Elementare Ableitung einiger Hauptsätze über mechanische Arbeit und über das Potential.

Von Professor **Paul Herfel.**

1. Bewegt sich ein Massenpunkt um eine Strecke s unter dem Einflusse einer Kraft K in der Richtung der Kraft, so leistet die Kraft die Arbeit $k \cdot s$. Bewegt sich der Massenpunkt gegen die Richtung der Kraft, so wird entgegen der Wirkung der Kraft die Arbeit $k \cdot s$ geleistet. Im letzteren Falle tritt die Kraft als Bewegungshindernis auf. Man sagt dann auch, die Kraft erleidet die Arbeit $k \cdot s$ oder sie leistet die Arbeit $-k \cdot s$.

2. Die Kraft K wirke in einer Richtung L, in welcher sich der Massenpunkt m nicht bewegen kann (Fig. 1). Der Punkt werde gezwungen, sich in der Richtung L_1 zu bewegen. Dann kommt in Hinsicht der in der Wegrichtung L_1 geleisteten Arbeit nur die in diese Richtung fallende Seitenkraft P der Kraft K in Betracht. Die auf der Richtung senkrecht stehende Seitenkraft P_1 ist unwirksam. $mC = s$ sei die Strecke, um welche m bewegt wird, $mB = p$ ihre Projektion auf L_1, $mD = K$ die Kraft, $mE = P$ die allein wirksame Seitenkraft. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CmB und EmD folgt:

$$s : p = K : P, \quad \text{also} \quad P \cdot s = K \cdot p.$$

Hieraus folgt der Satz: Bewegt sich ein Massenpunkt nach einer anderen Richtung, als nach welcher die Kraft wirkt, so ist das Produkt aus der Strecke, welche der Punkt zurücklegt in diejenige Komponente der gegebenen Kraft, welche in diese Richtung fällt, gleich dem Produkt aus der Kraft und der Projektion der Strecke auf die Kraftrichtung.

Bewegt sich m in entgegengesetzter Richtung zu der Kraft P um s (Fig. 2), so erhält man dieselbe Gleichung. P ist aber in diesem Falle ein Bewegungshindernis, also negativ in die Rechnung einzuführen.

3. Ist A die auf der Strecke s von P geleistete Arbeit, so ist $A = P \cdot s$. Die Arbeit ist also gleich dem Produkte aus dem von dem Massenpunkte m zurückgelegten Wege s und der Projektion P der Kraft K auf die Richtung, in welcher sich m bewegt. Nach 2. ist aber auch $A = K \cdot p$.

Die Arbeit ist demnach auch gleich dem Produkte aus der Kraft K und der Projektion p des von dem Massenpunkte zurückgelegten Weges s auf die Richtung, in welcher die Kraft K wirkt.

4. Wir setzen voraus, daß die Kraft K, mit welcher zwei Massenpunkt m und m_1 aufeinander wirken, direkt proportional den Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r der Massenpunkte sei. Ist f die Kraft, mit welcher die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung auf die Masseneinheit wirkt, so ist

$$K = f \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2}.$$

f ist abhängig von der Wahl der Masseneinheit. Man kann die Masseneinheit so bestimmen, daß $f = 1$ wird. So ist z. B. die elektrostatische Einheit diejenige Elektrizitätsmenge, welche auf eine in der Einheit der Entfernung befindliche gleiche elektrische Menge eine Kraft = 1 ausübt (welche in der Entfernung 1 cm auf eine gleiche Menge die Kraft einer Dyne ausübt). In diesem Falle ist

$$k = \frac{m \cdot m_1}{r^2}.$$

5. Die Kraft K ändert sich mit der Entfernung. Wird die Masse m_1 durch die von der Masse m ausgehende Wirkung um die Strecke s in der Richtung der Kraftwirkung bewegt, so ist während dieser Bewegung die Kraft nicht konstant, sondern sie ist größer, wenn die Entfernung der beiden Massenpunkte kleiner ist. Ist s sehr klein, so können wir annehmen, daß auf der Strecke s eine Kraft mittlerer Stärke gewirkt habe, welche sich auf dieser Strecke nicht ändert. Wirkt z. B. ein fester Massenpunkt m auf einen beweglichen Massenpunkt m_1 in einer Entfernung r mit einer anziehenden Kraft $K_1 = 2$ Dyn und ist, nachdem sich m_1 in der Richtung der Kraftwirkung um die sehr kleine Strecke s auf m zu bewegt hat, die Kraft auf $K_2 = 4$ Dyn gewachsen, so können wir annehmen, daß auf der Strecke s eine Kraft $K_s = \frac{K_1 + K_2}{2} = 3$ Dyn gewirkt habe, d. h. wir machen keinen merklichen Fehler, wenn wir annehmen, daß anstatt einer Kraft, welche mit der Stärke 2 Dyn einsetzt und allmählich auf 4 Dyn wächst, eine Kraft gleich mit einer Stärke 3 Dyn einsetzt und gleich 3 Dyn bleibt. Der Fehler wird um so unmerklicher sein, je kleiner die Strecke s ist. Diese konstante Kraft wollen wir die mittlere Kraft nennen.

6. Berechnung der mittleren Kraft, welche längs einer sehr kleinen Strecke wirkt. Angenommen, der Massenpunkt befinde sich in C (Fig. 3), der Massenpunkt m_1 werde in der Richtung der von m ausgeübten Kraftwirkung um die sehr kleine Strecke $BB_1 = dr$ bewegt. Setzen wir $CB = r$ und $CB_1 = r_1$ und bezeichnen die in den Entfernungen r und r_1 wirkenden Kräfte bezüglich mit K und K_1, so ist

$$K = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{r^2} \qquad K_1 = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{r_1^2}.$$

Der mittlere Wert der Kraft für die Strecke dr ist

$$K_m = \frac{K + K_1}{2} = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{2} \cdot \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 \cdot r_1^2}.$$

Da nun $r_1 = r + dr$, so erhält man

$$K_m = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{2} \cdot \frac{r^2 + r^2 + 2\,r\,dr + dr^2}{r^2 \cdot r_1^2}.$$

dr ist sehr klein. Mithin kann dr^2 gegen die übrigen Größen des Zählers vernachlässigt werden. Also ist

$$K_m = \frac{f \cdot m \cdot m_1 (r^2 + r\,dr)}{r^2 \cdot r_1^2} = \frac{f \cdot m \cdot m_1 \cdot r(r + dr)}{r^2 \cdot r_1^2}.$$

Da nun $r + dr_1 = r$ ist, so ergibt sich für die mittlere Kraft der Wert

$$K_m = \frac{f m \cdot m_1}{r \cdot r_1}.$$

Über die Richtung, in welcher K_m wirkt, ist keine Voraussetzung gemacht. K_m kann in der Richtung von B_1 nach B oder in entgegengesetzter Richtung wirken.

7. K_m sei eine anziehende Kraft und wirke in der Richtung von B_1 nach C. Die anfängliche Entfernung $B_1 C$ werde mit r_1, die Entfernung BC werde mit r bezeichnet.

a) m_1 bewege sich nach C hin um die sehr kleine Strecke $B_1 B = dr$ (Fig. 3). Die für die Verschiebung der Masse m_1 um die Strecke dr geleistete Arbeit ist

$$A_1 = K_m \cdot dr = \frac{f\,m\,m_1}{r \cdot r_1}(r_1 - r)$$

oder

$$A_1 = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

b) m_1 bewege sich von C weg um die sehr kleine Strecke $B_1 B = dr$ (Fig. 4). Da der Massenpunkt entgegen der Wirkung der Kraft verschoben wird, so ist die geleistete Arbeit

$$A_2 = -K_m \cdot dr = -\frac{f m m_1}{r \cdot r_1}(r - r_1)$$

oder

$$A_2 = f m m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

In beiden Fällen ist also die geleistete Arbeit gleich dem Produkte aus $f m m_1$ multipliziert mit einer Differenz, in welcher der Minuendus gleich dem reziproken Werte der Endentfernung der Bewegung, der Subtrahendus gleich dem reziproken Wert der Anfangsentfernung der Bewegung ist.

8. Die zwischen m und m_1 wirkende Kraft sei eine abstoßende Kraft.

a) Der Massenpunkt m_1 bewege sich in der Richtung der Kraftwirkung von B_1 nach B (Fig. 4). Die geleistete Arbeit ist

$$A_1 = K_m \cdot dr = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{r \cdot r_1}(r - r_1) = -f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

b) Bewegt sich der Massenpunkt m_1 der Wirkung der Kraft entgegen von B_1 nach B (Fig. 3), so ist die geleistete Arbeit

$$A_2 = -K_m \cdot dr = -\frac{f \cdot m \cdot m_1}{r \cdot r_1}(r_1 - r) = -f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Wirkt also zwischen m und m_1 eine abstoßende Kraft, so ist die geleistete Arbeit gleich dem negativen Produkte aus $f m m_1$ mit einer Differenz, in welcher der Minuendus gleich dem reziproken Werte der Endentfernung der Bewegung, der Subtrahendus gleich dem reziproken Werte der Anfangsentfernung der Bewegung ist.

9. Die zwischen m und m_1 wirkende Kraft sei wieder eine anziehende. m_1 bewege sich aber nicht in der Richtung $B_1 C$, sondern in einer anderen Richtung um die sehr kleine Strecke $B_1 D = ds$. Die Projektion von ds auf $B_1 C$ sei $B_1 B = dr$. Die Anfangsentfernung $B_1 C$ setzen wir $= r_1$, die Endentfernung $DC = r$ und die Entfernung $BC = \varrho$.

a) $\angle CB_1 D$ sei ein spitzer Winkel (Fig. 5). m_1 bewege sich also in der Richtung der wirksamen Komponente P der auf der Strecke dr wirkenden mittleren Kraft K_m. Die von P geleistete Arbeit ist dann nach 2.

$$A_1 = P \cdot ds = K_m \cdot dr = \frac{f \cdot m \cdot m_1}{\varrho \cdot r_1}(r_1 - \varrho) = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Da die Punkte D und B sehr nahe liegen, so kann man $\varrho = r$ setzen. Also ist

$$A_1 = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

b) $\angle CB_1 D$ sei ein stumpfer Winkel (Fig. 6). m_1 bewege sich also in entgegengesetzter Richtung der wirksamen Komponente P der mittleren Kraft K_m um die Strecke ds. Die entgegen der Kraft P geleistete Arbeit ist dann nach 2.

$$A_2 = -P \cdot ds = -K_m \cdot dr = -\frac{f \cdot m \cdot m_1}{\varrho \cdot r_1}(\varrho - r_1) = +f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_1}\right)$$

oder, da $\varrho = r$

$$A_2 = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

c) Ist $B_1 D \perp CB$, so ist die Komponente der von m auf m_1 ausgeübten Wirkung $= 0$. Es wird also bei dieser Bewegung, soweit die Anziehung der Masse m auf m_1 in Frage kommt, weder von dieser Arbeit geleistet, noch muß entgegen dieser Wirkung Arbeit geleistet werden. Wir können auch in diesem Falle, da $r_1 = r$, also $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = 0$ ist, die Arbeit A_3 durch die Gleichung ausdrücken

$$A_3 = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Das Ergebnis der Rechnung führt also wieder zu dem in 7. angegebenen Satze.

10. Ist die Kraft eine abstoßende, so ergibt sich unter Beibehaltung der in 9. eingeführten Bezeichnungen für die auf der Strecke ds geleistete Arbeit

$$A = -f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Gleichung hat Gültigkeit, wenn m_1 in der Richtung der abstoßenden Kraft sich bewegt, oder gegen dieselbe bewegt wird. Im ersten Falle ist $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}$ negativ, im zweiten Falle positiv.

Der in 8. angegebene Satz findet also auch Anwendung, wenn m_1 sich in einer anderen Richtung bewegt, als nach welcher die Kraft K_m wirkt.

11. Die Kraft sei eine anziehende. Der Massenpunkt m befinde sich in C und der Massenpunkt m_1 werde von B_n nach B längs einer Linie bewegt, welche nicht mehr unendlich klein ist und beliebig gekrümmt sein kann. Bei dieser Bewegung wird von der anziehenden Kraft Arbeit geleistet, solange bei der Bewegung die Entfernung zwischen m und m_1 kleiner wird. Auf den Teilen der Linie $B_n B$, wo die Entfernung größer wird, leistet die Kraft eine negative Arbeit. Um die gesamte bei dieser Bewegung aufgewendete Arbeit zu berechnen, zerlegen wir die Strecke $B_n B$ in unendlich viele unendlich kleine Wegstrecken $B_n B_{n-1}$, $B_{n-1} B_{n-2} \ldots B_1 B$. Die Entfernungen der Teilpunkte von m seien r_n, r_{n-1}, $r_{n-2} \ldots r_1$, r und die auf den sehr kleinen Teilstrecken geleisteten Arbeiten seien A_n, $A_{n-1} \ldots A_1$ (Fig. 7). Dann ist nach 9.

$$\begin{aligned}
A_n &= f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right)\\
A_{n-1} &= f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r_{n-2}} - \frac{1}{r_{n-1}}\right)\\
&\vdots\\
A_2 &= f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\\
A_1 &= f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).
\end{aligned}$$

Mithin die ganze Arbeit

$$A = A_n + A_{n-1} + \ldots A_2 + A_1 = f \cdot m \cdot m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right).$$

Der in 7. angeführte Satz gilt also auch für die auf jeder beliebigen Wegstrecke geleistete Arbeit. Ist die anfängliche Entfernung $r_n > r$, so ist $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$ positiv, im entgegengesetzten Falle negativ.

12. Ist die zwischen m und m_1 wirkende Kraft eine abstoßende, so ergibt sich durch eine ähnliche Untersuchung wie in 11., daß, soweit die von m auf m_1 ausgeübte Wirkung in Frage kommt, die auf einer beliebigen Wegstrecke $B_n B$ geleistete Arbeit $A = -f m m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$ ist.

Der in 8. angeführte Satz gilt also auch für die Arbeit auf einer Wegstrecke von beliebiger Länge und Gestalt.

13. Wirkt zwischen m und m_1 eine anziehende Kraft und wird m_1 aus dem Unendlichen bis zu einem Punkte bewegt, welcher von m die Entfernung r hat, so ist die dabei von der anziehenden Kraft geleistete Arbeit nach 11.

$$f m m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{f m m_1}{r}.$$

Wird m_1 aus der Entfernung r bis ins Unendliche bewegt, so ist die Arbeit, welche entgegen der anziehenden Kraft geleistet wird, nach 11.

$$f m m_1 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{f m m_1}{r}.$$

Ist die Kraft zwischen m und m_1 eine abstoßende, so ist die bei der Bewegung des Massenpunktes m_1 aus der Entfernung r bis ins Unendliche geleistete Arbeit nach 12.

$$-f m m_1 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right) = \frac{f m m_1}{r}.$$

Die bei der Bewegung des Massenpunktes m_1 aus dem Unendlichen bis in die Entfernung r entgegen der Abstoßung geleistete Arbeit ist nach 12.

$$-f m m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{f m m_1}{r}.$$

14. Der Punkt m habe vom Anfangspunkte B der sehr kleinen Strecke ds die Entfernung r und vom Endpunkte C dieser Strecke die Entfernung r' (Fig. 8 und 9). Beschreiben wir um m mit r' den Kreis, welcher mB (Fig. 8) oder die Verlängerung von mB über B hinaus (Fig. 9) in D schneide, so kann CD, da C und D sehr nahe liegen, als gerade Linie angesehen werden; mD als Radius steht senkrecht auf CD. Es ist also BD die Projektion von ds auf r. Bezeichnen wir BD mit dr, so ist, da $mD = r'$ ist,

a) $r = r' + dr$, wenn $r > r'$ (Fig. 8), b) $r = r' - dr$, wenn $r < r'$ (Fig 9).

Sind also r und r' die Entfernungen eines Punktes m von den Endpunkten einer sehr kleinen Strecke ds und ist dr die Projektion von ds auf r, so ist r gleich der Summe oder Differenz aus r' und dr, je nachdem $r >$ oder $< r'$ ist. Es ist also

$$\frac{m}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m(r - r')}{r \cdot r'} = \frac{m(r' \pm dr - r')}{r \cdot r'} = \pm \frac{m \cdot dr}{r \cdot r'}.$$

15. Die Masse μ stehe unter Einwirkung der Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ Der Massenpunkt μ werde in der Geraden L um die sehr kleine Strecke $BC = ds$ bewegt (Fig. 10). Der Punkt μ befinde sich anfangs in B, die Entfernungen des Punktes B von $m_1, m_2, m_3 \ldots$ seien $r_1, r_2, r_3 \ldots$ Der Endpunkt C der Strecke ds habe von $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die Entfernungen $r_1', r_2', r_3' \ldots$ und $dr_1, dr_2, dr_3 \ldots$ seien die Projektionen von ds auf $r_1, r_2, r_3 \ldots$ Die von $m_1, m_2, m_3 \ldots$ auf μ ausgeübten mittleren Kräfte, welche μ bezüglich um die sehr kleinen Strecken $dr_1, dr_2, dr_3 \ldots$ zu bewegen suchen, seien $K_1, K_2, K_3 \ldots$ und die Projektionen dieser Kräfte auf die Gerade L seien $P_1, P_2, P_3 \ldots$

Da die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ auf derselben Geraden liegen, so ist ihre Resultierende

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

Die Kräfte, welche der Bewegung des Massenpunktes μ von B nach C entgegenwirken, sind negativ zu setzen.

Die bei der Bewegung des Massenpunktes μ auf der Strecke ds geleistete Arbeit ist

$$W = P_0 \cdot ds.$$

Bezeichnen wir die Arbeiten, welche bei der Bewegung des Punktes μ aus dem Unendlichen bis B von den von $m_1, m_2, m_3 \ldots$ ausgeübten Kräften geleistet werden, bezüglich mit $A_1, A_2, A_3 \ldots$, so ist nach 13.

$$A_1 = \frac{f \cdot m_1 \cdot \mu}{r_1}, \quad A_2 = \frac{f \cdot m_2 \cdot \mu}{r_2}, \quad A_3 = \frac{f \cdot m_3 \cdot \mu}{r_3} \ldots$$

Die Vorzeichen sind positiv oder negativ, je nachdem die Bewegung im Sinne der wirkenden Kraft oder entgegen der Kraft geschieht.

Die Gesamtarbeit ist also

$$U = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = f \cdot \mu \cdot \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots\right).$$

In gleicher Weise findet man, daß, wenn μ aus dem Unendlichen bis C gebracht wird, die Gesamtarbeit der von m_1, m_2, $m_3 \ldots$ auf μ ausgeübten Kräfte ist

$$U_1 = f \cdot \mu \cdot \left(\frac{m_1}{r_1'} + \frac{m_2}{r_2'} + \frac{m_3}{r_3'} + \ldots\right).$$

Folglich ist $\quad U_1 - U = f \cdot \mu \cdot \left[\left(\frac{m_1}{r_1'} - \frac{m_1}{r_1}\right) + \left(\frac{m_2}{r_2'} - \frac{m_2}{r_2}\right) + \left(\frac{m_3}{r_3'} - \frac{m_3}{r_3}\right) + \ldots\right].$

Nach 14. ist $\quad \frac{m_1}{r_1'} - \frac{m_1}{r_1} = \frac{m_1 \cdot d\,r_1}{r_1\,r_1'}, \quad \frac{m_2}{r_2'} - \frac{m_2}{r_2} = \frac{m_2 \cdot d\,r_2}{r_2\,r_2'}, \quad \frac{m_3}{r_3'} - \frac{m_3}{r_3} = \frac{m_3 \cdot d\,r_3}{r_3\,r_3'} \ldots$

Es ist also $\quad U_1 - U = \frac{f \cdot \mu \cdot m_1 \cdot d\,r_1}{r_1 \cdot r_1'} + \frac{f \cdot \mu \cdot m_2 \cdot d\,r_2}{r_2 \cdot r_2'} + \frac{f \cdot \mu \cdot m_3 \cdot d\,r_3}{r_3 \cdot r_3'} + \ldots$

Nach 6. ist $\quad K_1 = \frac{f \cdot \mu \cdot m_1}{r_1 \cdot r_1'}, \quad K_2 = \frac{f \cdot \mu \cdot m_2}{r_2 \cdot r_2'}, \quad K_3 = \frac{f \cdot \mu \cdot m_3}{r_3 \cdot r_3'} \ldots$

Mithin $\quad U_1 - U = K_1 \cdot d\,r_1 + K_2 \cdot d\,r_2 + K_3 \cdot d\,r_3 + \ldots$

Nach 2. ist $\quad K_1 \cdot d\,r_1 = P_1 \cdot d\,s, \quad K_2 \cdot d\,r_2 = P_2 \cdot d\,s, \quad K_3 \cdot d\,r_3 = P_3 \cdot d\,s \ldots$

also $\quad U_1 - U = d\,s(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) = P_0 \cdot d\,s.$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\text{a) } P_0 = \frac{U_1 - U}{d\,s}, \qquad \text{b) } W = U_1 - U.$$

Wird also ein Massenpunkt μ, welcher unter der Einwirkung beliebiger vieler Massenpunkte steht, längs einer sehr kleinen Strecke ds bewegt, so ist die geleistete Arbeit gleich einer Differenz, deren Minuendus gleich der Arbeit ist, die geleistet wird, um den Massenpunkt μ aus dem Unendlichen bis zum Endpunkt der Wegstrecke zu bringen und deren Subtrahendus gleich der Arbeit ist, die geleistet wird, um den Massenpunkt μ aus dem Unendlichen bis zum Anfangspunkt der Wegstrecke zu bringen. Der Quotient aus dieser Differenz und der Strecke ds ist gleich der auf der Strecke wirkenden Kraft.

16. Der Massenpunkt μ werde auf einer Linie BB_n bewegt, die nicht mehr unendlich klein ist und beliebig gekrümmt sein kann (Fig. 7). Wir teilen BB_n in unendlich viele sehr kleine Strecken BB_1, $B_1B_2 \ldots B_{n-2}B_{n-1}$, $B_{n-1}B_n$. Die Arbeiten, welche geleistet werden, um μ längs dieser Wegelemente von B aus zu bewegen, seien bezüglich A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$, A_n.

Dann ist die Gesamtarbeit, welche geleistet wird, um μ von B nach B_n zu bewegen

$$A = A_1 + A_2 + \ldots A_{n-1} + A_n.$$

Bezeichnen wir mit U, U_1, $U_2 \ldots U_{n-2}$, U_{n-1}, U_n die Arbeiten, welche nötig sind, um μ aus dem Unendlichen bezüglich zu den Punkten B, B_1, $B_2 \ldots B_{n-2}$, B_{n-1}, B_n zu bringen, so ist nach 15.

$$A_1 = U_1 - U, \qquad A_2 = U_2 - U_1, \qquad \ldots A_{n-1} = U_{n-2} - U_{n-1}, \qquad A_n = U_n - U_{n-1},$$

also $\quad A = U_n - U.$

Wird der Massenpunkt μ von B nach B_n nicht auf dem Wege $BB_1B_2 \ldots B_n$, sondern auf einem anderen Wege $BB_1'B_2' \ldots B_n$ bewegt (Fig. 7), so wird an dem Endergebnis nichts geändert.

Wir gelangen also zu dem Satz: **Wird ein Massenpunkt μ von einem Punkte B nach einem anderen Punkte B_n bewegt, so ist die bei der Bewegung geleistete Arbeit gleich der Differenz der Arbeiten, die geleistet werden müssen, um den Massenpunkt μ aus dem Unendlichen bis zum End- und Anfangspunkte der Bewegung zu schaffen. Die Arbeit ist unabhängig von dem Wege, auf welchem die Bewegung des Punktes μ stattgefunden hat.**

17. Denken wir uns die Strecke s, auf welcher der Punkt μ von B nach B_n bewegt worden ist, in n sehr kleine, aber untereinander gleiche Wegelemente ds zerlegt und bezeichnen wir die längs der einzelnen Wegelemente wirkenden Kräfte mit $P_1, P_2 \ldots P_n$, so ist nach 15.

$$P_1 = \frac{U_1 - U}{ds}, \quad P_2 = \frac{U_2 - U_1}{ds}, \quad \ldots P_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{ds}.$$

In diesen Gleichungen haben $U, U_1 \ldots U_n$ die in 16. angegebenen Bedeutungen. Aus den vorhergehenden Gleichungen folgt

$$(P_1 + P_2 + \ldots P_n) \cdot ds = U_n - U.$$

Bestimmen wir R aus der Gleichung $R = \frac{P_1 + P_2 + \ldots P_n}{n}$, so können wir R als eine Kraft ansehen, welche gleich dem algebraischen Mittel der sehr vielen verschiedenen Kräfte P ist. Wir erhalten dann

$$R \cdot n \cdot ds = U_n - U.$$

Nun ist $n \cdot ds = s$, also

$$R \cdot s = U_n - U$$

$$R = \frac{U_n - U}{s}.$$

Wird also ein Massenpunkt μ längs einer Wegstrecke s bewegt, so ist die Kraft, welche gleich dem algebraischen Mittel der auf der Strecke wirkenden Einzelkräfte ist, gleich der Differenz der Arbeiten, die geleistet werden müssen, um den Massenpunkt μ aus dem Unendlichen bis zu dem End- und Anfangspunkt der Wegstrecke zu schaffen, dividiert durch die Länge der Wegstrecke.

18. Ist $U_n = U$, so ist $A = 0$. Es ist also keine Arbeit nötig, um den Massenpunkt μ von B nach B_n zu schaffen, wenn die Arbeiten, welche erforderlich sind, um den Massenpunkt aus dem Unendlichen bis zu den Punkten B und B_n zu schaffen, einander gleich sind.

19. Die Arbeit, die geleistet werden muß, um einen Punkt von der Masse 1 aus dem Unendlichen in einen bestimmten Punkt zu bringen oder um aus diesem Punkte die Masse 1 ins Unendliche zu bringen, nennt man das Potential in diesem Punkte. Das Potential von B (Fig. 10) ist also nach 15.

$$V = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots\right) = f \sum \frac{m}{r}.$$

Das Potential erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Bewegung im Sinne der Kraftwirkung oder entgegen derselben erfolgt.

20. Die Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen Punkt von der Masse μ nach B (Fig. 10) zu bringen, ist nach 15.

$$U = f \cdot \mu \cdot \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots\right).$$

Nach 19. ist also $U = \mu \cdot V$.

Um also eine Masse μ aus dem Unendlichen nach einem Punkte zu bringen, ist eine Arbeit erforderlich, welche gleich dem μfachen Potential der Stelle ist, bis zu welcher μ gebracht werden soll.

21. Wird die Masse $\mu = 1$ längs einer Wegstrecke s bewegt und ist das Potential des Endpunktes V_n, das Potential des Anfangspunktes V, so ist die längs der Strecke s geleistete Arbeit nach 16.

$$A = V_n - V$$

und die auf der Strecke s wirkende mittlere Kraft nach 17.

$$P = \frac{V_n - V}{s}.$$

Den Quotienten $\frac{V_n - V}{s}$ nennt man Potentialgefälle. Je größer das Potentialgefälle, um so größer ist die wirkende Kraft.

22. Unter einer Niveaufläche oder Fläche gleichen Potentials versteht man eine Fläche, deren Punkte sämtlich dasselbe Potential haben. Die Richtung, nach welcher eine Kraft auf einen Massenpunkt wirkt, nennt man Kraftlinie.

23. Um einen Massenpunkt von einem Punkte einer Niveaufläche nach einem anderen Punkte derselben Fläche zu bringen, ist keine Arbeit erforderlich. MN (Fig. 11) sei eine Niveaufläche, A und B seien zwei Punkte derselben und U_1 und U die Arbeiten, welche geleistet werden, um einen Massenpunkt μ aus dem Unendlichen bezüglich bis A und B zu bringen. Die Arbeit, welche geleistet werden muß, um den Massenpunkt μ von B nach A zu bringen, ist nach 16.

$$W = U_1 - U.$$

Ist V_1 das Potential von A, und V das Potential von B, so ist nach 20. $U_1 = \mu V_1$ und $U = \mu V$, also

$$W = \mu \cdot (V_1 - V).$$

Da aber $A = B$ Punkte einer Niveaufläche sind, so ist $V_1 = V$, also

$$W = 0.$$

24. Die Kraftlinien stehen senkrecht auf den Niveauflächen.

MN (Fig. 11) sei eine beliebige Niveaufläche, XY eine Kraftlinie, welche MN in A schneide. Die Richtung der im Punkte A wirkenden Kraft P ist tangential zu der Kraftlinie. Angenommen die Kraftlinie schneide MN nicht senkrecht, dann steht auch P nicht senkrecht zu MN und es gibt eine Komponente P_1, welche Tangente zur Niveaufläche ist, also mit derselben zwei sehr nahe Punkte A und A_1 gemeinsam hat. Wollte man nun einen Massenpunkt μ auf AA_1 entgegen der Wirkung von P_1 bewegen, so müßte Arbeit geleistet werden. Nach 22. ist aber keine Arbeit erforderlich, um einen Massenpunkt auf einer Niveaufläche zu verschieben.

25. Es seien X_1 und X zwei benachbarte Punkte einer Fläche und die Masse μ stehe unter der Einwirkung beliebiger Massenpunkte $m_1, m_2 \ldots$ U_1 und U seien die Arbeiten, um μ aus dem Unendlichen bezüglich nach X_1 und X zu bringen, dann wirkt längs der Strecke $XX_1 = ds$ eine Kraft $P_0 = \frac{U_1 - U}{ds}$. Sind V_1 und V_2 die Potentiale in den Punkten X_1 und X, so ist nach 20. $P_0 = \frac{\mu \cdot (V_1 - V)}{ds}$. Die Kraft ist nur dann gleich Null, wenn $V_1 = V$ ist. Steht also eine Fläche unter der Einwirkung beliebig vieler Massenpunkte, so wird ein Massenpunkt μ, welcher gezwungen ist auf der Fläche zu bleiben, an allen Punkten der Fläche nur dann in Ruhe sein, wenn die Fläche in jedem ihrer Punkte dasselbe Potential hat. Hieraus folgt: Können beliebig viele Massenpunkte sich nur auf einer Fläche bewegen und sind dieselben ihrer eigenen Wirkung oder noch der Wirkung anderer Massenpunkte unterworfen, so wird auf der Fläche erst dann ein Gleichgewichtszustand herrschen können, wenn das Potential an allen Stellen dasselbe ist.

26. Aus den Gleichungen in 15. und mit Beibehaltung der dort angegebenen Bezeichnungen folgt $P_0 = \frac{U_1 - U}{ds} = \frac{K_1 \cdot dr_1 + K_2 \cdot dr_2 + K_3 \cdot dr_3 \cdot \ldots}{ds}$. Also ist $P_0 \cdot ds = K_1 \cdot dr_1 + K_2 \cdot dr_2 + K_s \cdot dr_s \ldots$ Halten sich die Kräfte K_1, $K_2 \ldots$ gegenseitig das Gleichgewicht, so ist $P_0 = 0$ für jede durch μ gezogene Richtung. Die Kräfte können dann keine Änderung des Bewegungszustandes von μ hervorbringen, sie können also keine Arbeit leisten. Besitzt nun aber der Massenpunkt μ schon eine Bewegung, infolge deren er die Strecke ds zurücklegt, oder greift von außen her eine Kraft ein, welche nicht zu den von m_1, $m_2 \ldots$ ausgeübten Wirkungen gehört, und bewegt μ um ds, so werden die Kräfte gleichsam gezwungen, einzeln Arbeit zu leisten. Man nennt solche Arbeiten virtuelle Arbeiten. Diese einzelnen Arbeiten sind aber nach 2. $K_1 \cdot dr_1$, $K_2 \cdot dr_2$, $K_3 \cdot dr_3 \ldots$ und da $P_0 = 0$ ist, so folgt aus obiger Gleichung $K_1 \cdot dr_1 + K_2 \cdot dr_2 + K_3 \cdot dr_3 + \ldots = 0$. Es entsprechen den nach irgend einer Richtung geleisteten Arbeiten gleich viele in entgegengesetzter Richtung geleistete Arbeiten. Also gilt der Satz: **Die Summe der virtuellen Arbeiten beliebig vieler, an einem Körper im Gleichgewicht stehender Kräfte ist gleich Null.**

27. **Anziehung einer homogenen Kugelschale auf einen außerhalb liegenden Massenpunkt.**

Im Punkt P befinde sich eine Masse μ. Der Abstand derselben vom Mittelpunkt C der Schale sei $= a$ (Fig. 12). Führen wir durch die Kugelschale zwei einander sehr nahe zu PC senkrechte Schnitte $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, so schneiden dieselben aus der Schale eine Zone heraus, welche als ein zylindrischer Ring betrachtet werden kann. Bezeichnen wir den äußeren Halbmesser OA_1 derselben mit ϱ, die Dicke der Schale mit δ, die Breite $A_1 A_2$ mit h, den Radius mit v, so ist

$$v = \varrho^2 \cdot \pi \cdot h - (\varrho - \delta)^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Vernachlässigen wir die unendlich kleine Größe zweiter Ordnung δ^2, so ist

$$v = 2\varrho \cdot \delta \cdot h \cdot \pi.$$

Die Dichtigkeit der Schale, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Masse sei $= \sigma$. Die in dem Zonenringe enthaltene Masse m erhalten wir, wenn wir das Volumen v mit σ multiplizieren. Also ist

$$m = 2\varrho \cdot \delta \cdot h \cdot \pi \cdot \sigma.$$

$A_1 P$ sei $= e$ und $\angle A_1 PC = \alpha$. Der Ring ist unendlich schmal, wir können also die Entfernung jedes Punktes des Ringes von P mit e bezeichnen. Der Ring ist ferner sehr dünn. Die Verbindungslinie jedes Punktes desselben mit P bildet also mit CP einen Winkel $= \alpha$. Bezeichnen wir die Massenpunkte auf einer Hälfte des Zonenringes mit μ_1, $\mu_2 \ldots$ und fällen von diesen Punkten Lote auf CP, so erhalten wir, wenn wir diese Lote um sich selbst verlängern, auf der anderen Hälfte des Zonenringes zu jedem Punkte μ einen entsprechenden Punkt ν. Der Punkt μ_1 übe auf m eine Anziehung p_1, und der entsprechende Punkt ν_1 übe auf m eine Anziehung q_1 aus. Wir sehen voraus, daß die Kräfte proportional den Massen und umgekehrt proportional den Entfernungen sind. Da die Kugelschale homogen ist, so haben μ_1 und ν_1 gleiche Massen, ihre Entfernungen von μ sind ebenfalls gleich, mithin ist $p_1 = q_1$. Ferner liegen die Kräfte p_1 und q_1 entgegengesetzt zu CP und bilden mit CP denselben $\angle \alpha$. Zerlegen wir also p_1 in zwei Komponenten u_1 und t_1 und q_1 in zwei Komponenten s_1 und ω_1, von denen u_1 und s_1 in die Richtung PC fallen und t_1 und ω_1 senkrecht zu PC stehen, so heben sich die Komponenten t_1 und ω_1 auf und es bleiben nur übrig die beiden Komponenten

$$u_1 = p_1 \cos \alpha \quad \text{und} \quad s_1 = q_1 \cdot \cos \alpha.$$

Bezeichnen wir die Kräfte, welche von den Massenpunkten μ_2, $\mu_3 \ldots$ und von den Massenpunkten ν_2, $\nu_3 \ldots$

auf μ ausgeübt werden bezüglich mit $p_2, p_3 \ldots q_2, q_3 \ldots$ und ihre allein übrig bleibenden in die Richtung PC fallenden Komponenten mit $u_2, u_3 \ldots s_2, s_3 \ldots$, so ist

$$\begin{aligned} u_2 &= p_2 \cdot \cos\alpha \qquad & s_2 &= q_2 \cdot \cos\alpha \\ u_3 &= p_3 \cdot \cos\alpha & s_3 &= q_3 \cdot \cos\alpha \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Die Gesamtanziehung K des Zonenringes ist also

$$K = (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots) \cdot \cos\alpha.$$

Nennen wir die Anziehung, welche zwei der Einheit gleiche Massen in der Entfernungseinheit aufeinander ausüben, f, so ist

$$p_1 = \frac{f\mu\mu_1}{e^2}, \quad p_2 = \frac{f\mu\mu_2}{e^2} \ldots \quad q_1 = \frac{f\mu\nu_1}{e^2}, \quad q_2 = \frac{f\mu\nu_2}{e^2},$$

also
$$K = \frac{f\mu}{e^2}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \nu_1 + \nu_2 + \ldots)\cos\alpha.$$

$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \nu_1 + \nu_2 + \ldots$ ist gleich der Gesamtmasse des Ringes, die wir mit m bezeichnet haben. Folglich ist

$$K = \frac{f\mu m}{e^2} \cdot \cos\alpha.$$

Setzen wir in dieser Gleichung den früher für m gefundenen Wert ein, so ist

$$K = \frac{f \cdot \mu \cdot 2\varrho \cdot \delta \cdot h \cdot \pi \cdot \sigma}{e^2} \cdot \cos\alpha.$$

Bezeichnen wir den Radius der Kugelschale CA_1 mit r, den $\angle A_1CP$, welchen die von C nach dem Umfange des Schnittkreises A_1B_1 gezogenen Radien mit CP bilden, mit ϑ und die Breite der Zone in Winkelmaß mit $d\vartheta$, so ist

$$h = r \cdot d\vartheta, \quad \varrho = r \cdot \sin\vartheta, \quad \cos\alpha = \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2ae^2}.$$

Folglich ist
$$K = \frac{f \cdot \mu \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot \delta \cdot r \cdot d\vartheta \cdot \pi \cdot \sigma}{e^2} \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a \cdot e}$$

oder, indem wir passender ordnen,

$$K = f \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \mu}{a} \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{e^3}.$$

Führen wir parallel zu A_2B_2 einen dritten sehr nahen Schnitt A_3B_3 durch die Kugelschale, so erhalten wir eine zweite zu $A_1A_2B_1B_2$ benachbarte Kugelzone $A_2B_2A_3B_3$, deren Punkte von P den Abstand $e + de$ haben mögen, wo de eine sehr kleine Größe ist. Es ist dann

$$(e + de)^2 = a^2 + r^2 - 2a \cdot r \cdot \cos(\vartheta + d\vartheta)$$

$$e^2 + 2e \cdot de + de^2 = a^2 + r^2 - 2a \cdot r(\cos\vartheta \cos d\vartheta - \sin\vartheta \sin d\vartheta).$$

Da $d\vartheta$ und de unendlich klein sind, so ist

$$de^2 = 0, \quad \cos d\vartheta = 1, \quad \sin d\vartheta = d\vartheta.$$

Wir erhalten also die Gleichung: $2e \cdot de = a^2 + r^2 - e^2 - 2a \cdot r \cdot (\cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot d\vartheta)$.

Da ferner $e^2 = a^2 + r^2 - 2a \cdot r \cdot \cos\vartheta$ ist, so ergibt sich

$$2e \cdot de = 2a \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$$

$$\sin\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{e}{ar} \cdot de.$$

Die Anziehung K des Zonenringes ist also

$$K = f \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \mu}{a} \cdot \frac{e \cdot de}{a r} \cdot \frac{e^2 + a^2 - r^2}{e^3}$$

oder

$$K = f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \sigma \cdot \delta \cdot \mu}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) \cdot de.$$

Bevor wir zur Berechnung der Anziehung der ganzen Kugelschale übergehen, soll noch folgende Bemerkung vorausgeschickt werden. Denken wir uns aus einer Seite e, die nicht unendlich klein ist, ein Quadrat konstruiert und ein Rechteck aus e und einer unendlich kleinen Seite de, so ist der Flächeninhalt $e \cdot de$ des unendlich schmalen Rechtecks im Vergleich zu dem Flächeninhalt e^2 des Quadrates unendlich klein. In allgemeinerer Fassung können wir sagen: Wenn eine Größe e einen endlichen Wert hat, de unendlich klein ist, so kann in der Summe $e^2 + e \cdot de$ der Summand $e \cdot de$ vernachlässigt werden. Daher ist

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e + de} = \frac{de}{e^2 + e \cdot de} = \frac{de}{e^2}.$$

Wir teilen die Kugelschale durch unendlich viele sehr nahe Schnitte senkrecht zu CP in Zonen (Fig. 13) und bezeichnen die Abstände der Zonen von P mit $e_1, e_2 \ldots e_{n-1}$ und die Entfernung des Punktes E, in welchem die Verlängerung von PC über C die Schalen schneidet, mit e_n, wo n eine unendlich große Zahl ist. Die unendlich kleinen Unterschiede der aufeinander folgenden Entfernungen seien $de_1, de_2 \ldots$ Dann ist

$$e_2 - e_1 = de_1, \quad e_3 - e_2 = de_2, \ldots \quad e_n - e_{n-1} = de_{n-1}.$$

Bezeichnen wir die Anziehungen der aufeinander folgenden Zonen mit $K_1, K_2 \ldots K_n$ und setzen wir den in den Formeln für die Anziehungen der Zonen konstanten Faktor $\frac{f \pi r \delta \sigma \mu}{a^2} = c$, so ist

$$\begin{aligned}
K_1 &= c \cdot \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e_1^2}\right) \cdot de_1 = c \cdot de_1 + c \cdot \frac{a^2 - r^2}{e_1^2} \cdot de_1 \\
K_2 &= c \cdot \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e_2^2}\right) \cdot de_2 = c \cdot de_2 + c \cdot \frac{a^2 - r^2}{e_2^2} \cdot de_2 \\
&\vdots \\
K_{n-1} &= c \cdot \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e_{n-1}^2}\right) \cdot de_{n-1} = c \cdot de_{n-1} + c \cdot \frac{a^2 - r^2}{e_{n-1}^2} \cdot de_{n-1}.
\end{aligned}$$

Die Anziehung S der ganzen Kugelschale ist also

$$S = K_1 + K_2 + \ldots K_{n-1} = c \cdot (de_1 + de_2 + \ldots de_{n-1}) + c \cdot (a^2 - r^2) \cdot \left(\frac{de_1}{e_1^2} + \frac{de_2}{e_2^2} + \ldots \frac{de_{n-1}}{e_{n-1}^2}\right).$$

Ferner ist

$$de_1 + de_2 + \ldots de_{n-1} = (e_2 - e_1) + (e_3 - e_2) + \ldots (e_{n-1} - e_{n-2}) + (e_n - e_{n-1}) = e_n - e_1 = 2r.$$

Nach der früher entwickelten Formel $\frac{1}{e} - \frac{1}{e + de} = \frac{de}{e^2}$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{e_1^2} &= \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_1 + de_1} = \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} \\
\frac{de_2}{e_2^2} &= \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_2 + de_2} = \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} \\
&\vdots \\
\frac{de_n}{e_n^2} &= \frac{1}{e_{n-1}} - \frac{1}{e_{n-1} + de_{n-1}} = \frac{1}{e_{n-1}} - \frac{1}{e_n}.
\end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$\frac{de_1}{e_1^2} + \frac{de_2}{e_2^2} + \ldots \frac{de_n}{e_n^2} = \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_n}.$$

Da nun $e_1 = a - r$ und $e_n = a + r$ ist, so erhalten wir

$$\frac{d\,e_1}{e_1^2} + \frac{d\,e_2}{e_2^2} + \ldots \frac{d\,e_n}{e_n^2} = \frac{1}{a-r} - \frac{1}{a+r} = \frac{2\,r}{a^2 - r^2}.$$

Folglich ist die Gesamtwirkung $S = c \cdot 2r + c(a^2 - r^2) \cdot \frac{2\,r}{a^2 - r^2} = 4 \cdot c \cdot r.$

Ersetzen wir in dieser Gleichung c durch seinen Wert, so erhalten wir

$$S = f \cdot \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \mu}{a^2}.$$

Das Volumen der Kugelschale ist $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi - \frac{4}{3}(r - \delta)^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi - \frac{4}{3} \cdot (r^3 - 3 r^2 \cdot \delta + 3\, r \cdot \delta^2 - \delta^3) \cdot \pi.$ Da δ^2 und δ^3 als unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden können, so ist das Volumen der Kugelschale $4\, r^2 \pi\, \delta$. Die Masse M der Kugelschale ist also $4\, r^2 \pi\, \delta\, \sigma$.

Die Anziehung der Kugelschale auf den Punkt μ ist mithin

$$S = \frac{f \cdot M \cdot \mu}{a^2}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich der Satz: **Eine homogene sehr dünne Kugelschale wirkt so in die Ferne (auf einen außerhalb der Kugelschale liegenden Punkt), als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.**

In der vorhergehenden Entwicklung wurde die Kraft, welche von der Kugelschale auf den Massenpunkt ausgeübt wird, als eine anziehende angesehen. Man gelangte zu demselben Ergebnis, wenn man die Kraft als eine abstoßende voraussetzt.

28. **Wirkung einer aus homogenen Kugelschalen zusammengesetzten Kugel auf einen außerhalb der Kugel liegenden Punkt.**

Die Masse des Punktes sei μ, seine Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel sei a. Die Wirkung S der Kugel setzt sich zusammen aus den Wirkungen der einzelnen Kugelschalen. Bezeichnen wir die Masse derselben mit m_1, m_2, $m_3 \ldots$, so ist nach 27.

$$S = f \frac{m_1 \cdot \mu}{a^2} + f \frac{m_2 \cdot \mu}{a^2} + f \frac{m_3 \cdot \mu}{a^2} + \ldots = \frac{f \cdot \mu}{a^2}(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots).$$

$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ ist gleich der Masse der ganzen Kugel. Bezeichnen wir diese mit M, so ist

$$S = \frac{f \cdot M \cdot \mu}{a^2}.$$

Es wirkt also eine aus homogenen Kugelschalen zusammengesetzte Kugel so in die Ferne, als wenn die ganze Masse im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre. Die Kraft kann anziehend oder abstoßend sein.

29. **Wirkung einer homogenen Kugelschale auf einen Massenpunkt im Innern.**

Im Punkt P im Innern der Kugelschale befinde sich ein Massenpunkt μ (Fig. 14). Der Mittelpunkt der Kugelschale sei C, die Dichtigkeit sei σ und die Dicke der Schale sei δ. Durch zwei sehr nahe zu CP senkrechte Schnitte schneiden wir aus der Kugelschale einen Zonenring aus. Ein durch P gelegter größter Kreis schneide die Oberfläche des Zonenringes in den Linien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$, welche ohne merklichen Fehler als gerade Linie aufgefaßt werden können. Bezeichnen wir die Masse des Zonenringes mit m_1, den äußeren Halbmesser mit ϱ_1, die Entfernung $A_1 P$ des Ringes von P mit e_1, seine Breite $A_1 A_2$ mit h_1, den Winkel, welchen $A_1 P$ mit CP bildet, mit α_1, so ist die Wirkung K_1 der Zone auf μ nach 27.

$$K_1 = f \cdot \mu \cdot \frac{2 \cdot \varrho_1 \cdot \delta \cdot \pi \cdot h_1 \cdot \sigma \cdot \cos \alpha_1}{e_1^2}.$$

Da $\varrho_1 = e_1 \cdot \sin \alpha$, so ist

$$K_1 = f \cdot \mu \cdot \frac{2 \cdot \delta \cdot \pi \cdot h_1 \cdot \sigma \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{e_1}.$$

Die Richtung, nach welcher K_1 wirkt, ist nach 27. durch CP bestimmt und zwar wirkt die Kraft K_1 in der Richtung CP nach dem Mittelpunkt des Zonenringes hin, wenn eine Anziehung vorhanden ist, dagegen in der Richtung CP vom Mittelpunkte der Zone weg, wenn eine Abstoßung stattfindet.

Wir ziehen nun von A_1 und A_2 durch P zwei Sehnen, welche den durch P gelegten größten Kreis in A_3 und A_4 schneiden mögen. Zwei durch A_3 und A_4 senkrecht zu PC geführte Schnitte schneiden aus der Kugelscheibe einen zweiten Zonenring $A_3 A_4 B_3 B_4$ aus. Die Masse dieses Zonenringes sei m_2, der äußere Halbmesser sei ϱ_2, die Entfernung $A_4 P$ des Ringes von P sei e_2, seine Breite $A_3 A_4$ sei h_2 und der Winkel, welchen PA_4 mit CP bildet, sei α_2. In derselben Weise wie vorher findet man die Wirkung des zweiten Zonenringes auf μ

$$K_2 = f \cdot \mu \cdot \frac{2 \cdot \delta \cdot \pi \cdot h_2 \cdot \sigma \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{e_2}.$$

Findet eine Anziehung statt, so wirkt K_2 in der Richtung PC nach dem Mittelpunkte des Zonenringes hin, findet eine Abstoßung statt, so wirkt K_2 in der Richtung PC vom Mittelpunkt der Zone weg. In jedem Falle ist also die Wirkung der Kraft K_2 der Wirkung der Kraft K_1 entgegengesetzt.

Nun ist $\quad K_1 : K_2 = h_1 \cdot e_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 : h_2 \cdot e_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2.$

$\alpha_1 = \alpha_2$, mithin ist $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ und $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$. $\angle A_1 P A_2 = \angle A_3 P A_4$ als Scheitelwinkel und $\angle A_1 A_2 P = \angle A_3 A_4 P$ als Sehnenwinkel auf demselben Bogen. Mithin ist $\Delta A_1 A_2 P \sim A_3 A_4 P$. Folglich besteht die Proportion $A_1 A_2 : A_3 A_4 = A_1 P : A_3 P$. Da A_3 und A_4 sehr nahe Punkte sind, so ist $A_3 P = A_4 P = e_2$, also $h_1 : h_2 = e_1 : e_2$. Mithin ist $h_1 \cdot e_2 = h_2 \cdot e_1$.

Es ist also $\quad h_1 \cdot e_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 = h_2 \cdot e_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2$ und folglich $K_1 = K_2$.

Die von den beiden Kugelzonen auf μ ausgeübten Wirkungen heben sich auf. Da sich nun die ganze Kugelschale in solche Zonenringe zerlegen läßt, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben, so ist die Wirkung einer homogenen Kugelscheibe auf einen Punkt im Innern gleich Null.

30. Befindet sich der Massenpunkt μ auf der Kugelschale bezüglich der Oberfläche einer aus Kugelschalen zusammengesetzten Vollkugel, so gelten die in 27. und 28. angeführten Sätze ebenfalls. Hat ein Massenpunkt μ vom Mittelpunkte eine Entfernung, welche gleich dem Radius oder größer als derselbe ist, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn nur eine Masse im Mittelpunkte vorhanden wäre, welche gleich der Gesamtmasse der Kugelschale oder Vollkugel ist. Die Richtung, nach welcher die Kraft wirkt, ist nach dem Mittelpunkt hin oder von demselben weg gerichtet, je nachdem die Kraft eine anziehende oder abstoßende ist. Die Kraftlinien sind also gerade Linien, welche vom Mittelpunkte ausgehen, sie haben die Richtung der Radien.

31. Unter der Voraussetzung, daß r gleich dem Radius der Kugel oder größer als derselbe ist, hat das Potential in einem Punkte, welcher vom Mittelpunkte den Abstand r hat, nach 30. und 19. den Wert

$$\frac{fM}{r}.$$

Der Potentialwert hängt nur ab von f, der Masse M der Kugel und der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte. f und M können als konstant angesehen werden. Für alle Punkte, welche vom Mittelpunkte denselben Abstand haben, ist mithin das Potential dasselbe. Die Kugelschale bezüglich Oberfläche der Vollkugel, sowie alle dazu konzentrischen Kugelflächen sind also Niveauflächen. Dies folgt nach 24. auch schon daraus, daß die Kraftlinien die Richtung der Radien haben, diese aber senkrecht zur Kugeloberfläche und aller dazu konzentrischen Kugelflächen stehen.

32. Das Potential eines Punktes im Innern einer Kugelschale ist dasselbe, wie das Potential eines Punktes der Oberfläche, also $= \frac{f \cdot M}{r}$, wenn r der Radius der Schale ist. Denn die Arbeit, um einen Punkt von der Masse 1 aus dem Unendlichen auf die Oberfläche zu bringen, ist $\frac{f \cdot M}{r}$, die Arbeit aber, um die Masse 1 in das Innere der Kugelschale zu bringen, ist gleich Null, da nach 29. die Kräfte im Innern der Schale sich gegenseitig aufheben, also der nach einer Richtung geleisteten Arbeit immer eine gleich große in entgegengesetzter Richtung verbrauchte Arbeit entspricht. Das Innere der Kugelschale verhält sich nach 23. wie eine Niveaufläche. Das Potential hat daher seinen größten Wert, wenn der Punkt sich auf der Oberfläche der Schale befindet, weil dann in dem allgemeinen Ausdrucke für den Potentialwert $\frac{f M}{r}$ unter allen Entfernungen, für welche der Potentialwert nicht = Null ist, der Nenner r den kleinsten Wert hat. Das Potential ändert sich nicht mehr, wenn der Punkt in das Innere der Schale eintritt.

33. Wenn eine Kraft ungestört, ohne daß andere Kräfte mit in Wirksamkeit treten, auf eine Masse wirkt, so ist die einzige Folge der Wirkung eine Änderung der Geschwindigkeit der Masse. Zwischen dieser Geschwindigkeitsänderung und der Arbeit der Kraft muß also eine Beziehung bestehen. Dieselbe wird folgendermaßen gefunden.

a) Die Kraft sei konstant und wirke in der Richtung der Bewegung des Körpers. Der Körper habe die Masse m und die Anfangsgeschwindigkeit c. Die Kraft K wirke auf ihn durch die Strecke s, wodurch seine Geschwindigkeit von c auf v wachsen möge. Die auf der Strecke s geleistete Arbeit A ist dann

$$A = K \cdot s.$$

Bezeichnen wir die von K hervorgebrachte Beschleunigung mit g_1, so ist $K = m g_1$ und $s = \frac{v^2 - c^2}{2 g_1}$. Es ist also $A = m g_1 \cdot \frac{v^2 - c^2}{2 g_1} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}$.

Man nennt das halbe Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft der Masse. $\frac{m \cdot c^2}{2}$ war die lebendige Kraft des Körpers vor Beginn der Kraftwirkung, $\frac{m \cdot v^2}{2}$ ist die lebendige Kraft, nachdem die Kraft durch die Strecke s gewirkt hat. **Also ist die geleistete Arbeit gleich der Zunahme der lebendigen Kraft.**

b) Die Bahn s des Körpers sei beliebig geradlinig oder krummlinig. Die durch die Bahn s wirkende Kraft sei konstant oder veränderlich. Der Körper bewege sich aber in der Richtung der Kraftwirkung, so daß seine Geschwindigkeit wachse. Zerlegen wir die Bahn s in unendlich viele unendlich kleine Strecken, so können wir die Kraftwirkung längs jedes dieser Wegelemente als konstant ansehen. Der Körper habe die Masse m, die auf den Teilstrecken geleisteten Arbeiten seien $A_1, A_2 \ldots A_n$, die Geschwindigkeit des Körpers im Anfangspunkte der ersten Teilstrecke sei v_0, im Anfangspunkte der zweiten Teilstrecke $v_1, \ldots$ im Anfangspunkt der letzten Teilstrecke v_{n-1} und im Endpunkte der Bahn s sei die Geschwindigkeit v_n. Nach a) ist dann

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{m \cdot v_1^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} \\
A_2 &= \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \\
&\vdots \\
A_{n-1} &= \frac{m \cdot v_{n-1}^2}{2} - \frac{m \cdot v_{n-2}^2}{2} \\
A_n &= \frac{m \cdot v_n^2}{2} - \frac{m \cdot v_{n-1}^2}{2}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die ganze längs der Bahn s geleistete Arbeit mit A, so ist

$$A = A_1 + A_2 + \ldots A_n = \frac{m \cdot v_n^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}.$$

$\frac{m \cdot v_0^2}{2}$ war die lebendige Kraft, als die Kraft zu wirken anfing. Infolge der Kraftwirkung durch die Bahn s ist die lebendige Kraft auf $\frac{m \cdot v_n^2}{2}$ gewachsen. Der in a) angeführte Satz gilt also auch in diesem Falle, wo Bahn und Kraft beliebig sind.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so ist die Arbeit, welche geleistet werden muß, um der Masse m die Geschwindigkeit v_n zu erteilen $A = \frac{m \cdot v_n^2}{2}$.

c) Die Kraft K sei wieder konstant, wirke aber der Bewegung des Körpers entgegen. Die Masse des Körpers sei m, und er besitze, als die Kraft zu wirken anfängt, eine Geschwindigkeit c. Nachdem die Kraft durch eine Strecke s der Bewegung entgegengewirkt hat, sei die Geschwindigkeit des Körpers v geworden. v ist dann kleiner als c. Die Arbeit, welche erforderlich war, um den Widerstand längs des Weges s zu überwinden, oder die erlittene Arbeit ist $A = Ks$. Bezeichnen wir die Verzögerung, welche die Kraft dem Körper erteilt, mit g_1, so ist $K = m \cdot g_1$ und $s = \frac{c^2 - v^2}{2 g_1}$. Es ist also

$$A = m \cdot g_1 \cdot \frac{c^2 - v^2}{2 g_1} = \frac{m \cdot c^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Die Masse m hatte eine lebendige Kraft gleich $\frac{m \cdot c^2}{2}$, als die Kraft zu wirken anfing. Durch die Wirkung derselben ist die lebendige Kraft der Masse m auf den geringeren Wert $\frac{m \cdot v^2}{2}$ gebracht worden. Aus der obigen Gleichung ergibt sich, daß die dabei erlittene Arbeit gleich der Abnahme der lebendigen Kraft ist.

d) Die Bahn und die Kraft seien wieder, wie in b) beliebig. Die Bewegung des Körpers erfolge aber fortwährend der Kraft entgegen, so daß die Kraftwirkung als Widerstand auftritt. v_0 sei die Geschwindigkeit des Körpers zu der Zeit, wo der Widerstand zu wirken anfängt, v_n die Geschwindigkeit am Endpunkte der Bahn. Dann ist $v_0 > v_n$. Durch eine ähnliche Betrachtung wie in b) ergibt sich, daß die erlittene Arbeit $A = \frac{m \cdot v_0^2}{2} - \frac{m \cdot v_n^2}{2}$ ist. Der in c angeführte Satz gilt auch in dem allgemeinen Falle, wo Bahn und Kraft beliebig sind.

34. Ein Körper von der Masse m bewege sich in der Richtung der Kraftwirkung. Seine Anfangsgeschwindigkeit sei v_1, die Endgeschwindigkeit, welche er durch die Kraft erhält, sei v_2. Die von der Kraft geleistete Arbeit ist nach 33b.

$$A_1 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Der Körper bewege sich nun, nachdem er die Geschwindigkeit v_2 erhalten hat, einer Kraftwirkung entgegen. Seine Geschwindigkeit wird dann abnehmen. Wenn sie wieder v_1 geworden ist, so ist seine lebendige Kraft von $\frac{m \cdot v_2^2}{2}$ auf $\frac{m \cdot v_1^2}{2}$ zurückgegangen. Dabei ist aber von dem Körper durch Überwindung des Widerstandes Arbeit geleistet worden. Bezeichnen wir diese Arbeit mit A_2, so ist nach 33c.

$$A_2 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Folglich ist $$A_1 = A_2.$$

Es vermag also eine Masse vermöge ihrer lebendigen Kraft dieselbe Arbeit zu leisten, welche geleistet werden mußte, um ihr diese lebendige Kraft zu erteilen.

35. Bewegt sich ein Körper von der Masse m, welcher die Geschwindigkeit v hat, einer Kraft entgegen, so ist, wenn sich seine Geschwindigkeit von v auf v_0 verringert hat, die von dem Körper entgegen dem Widerstande geleistete Arbeit $\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$. Wird die Geschwindigkeit gleich Null, so ist die von dem Körper geleistete Arbeit

$$A = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Dann kann der Körper aber keine Arbeit mehr leisten. Die Arbeit also, welche die Masse m vermöge ihrer Geschwindigkeit überhaupt leisten kann, wird gegeben durch die vorstehende Gleichung.

36. Aus den vorhergehenden Abschnitten ergibt sich, daß die lebendige Kraft einer bewegten Masse eine Arbeitsfähigkeit ist, da die Masse vermöge derselben eine Arbeit zu leisten vermag. Diese Arbeitsfähigkeit der Bewegung nennt man auch kinetische Energie oder aktuelle Energie.

37. Bewegt sich ein Körper von der Masse m mit der Geschwindigkeit v einem Widerstande entgegen, bis die Geschwindigkeit des Körpers gleich Null ist, so ist die verbrauchte Arbeit nach 35. $\frac{m \cdot v^2}{2}$. Wird er nun durch die Kraft, deren Widerstand er überwunden hat, auf derselben Bahn zurückbewegt, so wirkt die Kraft, welche vorher eine verzögernde war, als eine beschleunigende, und die Verzögerungen, welche der Körper bei seiner Bewegung gegen die Kraft in den aufeinander folgenden Momenten erlitten hat, erhält er jetzt als Beschleunigungen zurück, so daß er am Anfangspunkt der Bahn wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Seine Energie ist dann $\frac{m \cdot v^2}{2}$, und diese ist gleich der Arbeit, welche vorher verbraucht wurde. Dadurch, daß der Körper in eine andere Lage gebracht wurde, wurde die verbrauchte Arbeit gleichsam als Arbeitsfähigkeit, welche wieder aktuell werden kann, in ihm aufgespeichert. Das Vermögen, Arbeit zu leisten, kann ein Körper also auch besitzen durch die Lage, in welche er gebracht worden ist, z. B. eine gehobene Last, eine gespannte Feder, ein zusammengepreßtes Gas. Dieses Vermögen heißt dann Arbeitsfähigkeit der Lage, potentielle Energie oder Spannkraft. Es können also auch ruhende Körper Energie besitzen, z. B. ein Gewicht, welches in einer gewissen Höhe über der Erde auf eine Unterlage gestellt ist. Die zur Hebung des Gewichtes verbrauchte Arbeit ist als potentielle Energie, die sich in diesem Falle als Druck auf die Unterlage äußert, in ihm enthalten und kommt als kinetische Energie wieder zum Vorschein, wenn die Unterstützung weggenommen wird. Die potentielle Energie einer Masse wird gemessen durch die Arbeit, welche darauf verwendet worden ist, um die Masse in die angenommene Lage zu versetzen, weil die Masse selbst bei der Rückkehr zu der ursprünglichen Lage dieselbe Arbeit leisten kann.

38. Hebt man einen Körper, dessen Gewicht p und dessen Masse m ist, auf die Höhe h, so ist die entgegen der Schwerkraft geleistete Arbeit

$$A_1 = p \cdot h = m \cdot g \cdot h.$$

Fällt nun der Körper wieder herab, so kommt er unten mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ an. Die erlangte Energie ist also

$$A_2 = \frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h.$$

Diese Energie hat er dadurch erlangt, daß er auf die Höhe h gebracht wurde. Er besitzt also auf der Höhe h die potentielle Energie $m \cdot g \cdot h$. Da $A_1 = A_2$, so ist die Arbeit, welche er vermöge seiner lebendigen Kraft leisten kann, gleich der Arbeit, welche nötig war, um ihn auf die Höhe h zu heben.

39. Ein Körper, dessen Gewicht p und dessen Masse m ist, werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben geworfen. Ist seine Geschwindigkeit v geworden, so ist die entgegen der Schwerkraft geleistete Arbeit nach 32 c.

$$A = \frac{m \cdot c^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Der Körper sei, wenn seine Geschwindigkeit v geworden ist, um die Höhe h gestiegen. Die Arbeit aber, welche erforderlich ist, um ein Gewicht p auf die Höhe h zu bringen, ist ph. Es ist also A auch $= ph = mgh$. Mithin besteht die Gleichung

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot c^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Die kinetische Energie der Körpers in der Höhe h, vermöge deren er noch weiter steigen kann, ist, da er in dieser Höhe noch die Geschwindigkeit v hat, $K = \frac{m \cdot v^2}{2}$. Die potentielle Energie des Körpers in der Höhe h ist nach 38. $P = m \cdot g \cdot h$. Wir erhalten also die Gleichung

$$P = \frac{m \cdot c^2}{2} - K$$

und mithin

$$K + P = \frac{m \cdot c^2}{2}.$$

Wird also ein Körper senkrecht nach oben geworfen, so hat an jeder Stelle seiner Bahn die Summe aus seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie immer denselben Wert, und zwar ist sie gleich der lebendigen Kraft zu Anfang der Bewegung.

40. Solange der Körper steigt, verändert sich seine Geschwindigkeit, also auch seine kinetische Energie immer mehr. Dagegen steigt er immer höher, es vermehrt sich also seine potentielle Energie und zwar um ebensoviel, als die kinetische Energie kleiner wird. Hört der Körper zu steigen auf, so ist seine kinetische Energie gleich Null, und die potentielle Energie hat ihren relativ größten Wert erreicht. Fällt der Körper wieder herab, so gelten dieselben Gleichungen, wie vorher, nur mit dem Unterschiede, daß die Geschwindigkeit v, welche der Körper in der Entfernung h von der Erde hat, nach der Erde hingerichtet ist und größer wird, daß c die Geschwindigkeit ist, welche der Körper wieder erhalten hat, wenn er die Erde erreicht und daß A die Arbeit bedeutet, welche auf der Strecke h von der Schwerkraft selbst geleistet wird. Es wächst also die kinetische Energie des Körpers, dagegen vermindert sich seine Höhe über der Erde und damit seine potentielle Energie und zwar wieder in demselben Maße, wie die kinetische Energie zunimmt. Beim Aufsteigen findet Umsetzung von kinetischer Energie in potentielle und beim Herabfallen das Umgekehrte statt.

41. Wir haben im vorhergehenden die Wirkung der Masse der Erde auf die Masse eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers betrachtet. Der in 38. angeführte Satz hat aber allgemeinere Gültigkeit. Wenn verschiedene Massen aufeinander wirken, ohne daß sie von anderen Massen beeinflußt werden, so bleibt die Summe der kinetischen und potentiellen Energien dieser Massen dieselbe; es kann nur eine Verwandlung von potentieller und kinetischer Energie ineinander stattfinden. Dies ist der Satz von der Erhaltung der Energie (Mayer 1842, Helmholtz 1847).

Der Satz gilt nur, wenn die Massen ungestört aufeinander wirken. Es wird also auch z. B. von Reibungswiderständen abgesehen. In Wirklichkeit verzehren diese einen erheblichen Teil der kinetischen, äußerlich sichtbaren Energie. Doch geht diese nicht verloren, sondern sie verwandelt sich in schwingende Bewegungen der Massenteilchen der einander reibenden Körper, also in unsichtbare Energie und ruft die Erscheinungen des Schalles, des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität hervor. Ebenso wie sich äußerlich sichtbare Energie ganzer Körper in unsichtbare der Massenteilchen verwandeln kann, ist auch das Umgekehrte möglich, und die unsichtbare Bewegung der Massenteilchen kann sich umsetzen in die sichtbare Bewegung ganzer Massen. Die Mannigfaltigkeit der physikalischen Erscheinungen beruht im letzten Grunde nur auf der Umwandlung einer Energieform in eine andere, bei denen nie etwas verloren geht:

Die Energie des Weltalls ist konstant (Clausius).