# Zur analytischen Sphärik.

## Eine Abhandlung

von

J. Hohoff.

# Vorwort und Einleitung.

Mein verehrter Lehrer und Meister, Dr. Chr. Gudermann, leider der Wissenschaft zu früh entrissen, hat in seinen beiden unsterblichen Werken: „Lehrbuch der niederen Sphärik“ (Münster 1835. Coppenrath.) und: „Grundriß der analytischen Sphärik“ (Köln 1830. DuMont-Schauberg.) das ganze Gebiet der niederen und höheren Sphärik zu einer Vollständigkeit und zu einer Stufe der Ausbildung erhoben, die den analogen Zweigen der Planimetrie gegenüber wenig oder nichts zu wünschen übrig lassen. Gleichwohl aber scheinen diese beiden Werke nicht in dem Maße bekannt zu sein, als sie es verdienen; denn fast täglich erscheinen Abhandlungen über Gegenstände aus der Sphärik, denen man es gleich ansieht, daß der Verfasser sich kaum über die sphärische Trigonometrie erhoben hat und die oben genannten Werke gar nicht kennt. Ich glaube daher selbst der Wissenschaft einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich hierdurch auf die Werke des unsterblichen Verfassers hinweise. Auch sei es dem ältesten akademischen Schüler des hochverdienten Verfassers erlaubt, einige Stellen aus den Vorreden der genannten Werke hier anzuführen.

„Die Oberfläche einer Kugel“, heißt es in der Vorrede zur analytischen Sphärik, „eignet „sich wegen ihrer gleichmäßigen Krümmung eben so gut zum Konstruktionsfeld, als die Ebene, „und die Untersuchung der Gesetze sphärischer Konstruktionen führt zu Resultaten, welche nicht „nur den planimetrischen analog, sondern noch allgemeiner sind, als diese, da sich ja, analy-

"tisch genommen, die Ebene auch als eine Kugelfläche mit unendlichem Radius darstellt. . . . "Ein jeder, welcher sich von dem hier dargebotenen Grundrisse oder Leitfaden will einführen las- "sen, wird sehr bald das Vergnügen neuer und eigener Entdeckungen haben; denn unendlich ist "das Gebiet der Sphärik und unendlich die Parallele, welche sie der Planimetrie gegenüberstellt."

"Die Sphärik würde nur ein geringes Interesse für sich haben, wenn die mehr gedachte "Analogie zwischen ihr und der Planimetrie sich zu sehr gleich bliebe, und sich nicht auf die "mannigfaltigsten Weisen änderte. Diese Aenderungen der Analogie sind oft so groß, daß alle "Aehnlichkeit aufzuhören scheint. Dazu kommt noch der Reiz, welcher durch die größere Verwi- "ckelung und das Gelingen der Enthüllung und glücklichen Auflösung hervorgebracht wird, und "vor Allem der Reiz der Neuheit der Gegenstände, welche der analytischen Sphärik zur Be- "handlung zufallen."

In der Vorrede zur niederen Sphärik sagt der unsterbliche Verfasser: "Das durch die "ganze Geometrie hindurchgreifende Gesetz der Dualität stellt sich in der Sphärik wegen des "einfachen Zusammenhanges zwischen einem sphärischen Hauptkreise und seinem Zentrum viel "einfacher und leichter heraus, als in der Planimetrie; dieses umfassende Gesetz würde unstrei- "tig viel früher entdeckt worden sein, wenn man das Studium der Sphärik früher ernsthaft "getrieben hätte."

In den folgenden Blättern will ich es versuchen, die oben angeführten Worte des gro- ßen Meisters durch einige, wie mir scheint, nicht uninteressante Beispiele, deren analoge Auf- gaben in der Planimetrie meistens auf den Kreis oder auf die Ellipse führen, zu bewahrheiten. Denn es will mir scheinen, daß, wenn der um die gesammte Mathematik so hoch verdiente Dr. Chr. Gudermann, der überall nur Gesetze suchte und mittheilte, in seiner analytischen Sphä- rik auch solche Probleme behandelt hätte, die wenigstens in der Planimetrie zu den bekannte- ren gehören — das genannte Werk ungleich verbreiteter sein würde, als jetzt der Fall zu sein scheint. Das erste Problem, welches ich hier mittheile, hat zwar der Meister selbst in seinem Werke und später in dem Journale von Crelle behandelt; allein da er eine mehr elementäre Darstellung verschmäht, so scheint uns dasselbe nicht geeignet, die Jünger der Mathematik für die analytische Sphärik zu gewinnen. Aus diesem Grunde und ganz besonders deswegen, weil es mit meinen eigenen Untersuchungen in enger Beziehung steht, habe ich es meiner Abhandlung an die Spitze gestellt.

Für diejenigen, welchen die analytische Sphärik des verstorbenen **Dr.** Chr. Gudermann augenblicklich nicht zu Gebote steht, sei Folgendes zum Verständniß meiner Abhandlung vorausgeschickt:

Um die Lage eines Punktes **M** (Fig. 1.) auf der Oberfläche einer Kugel durch Koordinaten zu bestimmen, dienen zunächst zwei Quadraten **VX** und **VY** zweier Hauptkreise als Koordinaten-Achsen, welche sich in **V**, dem Anfangspunkt der Koordinaten, unter einem beliebigen Winkel **XVY** schneiden, der zugleich der Achsenwinkel genannt wird. Werden nun durch die Endpunkte **X** und **Y** der genannten Quadranten und durch den fraglichen Punkt **M** Hauptbogen gelegt, welche die Achsen beziehlich in **Q** und **P** durchschneiden, so ist $X = VP$ die Gleichung der sphärisch-geraden **YMP** und $y = VQ$ die Gleichung der sphärisch-geraden **XMQ**; also **VP** und **VQ**, weil sie wirkliche Theile der Achsen sind, die Achsen-Koordinaten des Punktes **M**. Da aber gewöhnlich die trigonometrischen Tangenten dieser Achsen-Koordinaten in Rechnung kommen, so setzt man der Kürze wegen $\tan VP = x$ und $\tan VQ = y$, so daß also $\operatorname{arc} (\tan = x)$ und $\operatorname{arc} (\tan = y)$ die Achsen-Koordinaten des beliebigen Punktes **M** sind. Will man aber statt der Achsen-Koordinate **VQ** die Applikate **PM** einführen, so hat man bekanntlich für rechtwinklige Koordinaten-Achsen:

$$\tan PM = \tan VQ . \cos VP,$$

und eben so auch:

$$\tan QM = \tan VP . \cos VQ.$$

so mit meinen eigenen Untersuchungen in jener Beziehung steht, habe ich es [illegible] die Mittheilung an die Spitze gestellt.

Zur Erklärung, welchen ist [illegible] Geburtstag des verstorbenen Hr. [illegible] ... nicht zu Gebote steht, ist Aufsatz und Beschreibung meiner [illegible] [illegible].

Um die Lage eines Punktes M (Fig. 1) auf der Oberfläche einer Kugel durch Coordinaten zu bestimmen, dienen gewöhnlich zwei Quadranten VX und VY größter Kugelkreise als Coordinaten-Achsen, welche sich in V, dem Anfangspunkt der Coordinaten, unter einem beliebigen Winkel XVY schneiden, der zugleich der Achsenwinkel genannt wird. Werden nun durch die Endpunkte X und Y der genannten Quadranten und durch den beliebigen Punkt M Quadranten gelegt, welche die Achsen beziehlich in Q und P durchschneiden, so ist x = VP die Abscisse der schiefwinkligen Coordinaten YMP und y = VQ die Ordinate der schiefwinkligen Coordinaten XMQ; also VP und VQ, weil sie wirkliche Theile der Achsen sind, die Achsen-Coordinaten des Punktes M. Da aber gewöhnlich die trigonometrischen Tangenten dieser Achsen-Coordinaten in Rechnung kommen, so setzt man der Kürze wegen tang. VP = x und tang. VQ = y, so daß also arc (tang. = x) und arc (tang. = y) die Achsen-Coordinaten des beliebigen Punktes M sind. Will man aber jetzt die Achsen-Coordinate VQ in Ansehung PM einführen, so hat man bekanntlich für rechtwinklige Coordinaten Achsen

$$\text{tang. } PM = \text{tang. } VQ \cdot \cos VP$$

und eben so auch

$$\text{tang. } QM = \text{tang. } VP \cdot \cos VQ.$$

# Zur analytischen Sphärik.

§. 1.

Den geometrischen Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke zu finden, die sich über derselben Grundlinin **AA'** so konstruiren lassen, daß der, der festen Grundlinie gegenüberliegende Winkel unveränderlich bleibt.

Der Kürze wegen nehmen wir schon gleich den Mittelpunkt der gegebenen Grundlinie zum Anfangspunkt unserer rechtwinkligen Koordinaten-Achsen an, und die Grundlinie selbst, welche wir $= 2\,g$ setzen, zur **X**-Achse. Wenn man nun durch den einen Endpunkt **A** der gegebenen Grundlinie, für welchen $y = 0$ und $X = \text{tang}\, g$ ist, unter irgend einem Winkel eine Gerade (Hauptkreis) legt, so ist ihre Gleichung

$$by + ax - a\,\text{tang}\, g = 0.$$

Legt man eben so durch den anderen Endpunkt **A'** der gegebenen Grundlinie, für welchen $y = 0$ und $x = -\,\text{tang}\, g$ ist, eine Gerade, unter einem beliebigen Winkel, so wird ihre Gleichung sein:

$$b'y + a'x + \acute{a}\,\text{tang}\, g = 0.$$

Wird endlich der Winkel, welchen diese beiden Geraden mit einander bilden, mit c bezeichnet, so erhält man nach §. 11 der analytischen Sphärik:

$$\text{tang}\, c = \frac{\sqrt{\left[(2\,a\acute{a}\,\text{tang}\, g)^2 + (ab' - b\acute{a})^2 + (b\acute{a} + b'a)^2\,\text{tang}\, g^2\right]}}{-\,a\acute{a} - bb' + a\acute{a}\,\text{tang}\, g^2}$$

Zieht man aus den beiden ersten Gleichungen die Werthe von b und b', um dieselben in dieser letzten Gleichung zu substituiren, so geht dieselbe über in:

$$\text{tang}\, c = \frac{2\,\text{tang}\, g\; y\,\sqrt{(y^2 + x^2 + 1)}}{(\text{tang}\, g^2 - 1)\, y^2 - x^2 + \text{tang}\, g^2},$$

welches die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes ist. Unsere Ortskurve ist also in der Sphärik eine Linie der 4. Ordnung, während in der Planimetrie der analoge Ort ein Kreis, d. h. eine Linie der 2. Ordnung ist.

Ohne diese Kurve weiter zu diskutiren, was der Meister selbst im 43. Band des Crelle'schen Journals gethan hat, sieht man auf der Stelle, daß ihre Gleichung für jeden beliebigen Werth von y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von x liefert; es ist also die Y-Achse ein Durchmesser derselben. Dagegen giebt die Gleichung unserer Kurve für einen bestimmten Werth von x zwei verschiedene und entgegengesetzte Werthe für y; es wird also unsere Kurve durch die X-Achse nicht in zwei symmetrische Theile getheilt. Allein da es gleichgültig ist, ob man in der Gleichugg — y für + y oder tang (180° - c) für tang c setzt, so erkennt man leicht, daß der Peripheriewinkel des einen der in Rede stehenden Theile den Peripheriewinkel des anderen zu 180° ergänzt.

In dem besonderen Fall, daß der unveränderliche Winkel c ein rechter ist, hat man die einfachere Gleichung:

$$(\text{tang } g^2 - 1)\, y^2 - x^2 + \text{tang } g^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{(1 - \text{tang } g^2)\, y^2}{\text{tang } g^2} + \frac{x^2}{\text{tang } g^2} = 1.$$

Ist die unveränderliche Grundlinie 2 g = 90°, so geht unsere Gleichung in $x^2 = \text{tang } g^2$ über, und die Ortskurve selbst in ein System zweier Geraden (Hauptkreise), wie sich ohnehin von selbst versteht Dagegen wird die Kurve eine Ellipse, wenn 2 g < 90° ist, und ihre eine Halbachse ist = g. Setzt man die andere Halbachse = h, so hat man:

$$\text{tang } h^2 = \text{tang } g^2 : (1 - \text{tang } g^2), \text{ oder } \sin h^2 = \text{tang } g^2.$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Achsen ist also eben so einfach als bemerkenswerth. Berücksichtigt man diesen einfachen Zusammenhang, so erhält man für unsere Ortskurve folgende einfache Gleichung:

$$\frac{y^2}{\text{tang } h^2} + \frac{x^2}{\sin h^2} = 1.$$

Für den Fall endlich, in welchem die gegebene Grundlinie 2 g > 90° ist, wird unsere Ortskurve ein Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\text{tang } g^2} - \frac{(\text{tang }^2 - 1)\, y^2}{\text{tang } g^2} = 1 \quad \text{ist.}$$

Setzt man auch hier die zweite Halbachse = h, so erhält man die Gleichung:

$$\text{tang } h^2 = \frac{\text{tang } g^2}{\text{tang } g^2 - 1};$$

und kehrt man dieselbe um, so findet man:

$$\text{tang } g^2 = \frac{\text{tang } h^2}{\text{tang } h^2 - 1},$$

so daß also hier der Uebergang von der ersten Achse zur zweiten gleich ist dem Rückgange von der zweiten zur ersten. Während in dem vorhergehenden Fall aus der Gleichung tang g = sin h hervorgeht, daß die erste Halbachse g stets kleiner sein muß, als die zweite h, kann hier die erste Halbachse sowohl kleiner als auch größer sein, als die zweite. Ist insbesondere tang g =

$\sqrt{2}$, so muß auch tang $h = \sqrt{2}$ sein; es wird also die erste Halbachse gleich der zweiten und unsere Ortskurve zu einer gleichseitigen Hyperbel.

Es sei (Fig. 2.) $AA' = 2\,g < 90^\circ$ die gegebene Hypotenuse und $ABA'B'$ unsere Ortskurve, so daß also, wenn der beliebige Punkt $C$ derselben mit $A$ und $A'$ durch Gerade (Hauptkreise) verbunden wird, der Winkel $ACA' = 90^\circ$ ist; alsdann findet zwischen den beiden Halbachsen $VA$ und $VB$ unserer Ellipse die Gleichung statt:

$$\operatorname{tang} VA = \sin VB.$$

Ist $aba'b'$ die Gegen-Ellipse zu $ABA'B'$, so ist $Aa = A'a' = 180^\circ$; verlängert man also $AC$ über $C$ hinaus, so wird sie mit der verlängerten Hypotenuse in $a$ zusammenstoßen. Das so entstandene Dreieck $A'Ca$ ist dann ebenfalls in $C$ rechtwinklig und seine Hypotenuse $A'a > 90^\circ$, weil $AA' + A'a = 180^\circ$ ist. Wird ferner ein beliebiger Punkt $C'$ der halben Gegen-Ellipse $bab'$ mit $A'$ und $a$ verbunden, so ist auch dieses Dreieck in $C'$ rechtwinklig, da sich die Gegen-Ellipse von der ursprünglichen nicht unterscheidet. Die beiden zugewandten Hälften $BA'B'$ und $bab'$ der Gegen-Ellipsen bilden aber ein sphärische Hyperbel; und somit bestätigt die Figur das Resultat, daß die in Rede stehende Ortskurve eine Hyperbel ist, wenn die gegebene Hypotenuse $A,a > 90^\circ$ ist. Und in der That, werden die beiden Hälften der Gegen-Ellipsen als Hyperbel betrachtet und auf den zugehörigen Mittelpunkt bezogen, so ist die erste Halbachse $OA' = 90^\circ - VA'$; also wenn man $OA'$ mit $g_{,}$ bezeichnet, da $VA' = g$ gesetzt ist:

$$\operatorname{tang} g_{,} = \cot g.$$

Bezeichnet man noch die zweite Halbachse der Hyperbel mit $h_{,}$, so hat man nach §. 76 der analytischen Sphärik:

$$\operatorname{tang} h_{,} = \frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang} g}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man leicht:

$$\operatorname{tang} h_{,}^{2} = \frac{\operatorname{tang} g_{,}^{2}}{\operatorname{tang} g_{,}^{2} - 1},$$

wenn man nicht übersieht, daß tang $g = \sin h$ ist.

Verlängert man $VB$ bis $S$, so daß $VS = 90^\circ$ wird, so bilden auch die beiden Hälften $ABA'$ und $aba'$ der Gegen-Ellipsen eine Hyperbel, deren Mittelpunkt $S$ ist. Bezeichnet man $SB$ mit $h_{,,}$, so ist

$$\operatorname{tang} h_{,,} = \cot h,$$

und

$$\operatorname{tang} g_{,,} = \frac{\operatorname{tang} g}{\operatorname{tang} h} = \frac{\sin h}{\operatorname{tang} h} = \cos h,$$

wenn man die andere Halbachse mit $g_{,,}$ bezeichnet;

mithin $\qquad \sin h_{,,}^{2} = \operatorname{tang} g_{,,}^{2}.$

Das Achsen-Verhältniß unseres Kegelschnittes bleibt also dasselbe, ob wir denselben auf den inneren Mittelpunkt **V** oder auf den äußeren **S** beziehen.

Noch haben wir wegen des Gesetzes der Dualität, das in der Sphärik viel einfacher und leichter hervortritt, als in der Planimetrie, die reziproke Kurve unserer Ortskurve zu betrachten. Ist **EFS** das reziproke Dreieck zu dem veränderlichen Dreiecke **AA'C**, so ist auch der Winkel **ESF** der der festen und unveränderlichen Seite **AA'** entspricht, fest und unveränderlich; dagegen ändert die Seite **EF** mit dem Scheitel **C** des konstanten Winkels **ACA'** ihre Lage und beschreibt, während sie der Größe nach unverändert bleibt, durch Einhüllung die Kurve $\alpha\beta\alpha'\beta'$, welche die reziproke zu derjenigen ist, die der Scheitel **C** des Dreieckes **ACA'** beschreibt. In dem besonderen Fall, daß der Winkel **ACA'** $= 90^\circ$ ist, ist auch **EF** $= 90^\circ$, und die reziproke Kurve selbst ein Kegelschnitt; sie wird eine Ellipse sein, wenn **AA'** $< 90^\circ$, mithin Winkel **ESF** $> 90^\circ$ ist. Ist dagegen **A'aC** das ursprüngliche Dreieck, so ist **FKS** das reziproke, und der Berührungspunkt **H** liegt nicht auf dem Quadranten **FK**, sondern auf dessen Verlängerung. Wird nun zu $\alpha\beta\alpha'\beta'$ die Gegen-Ellipse konstruirt, so bilden die beiden, in Bezug auf 0 sich gegenüber liegenden Hälften der genannten Gegen-Ellipsen ein Hyperbel, welche jetzt die gesuchte reziproke Kurve von derjenigen ist, die der Scheitel **C** des Dreieckes **A'aC** beschreibt.

Da $\frac{(1 - \operatorname{tang} g^2)\, y^2}{\operatorname{tang} g^2} + \frac{x^2}{\operatorname{tang} g^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse **ABA'B'** ist,

so erhält man auf der Stelle nach §. 59 der analytischen Sphärik für die reziproke Kurve $\alpha\beta\alpha'\beta'$ die Gleichung:

$$\frac{y^2 \operatorname{tang} g^2}{1 - \operatorname{tang} g^2} + \frac{x^2}{\cot g^2} = 1 .$$

Man erkennt hieraus auf der Stelle, daß die entsprechenden Halbachsen der beiden reziproken Kegelschnitte sich zu $90^\circ$ ergänzen und überhaupt stehen zwei reziproke sphärische Kegelschnitte in einer solchen Beziehung zu einander, daß die drei Mittelpunkte des einen zugleich die Mittelpunkte des anderen sind, daß eine Tangente des einen ihr sphärisches Zentrum im Umfange des anderen hat, daß jede Normale des einen auch eine Normale des anderen, daß ferner die Evolute des einen gleichfalls die Evolute des anderen ist, und daß endlich nicht allein ihre entsprechenden Halbachsen, sondern auch ihre in dieselbe Normale fallenden Krümmungshalbmesser sich zu $90^\circ$ ergänzen. Hinsichtlich der Beweise zu diesen Sätzen verweisen wir auf die oft genannte analytische Sphärik.

Wollte man die Gleichung der reziproken Kurve ursprünglich herleiten, so würde die Betrachtung des Dreieckes **ESF** alles abgeben, was zur Lösung der Aufgabe erforderlich ist. Der Winkel **ESF** ist mit der Grundlinie **AA'** der Größe und Lage nach unveränderlich und ergänzt dieselbe zu $180^\circ$. Eben so ergänzt die Seite **EF**, welche sich mit ihren Endpunkten **E** und **F** auf den Schenkeln des Winkels **ESF** fortbewegt, den konstanten Winkel **ACA'** zu 180°. Man hat daher leicht die Bedingungsgleichung:

$$\cos \mathbf{EF} = \cos \mathbf{ES}. \cos \mathbf{FS} + \sin \mathbf{ES}. \sin \mathbf{FS}. \cos \mathbf{ESF}.$$

Nimmt man nun die Schenkel des Winkels **ESF** zu Koordinaten-Achsen, und bezeichnet man den Koordinaten-Winkel **ESF** mit **V**, so wird die vorhergehende Gleichung:

$$\cos \mathbf{EF} = \cos u. \cos t + \sin u. \sin t. \cos v.$$

Die Gleichung der Geraden **EF** ist alsdann:

$$x. \cot t + y \cot u = 1.$$

Differenziirt man nun diese beiden Gleichungen, wobei man x und y der Aufgabe gemäß als konstante ansehen muß, so erhält man zwei neue Gleichungen, welche mit den beiden vorhergehenden nothwendig und hinreichend sind, um zu einer Gleichung zwischen x und y zu gelangen, indem man u, t und $\frac{du}{dt}$ aus den vier genannten Gleichungen eliminiren kann. Indessen wird nur in dem besondern Fall, daß der Winkel **ACA'** = 90°, d. h. die Gerade **EF** ein Quadrant ist, die Rechnung leicht ausführbar. In diesem besonderen Fall erhält man:

$$xy = -\frac{1}{4 \cos v},$$

als Gleichung der gesuchten Ortskurve. Man sieht hieraus, daß der Anfangspunkt der Koordinaten ein äußerer Mittelpunkt und die Koordinaten-Achsen Asymptoten unseres Kegelschnittes sind. Es wäre nun leicht die Identität der Kurve, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, mit jener nachzuweisen, deren Gleichung wir gleich anfangs aufgestellt haben; allein der Kürze wegen müssen wir dieses übergehen.

## §. 2.

Der im vorhergehenden §en behandelten sphärischen Ortskurve hat der Meister selbst den Namen »Zirkulare« gegeben, weil die analoge Aufgabe in der Planimetrie auf einen Kreis führt; und in dem besonderen Fall, in welchem die in Rede stehende Kurve eine Ellipse ist, nannte er dieselbe die »gleichzeitige«, widrigen Falls aber die »ungleichseitige Zirkulare«. Und in der That werden wir sehen, daß besonders die gleichseitige Zirkulare viele Eigenschaften mit dem Kreise gemein hat. Beschreibt man z. B. über derselben Grundlinie **AA'** Dreiecke, so daß die Sinus der Winkel an der Grundlinie sich stets wie m : n verhalten, so ist in der Planimetrie die Ortskurve der Scheitel aller dieser Dreiecke ein Kreis, in der Sphärik aber die eben genannte Zirkulare.

Um dieses analytisch zu beweisen, nehmen wir der Einfachheit wegen die gegebene Grundlinie **AA'** = 2 g zur **X**-Achse an und machen den Mittelpunkt derselben zum Anfangspunkt unserer rechtwinkligen Koordinaten-Achsen. Die Gleichung der Geraden, welche unter einem beliebigen Winkel durch den einen Endpunkt **A** der gegebenen Grundlinie, dessen Achsenkoordinaten $y = 0$ und $x = \text{tang } g$ sind, gelegt wird, ist alsdann:

$$b\, y + a\, x - a \text{ tang } g = 0.$$

Eben so erhält man für die Gerade, welche durch den anderen Endpunkt **A'** der gegebenen Grundlinie gelegt wird, die Gleichung:

$$b' y + \acute{a}\, x + \acute{a} \text{ tang } g = 0.$$

Werden die Winkel, welche diese beiden Geraden mit der **X**-Achse, oder Grundlinie bilden, beziehlich mit **W** und **W'** bezeichnet, so erhält man nach §. 9 der analytischen Sphärik:

$$\sin W = -\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2 \cos g^2)}} \text{ und}$$

$$\sin W' = -\frac{\acute{a}}{\sqrt{(\acute{a}^2 + b'^2 \cos g^2)}};$$

also ist der Annahme gemäß:

$$\frac{a\sqrt{(\acute{a}^2 + b'^2 \cos g^2)}}{\acute{a}\sqrt{(a^2 + b^2 \cos g^2)}} = \frac{m}{n}, \text{ oder}$$

$$\frac{a^2 (\acute{a}^2 + b'^2 \cos g^2)}{\acute{a}^2 (a^2 + b^2 \cos g^2)} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Zieht man endlich aus den beiden ersten Gleichungen die Werthe von **b** und **b'**, um dieselben in dieser letzten Gleichung zu substituiren, so erhält man als Gleichung der gesuchten Ortskurve

$$\frac{y^2 + (\text{tang } g + x)^2 \cos g^2}{y^2 + (\text{tang } g - x)^2 \cos g^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, und setzt man noch der Kürze wegen $p$ für $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$ so geht dieselbe über in:

$$y^2 + x^2 \cos g^2 - 2\, x\, p \sin g \cos g + \sin g^2 = 0.$$

Die gesuchte Ortskurve ist also ein Kegelschnitt, der, wie man leicht sieht, durch die **X**-Achse in zwei kongruente Theile zerlegt wird. Um zur Kenntniß der beiden Achsen unseres Kegelschnittes zu gelangen, führen wir zunächst die Achsen-Koordinaten selbst ein, indem wir tang u für y und tang t für x setzen:

$$\text{tang } u^2 + \text{tang } t^2 \cos g^2 - 2 \text{ tang } t.\, p \sin g \cos g + \sin g^2 = 0;$$

führen wir jetzt statt der Achsen-Koordinate u die Applikate z, vermöge der Gleichung

$\text{tang } u = \frac{\text{tang } z}{\cos t}$, ein, so erhalten wir, nachdem die Gleichung noch mit $\cos t^2$ multiplizirt worden ist:

$$\text{tang } z^2 + \cos g^2 \sin t^2 - 2\,p \sin g \cos g \sin t \cos t + \sin g^2 \cos t^2 = 0;$$

und setzt man endlich $t = t' + v$, so hat man:

$$\text{tang } z^2 + \cos g^2 \sin (t' + v) - 2\,p \sin g \cos g \sin (t' + v) \cos (t' + v) + \sin g^2 \cos (t' + v) = 0.$$

Wird nach geschehener Entwicklung die Gleichung durch $\cos t'^2$ dividirt, alsdann geordnet und rückwärts für $\frac{\text{tang } z}{\cos t'}$ wieder tang u gesetzt, so erhält man:

$$\text{tang } u^2 + A \text{ tang } t^2 + B \text{ tang } t = C,$$

indem wir noch die Marke, deren wir nicht mehr bedurften, von t weggelassen und der Kürze wegen

$$A = \cos g^2 \cos v^2 + 2\,p \sin g \cos g \sin v \cos v + \sin g^2 \sin v^2,$$

$$B = 2 \cos g^2 \sin v \cos v - 2\,p \sin g \cos g \cos v^2 + 2\,p \sin g \cos g \sin v^2 - 2 \sin g^2 \sin v \cos v,$$

$$C = -\cos g^2 \sin v^2 + 2\,p \sin g \cos g \sin v \cos v - \sin g^2 \cos v^2$$

gesetzt haben. Man sieht auf der Stelle, daß $A - C = 1$ ist

Wird dieses berücksichtigt und noch $B = 0$ gesetzt, so hat man:

$$\text{tang } u^2 + (1 + C) \text{ tang } t^2 = C.$$

Setzen wir endlich $C = \text{tang } \beta^2$, und rückwärts wieder y für tang u und x für tang t, so erhält man:

$$\frac{y^2}{\text{tang } \beta^2} + \frac{x^2}{\sin \beta^2} = 1,$$

was bewiesen werden sollte. Unsere Ortskurve ist also die gleichseitige Zirkulare.

Aus der Bedingung $B = 0$ folgt:

$$\text{tang } 2\,v = p \text{ tang } 2\,g; \text{ mithin}$$

$$\sin 2\,v = \frac{p \text{ tang } 2\,g}{\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)}}, \quad \cos 2\,v = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)}},$$

$$\sin v^2 = \frac{\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)} - 1}{2\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)}}, \quad \cos v^2 = \frac{\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)} + 1}{2\sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)}}.$$

Werden diese Werthe benutzt, so erhält man für C, oder da $C = \text{tang } \beta^2$ gesetzt ist, für

$$\text{tang } \beta^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\,g \sqrt{(1 + p^2 \text{ tang } 2\,g^2)},$$

in welcher Gleichung $p = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$ ist; man kann also aus dem konstanten Verhältniß $m : n$ und aus der gegebenen Grundlinie $2\,g$ die beiden Halbachsen unserer Kurve berechnen.

Ist $2\,g > 90^\circ$, so muß die Wurzel negativ genommen werden, damit das zweite Glied des Werthes von tang $\beta^2$ selbst positiv wird; es bleibt also auch der absolute Werth von tang $\beta$ ungeändert, wenn man $180^\circ - 2\,g$ für $2\,g$ setzt. In dem besondern Fall, daß $2\,g = 90^\circ$ ist, erhält man $\tang \beta = \frac{n}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$, und $\sin \beta = \frac{n}{m}$. Fig. 3. Es sei, um das Gesagte geometrisch nachzuweisen, die gegebene Grundlinie $AA'$ in den Punkten $D$ und $d$ so getheilt, daß sich $\sin AD : \sin A'D = \sin Ad : \sin A'd = m : n$, und über $Dd$ als erste Achse die gleichseitige Zirkulare beschrieben; ferner sie ein beliebiger Punkt $C$ derselben mit $A$ und $A'$ verbunden; so verhält sich also (statt der Winkel haben wir die Gegenseiten eingeführt) $\sin AC : \sin A'C = m : n$. Da sich nun auch $\sin AD : \sin A'D = m : n$, so halbirt die Gerade $CD$ den Winkel $ACA'$; und da Winkel $DCd = 90^\circ$ ist, so halbirt auch $Cd$ den Nebenwinkel $A'Ca$. Aus der Proportion $\sin AC : \sin A'C = m : n$, folgt auch: $\sin aC : \sin A'C = m : n$; und da nach dem Beweise $Cd$ den Winkel $A'Ca$ halbirt, so verhält sich auch $\sin aC : \sin A'C = \sin ad : \sin A'd = m : n$. Hieraus sieht man, daß, wenn im Dreiecke $ACA'$ die Sinus der Winkel an der Grundlinie $AA'$ sich wie $m : n$ verhalten, dasselbe auch in dem Nebendreiecke $A'Ca$ stattfindet.

Eine weit allgemeinere, mit der hier nachgewiesenen in Verbindung stehende Eigenschaft der gleichseitigen Zirkulare findet man in der analytischen Sphärik §. 88 und 98 bewiesen.

## §. 3.

Mit der vorhergehenden Untersuchung steht nach dem Gesetz der Reziprozität die folgende Aufgabe in natürlicher Verbindung.

Ein Winkel eines sphärischen Dreieckes ist unveränderlich und fest, die diesen Winkel einschließenden Seiten aber verändern sich so, daß die Sinus derselben sich wie $m : n$ verhalten; man soll die Kurve finden, welche von der, dem festen Winkel gegenüber liegenden Seite eingehüllt, oder ew. d. i. von derselben beständig berührt wird.

Wir machen die Schenkel des unveränderlichen Winkels zu Koordinaten-Achsen und bezeichnen die veränderlichen Schenkel desselben mit $t$ und $u$; alsdann haben wir die Bedingungsgleichung:

$$\sin t : \sin u = m : n, \text{ oder}$$

$$1. \qquad m \sin u = n \sin t.$$

Die Gleichung der Dreiecksseite, welche dem festen Winkel gegenüber liegt, ist, da sie durch einen Punkt, für welchen $x = 0$ und $y = \tang u$ ist, und durch einen zweiten Punkt, für welchen $x = \tang t$ und $y = 0$ ist, gehen muß:

$$2. \qquad y \cot u + x \cot t = 1.$$

Die Differenzial-Gleichungen von den beiden vorhergehenden Gleichungen sind:

$$3. \qquad m \cos u\, du - n \cos t\, dt = 0 \text{ und}$$

$$4. \qquad y \sin t^2\, du + x \sin u^2\, dt = 0.$$

Elimirt man die Differenziale und berücksichtigt dabei die Gleichung (1), so erhält man:

5. $$x \cos u \sin u + y \cos t \sin t = 0.$$

Aus den Gleichungen (5) und (2) findet man leicht:

6. $$x = \frac{\cos t \sin t}{\cos t^2 - \cos u^2} \text{ und } y = -\frac{\cos u \sin u}{\cos t^2 - \cos u^2}$$

als Achsen-Koordinaten des Punktes auf der unbekannten Kurve, in welchem dieselbe von der, dem unveränderlichen Dreieckswinkel gegenüber liegenden Seite berührt wird. Um zur Gleichung der unbekannten Kurve zu gelangen, muß man aus den Gleichungen (1), (2) und (5) u und t eliminiren. Zuvörderst aber geben wir der Gleichung (1) die Form:

$$m^2 (1 - \cos u^2) = n^2 (1 - \sin t^2),$$

und der Gleichung (5) die Form:

$$n x \cos u + m y \cos t = 0.$$

Aus diesen so umgeformten Gleichungen (1) und (5) findet man leicht:

$$\cos t^2 = \frac{m^2 (m^2 - n^2) x^2}{m^4 y^2 - n^4 x^2}, \text{ also } \sin t^2 = \frac{m^2 (m^2 y^2 - n^2 x^2)}{m^4 y^2 - n^4 x^2} \text{ und}$$

$$\cos u^2 = \frac{m^2 (m^2 - n^2) y^2}{m^4 y^2 - n^2 x^2}, \text{ also } \sin u^2 = \frac{n^2 (m^2 y^2 - n^2 x^2)}{m^4 y^2 - n^4 x^2};$$

mithin $\frac{\cot t}{\cot u} = -\frac{n^2 x}{m^2 y}$. Wird endlich diese Gleichung mit der Gleichung (2) verbunden, so erhält man:

$$y - \frac{n^2 x^2}{m^2 y} = \frac{1}{\cot u}.$$

Wird diese Gleichung quadrirt und für cot u der Werth gesetzt, so hat man:

$$m^2 y^2 - n^2 x^2 = \frac{m^2 n^2}{m^2 - n^2}$$

als Gleichung der gesuchten Ortskurve.

Bezeichnen wir die beiden konjugirten Durchmesser unserer Kurve, welche eine Hyperbel ist, mit $2\alpha$ und $2\beta$, so erhält man:

$$\frac{y^2}{\operatorname{tang} \beta^2} - \frac{x^2}{\operatorname{tang} \alpha^2} = 1,$$

woraus rückwärts zur Bestimmung der Halbmesser die Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \alpha^2 = \frac{m^2}{m^2 - n^2} \text{ und } \operatorname{tang} \beta^2 = \frac{n^2}{m^2 - n^2} \text{ folgen.}$$

Abgesehen davon, daß sich verhält $\operatorname{tang} \alpha : \operatorname{tang} \beta = m : n$, hat man die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \alpha^2 - \operatorname{tang} \beta^2 = 1,$$

welche den Zusammenhang zwischen den konjugirten Halbmessern ausdrückt.

Da nun bei den sphärischen Kegelschnitten dieselben Gesetze hinsichtlich der konjugirten Durchmesser stattfinden, wie in der Planimetrie, so gilt die vorstehende Relation auch für die Halbachsen. Dieses vorausgesetzt, so können wir leicht die Identität unserer jetzigen Kurve mit der am Schlusse des §. 1 behandelten reziproken Kurve nachweisen. Ihre Gleichung war:

$$\frac{y^2 \operatorname{tang} g^2}{1 - \operatorname{tang} g^2} + \frac{x^2}{\cot g^2} = 1.$$

Bezeichnet man die beiden Halbachsen dieser Ellipse mit a und b, so hat man rückwärts:

$$\operatorname{tang} a^2 = \cot g^2 \text{ und } \operatorname{tang} b^2 = \frac{1 - \operatorname{tang} g^2}{\operatorname{tang} g^2} = \cot g^2 - 1;$$

$$\text{mithin } \operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} b^2 = 1.$$

Zwar ist die hier in Rede stehende Ellipse auf dem Mittelpunkt **V** Fig. 2 bezogen; allein bezieht man den Kegelschnitt auf den Mittelpunkt **S**, so bleibt das Achsenverhältniß dasselbe, wie sich leicht zeigen läßt.

## §. 4.

Nimmt man in der Planimetrie auf demselben Durchmesser eines Kreises zu beiden Seiten des Zentrums in gleichen Entfernungen von demselben zwei beliebige Punkte **A** und **A′**, und verbindet sie mit demselben beliebigen Punkte **X** der Peripherie, so ist die Summe der Quadrate dieser beiden Verbindungslinien eine unveränderliche Größe. Es fragt sich nun, ob in der Sphärik bei der gleichseitigen Zirkulare etwas Aehnliches stattfindet. Um dieses zu untersuchen, stellen wir uns folgende Aufgabe:

Den geometrischen Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke zu finden, welche über derselben festen Grundlinie konstruirt sind, so daß das Produkt der Kosinus der beiden veränderlichen Seiten unveränderlich bleibt.

Es sei **AA′** die feste Grundlinie, arc (tang = a) und arc (tang = b) die Achsen-Koordinaten des Punktes **A**, arc (tang = á) und arc (tang = b′) die Achsen-Koordinaten des Punktes **A′**, so wie arc (tang = x) und arc (tang = y) die Achsen-Koordinaten des veränderlichen Scheitels **X**. Nach §. 6 der analytischen Sphärik ist dann:

$$\cos AX = \frac{1 + ax + by}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\,\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} \text{ und}$$

$$\cos A'X = \frac{1 + \acute{a}x + b'y}{\sqrt{(1 + \acute{a}^2 + b'^2)}\,\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}},$$

wenn der Koordinaten-Winkel ein rechter ist.

Soll nun das Produkt cos **AX**. cos **A′X** der unveränderlichen Größe cos c gleich sein, so hat man:

$$(1 + ax + by)(1 + \acute{a}x + b'y) = (1 + x^2 + y^2)\sqrt{(1 + a^2 + b^2)} + \\ \sqrt{(1 + \acute{a}^2 + b'^2)} \cos c.$$

Es ist also die gesuchte Ortskurve ein Kegelschnitt; um aber die Natur desselben rasch übersehen zu können, setzen wir $a + a' = 0$ und $b = b' = 0$, oder, was dasselbe ist, machen die gegebene Grundlinie **AA'** zur **X**-Achse und den Mittelpunkt derselben zum Anfangs-Punkt der Koordinaten-Achsen. Wir erhalten alsdann:

$$y^2 (\cos c + a^2 \cos c) + x^2 (a^2 + \cos c + a^2 \cos c) = 1 - \cos c - a^2 \cos c.$$

Soll nun diese Gleichung im Fall, daß die unveränderliche Größe $\cos c$ positiv ist, keinen Widerspruch enthalten, so muß

$$1 > \cos c\, (1 + a^2),$$

oder wenn man arc ($\text{tang} = a$) mit $g$ bezeichnet:

$$\cos g^2 > \cos c.$$

Dieses vorausgesetzt, geben wir der Gleichung unserer Ortskurve die Form:

$$\frac{y^2}{\text{tang}\, \beta^2} + \frac{x^2}{\text{tang}\, \alpha^2} = 1,$$

also hat man rückwärts zur Bestimmung der beiden Halbachsen die beiden Gleichungen:

$$1.\ \text{tang}\, \alpha^2 = \frac{\cos g^2 - \cos c}{\sin g^2 + \cos c} \quad \text{und} \quad 2.\ \text{tang}\, \beta^2 = \frac{\cos g^2 - \cos c}{\cos c}.$$

Und überhaupt kann man, so oft zwei von den vier Größen, welche in den beiden letzten Gleichungen vorkommen, gegeben sind, die beiden übrigen finden. Eliminirt man vor und nach die eine oder die andere der hier in Rede stehenden Größen, so erhält man:

$$3.\quad \cos c = \frac{\sin \alpha^2}{\text{tang}\, \beta^2} \qquad 4.\quad \cos g^2 = \frac{\sin \alpha^2}{\sin \beta^2}.$$

Man sieht hieraus, daß mit der Ellipse, oder was dasselbe ist, mit den Halbachsen derselben die Größen $g$ und $c$ zugleich gegeben sind, was bekanntlich in der Planimetrie nicht stattfindet. Auch sind nur auf der kleineren Achse einer Ellipse die fraglichen Punkte **A** und **A'** möglich, da $\alpha < \beta$ sein muß.

Ist $\text{tang}\, a = \sin \beta$, also die Ellipse die gleichseitige Zirkulare, so ist auch $g = \alpha$, wie leicht aus der Gleichung (4) hervorgeht, und die beiden fraglichen Punkte fallen mit den Endpunkten der ersten Achse zusammen.

Ist aber $\text{tang}\, \alpha > \sin \beta$ und zugleich $\text{tang}\, \alpha < \text{tang}\, \beta$, so ist $g < \alpha$; mithin liegen die Punkte **A** und **A'** innerhalb der Ellipse.

Ist endlich $\text{tang}\, \alpha < \sin \beta$, so ist $g > \alpha$; und die in Rede stehenden Punkte liegen außerhalb der Ellipse.

Es sei im anderen Fall die unveränderliche Größe $\cos c$ negativ und $c + c' = 180°$, alsdann ist $\cos c = -\cos c'$, und die Gleichung unserer Ortskurve verwandelt sich in:

$$x^2 (a^2 - \cos c' - a^2 \cos c') - y^2 (\cos c + a^2 \cos c') = 1 + \cos c' + a^2 \cos c'.$$

Soll diese Gleichung keinen Widerspruch enthalten, so muß

$$a^2 > \cos c' + a^2 \cos c' \text{ sein,}$$

oder wenn man arc (tang $= a$) $= g$ setzt:

$$\sin g^2 > \cos c'.$$

Dieses vorausgesetzt, geben wir der Gleichung unserer Kurve die Form:

$$\frac{x^2}{\text{tang } \alpha'^2} - \frac{y^2}{\text{tang } \beta'^2} = 1.$$

Zur Bestimmung der beiden Halbachsen haben wir alsdann die beiden Gleichungen:

$$1. \quad \text{tang } \alpha'^2 = \frac{\cos g^2 + \cos c'}{\sin g^2 - \cos c'} \qquad 2. \quad \text{tang } \beta'^2 = \frac{\cos g^2 + \cos c'}{\cos c'}.$$

Eliminirt man noch $g$ und $c'$ aus diesen Gleichungen, so hat man:

$$3. \quad \cos c' = \frac{\sin \alpha'^2}{\text{tang } \beta'^2} \qquad 4. \quad \cos g^2 = \frac{\sin \alpha'^2 (\text{tang } \beta'^2 - 1)}{\text{tang } \beta'^2}.$$

Setzt man $\text{tang } \alpha'^2 = \frac{\text{tang } \beta'^2}{\text{tang } \beta'^2 - 1}$, oder was dasselbe ist: $\text{tang } \beta'^2 = \frac{\text{tang } \alpha'^2}{\text{tang } \alpha'^2 - 1}$, so ist die hier in Rede stehende Kurve die gleichseitige Zirkulare, auf den einen, in der verlängerten **X**-Achse liegenden äußeren Mittelpunkt bezogen. Da nun zugleich aus dieser Annahme folgt, daß $g = \alpha'$ ist, so fallen die beiden fraglichen Punkte **A** und **A'** mit den Endpunkten der ersten Achse zusammen.

Ist aber $\text{tang } \alpha'^2 > \frac{\text{tang } \beta'^2}{\text{tang } \beta'^2 - 1}$, so ist $g < \alpha'$; also liegen die Punkte **A** und **A'** auf der ersten Achse selbst.

Ist dagegen $\text{tang } \alpha'^2 < \frac{\text{tang } \beta'^2}{\text{tang } \beta'^2 - 1}$, so ist $g > \alpha'$; mithin liegen die fraglichen Punkte auf den Verlängerungen der ersten Achse.

Den geometrischen Zusammenhang zwischen den beiden besonderen Fällen unserer Aufgabe erkennt man leicht aus Fig. 3. Ist nämlich im Dreiecke **ACA'**, $\cos$ **AC**. $\cos$ **A'C** $=$ $\cos c$, so ist im Nebendreieck **A'C**a, $\cos$ **A'C**. $\cos$ a**C** $= - \cos c$.

Aus der ganzen Untersuchung ziehen wir den Schluß, daß nicht die gleichseitige Zirkulare, sondern die sphärische Ellipse überhaupt in der hier in Rede stehenden Rücksicht dem planimetrischen Kreise entspricht.

## §. 5.

Es sei $\frac{y^2}{\text{tang } \beta^2} + \frac{x^2}{\text{tang } \alpha^2} = 1$ die Gleichung einer sphärischen Ellipse. Legt man durch den Scheitel **A** derselben, für welchen $y = 0$ und $x = \text{tang } \alpha$ ist, eine Gerade unter irgend einem Winkel, so ist ihre Gleichung:

$$y = \frac{a}{b}\ (\text{tang}\ \alpha - x).$$

Wenn man ferner durch den anderen Scheitel $A'$, für welchen $y = 0$ und $x = -\text{tang}\ \alpha$ ist, eine Gerade unter irgend einem Winkel legt, so wird ihre Gleichung sein:

$$y = -\frac{a'}{b'}\ (\text{tang}\ \alpha + x).$$

Verlangt man nun, daß diese beiden Geraden sich auf der Ellipse schneiden, so müssen ihr Gleichungen mit der Gleichung der Ellipse zu gleicher Zeit stattfinden.

Multiplizirt man daher die Gleichungen der beiden Geraden mit einander, so erhält man:

$$y^2 = -\frac{a a'}{b b'}\ (\text{tang}\ \alpha^2 - x^2);$$

und damit dieses immer mit

$$y^2 = \frac{\text{tang}\ \beta^2}{\text{tang}\ \alpha^2}\ (\text{tang}\ \alpha^2 - x^2)$$

übereinstimmt, so muß man

$$\frac{a a'}{b b'} = -\frac{\text{tang}\ \beta^2}{\text{tang}\ \alpha^2}\ \text{setzen.}$$

Nach der analytischen Sphärik §. 9 ist aber, wenn man den Winkel, welchen die erste Gerade mit der Achse der $x$ bildet, gleich $w$ setzt:

$$\text{tang}\ W = -\frac{a}{b\ \cos\ \alpha}.$$

Bezeichnet $w'$ den Winkel, den die zweite Gerade mit der Achse der $x$ bildet, so hat man auf dieselbe Weise:

$$\text{tang}\ W' = -\frac{a'}{b'\ \cos\ \alpha}\ ;\ \text{also}$$

$$\text{tang}\ W.\ \text{tang}\ W' = \frac{a a'}{b b'\ \cos\ \alpha^2}\ ;\ \text{mithin auch}$$

$$\text{tang}\ W.\ \text{tang}\ W' = -\frac{\text{tang}\ \beta^2}{\sin\ \alpha^2}.$$

Hieraus folgt, daß auch bei der sphärischen Ellipse eine konstante Relation zwischen den Tangenten der Winkel, welche die Achse mit den aus ihren Endpunkten gezogenen Supplementärchorden macht, stattfindet. Diese Relation hängt bloß von den beiden Achsen ab. Für den Kreis, dessen Achsen gleich sind, hat man

$$\text{tang}\ W.\ \text{tang}\ W' = -\frac{1}{\cos\ \alpha^2}.$$

Während also in der Planimetrie die hier in Rede stehenden Winkel, oder vielmehr die

Winkel **W** und 180° — **W′** im Kreise sich zu einem Rechten ergänzen, findet dasselbe in der Sphärik nicht statt; die Summe dieser Winkel ist vielmehr größer, als ein rechter.

§. 6.

Für die gleichseitige Zirkulare, deren Gleichung $\frac{y^2}{\text{tang } \beta^2} + \frac{x^2}{\sin \beta^2} = 1$ ist, ist das Achsenverhältniß gegeben durch $\text{tang } \beta^2 = \frac{\text{tang } \alpha^2}{1 - \text{tang } \alpha^2}$. Wird dieses benutzt, so findet man leicht nach dem vorhergehenden Sen:

$$\text{tang } W . \text{ tang } W' = - \frac{1}{\cos 2 \alpha}.$$

Und dieses ist die Relation unter den beiden Winkeln, welche die Supplementärchorden mit der X-Achse bilden. Allein diese Relation war leicht vorauszusehen; und in der That folgt rückwärts aus derselben, daß der Winkel, den die beiden Supplementärchorden mit einander bilden, ein rechter ist.

Es bleibt uns noch übrig, die Relation aufzusuchen, die unter den Winkeln stattfindet, welche zwei Supplementärchorden mit der zweiten Achse unserer gleichseitigen Zirkulare bilden. Bezeichnen wir diese Winkel zum Unterschiede mit **U** und **U′**, so hat man auf der Stelle, wenn man $\alpha$ mit $\beta$ vertauscht, nach dem vorhergehenden Sen:

$$\text{tang } U . \text{ tang } U' = - \frac{\text{tang } \alpha^2}{\sin \beta^2}$$

Da nun in unserer gleichseitigen Zirkulare $\text{tang } \alpha^2 = \sin \beta^2$ ist, so folgt

$$\text{tang } U . \text{ tang } U' = -1;$$

es ergänzen sich also die Winkel **U** und 180° — **U′** zu einem rechten. Wir haben demnach folgende neue Eigenschaft der gleichseitigen Zirkulare entdeckt.

Während die Supplementärchorden über der kleinen Achse einer gleichseitigen Zirkulare sich unter einem rechten Winkel schneiden, ergänzen sich die Winkel, welche zwei Supplementärchorden mit der größeren Achse bilden, falls man die Winkel nimmt, die sich nach entgegengesetzten Seiten öffnen, zu einem rechten.

§. 7.

Es sei $y^2 = \frac{\text{tang } \beta^2}{\text{tang } \alpha^2} (x^2 - \text{tang } \alpha^2)$ die Gleichung der sphärischen Hyperbel, auf ihre Achsen bezogen, so werden

$$y = - \frac{a}{b} (x - \text{tang } \alpha) \text{ und}$$

$$y = -\frac{á}{b'}\,(x + \text{tang}\,\alpha)$$

die Gleichungen derjenigen beiden Geraden sein, die unter einem beliebigen Winkel durch die beiden Endpunkte ihrer ersten Achsen gelegt sind. Multiplizirt man dieselben mit einander, so erhält man:

$$y^2 = \frac{a\,á}{b\,b'}\,(x^2 - \text{tang}\,\alpha^2).$$

Sollen sich nun die beiden Geraden auf der Hyperbel durchschneiden, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{a\,á}{b\,b'} = \frac{\text{tang}\,\beta^2}{\text{tang}\,\alpha^2}.$$

Werden auch hier die Winkel, welche die beiden Geraden mit der Achse der **X** bilden, beziehlich mit **W** und **W'** bezeichnet, so hat man:

$$\text{tang}\,W = -\frac{a}{b\,\cos\,\alpha}\ \text{und}$$

$$\text{tang}\,W' = -\frac{á}{b'\,\cos\,\alpha};\ \text{also}$$

$$\text{tang}\,W\ \text{tang}\,W' = \frac{a\,a'}{b\,b'\,\cos\,\alpha^2};\ \text{mithin auch}$$

$$\text{tang}\,W\ \text{tang}\,W' = \frac{\text{tang}\,\beta^2}{\sin\,\alpha^2}.$$

Wenn die Hyperbel gleichseitig ist, so ist $\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\beta$, und man erhält:

$$\text{tang}\,W\ \text{tang}\,W' = \frac{1}{\cos\,\alpha^2}.$$

Ist dagegen der Sinus der ersten Halbachse gleich der Tangente der zweiten, oder in Zeichen $\sin\,\alpha = \text{tang}\,\beta$, so hat man:

$$\text{tang}\,W.\ \text{tang}\,W' = 1.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn wir unsere gleichseitige Zirkulare (Fig. 2) auf den äußeren Mittelpunkt **S** beziehen. Denn im §en 1 haben wir, indem wir die erste Halbachse **SB** mit $h_{,,}$ und die zugehörige zweite mit $g_{,,}$ bezeichneten, gefunden:

$$\sin\,h_{,,} = \text{tang}\,g_{,,}.$$

Während also in der Planimetrie die Aufgabe: Aus der Grundlinie eines Dreieckes und aus der Bedingung, daß die Summe oder der Unterschied der beiden Winkel an der Grundlinie gleich einem rechten sei, das Dreieck zu konstruiren — auf den Kreis, resp. auf die gleichseitige Hyperbel führt; führt dieselbe Aufgabe in der Sphärik, wie aus diesem und dem vorhergehenden §en unserer Untersuchungen hervorgeht, auf die gleichseitige Zirkulare. Um aber den ausgesprochenen Satz zugleich zu verallgemeinern, stellen wir uns umgekehrt das folgende Problem:

§. 8.

Den geometrischen Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke zu finden, welche dergestalt über derselben Grundlinie **AA'** beschrieben sind, daß die Summe der Winkel an der Grundlinie eine konstante Größe ist.

Wir nehmen, wie bisher geschehen ist, der Kürze wegen die Grundlinie $AA' = 2\,g$ zur **X**-Achse und ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt unserer rechtwinkligen Koordinaten-Achsen. Legt man durch den Endpunkt **A** der Grundlinie, für welchen $y = 0$ und $x = \text{tang } g$ ist, eine Gerade unter einem beliebigen Winkel, so ist ihre Gleichung:

$$by + ax - a \text{ tang } g = 0.$$

Eben so findet man für die Gerade, welche unter irgend einem Winkel durch den anderen Endpunkt **A'** gelegt wird, die Gleichung:

$$b'y + áx + á \text{ tang } g = 0.$$

Bezeichnet man nun die Winkel, welche diese Geraden mit der Achse der x bilden, beziehlich mit **W** und **W'**, so erhält man:

$$\text{tang } W = -\frac{a}{b \cos g} \text{ und}$$

$$\text{tang } W' = -\frac{á}{b' \cos g};$$

und da der Aufgabe gemäß $(180^0 - W) + W' = C$ sein soll, so erhält man leicht:

$$\frac{(ab' - áb) \cos g}{aá' + bb' \cos g^2} = \text{tang } c.$$

Zieht man aus den beiden ersten Gleichungen die Werthe von b und b', um dieselben in dieser Gleichung zu substituiren, so geht dieselbe über in:

$$\frac{2\,y \sin g}{y^2 + x^2 \cos g^2 - \sin g^2} = -\text{tang } c,$$

und dieses ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

Setzt man $c = 90^0$, so hat man:

$$y^2 = x^2 \cos g^2 - \sin g^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{y^2}{\sin g^2} + \frac{-x^2}{\text{tang } g^2} = 1,$$

wie vorauszusehen war.

Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück, so erhalten wir:

$$y^2 + x^2 \cos g^2 + 2\, y \sin g \cot c = \sin g^2.$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von $y$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $x$ liefert, so ist die Achse der $\mathbf{Y}$ ein Durchmesser unserer Kurve. Dasselbe gilt aber nicht von der Achse der $\mathbf{X}$; allein da es gleichgültig ist, ob man $-\,y$ für $y$ oder $180^\circ - c$ für $c$ setzt, so sieht man auf der Stelle, daß die Achse der $\mathbf{X}$ unsere Kurve in zwei Segmente zerlegt, die so beschaffen sind, daß die Summe der Winkel an der Grundlinie in den Dreiecken des einen Segmentes die Summe der Winkel an der Grundlinie in den Dreiecken des anderen Segmentes zu $180^\circ$ ergänzt.

Da unsere Ortskurve ein Kegelschnitt ist, so sind wir jeder ferneren Untersuchung überhoben, sobald wir die beiden Achsen desselben kennen. Um aber zur Kenntniß derselben zu gelangen, führen wir zunächst die Achsen-Koordinaten selbst ein, d. h. wir setzen $\tan u$ für $y$ und $\tan t$ für $x$; alsdann geht die Gleichung über in:

$$\tan u^2 + \tan t^2 \cos g^2 + 2 \tan u .\, \sin g .\, \cot c = \sin g^2.$$

Ferner führen wir die Applikate $z$ statt der Achsen-Koordinate $t$ vermöge der Gleichung: $\tan t = \dfrac{\tan z}{\cos u}$ ein, wodurch man erhält:

$$\sin u^2 + \tan z^2 \cos g^2 + \sin 2\, u .\, \sin g .\, \cot c - \sin g^2 \cos u^2 = 0.$$

Setzt man endlich $u = \acute{u} + v$, so erhält man:

$$\sin (\acute{u} + v)^2 + \tan z^2 \cos g^2 + \sin 2\, (\acute{u} + v) \sin g .\, \cot c - \sin g^2 + \cos (\acute{u} + v)^2 = 0.$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, und läßt man von $u$ die Marke weg, deren wir nicht mehr bedürfen, so erhält man, nachdem man noch mit $\cos u^2$ dividirt und rückwärts $\tan t$ für $\dfrac{\tan z}{\cos u}$ gesetzt hat:

$\mathbf{A} \tan u^2 + \mathbf{B} \tan u + \tan t^2 \cos g^2 = \mathbf{C}$, in welcher Gleichung

$\mathbf{A} = \cos v^2 - \sin v^2 \sin g^2 - \sin 2\, v \sin g \cot c$,

$\mathbf{B} = \sin 2\, v + \sin 2\, v \sin g^2 + 2 \cos 2\, v \sin g \cot c$ und

$\mathbf{C} = -\sin v^2 + \cos v^2 \sin g^2 - \sin 2\, v \sin g \cot c$

der Kürze wegen gesetzt ist.

Setzt man $\mathbf{B} = 0$ und rückwärts $x$ für $\tan t$ und $y$ für $\tan u$, so erhält man:

$$\frac{\mathbf{A}\, y^2}{\mathbf{C}} + \frac{x^2 \cos g^2}{\mathbf{C}} = 1;$$

und da, wie aus den vorhergehenden Ausdrücken leicht hervorgeht, $\mathbf{A} - \mathbf{C} = \cos g^2$ ist:

$$\frac{(\mathbf{C} + \cos g^2)\, y^2}{\mathbf{C}} + \frac{x^2 \cos g^2}{\mathbf{C}} = 1.$$

4

Wird also $\frac{C}{\cos g^2} = \operatorname{tang} \alpha^2$ gesetzt, so ist $\sin \alpha^2 = \frac{C}{C + \cos g^2}$ und die Gleichung unserer Ortskurve geht über in:

$$\frac{y^2}{\sin \alpha^2} + \frac{x^2}{\operatorname{tang} \alpha^2} = 1,$$

so daß wir es also auch hier in dem allgemeinen Fall mit der gleichseitigen Zirkulare zu thun haben.

Aus der Bedingung $B = 0$ folgt:

$$\operatorname{tang} 2\,v = -\frac{2 \sin g \cot c}{1 + \sin g^2}; \text{ mithin}$$

$$\sin 2\,v = -\frac{2 \sin g \cot c}{\sqrt{[(1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2]}};$$

$$\cos 2\,v = +\frac{1 + \sin g^2}{\sqrt{[(1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2]}};$$

$$\sin v^2 = \frac{\sqrt{[(1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2]} - (1 + \sin g^2)}{2\sqrt{[(1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2]}};$$

$$\cos v^2 = \frac{\sqrt{[(1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2]} + (1 + \sin g^2)}{2\sqrt{((1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2)}}.$$

Benutzt man diese Werthe, so findet man leicht:

$$C = -\tfrac{1}{2} \cos g^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{((1 + \sin g^2)^2 + 4 \sin g^2 \cot c^2)};$$

also auch $\operatorname{tang} \alpha^2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{1 + \sin g^2}{1 - \sin g^2}\right)^2 + \frac{4 \operatorname{tang} g^2 \cot c^2}{\cos g^2}\right]}$.

Aus der Grundlinie $2\,g$ des Dreieckes und aus der Summe $C$ der beiden Winkel an der Grundlinie lassen sich also die beiden Achsen unseres Kegelschnittes berechnen. Ist dieses geschehen, so giebt die Gleichung $\operatorname{tang} 2\,v = -\frac{2 \sin g \cot c}{1 + \sin g^2}$ die Distanz $v$, um welche die Grundlinie $2\,g$ von der Achse der $X$ entfernt ist; ist $\cot c$ negativ, d. h. $C > 90^\circ$, so liegt, wie man leicht sieht, die Grundlinie auf der negativen Seite der $X$-Achse, widrigen Falls aber auf der positiven.

## §. 9.

Mit der so eben behandelten Aufgabe ist die folgende nahe verwandt: Aus der Grundlinie $2\,g$ und aus dem Unterschiede $d$ der Winkel an derselben das sphärische Dreieck zu konstruiren.

Unter denselben Voraussetzungen, wie wir dieselben bei der vorhergehenden Aufgabe gemacht haben, findet man für die beiden Geraden, welche durch die Endpunkte der gegebenen Grundlinie $2\,g$ unter beliebigen Winkeln gelegt werden, die Gleichungen:

$$b y + a x - a \operatorname{tang} g = 0 \text{ und}$$

$$b' y + \acute{a} x + \acute{a} \operatorname{tang} g = 0,$$

so wie für die Winkel **W** und **W'**, die sie mit der Achse der **X** bilden:

$$\operatorname{tang} W = -\frac{a}{b \cos g} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} W' = -\frac{\acute{a}}{b' \cos g}.$$

Setzt man nun der Aufgabe gemäß $W' - (180^\circ - W) = d$, so hat man leicht:

$$\frac{(a b' + \acute{a} b) \cos g}{a \acute{a} - b b' \cos g^2} = \operatorname{tang} d.$$

Zieht man aus den beiden ersten Gleichungen die Werthe von **b** und **b'**, um dieselben in dieser Gleichung zu substituiren, so geht dieselbe über in:

$$\frac{2 x y \cos g}{y^2 - x^2 \cos g^2 + \sin g^2} = - \operatorname{tang} d;$$

und dieses ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

Setzt man $d = 90^\circ$, so erhält man, wie vorauszusehen war:

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang} g^2} - \frac{y^2}{\sin g^2} = 1.$$

Allgemein aber hat man nach geschehener Entwickelung die Gleichung:

$$x^2 \cos g^2 - 2 x y \cos g \cot d - y^2 = \sin g^2.$$

Man sieht auf der Stelle, daß unsere Ortskurve eine sphärische Hyperbel ist, und daß der Anfangspunkt unserer Koordinaten-Achsen ein Mittelpunkt derselben ist. Wir behalten daher den Anfangspunkt bei und geben nur den Achsen eine andere Richtung, indem wir nach §. 18 der analytischen Sphärik $x = x' \cos v - y' \sin v$ und $y = y' \cos v + x' \sin v$ setzen, so daß also die Koordinaten-Achsen rechtwinkelig bleiben. Alsdann geht die Gleichung über in:

$A x^2 - C y^2 - B x y = \sin g^2$, wenn man der Uebersicht wegen

$A = \cos v^2 \cos g^2 - \sin v^2 - 2 \sin v \cos v \cos g \cot d$,

$C = \cos v^2 - \sin v^2 \cos g^2 - 2 \sin v \cos v \cos g \cot d$ und

$B = 2 \sin v \cos v \cos g^2 + 2 \sin v \cos v + 2 \cos v^2 \cos g \cot d - 2 \sin v^2 \cos g \cot d$

setzt, und von **x** und **y** die Marke weg läßt, deren wir nicht mehr bedürfen. Wird endlich $B = 0$ gesetzt und übersieht man nicht, daß $C - A = \sin g^2$ ist, so hat man:

$$\frac{A x^2}{\sin g^2} - \frac{(A + \sin g^2) y^2}{\sin g^2} = 1, \text{ oder}$$

da $\dfrac{\sin g^2}{A + \sin g^2} = \sin \alpha^2$ ist, wenn $\dfrac{\sin g^2}{A} = \operatorname{tang} \alpha^2$ gesetzt wird:

$$\frac{x^2}{\text{tang } \alpha^2} - \frac{y^2}{\sin \alpha^2} = 1.$$

Die gesuchte Ortskurve ist also die gleichseitige Zirkulare, auf den einen ihrer beiden äußeren Mittelpunkte bezogen.

Aus der Bedingung $B = 0$ folgt:

$$\text{tang } 2\,v = -\frac{2 \cos g \cot d}{1 + \cos g^2}; \text{ mithin}$$

$$\sin 2\,v = -\frac{2 \cos g \cot d}{\sqrt{[(1 + \cos g^2)^2 + 4 \cos g^2 \cot d^2]}} \text{ und}$$

$$\cos 2\,v = \frac{1 + \cos g^2}{\sqrt{[(1 + \cos g^2)^2 + 4 \cos g^2 \cot d^2]}}.$$

Um der Auswerthung der Größen $\sin v$ und $\cos v$ überhoben zu sein, addiren wir die Werthe von $A$ und $C$, und wir erhalten:

$C + A = \cos 2\,v\,(1 + \cos g^2) - 2 \sin 2\,v \cos g \cot d$; und da

$C - A = \sin g^2$ ist, so hat man:

$A = -\,^1/_2 \sin g^2 + \,^1/_2 \cos 2\,v\,(1 + \cos g^2) - \sin 2\,v \cos g \cot d,$

oder nach geschehener Substitution:

$A = -\,^1/_2 \sin g^2 + \,^1/_2 \sqrt{((1 + \cos g^2)^2 + 4 \cos g^2 \cot d^2)};$

mithin

$$\cot \alpha^2 = -\,^1/_2 + \,^1/_2 \sqrt{\left[\left(\frac{1 + \cos g^2}{1 - \cos g^2}\right)^2 + \frac{4 \cot g^2 \cot d^2}{\sin g^2}\right]}.$$

Es lassen sich also aus der Grundlinie $2\,g$ des Dreieckes und aus der Differenz der beiden Winkel an der Grundlinie die beiden Achsen unseres Kegelschnittes berechnen. Ist dieses geschehen, so giebt die Gleichung $\text{tang } 2\,v = -\frac{2 \cos g \cot d}{1 + \cos g^2}$ den Winkel $v$, welchen die Grundlinie mit der Achse der $X$ bilden muß.

Die hier gefundenen Resultate lassen sich leicht durch eine spezielle geometrische Betrachtung aus den, in dem vorhergehenden §en gefundenen ableiten. Es sei Fig. 4 **BDB'D'** die gleichseitige Zirkulare, auf den Mittelpunkt **Q** und auf die beiden Achsen **BB'** und **DD'** bezogen, sin **QB** = tang **QD**, **bdb'd'** die Gegenkurve und **AA'** $= 2\,g$ die gegebene Grundlinie, welche die Achse **DD'** in **E** rechtwinklig schneidet; so wird das Dreieck **AA'C**, dessen Scheitel **C** sich auf der gleichseitigen Zirkulare bewegt, so beschaffen sein, daß die Winkel an der Grundlinie **AA'** eine konstante Summe bilden. Werden nun die Seiten **A'C** und **A'A** dieses Dreieckes bis zum Gegenpunkt in á verlängert, so entsteht das Nebendreieck **AáC**, dessen Winkel an der Grundlinie **Aá** so beschaffen sind, daß ihr Unterschied eine unveränderliche Größe ist. Auch ergänzen sich die Grundlinien der beiden Dreiecke zu 180°, also ihre Hälften zu 90°; und in der That ist, da **QB** und **EA** senkrecht auf **DD'** stehen, sowohl **QO** als auch **EO** ein Quadrant.

Hieraus folgt zugleich, daß auch QE das Maß des Winkels QOE ist. Berücksichtigt man also, daß tang QB = cot OB, sin EA = cos OA ist, daß ferner die Summe der Winkel an der Grundlinie AA' des Dreieckes AA'C die Differenz der Winkel an der Grundlinie Aá des Dreieckes AáC zu 180° ergänzt, so geht man leicht von den Resultaten der einen hier in Rede stehenden Aufgabe zu den der anderen über.

## §. 10.

Jede der beiden vorhergehenden Aufgaben hat ihre reziproke; allein da die eine aus der anderen leicht hervorgeht, so wollen wir der Kürze wegen nur die erste derselben behandeln

Es sei also ein Winkel eines sphärischen Dreieckes fest und unveränderlich, die Gegenseite aber bewege sich so, daß die Summe der beiden anderen Seiten unveränderlich bleibt; man soll die Kurve bestimmen, welche von der dritten Seite des Dreieckes beständig berührt wird.

Wir machen den Scheitel des unveränderlichen Winkels zum Anfangspunkt unserer Koordinaten-Achsen und die Schenkel desselben zu Koordinaten-Achsen. Werden die Schenkel des unveränderlichen Winkels mit t und u bezeichnet, so hat man der Aufgabe gemäß die Bedingung: $u + t = c$, oder

$$1. \quad \frac{\tang u + \tang t}{1 - \tang u \tang t} = \tang c.$$

Die Gleichung der veränderlichen Grundlinie hat die Form:

$$ax + by + c = 0.$$

Da dieselbe aber durch einen Punkt gehen muß, für welchen $x = 0$ und $y = \tang = u$ ist, und durch einen zweiten Punkt, für welchen $x = \tang t$ und $y = 0$ ist, so geht ihre Gleichung über in:

$$2. \quad x \tang u + y \tang t = \tang u \tang t.$$

Differenzirt man diese beiden Gleichungen, wobei man natürlich x und y als konstant ansehen muß, so erhält man:

$$du\,(\cos t^2 + \sin t \cos t \tang c) + dt\,(\cos u^2 + \sin u \cos u \tang c) = 0 \text{ und}$$
$$du\,(x^2 \cos t^2 - \sin t \cos t) + dt\,(y \cos u^2 - \sin u \cos u) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht, wenn man die Differenziale eliminirt:

$$3. \quad \tang t\,(1 + y \tang c) - \tang u\,(1 + x \tang c) = x - y,$$

und diese Gleichung ist mit den Gleichungen (1) und (2) nothwendig und hinreichend, um zur Gleichung der gesuchten Kurve zu gelangen. Der leichteren Elimination wegen leiten wir durch Kombination aus den Gleichungen (1) und (2) die Gleichung:

$$\tang t\,(1 + y \tang c) + \tang u\,(1 + x \tang c) = \tang c$$

ab, welche in Verbindung mit der vorhergehenden leicht giebt:

$$\cot t = \frac{2\,(1 + y \tang c)}{x - y + \tang c} \text{ und}$$

$$\cot u = \frac{2\,(1 + x \tang c)}{-x + y + \tang c}.$$

Werden endlich diese Werthe in der Gleichung (3) oder (1) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$y^2 - 2\,xy\,(1 + 2 \tang g^2) + x^2 - 2\,y \tang c - 2\,x \tang c + \tang c^2 = 0,$$

welche die der gesuchten Kurve ist. Dieselbe ist also, wie wir im voraus wußten, ein Kegelschnitt, dessen Beschaffenheit wir jedoch der Kürze wegen nicht weiter untersuchen wollen.

In dem besonderen Fall, daß $c = 90^\circ$ ist, geht die Gleichung unserer Kurve über in:

$$xy = \frac{1}{4}.$$

Es ist also in diesem Fall der Anfangspunkt unserer Koordinaten-Achsen ein äußerer Mittelpunkt, das Maß des Winkels, den die Koordinaten-Achsen mit einander bilden, eine Achse des Kegelschnittes, und die Koordinaten-Achsen selbst sind Asymptoten desselben. Die Bestimmung der zweiten Achse unseres Kegelschnittes betreffend, so verweisen wir der Kürze wegen auf §. 77 der analytischen Sphärik.

## §. 11.

In der Planimetrie wird leicht bewiesen, daß alle supplementären Chorden, welche man an die Endpunkte der großen Achse einer Ellipse zieht, einen stumpfen Winkel mit einander bilden, und daß diejenigen den größten Winkel einschließen, welche sich zugleich an der Spitze der kleinen Achse schneiden; daß dagegen die Supplementärchorden über der kleinen Achse immer einen spitzen Winkel einschließen, und daß unter diesen spitzen Winkeln derjenige der kleinste ist, der sich an der Spitze der großen Achse befindet. Der analytische Ausdruck, wodurch die eben ausgesprochene Eigenschaft der Ellipse leicht bewiesen wird, für den Winkel zweier Supplementärchorden ist in der Planimetrie:

$$\tang c = -\frac{2\,\alpha\,\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)\,y},$$

wenn $2\,\alpha$ und $2\,\beta$ die Achsen der Ellipse bezeichnen, und unter **C** derjenige Winkel verstanden wird, den die supplementären Chorden über der Achse $2\,\alpha$ mit einander bilden.

Um nun den entsprechenden analytischen Ausdruck für den Winkel zweier Supplementärchorden einer Ellipse in der Sphärik zu finden, hat man leicht:

$$ax + by - a \tang \alpha = 0 \text{ und}$$
$$\acute{a}x + b'y + \acute{a} \tang \alpha = 0$$

als Gleichungen derjenigen Geraden, die an die Endpunkte der Achse $2\,\alpha$ einer Ellipse gezogen sind; und daher für den Winkel **C**, den diese Geraden einschließen, wie in §. 1:

$$\tang C = \frac{\sqrt{\left((2\,a\acute{a} \tang \alpha)^2 + (ab' - b\acute{a})^2 + (ba' + b'a)^2 \tang \alpha^2\right)}}{-a\acute{a} - bb' + a\acute{a} \tang \alpha^2}.$$

Zieht man aus den beiden ersten Gleichungen die Werthe von b und b', substituirt dieselben in dem Zähler der vorstehenden Gleichung, dividirt alsdann Zähler und Nenner durch das Produkt aá und übersieht nicht, daß $\frac{bb'}{aá} = -\frac{\text{tang}\ \alpha^2}{\text{tang}\ \beta^2}$ sein muß, wenn sich (nach §. 5) die beiden Geraden auf dem Umfange der Ellipse schneiden sollen, so erhält man das gesuchte Resultat:

$$\text{tang}\ C = -\frac{\text{tang}\ \alpha \sin 2\beta \sqrt{[(\text{tang}\ \beta^2 - \text{tang}\ \alpha^2)\, y^2 + \text{tang}\ \beta^2 + \text{tang}\ \alpha^2\ \text{tang}\ \beta^2]}}{(\text{tang}\ \alpha^2 - \sin \beta^2)\, y}$$

Obgleich dieser Ausdruck weit komplizirter ist, als der analoge in der Planimetrie, so ist doch bei genauerer Betrachtung eine Uebereinstimmung nicht zu verkennen.

Ist $\text{tang}\ \alpha = \sin \beta$, also die Ellipse eine gleichseitige Zirkulare, so ist der Winkel, den die supplementären Chorden mit einander bilden, wie vorauszusehen war, ein rechter.

Ist aber $\text{tang}\ \alpha > \sin \beta$, so bilden die beiden Supplementärchorden über der Achse $2\alpha$ einen stumpfen Winkel mit einander, der um so größer wird, je größer $y$ wird, mithin am Scheitel der zweiten Achse sein Maximum erreicht.

Ist endlich $\text{tang}\ \alpha < \sin \beta$, so schließen die beiden supplementären Chorden über der Achse $2\alpha$ einen spitzen Winkel ein, der um so kleiner wird, je größer $y$ wird, und also am Scheitel der zweiten Achse sein Minimum erreicht.

## §. 12.

Ist $\frac{y^2}{\text{tang}\ \beta^2} + \frac{x^2}{\text{tang}\ \alpha^2} = 1$ die Gleichung einer Ellipse auf ihre Achsen und ihren Mittelpunkt bezogen, so ist für einen Punkt M der Ellipse, dessen Achsen-Koordinaten $x'$ und $y'$ sein mögen, die Gleichung der Tangente:

$$y - y' = -\frac{x'\ \text{tang}\ \beta^2}{y'\ \text{tang}\ \alpha^2}(x - x'), \text{ oder}$$

$$x x'\ \text{tang}\ \beta^2 + y y'\ \text{tang}\ \alpha^2 - \text{tang}\ \alpha^2\ \text{tang}\ \beta^2 = 0.$$

Die Gleichung des Lothes, aus dem Mittelpunkt der Ellipse auf diese Tangente gefällt, muß die Form $ax + by = 0$ haben; ist mithin nach §. 12 der analytischen Sphärik:

$$y = \frac{y'\ \text{tang}\ \alpha^2}{x'\ \text{tang}\ \beta^2}\, x, \text{ oder}$$

$$x y'\ \text{tang}\ \alpha^2 - y x'\ \text{tang}\ \beta^2 = 0.$$

Für den Winkel $v$ also, den dieses Loth mit der Achse der $x$ bildet, findet man die Gleichung:

$$\text{tang}\ v = \frac{y'\ \text{tang}\ \alpha^2}{x'\ \text{tang}\ \beta^2}.$$

Zieht man nun noch durch den Berührungspunkt **M** und den Mittelpunkt der Ellipse einen Durchmesser, so ist seine Gleichung:

$$x y' - y x' = 0,$$

und bezeichnet man den Winkel, welchen er mit der Achse der x bildet mit m, so hat man:

$$\text{tang } m = \frac{y'}{x'} .$$

Es findet also zwischen den Tangenten dieses und des vorhergehenden Winkels das folgende einfache Verhältniß statt:

$$\frac{\text{tang } m}{\text{tang } v} = \frac{\text{tang } \beta^2}{\text{tang } \alpha^2} .$$

In §. 5 fanden wir für die Winkel **W** und **W'**, welche zwei Supplementärchorden mit der **X**-Achse bilden, die ähnliche Relation:

$$\text{tang } W . \text{ tang } W' = - \frac{\text{tang } \beta^2}{\sin \alpha^2} .$$

Setzen wir jetzt $m = w$ und verbinden wir diese Resultate mit einander, so erhalten wir:

$$\text{tang } v . \text{ tang } w' = - \frac{1}{\cos \alpha^2} .$$

Dieses ist aber nach §. 5 unserer Untersuchungen gerade die Relation, welche zwischen den Tangenten derjenigen Winkel stattfindet, welche zwei Supplementärchorden mit dem Durchmesser eines Kreises in der Sphärik bilden.

## §. 13.

Das Ergebniß des vorhergehenden §en setzt uns in den Stand, auf eine ganz eigenthümliche Weise eine Tangente an die Ellipse zu ziehen. Es sei, um dieses zu zeigen, Fig. 5 **M** ein Punkt der Ellipse **ABA'B'**, durch welchen eine Tangente gezogen werden soll. Beschreibe zu dem Ende über **AA'** den Halbkreis **AEA'**, verbinde den Mittelpunkt **Q** der Ellipse mit dem Berührungspunkt **M**, ziehe aus **A'** die Chorde **A'D** unter dem Winkel $w = MQA = m$; ziehe ferner zur Chorde **A'D** die Supplementärchorde **AD**, welche verlängert den Halbkreis in **E** schneiden möge, verbinde **E** mit **A'**, mache endlich Winkel **KQA = EA'A** und fälle **MK** senkrecht auf **QK**; so ist dieses Loth die verlangte Tangente. Der Beweis ergiebt sich aus dem vorhergehenden §en.

Daß für die Hyperbel ähnliche Sätze gelten, und sich auf ähnliche Weise eine Tangente an dieselbe ziehen läßt, erkennt man leicht; wir müssen jedoch aus Mangel an Raum alles dieses hier übergehen.

## §. 14.

Die Gleichung des Durchmessers einer Ellipse, der durch den Punkt **M** oder $(x' x')$ des Umfanges geht, ist:

$$x y' - y x' = 0;$$

die Gleichung des anderen konjugirten Durchmessers aber nach §. 68 der anal. Sphärik:

$$x x' \cot \alpha^2 + y y' \cot \beta^2 = 0,$$

wenn $\alpha$ und $\beta$ die beiden Halbachsen der Ellipse bezeichnen.

Für den Winkel m, den der erste mit der Achse $2\,\alpha$ bildet, hat man:

$$\tang m = \frac{y'}{x'}.$$

Ebenso findet man für den Winkel m', welchen der andere konjugirte Durchmesser mit der ersten Achse bildet:

$$\tang m' = -\frac{x' \tang \beta^2}{y' \tang \alpha^2};$$

also
$$\tang m.\ \tang m' = -\frac{\tang \beta^2}{\tang \alpha^2}.$$

In §. 12 fanden wir:

$$\frac{\tang m}{\tang v} = \frac{\tang \beta^2}{\tang \alpha^2},$$

mithin:
$$\tang v.\ \tang m' = -1.$$

## §. 15.

Sind Figur 5 **MM'** und **LL'** zwei konjugirte Durchmesser, **MN** eine Tangente der Ellipse und **QK** eine Senkrechte aus dem Mittelpunkt der Ellipse auf die Tangente **MN** gefällt, so erkennt man jetzt leicht, daß auch **QK** lothrecht auf **LL'** steht; denn den Winkel **KQA** haben wir früher mit v und den Winkel **L'QA** mit m' bezeichnet. Noch leichter und unmittelbarer ergiebt sich dieses, wenn man auf die Werthe, welche wir im vorhergehenden und im 12. §en beziehlich für tang m' und tang v gefunden haben, zurückgeht.

Es hat also auch die sphärische Ellipse das mit der ebenen gemein, daß wenn man im Mittelpunkt des einen konjugirten Durchmessers ein Loth errichtet, dieses zugleich senkrecht auf den, an die Endpunkte des anderen konjugirten Durchmessers gezogenen Tangenten steht. Hierdurch ist, wie man leicht sieht, zugleich ein Mittel gegeben, auf eine höchst einfache Weise zu einem beliebigen Durchmesser den konjugirten zu konstruiren.

Da nun außer der von uns aufgefundenen Gleichung

$$\tang m\ \tang m' = -\frac{\tang \beta^2}{\tang \alpha^2}$$

auch die Gleichungen

$$\tang \alpha \tang \beta = \tang a \tang b \sin (m' - m) \text{ und}$$
$$\tang \alpha^2 + \tang \beta^2 = \tang a^2 + \tang b^2$$

stattfinden, wenn a und b die Hälften zweier konjugirten Durchmesser vorstellen, wie in §. 81

der anal. Sphärik mitgetheilt ist, so kann man von den sechs Größen $\alpha$, $\beta$, a, b, m und m', wenn deren drei gegeben sind, wie in der Planimetrie die übrigen drei berechnen.

Und überhaupt läßt sich die ganze Lehre von den konjugirten Durchmessern der sphärischen Kegelschnitte analytisch gerade so behandeln wie in der Planimetrie, was wir jedoch hier, da uns kein Raum mehr gestattet ist, übergehen müssen.

Den Schluß unserer Abhandlung möge die folgende Aufgabe bilden:

## §. 16.

Es sei Fig. 6 **ABA'B'** eine gleichseitige Zirkulare, so daß $\sin QA = \tan QB$, oder wenn man die beiden Halbachsen mit $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet: $\sin \alpha = \tan \beta$ ist; man soll die beiden konjugirten Durchmesser konstruiren, welche einander gleich sind.

Man beschreibe über der großen Achse **AA'** einen Halbkreis, welchen die verlängerte zweite Achse in **D** schneiden möge, verbinde **D** mit **A** und **A'**; die Punkte **E** und **F**, in welchen diese Verbindungslinien die Zirkulare schneiden, verbinde man ebenfalls mit **A** und **A'**; mache endlich Winkel $MQA = FA'A = m$ und Winkel $LQA = EAA' = w$: so sind **MM'** und **LL'** die verlangten konjugirten Durchmesser.

Nach §. 6 unserer Untersuchungen ist

$$\tan m . \tan FAA' = 1 \text{ und eben so}$$

$$\tan w . \tan EA'A = 1; \text{ mithin auch}$$

$$\tan m \tan w . \tan FAA' . \tan EA'A = 1;$$

nach §. 5 aber ist $$\tan FAA' \tan EA'A = \frac{1}{\cos \alpha^2};$$

also $$\tan m \tan w = \cos \alpha^2.$$

Da nun nach der Annahme $$1 = \frac{\tan \beta^2}{\sin \alpha^2}$$ ist, so hat

man auch $$\tan m \tan w = \frac{\tan \beta^2}{\tan \alpha^2}.$$

Nach der Konstruktion ist aber Winkel $AQL = w$ gemacht; mithin Winkel $L'QA$, oder $m' = 180^\circ - w$; also $\tan w = - \tan m'$. Substituirt man diesen Werth, so erhält man:

$$\tan m \tan m' = - \frac{\tan \beta^2}{\tan \alpha^2};$$

mithin sind nach §. 14 **MM'** und **LL'** ein Paar konjugirter Durchmesser. Daß dieselben einander gleich sind, erkennt man leicht.

T. I.

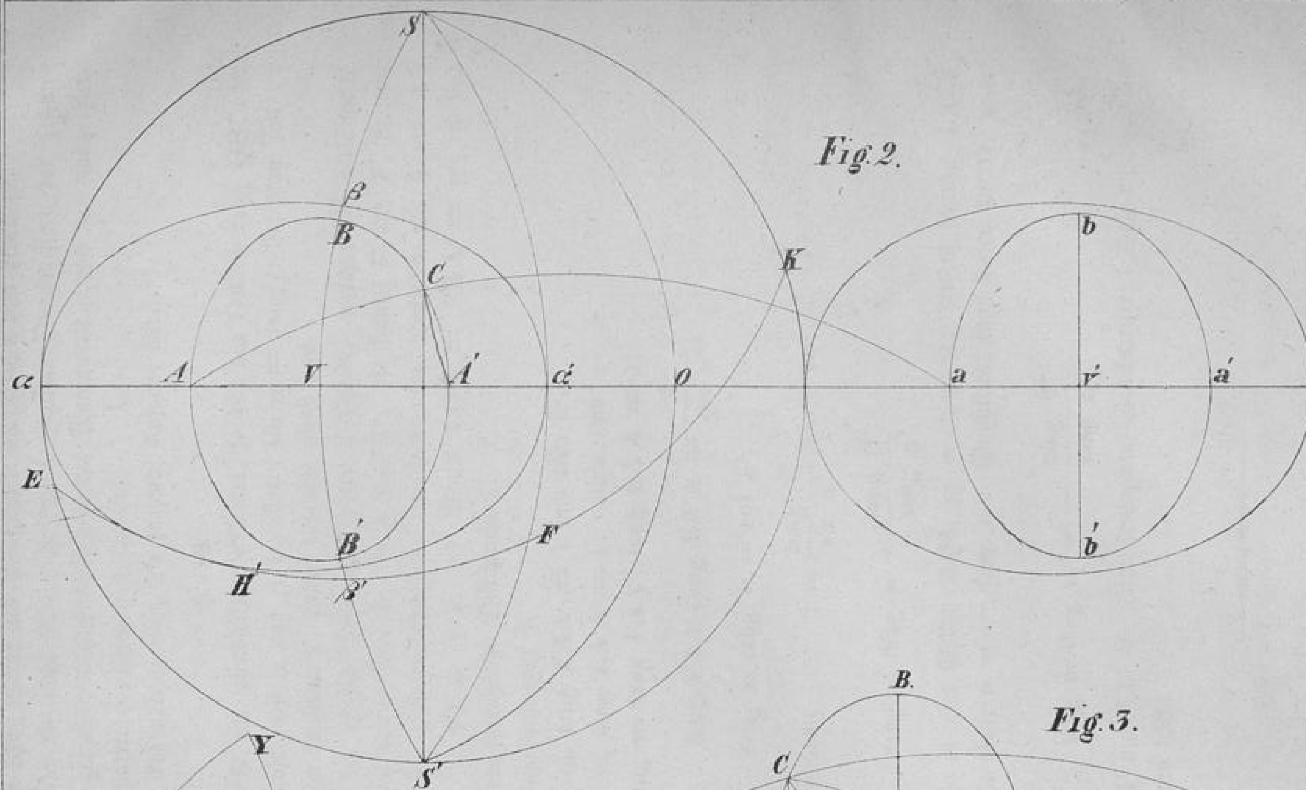


Fig. 2.

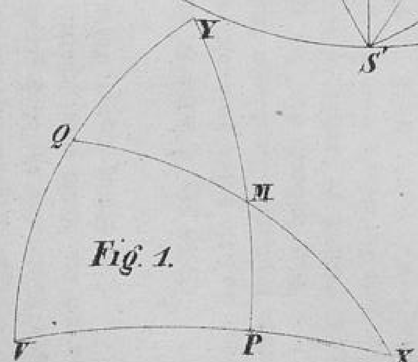


Fig. 1.

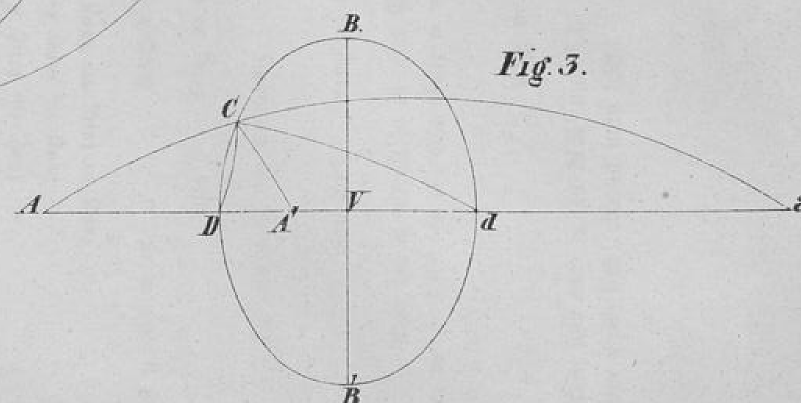


Fig. 3.

T. II.

Fig. 4.

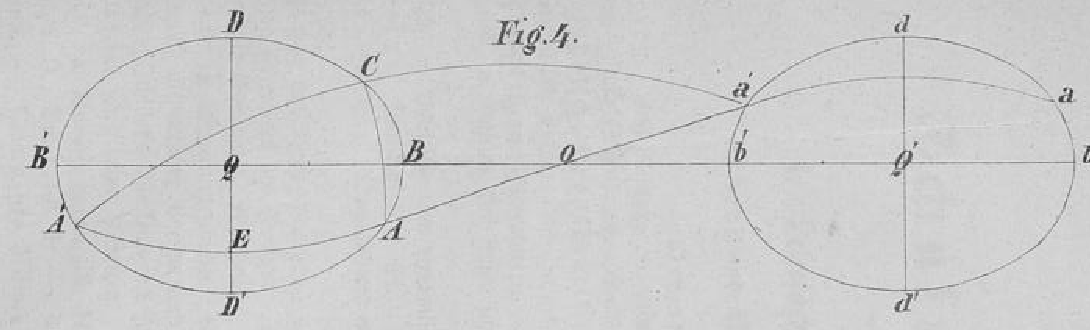


Fig. 5.

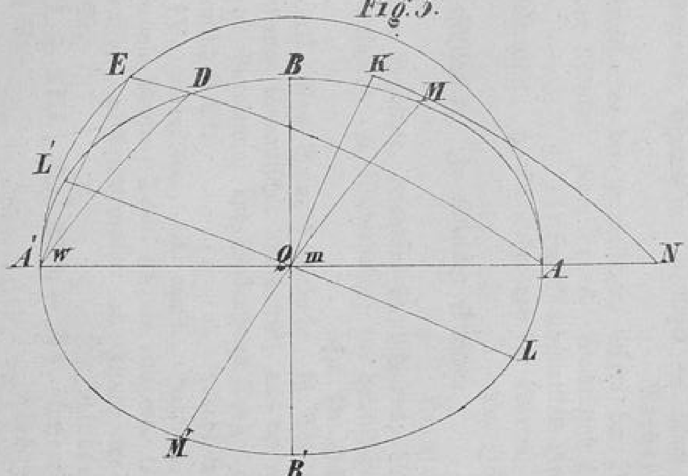


Fig. 6.