 \pi r$, so ist der Bogen $\widehat{S_1 S_2} = -2 s$, der Bogen $\widehat{S_0 S_2} = -s$, $\widehat{S_0 S_3} = \frac{(-2)^3 - 1}{-3} s = 3 s$, $S_0 S_4 = \frac{2^4 - 1}{-3} s = -5 s$, $S_0 S_3 = \frac{(-2)^5 - 1}{-3} s = 11 s$ u. s. w. Die Punkte S_1, S_2, S_3... stehen also um ein Vielfaches von s von Punkt S_0 entfernt auf dem Kreisumfange; sie sind also die Endpunkte eines regelmäßigen Vielecks (μ-ecks) im Kreise und die Sehnen sind die Seiten verschiedener Ordnung (Seiten und Diagonalen) des μ-ecks (Fig. 9). Die Zahl λ ist dabei ohne Einfluß auf die Beschaffenheit des Polygons. Nimmt man nämlich als Bogen der ersten Sehne stets den kleineren, so ist $\lambda < \frac{\mu}{2}$. Und denkt man sich für ein beliebiges μ das Polygon konstruiert für $\lambda = 1$, so erhält man eine Reihe von Sehnen, deren zugehörige Bogen 2 bis λ mal so groß sind als der Bogen, der zur Anfangssehne gehört. Hat der Bogen der Anfangssehne nicht die Größe $\frac{1}{\mu} 2 \pi r$, sondern etwa $\frac{2}{\mu} 2 \pi r$, $\frac{3}{\mu} 2 \pi r$ ... $\frac{\lambda}{\mu}$ ($\lambda < \frac{\mu}{2}$), so bewirkt dies, wie sich unmittelbar aus der Figur ergiebt, eine Aenderung in der Bezeichnung der Ecken, bleibt aber für die Beschaffenheit des Polygons selbst ohne Einfluß

Das Sehnenpolygon nimmt im allgemeinen nicht alle Ecken in Anspruch. Es ist dies nur dann der Fall, wenn erst der μte Endpunkt S_μ mit dem Anfangspunkt S_0 zusammenfällt. Es kann also zunächst nur dann eintreffen, wenn μ ungerade ist, weil nur dann die Sehnenreihe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Es muß aber auch, damit erst der μ te Endpunkt zum Ausgangspunkt zurückkehrt, $((-2)^{\mu} - 1)$ die kleinste Zahl dieser Form sein, die durch $3\,\mu$ teilbar ist. Das ist aber nur der Fall, wenn μ eine Potenz von 3, etwa $\mu = 3^{K}$ ist (§ 19). Also nur wenn μ eine Potenz von 3 ist, wird das Sehnenpolygon alle Ecken des Vielecks in Anspruch nehmen. In diesem Falle stehen die Seiten des Polygons in einer interessanten Beziehung. Es ist nämlich, wenn der Bogen $S_0\,S_1 = \frac{\lambda}{\mu}\,2\,\pi\,r$ ist, Sehne

$$S_0\,S_1 = 2\,r\,\sin\frac{\lambda}{\mu}\,\pi\,r, \qquad S_3\,S_4 = 2\,r\,\sin\frac{\lambda}{\mu}\,\pi\,r.\,2^3,$$

$$S_1\,S_2 = 2\,r\,\sin\frac{\lambda}{\mu}\,\pi\,r.\,2, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$S_2\,S_3 = 2\,r\,\sin\frac{\lambda}{\mu}\,\pi\,r.\,2^2, \quad S_\varrho\,S_{\varrho+1} = 2\,r\,\sin\frac{\lambda}{\mu}\,\pi\,r\,2^{\varrho}.$$

Ist nun $\mu = 3^{K}$, und $\frac{2^{3^K}+1}{3\,\mu} = M$, $\frac{2^{3^{K-1}}+1}{\mu} = N$ (M und N ganze Zahlen), so ist $\frac{2^{3^{K-1}}}{\mu} = N - \frac{1}{\mu}$, und wenn $\varrho = 3^{K-1}$ ist,

$$S_\varrho\,S_{\varrho+1} = 2\,r\,\sin\lambda\,\pi\,r\,(N - \frac{1}{\mu}) = 2\,r\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}),$$

$$S_{\varrho+1}\,S_{\varrho+2} = 2\,r\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}\cdot 2,$$

$$S_{\varrho+2}\,S_{\varrho+3} = 2\,r.\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}\cdot 2^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{2\varrho}\,S_{2\varrho+1} = 2\,r.\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}\cdot 2^{K} = 2\,r\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu},$$

$$S_{2\varrho+1}\,S_{2\varrho+2} = 2\,r.\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}\cdot 2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{3\varrho-1}\,S_{3\varrho} = S_{3\varrho-1}\,S_0 = 2\,r.\,\sin\frac{\lambda\,\pi\,r}{\mu}\cdot 2^{K-1}.$$

Die μ Sehnen sind also in diesem Falle zu drei und drei gleich. — Nennt man in einem regelmäßigen Vieleck ($(2\,m + 1)$-eck) die Seiten, welche 2 auf einanderfolgende Ecken verbinden, Seiten erster Ordnung, diejenigen, welche 2 Ecken verbinden, so, daß stets eine Ecke übersprungen wird, Seiten 2. Ordnung, diejenigen, die zwei Ecken überspringen, Seiten 3. Ordnung u. s. w., so erhält man in diesem $(2\,m + 1)$-eck Seiten 1., 2., 4.... $(m - 1)$. Ordnung. Die Sehnen unseres μ eck ($\mu = 3_K$) sind alle von denjenigen Ordnungen, die nicht durch 3 teilbar sind. Ist nämlich die erste Sehne $s_1 = 2\,r\,\sin\frac{\pi\,r}{\mu}$ von der ersten Ordnung, so ist die 2. Sehne $s_2 = 2\,r\,\sin\frac{\pi\,r}{\mu}\cdot 2$ von der 2., die 3. Sehne $s_3 = 2\,r\,\sin\frac{\pi\,r}{\mu}.\,2^2$ von der 4. Ordnung u. s. w. Die nte Sehne $s_n = 2\,r\,\sin\frac{\pi\,r}{\mu}\cdot 2^{n-1}$ ist von der (2^{n-1})ten Ordnung, wo $2^{n-1} \leq \frac{\mu - 1}{2}$ ist. Ist $2^n > \frac{\mu - 1}{2}$, so ist die $(n + 1)$te Sehne $s_{n+1} = 2\,r.\,\sin\frac{\pi\,r}{\mu}\,2^n$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von der $(\mu - 2^n)$ten, die $(n + 2)$te Sehne $s_{n+2} = 2\, r \sin \frac{\pi\, r}{\mu} .\, 2^{n+1}$ von der $(\mu - 2^{n+1})$ten Ordnung, die $(n + m + 1)$te Sehne $s_{n+m+1} = 2\, r.\, \sin \frac{\pi\, r}{\mu} .\, 2^{m+n}$ $(m + n \lessdot \mu)$, von der $(\mu - 2^{m+n})$ten Ordnung. Ist dann $(n + m + 1) \gtrdot \mu$, so ist die $(n + m + 2)$te Sehne $s_{n+m+2} = 2\, r \sin \frac{\pi\, r}{\mu} .\, 2^{n+m+1}$ von der $(2^{n+m+1} - \mu)$ten Ordnung. Keine der Zahlen von der Form $\pm (2^{n+m+x} - \mu)$ ist, da μ, nicht aber 2^{n+m+x} durch 3 teilbar ist, durch 3 teilbar. Das ganze Polygon ist dem Kreise K^2 ein und unserer Kurve C_3^4 umgeschrieben.

§ 21.

Zwei Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{A}\, \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\, \mathfrak{B}_1$ bilden das § 12—17 erwähnte Quadrupel a b c d, wodurch ein drittes Paar Fußpunktenlinien $\mathfrak{C}\, \mathfrak{C}_1$ bestimmt ist (Fig. 10). Ziehen wir eine beliebige andere Fußpunktenlinie $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ in s, r, t schneidet und durch einen Quadrupelpunkt, etwa c zu $\mathfrak{G}$ die Parallele $\mathfrak{G}'$, welche $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in α', β', γ' trifft. Durch die Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ und den Punkt c ist eindeutig ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ bestimmt, der durch c geht und die 4 genannten Geraden berührt.*) Den Berührungspunkt c_1 der Geraden $\mathfrak{G}$ findet man, indem man den Schnittpunkt q von $\alpha\ \beta'$ und $\alpha'\ \beta$ mit c verbindet.**) In derselben Weise bestimmen der Punkt c und die Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ als Tangenten eindeutig einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^2$, der die Gerade $\mathfrak{G}$ im Punkte c'_1 berührt, den man erhält, wenn man c mit $u = (\gamma\ \beta', \gamma'\ \beta)$ verbindet. Auch die Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und der Punkt c bestimmen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2^2$, dessen Berührungspunkt c'' mit $\mathfrak{G}$ auf der Geraden c p liegt, wo $p = (\alpha\ \gamma', \alpha'\ \gamma)$ ist.

Nun verhält sich:
$\beta\ c_1 : \alpha'\ c = \alpha\ c_1 : \beta'\ c = \alpha\ \beta : \alpha'\ \beta' = b\ \beta : b\ \beta' = \beta\ t : \beta'\ c = \alpha\ t : \alpha'\ c$; folglich ist $\alpha\ c_1 = \beta\ t$, $\beta\ c_1 = \alpha\ t$.

Ferner: $\gamma\ c_1' : \beta'\ c = \beta\ c_1' : \gamma'\ c = \beta\ \gamma : \beta'\ \gamma' = \gamma\ d : \gamma'\ d = \gamma\ s : \gamma'\ c = \beta\ s : \beta'\ c$; folglich $\gamma\ c_1' = \beta\ s$, $\beta\ c_1' = \gamma\ s$. Ebenso
$\gamma\ c_1'' : \alpha'\ c = \alpha\ c_1'' : \gamma'\ c = \alpha\ \gamma : \alpha'\ \gamma' = a\ r : a\ c = \gamma\ r : \gamma'\ c = \alpha\ r : \alpha'\ c$; folglich $\gamma\ c_1'' = \alpha\ r$, $\alpha\ c_1'' = \gamma\ r$.

Ist O der Mittelpunkt der Fußpunktenlinie $\mathfrak{G}$, so ist $O\, s = \alpha\, O$, $o\, r = \beta\, o$, $o\, t = \gamma\, O$ (§ 4); also ist auch $\alpha\ t = \gamma\ s$, $\beta\ t = \gamma\ r$, $\beta\ s = \alpha\ r$; folglich $\alpha\ c_1 = \alpha\ c_1''$, $\beta\ c_1 = \beta\ c_1'$, $\gamma\ c_1' = \gamma\ c_1''$; folglich $c_1 \equiv c_1' \equiv c_1''$, d. h. der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2^2$ sowohl als $\mathfrak{K}_1^2$ berühren die Gerade $\mathfrak{G}$ in demselben Punkte c_1, in welchem $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}^2$ berührt wird.

Auf der Geraden c c_1 liegen die Punkte q, u, p, folglich sind c und c_1 auch die Berührungspunkte des durch die fünf Tangenten $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmten Kegelschnitts K_1^2 auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$.***) Der Kegelschnitt K_1^2 hat also mit jedem der oben genannten Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ die beiden Punkte c und c_1 und 4 Tangenten gemeinsam, d. h. die 4 genannten Kegelschnitte sind nicht von einander verschieden, fallen zusammen. Der Kegelschnitt K_1^2 hat zu dem Quadrupel a b c d die besondere Lage, daß er dem von 3 Punkten a b d gebildeten

*) Steiner-Schröter, Theor. d. Kglschn. 2. Aufl. S. 282.
**) Steiner-Schröter, a. a. O. S. 92.
***) Steiner-Schröter, a. a. O. S. 282.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreieck eingeschrieben ist und durch den 4ten Punkt c hindurchgeht. Ändern wir die beliebig genommene Gerade G und damit G,' so erhalten wir die Gesamtheit der Kegelschnitte, die dem Dreieck a b d eingeschrieben sind und durch c gehen. Wir erhalten demnach folgende weitere Erzeugungsweise unserer Kurve C_3^4. Denkt man sich rücksichtlich irgend eines der oben beschriebenen Quadrupel a b c d die Schaar Kegelschnitte, welche durch einen der 4 Punkte etwa durch c gehen und dem von den 3 übrigen bestimmten Dreieck a b d eingeschrieben sind, ferner in jedem Kegelschnitt den durch den Punkt c gehenden Durchmesser $c\,c_1$ und in dessen anderem Endpunkt c_1 die Tangente G des Kegelschnittes, so ist die Enveloppe aller dieser Tangenten eine C_3^4. Für alle Quadrupel a b c d erhalten wir dieselbe Kurve C_3^4, da ja das eine Quadrupel die C_3^4 festlegt, deren rechtwinklige Tangentenpaare die übrigen Quadrupel bestimmen.

§ 22.

Die Kurve C_3^4 kann auch durch eine rollende Bewegung erzeugt werden. Denken wir uns auf dem in § 6 erwähnten Kreise $\mathfrak{K}^2$, dessen Radius 3 r war, einen Kreis $[K]^2$ mit dem Radius r rollen und auf diesem Kreise $[K]^2$ einen festen Punkt P, so beschreibt dieser feste Punkt P unsere Kurve C_3^4. — Nehmen wir an, die Anfangslage des Punktes P auf $[K]^2$ sei so, daß P mit einem der Punkte U_2, V_2, W_2 des Kreises $\mathfrak{K}^2$ zusammenfällt und nehmen alsdann $M\,U_2$ (wo M der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}^2$ ist) zur X-axe und den dazu senkrechten Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}^2$ zu Y-axe eines Koordinatensystems. Hat der Punkt P beim Rollen des Kreises $[K]^2$ auf $\mathfrak{K}^2$ die Lage angenommen, wie sie Fig. 11 angiebt, so ist, wenn man $P\,A \perp M\,U_2$ zieht und mit (x, y) die Koordinaten des Punktes P bezeichnet, $x = M\,A$, $y = P\,A$. Ist O der Mittelpunkt von $[K]^2$, trifft M O den Kreis $\mathfrak{K}^2$ in E, und bezeichnet man den Winkel $E\,M\,U_2$ mit t und den Winkel E O P mit t_1, so ist $\text{arc}\ U_2\,E = 3\,r\,t = \text{arc}\ P\,E = r\,t_1$; folglich $3\,t = t_1$. Zieht man noch $O\,C \perp M\,U_2$ und $P\,B \perp O\,C$, so ist $x = M\,C + B\,P$ und $y = O\,C - O\,B$. Es ist aber $M\,C = 2\,r\cos t$, $B\,P = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + t - t_1\right) = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\,t\right) = r.\cos(2\,t)$, $O\,C = 2\,r\sin t$ und $O\,B = r\cos\left(\frac{\pi}{2} + t - 2\,t_1\right) = r\sin(2\,t)$. Also ist:
$x = 2\,r\cos t + r\cos(2\,t)$, und $y = 2\,r\sin t - r\sin(2\,t)$.

Der Kreis $[K]^2$ berührt beständig den Kreis K^2. Der augenblickliche Berührungspunkt sei D; derselbe hat die Koordinaten $x_1 = r\cos t$ und $y_1 = r\sin t$. Bezeichnet man die laufenden Koordinaten der Tangente, die im Punkte P die von P beschriebene Kurve berührt, mit X und Y, so ist die Gleichung dieser Tangente $(X - x) = (Y - y)\,\frac{d\,x}{d\,y}$. Es ist

$\frac{d\,x}{d\,t} = -2\,r\sin t - 2\sin(2\,t)$; $\frac{d\,y}{d\,t} = 2\,r\cos t - 2\,r\cos(2\,t)$, also

$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{-\sin t - \sin(2\,t)}{\cos t - \cos(2\,t)}$. Demnach hat die Gleichung der Tangente in P die Form

$$X - (2\,r\cos t + r\cos(2\,t)) = [Y - (2\,r\sin t - r\sin(2\,t))] \cdot \frac{-\sin t - \sin(2\,t)}{\cos t - \cos(2\,t)}'$$

$$X - 2\,r\cos t - r\cos(2\,t) = \Big(Y - 2\,r\sin t + r\sin(2\,t)\Big)\left(-\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man in diese Gleichung für X und Y die Koordinaten des Punktes D ein, so ergiebt sich

$$r \cos t - 2 r \cos t - r \cos (2 t) = -\left[r \sin t - 2 r \sin t + r \sin (2 t) \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\right],$$

$$r (\cos t + \cos (2 t)) = r (\sin (2 t) - \sin t.) \operatorname{cotg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{\cos (2 t) + \cos t}{\sin 2 t - \sin t} = \operatorname{cotg.} \frac{t}{2} \text{ oder}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{t}{2} = \cot \frac{t}{2};$$ d. h. die Koordinaten des Punktes D genügen der Gleichung der Tangente in P, oder die Tangente in P geht durch den jedesmaligen Berührungspunkt D der Kreise $[K]^2$ und K^2.

Ist φ der Winkel, den die Tangente in P mit der X-axe bildet, also $D U_2 M = \varphi$, so ist $\sphericalangle E D U_2. = t + \varphi = \frac{t_1}{2}$; und da $t_1 = 3 t$ ist, so ist $\varphi = \frac{t}{2}$, oder $t = 2 \varphi$. Setzt man diesen Wert von t in die Ausdrücke für die Koordinaten des Punktes P ein, so erhält man als Gleichungen der von P durchlaufenen Kurve:

$$x = 2 r \cos (2 \varphi) + r \cos (4 \varphi),$$
$$y = 2 r \sin (2 \varphi) - r \sin (4 \varphi); \text{ oder}$$
$$x = 4 r \cos^2 \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) - r,$$
$$y = 8 r \sin^3 \varphi. \cos \varphi.$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen der von P durchlaufenen Kurve mit den in § 9 erhaltenen Gleichungen der dort behandelten Kurve C_3^4, so stimmen dieselben fast vollständig überein, da φ dort wie hier den Winkel der Tangente des Punktes P mit der X-axe bezeichnete. Nur die konstante Größe r der ersten Gleichung fehlte dort in dem Werte für x. Damals hatten wir als X-axe dieselbe Linie $M U_2$ (Radius des Kreises K^2) genommen, dagegen als Y-axe die Tangente an K^2 in dem Punkte, in welchem die Verlängerung von $U_2 M$ den Kreis K^2 trifft. Beziehen wir die Koordinaten des Punktes P auch auf dieses Koordinatensystem, so fällt in der ersten Gleichung der von P durchlaufenen Kurve die Konstante r fort, und wir erhalten als Gleichungen der Kurve im neuen System

$$x = 4 r \cos^2 \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi),$$
$$y = 8 r \sin^3 \varphi. \cos \varphi.$$

Also ist die von P durchlaufene Kurve unsere Kurve C_3^4.

§ 23.

Errichten wir auf der Kurve C_3^4 und dem ihr eingeschriebenen Kreis K^2 die geraden Cylinder, so erhalten wir eine dreibogige Cylinderfläche $F_3{}^4$, deren Fläche den über K^2 stehenden Cylinder 2ten Grades F^2 längs 3 Seiten berührt, welches die 3 Kanten eines dem Cylinder 2ten Grades eingeschriebenen gleichseitigen, dreiseitigen Prismas sind. Die durch diese 3 Kanten und durch die Cylinderaxe gelegten Ebenen berühren den Cylinder $F_3{}^4$ in den über den Punkten U_2, V_2, W_2 stehenden Normalen, welche für den Cylinder $F_3{}^4$ Rückkehrkanten sind. Die erwähnten Ebenen sind Rückkehrtangentialebenen des Cylinders $F_3{}^4$. Jede Ebene, die senkrecht zur Ebene des Kreises K^2 steht, trifft den Cylinder $F_3{}^4$ in 4 Geraden, jede andere Ebene durchschneidet den Cylinder in einer Kurve C_3^4. Durch jede Gerade, die parallel zu den Seiten des

Cylinders ist, gehen 3 Tangentialebenen an den Cylinder. Die Fläche F_3^4 ist also eine Fläche 3ter Klasse, 4ter Ordnung. Durch jede Kante des Cylinders F^2 geht ein rechtwinkliges Tangentialebenenpaar an den Cylinder F_3^4. Jede 2 rechtwinklige Tangentialebenenpaare durchschneiden sich in 4 Geraden a, b, c, d, durch welche sich ein Büschel gleichseitiger Hyperboloide hindurchlegen läßt. Sind die Schnittgeraden von 2 rechtwinkligen Tangentialebenenpaare der F_3^4 reell, so liegen sie alle innerhalb des Cylinders F^2. Je drei der 4 Geraden a, b, c, d liegen auf einem geraden Cylinder 2ten Grades, dessen Grundkreis doppelt so groß als der Kreis K^2 ist. Die Axen α, β, γ, δ dieser Cylinder haben zu den Geraden a, b, c, d die eigentümliche Lage, daß z. B. a die Axe eines neuen Cylinders 2ten Grades ist, der durch β, γ, δ geht; ebenso liegt b zu α, γ, δ; c zu α, β, δ; d zu α, β, γ. — Die Ebenen $\alpha\,\gamma$, $\beta\,\delta$ und ebenso $\alpha\,\beta$, $\gamma\,\delta$; $\alpha\,\delta$, $\beta\,\gamma$ sind zu einander senkrecht und schneiden sich auf dem Cylinder F^2. Die Enveloppe aller Ebenen $\alpha\,\delta$, $\beta\,\gamma$ ꝛc. ist eine Fläche Φ_3^4, die gegen die gleiche Fläche F_3^4 um 180° gedreht erscheint u. s. w.

§ 24.

Schneidet man die im vorhergehenden § beschriebene cylindrische Fläche mit einer Ebene E_1, die gegen die Ebene des Kreises K^2 unter einem Winkel ψ geneigt ist ($\psi < 90^0$), so erhalten wir als Schnittspuren der Cylinder F^2 und F_3^4 eine Ellipse K_1^2 und eine Kurve C'^4_3, welche die Ellipse einschließt und sie in 3 Punkten berührt.

Nennen wir die Berührungspunkte U', V', W'; die Mittellinien des Dreiecks U' V' W', die sich im Mittelpunkt M_1 der Ellipse schneiden, sind Rückkehrtangenten der C'^4_3. Die Rückkehrpunkte U'_2, V'_2, W'_2 der Kurve C'^4_3 liegen auf einer mit der Ellipse K_1^2 konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse. Die Strecken $M_1\,U'_2$, $M_1\,V'_2$, $M_1\,W'_2$ sind beziehlich dreimal so lang, als die Strecken $M_1\,U'$, $M_1\,V'$, $M_1\,W'$. Die Tangenten der Kurve C'^4_3 schneiden sich paarweise auf der Ellipse K_1^2, doch sind diese Tangentenpaare nicht mehr rechtwinklig zu einander. Zwei solche Tangentenpaare treffen sich in 4 Punkten a_1, b_1, c_1, d_1. Auch das 3te Paar Gegenseiten des durch diese 4 Punkte bestimmten vollständiges Viereck ist ein Paar solcher Tangenten der C'^4_3, das den Schnittpunkt auf der Ellipse K_1^2 hat. Die Quadrupelpunkte a_1, b_1, c_1, d_1 liegen, wenn sie reell sind, innerhalb der Kurve C'^4_3. Der Inhalt der in den Dreiecken $a_1\,b_1\,c_1$, $a_1\,b_1\,d_1$, $a_1\,c_1\,d_1$, $c_1\,d_1\,b_1$ des Quadrupels $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ eingeschriebenen, mit der Ellipse K_1^2 ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen ist doppelt so groß als der Inhalt der Ellipse K_1^2, da die Axen aller dieser Ellipsen die Größe 4 r bez. $\frac{4\,r}{\cos\psi}$ haben, während die der Ellipse K_1^2 2 r und $\frac{2\,r}{\cos\psi}$ sind, wo r der Radius des Grundkreises K^2, ψ der Neigungswinkel der schneidenden Ebene zur Ebene des Kreises K^2 ist. Die Mittelpunkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 der 4 durch die Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$, $a_1\,b_1\,d_1$, $a_1\,c_1\,d_1$, $b_1\,c_1\,d_1$ bestimmten [mit K_1^2 ähnlichen und ähnlich gelegener Ellipsen liegen derartig, daß durch 3 der Punkte $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$, $\alpha_1\,\beta_1\,\delta_1$, $\alpha_1\,\gamma_1\,\delta_1$, $\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ und durch den Punkt d_1 bez. c_1, b_1, a_1, als Mittelpunkt, jedesmal eine Ellipse bestimmt ist, die ebenfalls mit der Ellipse K_1^2 ähnlich und ähnlich gelegen sind, und deren Axen doppelt so groß sind als die Axen der Ellipse K_1^2. Die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ treffen sich auf der Ellipse K_1^2; die Gesamtheit der Gegenseiten $\alpha_1\,\delta_1$, $\beta_1\,\gamma_1$, $\alpha_1\,\gamma_1$, $\beta_1\,\delta_1$, $\alpha_1\,\beta_1$, $\gamma_1\,\delta_1$ aller Vierecke $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ umhüllen eine neue Kurve $\mathfrak{C}'^4_3$, innerhalb welcher alle reellen Quadrupel $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ liegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch jedes Quadrupel $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ geht ein Büschel Hyperbel, deren Mittelpunkt alle auf der Ellipse K_1^2 liegen. Die Hyperbel, die einen Punkt S_1 der Ellipse K_1^2 zum Mittelpunkt hat und durch $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ geht, hat das durch S_1 gehende Tangentenpaar an C'^4_3 zu Asymptoten. Die verschiedenen Asymptotenpaare des ganzen Büschels umhüllen also die Kurve C'^4_3. Auf dem Mittelpunktskegelschnitt K_1^2 liegen die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks a b c d sowie die 3 Diagonalpunkte desselben. Den sämtlichen Quadrupeln $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ ist eine Schar-Schar Hyperbeln umgeschrieben. Jedes Paar zugehöriger Tangenten an die Kurve C'^4_3 ist Asymptotenpaar für je eine Hyperbel aus jeder Schar. Je zwei Quadrupel $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ und $a'_1\ b'_1\ c'_1\ d'_1$ liegen auf einer Hyperbel.

Wenn in einer Ebene E_1 ein Kegelschnittsbüschel gegeben ist, dessen Grundpunkte a_1, b_1, c_1, d_1 so liegen, daß einer a_1 innerhalb des von den 3 anderen gebildeten Dreiecks $b_1\ c_1\ d_1$ liegt, so besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln.*) Der Mittelpunktskegelschnitt eines solchen Büschels ist eine Ellipse K_1^2, auf der die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Viereck $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ und die 3 Diagonalpunkte desselben liegen.**) Den Mittelpunkt sowie die Richtung und Größe der Axen dieser Ellipse kann man leicht bestimmen.***) Die kleine Axe sei 2 B, die große 2 A. Schneidet man die Ebene E_1 mit einer anderen Ebene E so, daß die Schnittlinie derselben parallel der kleinen Axe der Ellipse K_1^2, und der Winkel der beiden Ebenen gleich ψ ist, wo ψ durch die Beziehung $\frac{B}{A} = \cos\psi$ bestimmt wird, und projiziert das ganze Büschel von Hyperbel einschließlich Mittelpunktskegelschnitt und Asymptoten orthogonal auf die Ebene E, so projiziert sich zunächst der Mittelpunktskegelschniit K_1^2 in einen Kreis K^2, dessen Radius gleich der halben kleinen Axe der Ellipse K_1^2 ist. Die Projektionen a, b, c, d der Grundpunkte a_1, b_1, c_1, d_1 des Büschels in E_1 bilden in E ein vollständiges Viereck, dessen Ecken so liegen, daß eine Ecke a innerhalb des von den 3 anderen gebildeten Dreiecks liegt. Der Kreis K^2 geht durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks a b c d, sowie durch die Diagonalpunkte desselben. Da aber der Kreis K^2 der Feuerbachsche Kreis für das Dreieck b c d ist, so müssen die Punkte, die der Kreis mit den Seiten b c, c d, d b dieses Dreieckes außer ihren Mittelpunkten gemeinsam hat, die Fußpunkte der von den gegenüberliegenden Ecken auf diese Seiten gefällten Lote sein; also ist a der Höhenpunkt des Dreiecks b c d. Die Projektionen der einzelnen Hyperbeln des Büschels in E_1 bilden in E ebenfalls ein Büschel Hyperbeln, die durch die Punkte a b c d gehen. Das Büschel in E besteht also aus lauter gleichseitigen Hyperbeln.†) Die Enveloppe der Asymptoten dieser gleichseitigen Hyperbeln in E ist identisch mit der Enveloppe der dem Dreieck b c d zugehörigen Fußpunktenlinie, ist also eine besondere Kurve 3ter Klasse 4ter Ordnung (§ 16). Die Enveloppe der Asymptoten des Büschels Hyperbeln in E_1, die wir ja als Schnittkurve der Ebene E_1 mit dem über der C_3^4 in E stehenden geraden Cylinder F_3^4 ansehen können, ist also auch eine besondere Kurve C'^4_3. Wir erhalten somit den Satz: **Die Enveloppe der Asymptoten eines aus lauter Hyperbeln bestehenden Büschels (dessen Grundpunkte so liegen, daß einer innerhalb des von den 3 anderen gebildeten Dreiecks liegt) ist eine besondere Kurve 3ter Klasse 4ter Ordnung.**

*) Steiner-Schröter, Theor. d. Kglschn. 2. Aufl. S. 231.

**) Steiner-Schröter, a. a. O. S. 305.

***) Steiner-Schröter, a. a. O. S.S. 306, 166, 169.

†) Steiner-Schröter, a. a. O. S. 232.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 25.

Die Kurve C_3^4 in der Ebene des Grundkreises K^2 kann nach § 18 auch dadurch erzeugt werden, daß man 2 Durchmesser des Kreises K^2 nach entgegengesetzten Richtungen sich so bewegen läßt, daß die von den Radien beschriebenen Kreissektoren sich stets wie 1 : 2 verhalten, und die Endpunkte dieser Radien mit einander verbindet. Diese Verbindungslinien umhüllen eine Kurve C_3^4 in der Ebene des Kreises K^2. In ähnlicher Weise gelangen wir zu einer direkten Konstruktion der Kurve $C'_3{}^4$ in der Ebene E_1, mit der wir die über K^2 und C_3^4 errichteten geraden Cylinder geschnitten gedacht haben. Denken wir den über K^2 stehenden Cylinder F^2, aus dem die Ebene E_1 die Ellipse K_1^2 ausschneidet (§ 24) durch eine Ebene Φ geschnitten, die durch die Cylinderaxe geht und senkrecht zur gemeinschaftlichen Schnittlinie der Ebene E_1 und der Ebene des Kreises K^2 steht. Ist Q R in E_1 eine Tangente der Ellipse K_1^2 parallel der Schnittlinie der genannten Ebene, und trifft die Ebene Φ diese Tangente Q R in A, so ist, wenn M_1 der Mittelpunkt der Ellipse K_1^2 ist, M_1 A die größere Halbaxe der Ellipse. Denken wir ferner durch A zur Ebene des Kreises K^2 die Parallelebene Θ gelegt, so trifft die Ebene Θ die über K^2 und C_3^4 stehenden geraden Cylinder in Kurven, Linien, Flächen ꝛc., die mit den entsprechenden Kurven, Linien, Flächen ꝛc. der Ebene des Kreises K^2 kongruent sind. Bewegt sich ein Radius des Kreises K^2 in seiner Ebene, so bewegt sich in der Ebene Θ der entsprechende Radius genau ebenso, und die von einem solchen Radius beschriebenen Flächen sind genau gleich den Flächen, die der entsprechende Radius des Kreises K^2 beschreibt. Ist O der Schnitt der Ebene Θ mit dem im Mittelpunkte des Kreises K^2 zur Ebene des Kreises errichteten Lot, und ist O A B ein Kreissektor in der Ebene Θ, so entspricht diesem in der Ebene E_1 ein Ellipsensektor, welcher in einer bestimmten Beziehung zu dem Kreissektor in der Ebene Θ steht.

Betrachten wir zunächst das dem Dreieck O A B in Θ entsprechende Dreieck M_1 A B_1 in E_1 (Fig. 12). Der Inhalt des Dreiecks O A B ist $\frac{r^2}{2} \sin \varphi$; wenn r der Radius des Grundkreises K^2, φ der Winkel A O B ist. Trifft $M_1 B_1$ die Schnittlinie Q R der Ebenen E_1 und Θ in D, und ist B B_1 senkrecht zur Ebene Θ, so ist $M_1 B_1$ die Linie in E_1, die dem Radius O B in Θ entspricht, und das Dreieck M_1 A B_1 das dem Dreieck O A B entsprechende. Ist ψ der Neigungswinkel der Ebenen Θ und E_1, so ist M_1 A O $= \psi$. Bezeichnet man den Winkel M_1 D O mit ψ', so ist $M_1 A = \frac{r}{\cos \psi} = r \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi}$; $M_1 B_1 = \frac{r}{\cos \psi'} = r \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi'}$; $B_1 A = \sqrt{\overline{A B}^2 \quad \overline{B B_1}^2}$; $\overline{A B}^2 = 4 r^2 . \sin^2 \frac{\varphi}{2}$; $\overline{B B_1}^2 = \overline{O E}^2 = (M_1 O - M_1 E)^2 = r^2 (\operatorname{tang} \psi - \operatorname{tang} \psi')^2$. Also ist

$$B_1 A = r \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\operatorname{tang} \psi - \operatorname{tang} \psi')^2}.$$

Nun ist $\psi' = \frac{M_1 O}{O D} = \frac{r . \operatorname{tang} \psi}{\frac{r}{\cos \varphi}} = \operatorname{tang} \psi \cos \varphi$; deshalb ist:

$M_1 B_1 = r \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi . \cos^2 \varphi}$ und $B_1 A = r \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}^2 \psi (1 - \cos \varphi)^2}$,

oder $B_1 A = 2 r \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi . \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$. Da der Inhalt $\triangle_1$ des Dreiecks M_1 A B_1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ist, wo a, b, c die Seiten, s die halbe Summe derselben bezeichnet, so ist:

$$\triangle_1^2 = \frac{r^4}{16} \cdot \left(\sqrt{1+\tang^2\psi} + \sqrt{1+\tang^2\psi.\cos^2\varphi} + 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1+\tang^2\psi.\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

$$\left(-\sqrt{1+\tang^2\psi} + \sqrt{1+\tang^2\psi.\cos^2\varphi} + 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1+\tang^2\psi.\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

$$\left(\sqrt{1+\tang^2\psi} - \sqrt{1+\tang^2\psi.\cos^2\varphi} + 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1+\tang^2\psi\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

$$\left(\sqrt{1+\tang^2\psi} + \sqrt{1+\tang^2\psi.\cos^2\varphi} - 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1+\tang^2\psi.\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

$$\triangle_1^2 = \frac{r^4}{16}\left[\left(\sqrt{1+\tang^2\psi} + \sqrt{1+\tang^2\psi\cos^2\varphi}\right)^2 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\tang^2\psi.\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\left[4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\tang^2\psi.\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\sqrt{1+\tang^2\psi} - \sqrt{1+\tang^2\psi.\cos^2\varphi}\right)^2\right].$$

$$= \frac{r^4}{16}\left[1+\tang^2\psi + 1 + \tang^2\psi.\cos^2\varphi + 2\sqrt{(1+\tang^2\psi)(1+\cos^2\varphi\tang^2\psi)}\right.$$

$$\left. - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 4\tang^2\psi.\sin^4\frac{\varphi}{2}\right].\left[4\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4\tang^2\psi.\sin^4\frac{\varphi}{2}\right.$$

$$\left. -1-\tang^2\psi - 1 - \tang^2\psi.\cos^2\varphi + 2\sqrt{(1+\tang^2\varphi)(1+\tang^2\psi\cos^2\varphi)}\right]$$

$$= \frac{r^4}{16}\left[2+\tang^2\psi(1+\cos^2\varphi) - 2(1-\cos\varphi) - \tang^2\psi(1-\cos\varphi)^2\right.$$

$$\left. + 2\sqrt{(1+\tang^2\psi).(1+\tang^2\psi\cos^2\varphi)}\right]\left[2(1-\cos\varphi) + \tang^2\psi(1-\cos\varphi)^2\right.$$

$$\left. -2-\tang^2\psi(1+\cos^2\varphi) + 2\sqrt{(1+\tang^2\psi)(1+\cos^2\varphi\tang^2\psi)}\right]$$

$$= \frac{r^4}{16}\left[2\cos\varphi + 2\tang^2\psi.\cos\varphi + 2\sqrt{(1+\tang^2\psi)(1+\tang^2\psi\cos^2\varphi)}\right]$$

$$\left(-2\cos\varphi - 2\tang^2\psi.\cos\varphi + 2\sqrt{(1+\tang^2\psi)(1+\tang^2\psi\cos^2\varphi)}\right)$$

$$= \frac{r^4}{4}\left(-\cos^2\varphi(1+\tang^2\psi)^2 + (1+\tang^2\psi)(1+\tang^2\psi\cos^2\varphi)\right).$$

$$\triangle_1^2 = \frac{r^4}{4}[1+\tang^2\psi].[1-\cos^2\varphi] = \frac{r^4}{4}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\psi}.$$

$$\triangle_1 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\psi}.$$

Demnach ist $\triangle_1 = \triangle : \cos\psi$.

Entspricht einem anderen Dreieck A O F in Θ das Dreieck A M_1 F_1 in E_1, so ergiebt sich ebenso $\triangle$ A M_1 $F_1 = \frac{A\ O\ F}{\cos\psi}$. Deshalb ist auch $M_1\ B_1\ F_1 = M_1\ A\ F_1 - M_1\ A\ B_1 = \frac{O\ A\ F - O\ A\ B}{\cos\psi} = \frac{O\ B\ F}{\cos\psi}$. Allgemein entspricht jedem Dreieck in Θ, dessen 2 Seiten Radien sind, im E_1 ein Dreieck, dessen Inhalt gleich ist dem des Dreiecks in Θ dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist im Dreieck O B F die Sehne B F unendlich klein, so daß dieselbe durch den Bogen ersetzt werden kann, so entspricht diesem Dreieck in E_1 ein Dreieck dessen 3. Seite ebenfalls unendlich klein ist und durch den Ellipsenbogen ersetzt werden kann. Der unendlich kleine Ellipsensektor in E_1 ist gleich dem entsprechenden Kreissektor in Θ dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen Θ und E_1. Da wir jeden endlichen Kreissektor (Ellipsensektor) als eine Summe unendlich schmaler Kreissektoren (Ellipsensektoren) ansehen können, so entspricht auch jedem endlichen Kreissektor in Θ ein Ellipsensektor in E_1, dessen Inhalt gleich ist dem des Kreissektors dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels. Die ganze Ellipsenfläche in E_1 ist gleich der Kreisfläche in Θ dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels. Da wir jede geschlossene Figur in eine Anzahl von Dreiecken zerlegen können, so entspricht allgemein jeder geschlossenen Figur in Θ eine Figur in E_1, deren Inhalt gleich ist dem Inhalt der entsprechenden Figur in Θ dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels.

Wenn sich in Θ zwei Radien nach entgegengesetzten Richtungen so bewegen, daß der vom ersten bestrichene Kreissektor jedesmal doppelt so groß ist, als der vom anderen bestrichene Kreissektor, so bewegen sich die entsprechenden Ellipsenhalbmesser in E_1 derartig, daß der vom ersten beschriebene Ellipsenausschnitt doppelt so groß ist als der vom anderen beschriebene. Wie in der Ebene Θ die jedesmaligen Verbindungslinien der Endpunkte der unter genannter Bedingung sich bewegenden Radien Tangenten der Kurve C_3^4 sind (§ 18), so sind in der Ebene E_1 die entsprechenden Linien, d. h. die Verbindungslinien der Endpunkte entsprechender Halbmesser der Ellipse Tangenten der Kurve C'^4_3.

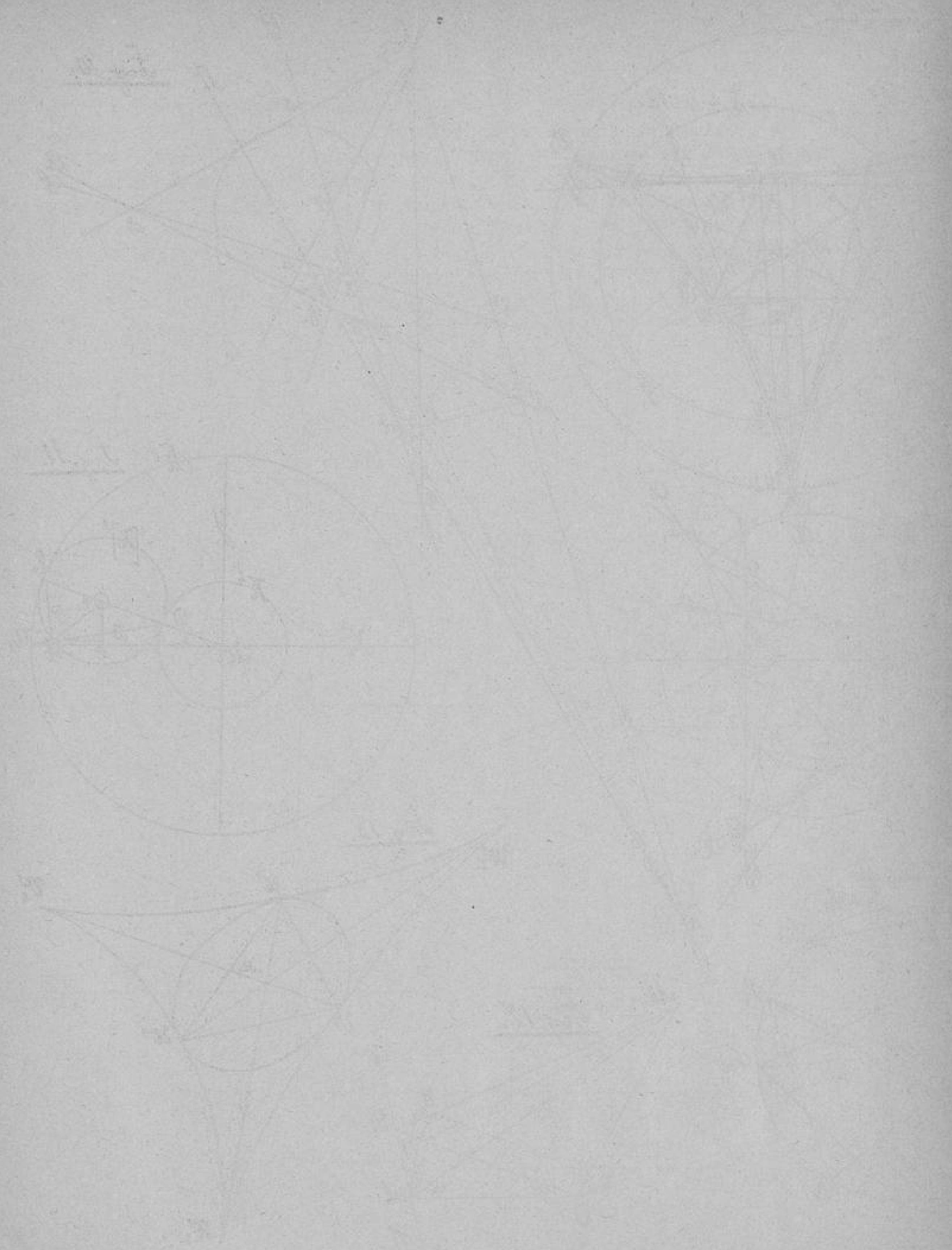
Daraus ergiebt sich folgende allgemeine Erzeugungsweise der Kurve C'^4_3 in der Ebene E_1: **Sind M_1 S und M_1 P zwei beliebige Halbmesser der Ellipse K_1^2 und bewegen sich dieselben gleichzeitig um den Mittelpunkt M_1 nach entgegengesetzten Richtungen so, daß der vom Halbmesser M_1 S beschriebene Sektor in jedem Augenblick doppelt so groß ist, als der von M_1 P beschriebene Sektor, so ist die Enveloppe der durch die Endpunkte der Halbmesser gehenden Geraden P S = G eine Kurve 3ter Klasse, 4ter Ordnung.** Der reelle Teil dieser Kurve besteht nur aus einem krummlienigen Dreieck U'_2 V'_2 W'_2, welches die Ellipse umschließt und sie mit seinen 3 Seiten (Bogen) in 3 Punkten U', V', W' berührt. Das Dreieck U' V' W' entspricht einem größten (gleichseitigen) Dreieck U V W, das dem Kreise in Θ eingeschrieben ist. U' V' W' ist deshalb ein der Ellipse eingeschriebenes größtes Dreieck. Den Höhen des Dreiecks U V W in Θ entsprechen die Mittellinien des Dreiecks U' V' W' in E_1, die durch den Mittelpunkt der Ellipse hindurchgehen. Die Ecken des Dreiecks U'_2 V'_2 W'_2 sind Rückkehrpunkte der Kurve C'^4_3; die Rückkehrtangenten sind die 3 Mittellinien des Dreieck U' V' W'. Die Strecken M_1 U'_2, M_1 V'_2, M_1 W'_2 sind dreimal so groß als die auf ihnen liegenden Halbmesser der Ellipse. Der Inhalt des Kurvendreiecks ist zweimal so groß als die Fläche der Ellipse und jeder der drei Arbelen zwischen beiden Kurven ist einem Drittel der Ellipsenfläche gleich, wie sich unmittelbar aus den Resultaten des § 11 und aus dem im Anfange dieses § Gesagten ergiebt. Die Kurve C'^4_3 hat ungefähr die Gestalt, wie sie Fig. 13 zeigt.

Der Involution konjugierter Durchmesser des Kreises K^2 entspricht in E_1 die Involution konjugierter Durchmesser der Ellipse K_1^2; jedem Paar rechtwinkliger Durchmesser des Kreises K^2 also entspricht ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse K_1^2 in E_1. Deshalb erhalten wir in der Ebene E_1 noch folgende Erzeugungsweise der Kurve C'^4_3, die der in § 18 angegebenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erzeugungsweise der Kurve C_3^4 in der Ebene des Kreises K^2 gleichkommt. Nimmt man in der Ellipse K_1^2 eine beliebige Sehne S_0 S_1, verbindet den einen Endpunkt S_0 mit dem Mittelpunkt M_1, zieht durch S_1 die Sehne S_1 S_2, welche zu dem gezogenen Durchmesser die konjugierte Richtung hat, verbindet S_1 mit dem Mittelpunkt M_1, zieht durch S_2 die Sehne S_2 S_3, welche zu M_1 S_1 die konjugierte Richtung hat, und so weiter durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorhergehenden Punkt gezogenen Durchmesser die konjugierte Richtung hat, so entsteht im allgemeinen eine unbegrenzte Reihe von Sehnen, welche sämtlich eine Kurve C'^4_3 berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.

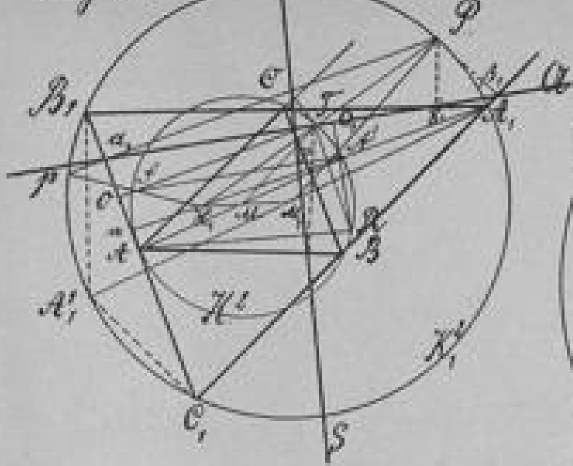


Fig. 3.

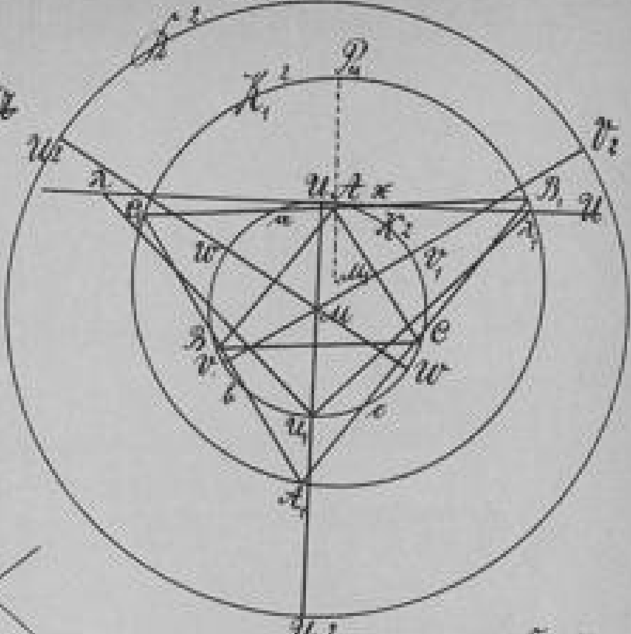


Fig. 4.

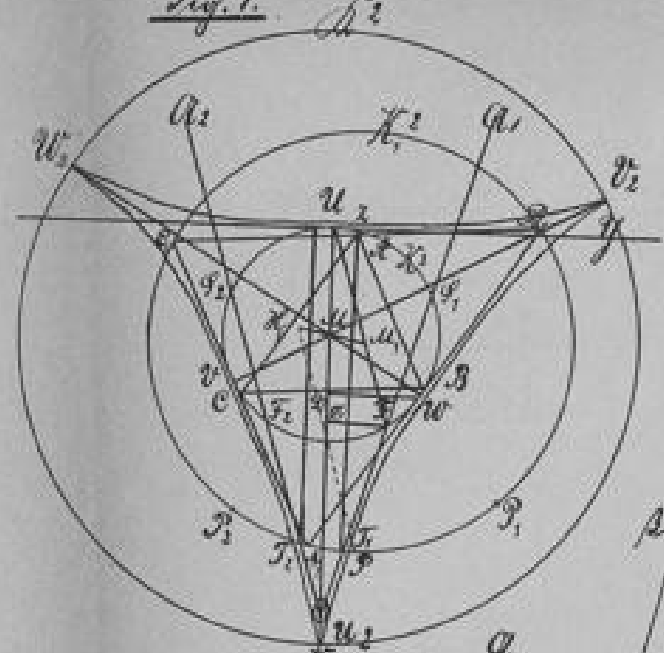


Fig. 10.

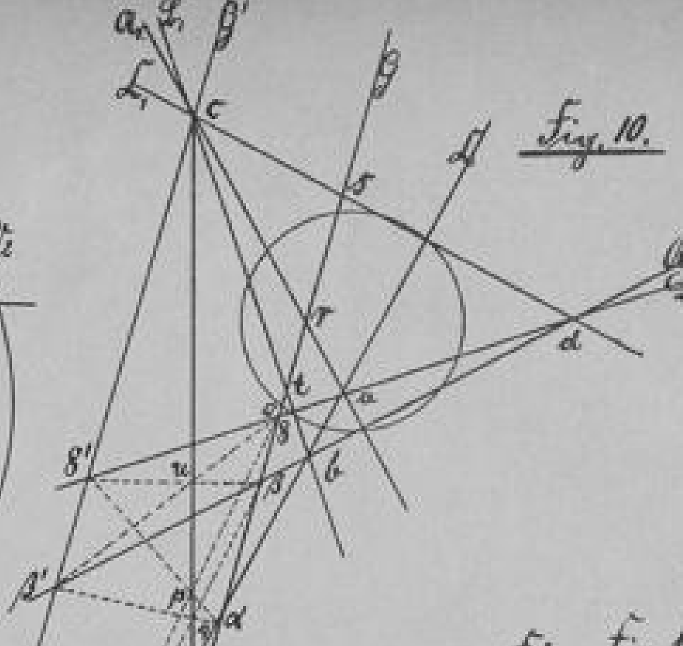


Fig. 2.

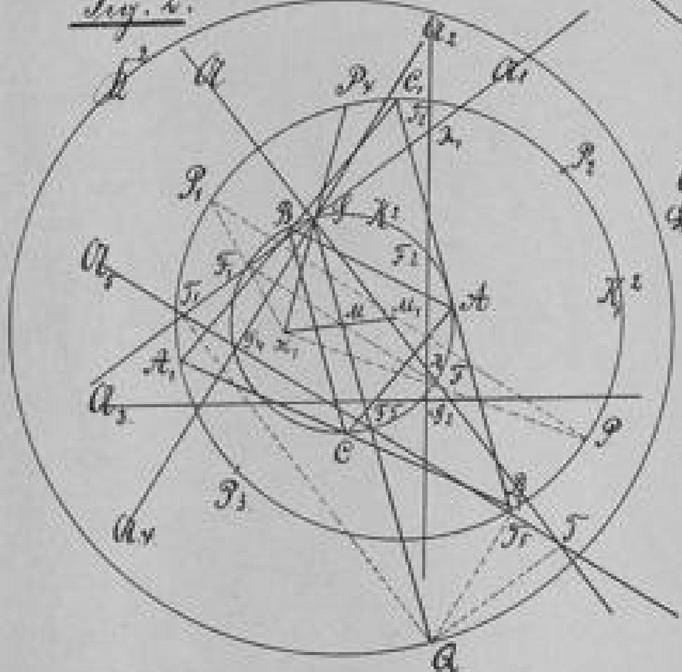


Fig. 5.

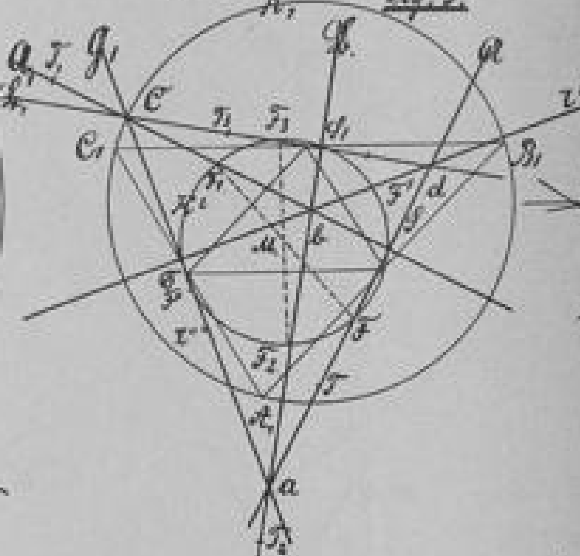


Fig. 6.

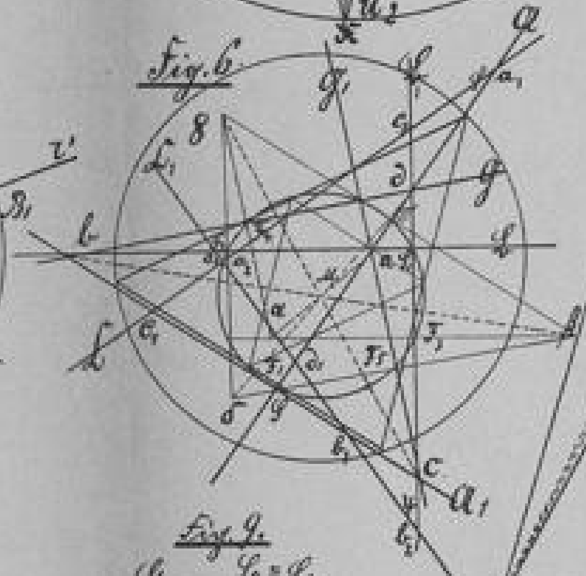


Fig. 11.

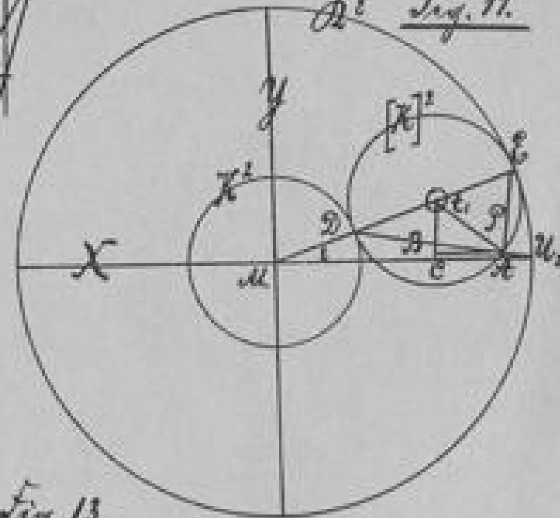


Fig. 13.

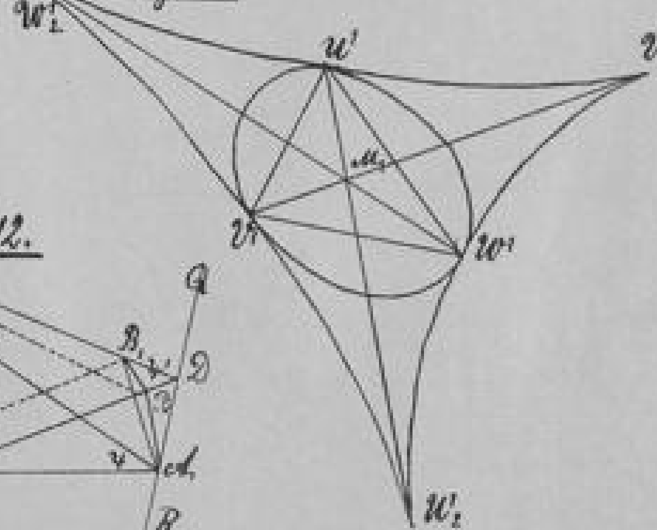


Fig. 7.

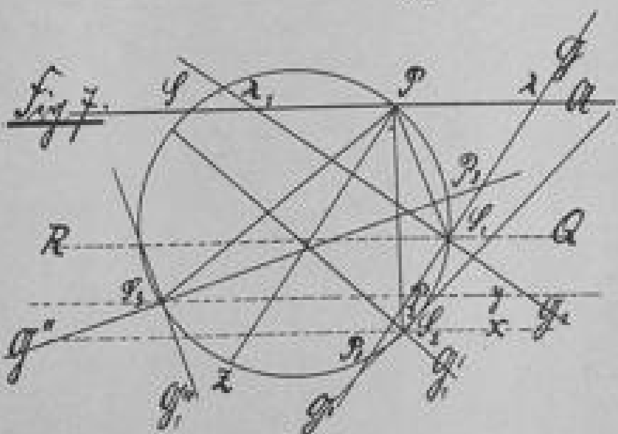


Fig. 8.

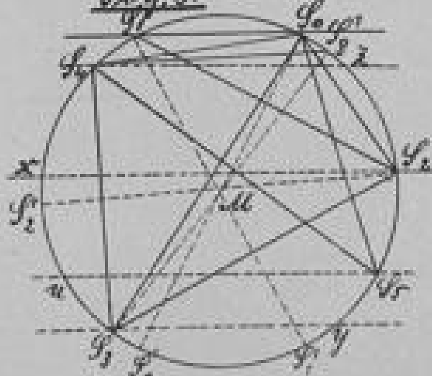


Fig. 9.

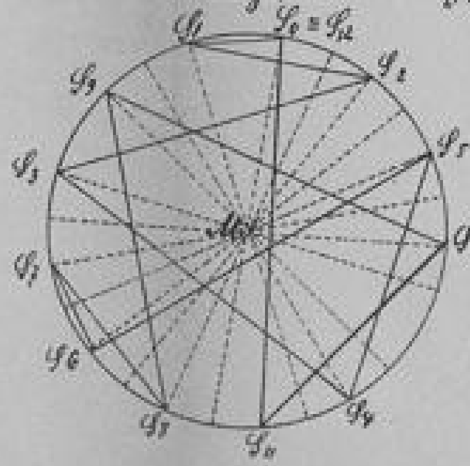
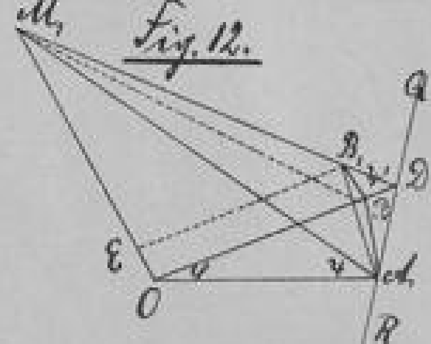


Fig. 12.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf