# Physikalische Aufgaben über Maxima und Minima in elementarer Behandlung.

Von Oberlehrer Dr. H. Lüdtke.

Für die oberste Klasse des Realgymnasiums und der Oberrealschule schreiben die Lehrpläne vom 6. Januar 1892 die elementare Theorie der Maxima und Minima vor. Diese Theorie ist, wie allgemein anerkannt wird, ein besonders interessantes Gebiet der Mathematik. Holzmüller meint indes, daß das Gebiet ganz besonders schwierig ist, wenn man die nötige Strenge walten läßt. Er schreibt: „In der Regel werden die Beweise dafür, daß ein Maximum wirklich vorhanden sein muß, und daß das Maximum wirklich erreicht wird, vollständig unterlassen. In vielen Fällen müßte auch noch besonders untersucht werden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Solche funktionentheoretischen Dinge lassen sich nur mit Hülfe der Differentialrechnung in hinreichender Schärfe zur Entscheidung bringen." Hierzu ist zu bemerken, daß, wenn auch nicht alle Maxima und Minimaaufgaben sich elementar lösen lassen, es doch sehr viele recht interessante Aufgaben giebt, die ohne große Schwierigkeit von den Schülern gelöst werden können und zwar mit einer für die Schule ausreichenden Strenge; Vollständigkeit in der Behandlung wird niemand bezwecken. Schwierigere Aufgaben kann man dem Privatstudium befähigter Schüler überlassen, die diesen Aufgaben sicher ein großes Interesse entgegenbringen.

In der folgenden Zusammenstellung von Maxima- und Minimaaufgaben habe ich mich aus naheliegenden Gründen auf ein Gebiet und zwar auf die Physik beschränkt. Keineswegs konnte es dabei meine Absicht sein, nur neue Aufgaben aus diesem Gebiet zu bringen, da eine Reihe altbekannter Aufgaben allgemeines Interesse hat. Eine ziemlich ausführliche Behandlung mancher Aufgaben erschien mir geboten, da denselben eine gewisse praktische Bedeutung zukommt, bei anderen wiederum mußte auf vorkommende Schwierigkeiten Rücksicht genommen werden.

Was die zu benutzenden Methoden betrifft, so ist es meiner Ansicht nach vorteilhaft, nicht einseitig immer dieselbe Methode anzuwenden. Manchmal empfiehlt es sich, den Funktionswert für möglichst viele Werte der Variabeln zu berechnen und die graphische Darstellung zur Ermittelung des Maximums oder Minimums zu benutzen. Siehe z. B. Nr. 2c. Im allgemeinen ist dies Verfahren umständlich.

Zuweilen ist die Anwendung geometrischer Sätze besonders vorteilhaft und führt leicht zum Ziel. Siehe Nr. 87a, 88 und 89c.

Manchmal empfiehlt es sich, durch Untersuchung der Wurzelwerte einer Gleichung das Maximum oder Minimum zu ermitteln. Die Wurzelwerte dürfen, wenn die Aufgabe eine praktisch zulässige Lösung haben soll, nicht imaginär werden. Der Grenzfall, für den gerade noch ein reeller Wert für die Wurzeln sich ergiebt, stellt das Maximum oder Minimum dar. Gewöhnlich wird dabei der Ausdruck unter einer Quadratwurzel gleich null. In ähnlicher Weise führt oft die Determination einer geometrischen Konstruktionsaufgabe zum Ziel; der Grenzfall, bei dem gerade noch eine Lösung möglich ist, stellt ein Maximum oder Minimum dar.

Z. B. Aufgabe. Von allen Rechtecken mit dem Umfange $2s$ dasjenige mit dem größten Inhalt zu ermitteln. (Von Bedeutung für die Lösung von Nr. 76.) Lösung a). Die Seiten heißen $x$ und $y$, der Inhalt $J$. Es ist $x+y=s$ und $xy=J$; also $x=\frac{1}{2}\cdot(s\pm\sqrt{s^2-4J})$ und $y=\frac{1}{2}(s\mp\sqrt{s^2-4J})$. Da der Radikand nicht negativ sein darf, wenn $x$ und $y$ reell bleiben sollen, so ist $s^2-4J\geqq 0$. $J$ ist also ein Maximum, wenn $s^2-4J=0$ d. h. $J=\frac{1}{4}s^2$ oder $x=y=\frac{1}{2}s$ wird. Das Quadrat hat demnach von allen Rechtecken mit demselben Umfang den größten Inhalt. Lösung b). Geometrisch können wir von der Aufgabe ausgehen: Ein Rechteck aus dem Umfange $2s$ und der Diagonale $d$ zu zeichnen. Die Lösung dieser Aufgabe ist einfach. In der Determination findet man, daß es im allgemeinen 2 Rechtecke giebt. Ist $d$ zu klein, so erhält man überhaupt kein Rechteck. Im Grenzfall, wenn also $d$ den kleinsten zulässigen Wert hat, erhält man nur eine Lösung, ein Quadrat. Daß dem Minimalwert von $d$ der Maximalwert des Inhaltes $J$ entspricht, ist leicht zu zeigen; $x$ und $y$ seien wieder die Seiten des Rechtecks. Da $x+y=s$, also $x^2+2xy+y^2=s^2$ und $x^2+y^2=d^2$ ist, so ist $2xy=s^2-d^2$, also $J=\frac{1}{2}(s^2-d^2)$, d. h. $J$ ist ein Maximum, wenn bei gegebenem $s$ $d$ ein Minimum wird. Das Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}s$ hat also von allen Rechtecken mit dem Umfang $2s$ den größten Inhalt. Siehe hierzu Nr. 2a, 17a, 65c sowie 63, 76 und 17c.

Sehr häufig findet ferner die Schellbachsche Methode Anwendung. Dieselbe geht von dem Gedanken aus, daß zu beiden Seiten des Maximums oder Minimums gleiche Funktionswerte vorhanden sein müssen, aber nur einem einzigen Werte der unabhängigen Veränderlichen ein Maximum oder ein Minimum der Funktion entsprechen kann. Ist nun der Funktionswert durch die Variabele $x$ ausgedrückt, so kann man zu einem gegebenen $x_1$ den Wert $x_2$ berechnen, für welchen die Funktion denselben Wert erhält. Diese Rechnung führt man jedoch nicht durch. Man setzt den durch $x_1$ ausgedrückten Funktionswert gleich dem durch $x_2$ ausgedrückten und ordnet so, daß gleich hohe Potenzen von $x_1$ und $x_2$ zusammengefaßt werden. Nun dividiert man durch $x_1-x_2$. Für den Fall des Maximums oder Minimums entspricht aber einem $x_1$ kein $x_2$, welches von $x_1$ verschieden ist, da nur einem Wert von $x$ ein Maximum oder Minimum entsprechen kann. Man setzt also $x_1=x_2=x$ und erhält häufig eine leicht nach $x$ aufzulösende Gleichung, welche das Maximum oder Minimum ergiebt. Siehe z. B. Nr. 2b und 26.

Die Schellbachsche Methode läßt sich auch auf Ausdrücke, welche trigonometrische Funktionen enthalten, anwenden; siehe Nr. 69, 92, 93, 94.

Oft gelingt es durch einfache Umformung aus dem Funktionswert einen solchen Ausdruck abzuleiten, daß man sofort erkennen kann, wann das Maximum oder Minimum eintritt. Besonders wichtig ist dies für trigonometrische Ausdrücke, z. B. $\sin\alpha+\cos\alpha=M$. Man findet leicht $M=\sqrt{1+\sin 2\alpha}$. Das Maximum tritt ein für $\sin 2\alpha=1$, d. h. $\alpha=45^0$, das Minimum für $\sin 2\alpha=-1$, d. h. $\alpha=135^0$. Siehe ferner Nr. 17b, 33, 42, 47.

Die Untersuchung, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, geht zweckmäßiger Weise meist der Lösung voran und ist sehr häufig durch Betrachtung der Grenzwerte der zu untersuchenden Funktion sofort erledigt. Ist man zweifelhaft, so muß man die Nachbarwerte der Funktion für den Maximal- oder Minimalwert berechnen. Die Funktion nimmt zu beiden Seiten des Maximums ab, zu beiden Seiten des Minimums zu. Am besten Aufschluß über die Frage, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, giebt natürlich die graphische Darstellung der Funktion.

Manchmal wird es vorkommen, daß die Frage nach dem Maximum oder Minimum nur ein verhältnismäßig unwesentlicher Teil der physikalischen Aufgabe ist, siehe z. B. Nr. 65 und 66.

Derartige Aufgaben sind in der Physik eben nicht Selbstzweck wie bei der Durchnahme der behandelten Theorie in der Mathematik. Sie können in der Physik daher auch nicht im Zusammenhange behandelt werden, sind aber oft von praktischer Bedeutung.

Da die Arbeit einen gewissen Umfang nicht überschreiten durfte, mußten mehrere Lösungen gekürzt oder überhaupt weggelassen werden.

---

**Aufgabe 1.** Auf 2 parallelen Geraden, deren Abstand gleich $a$ ist, befinden sich 2 Punkte $A$ und $B$, welche um Strecke $b$ von einander entfernt sind; wann ist der Abstand beider Punkte ein Minimum, wenn $A$ sich mit der Geschwindigkeit $V$ und $B$ mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt?

**Aufgabe 2.** Auf 2 sich senkrecht schneidenden Geraden bewegen sich 2 Körper $A$ und $B$ nach dem Schnittpunkte $O$ hin mit den Geschwindigkeiten $V$ und $v$. Anfangs ist $AO = a$, $BO = b$. Wann ist der Abstand beider Körper gleich $l$? Wann ist der Abstand ein Minimum? Wie groß ist dann die Entfernung der Körper?

**Lösung.** a) $AO = x$; $BO = y$; $AB = l = \sqrt{x^2 + y^2}$ für den Fall des Minimums; die bis dahin verflossene Zeit heißt $t$. Es ist

$$x = a - Vt; \quad y = b - vt \quad \text{und} \quad l = \sqrt{a^2 - 2aVt + V^2t^2 + b^2 - 2bvt + v^2t^2}.$$

Nun ist $l$ ein Minimum, wenn $t^2(V^2 + v^2) - 2t(aV + bv) = M$ d. h. ein Minimum wird.

$$t = \frac{aV + bv}{V^2 + v^2} \pm \sqrt{\frac{M}{V^2 + v^2} + \left(\frac{aV + bv}{V^2 + v^2}\right)^2}. \qquad M = -\frac{(aV + bv)^2}{V^2 + v^2}$$

ist der kleinste Wert für ein reelles $t$. Im allgemeinen entsprechen demselben $l$ zwei Werte für $t$. Im Falle des Minimums des Abstandes ist $t = \frac{aV + bv}{V^2 + v^2}$, es giebt also nur einen Wert für $t$, da die Wurzel gleich null wird. Zahlenbeispiel: $V = v = 5$, $a = 60$, $b = 30$, $t = 9$, $x = +15$, $y = -15$, $l = 21{,}15$ oder $a = 100$, $b = 75$, $V = 3$, $v = 4$, $t = 24$, $x = +28$, $y = -21$, $l = 35$.

b) $t^2(V^2 + v^2) - 2t(aV + bv) = M$ wie vorher, $M$ sei jedoch zunächst nicht der Minimalwert. Zu beiden Seiten des Minimums giebt es je 2 entsprechende Werte für $M$. Jedem $t_1 < t$ entspricht ein $t_2 > t$, für welches $M$ und somit auch $l$ denselben Wert erhält. Durch Gleichsetzung beider Werte für $M$ ergiebt sich: $t_1^2(V^2 + v^2) - 2t_1(aV + bv) = t_2^2(V^2 + v^2) - 2t_2(aV + bv)$, oder: $(V^2 + v^2)(t_1^2 - t_2^2) - 2(aV + bv)(t_1 - t_2) = 0$. Dividiert man durch $t_1 - t_2$, so erhält man: $(V^2 + v^2)(t_1 + t_2) - 2(aV + bv) = 0$. Für den Fall des Minimums müssen beide Werte zusammenfallen, es muß $t_1 = t_2 = t$ sein, da nur einem Wert für $t$ ein Minimum entsprechen kann. Dann ergiebt sich:

$$t = \frac{aV + bv}{V^2 + v^2}.$$

c) Berechne für das Zahlenbeispiel $V = v = 5$, $a = 20$, $b = 10$ für möglichst viele Werte von $t$ das zugehörige $l$ und zeichne die sich für $l$ ergebende Kurve, wenn die Zeit als Abscisse und die Entfernung der Punkte als Ordinate in ein Koordinatensystem eingetragen wird. Durch die graphische Darstellung gewinnen wir ein genaues Bild über die Abhängigkeit der Größe $l$ von der Größe $t$. $l$ ist eine Funktion von $t \cdot l = F(t)$.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | 22,36 | 15,8 | 10 | 7,07 | 10 | 15,8 | 22,36 |

u. s. w.

**Aufgabe 3.** Wie die vorige; der zweite Körper beginnt die Bewegung $n$ sec später als der erste.

**Aufgabe 4.** Wie Nr. 2, nur $A$ bewegt sich auf $O$ zu, $B$ entfernt sich von $O$.

**Aufgabe 5.** Wie Nr. 4. Der zweite Körper beginnt seine Bewegung $n$ sec später als der erste.

**Aufgabe 6.** Wie Nr. 2; beide Körper entfernen sich jedoch von $O$. Giebt es ein Minimum des Abstandes?

**Aufgabe 7.** Wie Nr. 2, die beiden sich in $O$ schneidenden Geraden stehen nicht senkrecht auf einander, sondern bilden den Winkel $\alpha$ miteinander.

**Aufgabe 8.** Wie Nr. 7, der eine Körper beginnt seine Bewegung $n$ sec später als der andere.

**Aufgabe 9.** Wie Nr. 7; der Körper $A$ bewegt sich auf $O$ zu, $B$ entfernt sich von $O$.

Zusatz. Löse dieselbe Aufgabe für den Fall, daß der Körper $B$ seine Bewegung $n$ sec später als $A$ beginnt.

**Aufgabe 10.** Auf einem Kreise $O$ mit dem Radius $r$ bewegt sich ein Punkt $A$ mit der Geschwindigkeit $v$. Wann ist der Abstand von einem beliebigen Punkte $B$ ein Maximum oder Minimum, wenn anfangs $\sphericalangle AOB = \alpha$ ist?

**Aufgabe 11.** a) Wie Nr. 10; statt $\sphericalangle \alpha$ ist aber $AB = a$ und $OB = b$ gegeben. $\alpha$ kann berechnet werden, da auch $r$ bekannt ist.

b) Wie Nr. 10; aber $AB = a$ und $\sphericalangle ABO = \beta$ gegeben. $\alpha$ ist zu berechnen.

c) Wie vorher; $OB = b$ und $\sphericalangle ABO = \beta$ gegeben, $\alpha$ ist zu berechnen.

d) Ebenso, aber $\alpha$ und $r$ zu berechnen aus $AB = a$, $OB = b$ und $\sphericalangle ABO = \sphericalangle \beta$.

**Aufgabe 12.** a) Wie Nr. 10, $\alpha$ ist jedoch nicht gegeben, $B$ liegt auf der Tangente, die in der Anfangslage von $A$ an den Kreis gezogen werden kann, $AB = a$ gegeben, desgleichen $r$ und $v$.

b) Wie a, statt $AB$ ist $OB = b$ gegeben, außerdem $r$ und $v$.

**Aufgabe 13.** a) Auf einem Kreise $O$ mit dem Radius $r$ bewegt sich ein Punkt $A$ mit der Geschwindigkeit $v$; wann ist sein Abstand von einer beliebigen Geraden, deren Abstand vom Mittelpunkte des Kreises $OB = a$ ist, ein Maximum oder Minimum, wenn $\sphericalangle AOB = \alpha$ gegeben ist? b) $\sphericalangle AOB$ ist nicht gegeben, ist aber zu berechnen aus $r$, $OB = a$, $AC = b$, $BC = c$, wenn $C$ ein beliebiger Punkt der Geraden ist. c) $\sphericalangle AOB$ ist zu berechnen aus $r$, $OB = a$, $\sphericalangle OAC = \beta$ und $\sphericalangle OCB = \gamma$. d) Desgleichen ist $\sphericalangle AOB$ zu berechnen aus $r$, $OB = a$, $\sphericalangle OCB = \sphericalangle \gamma$, $\sphericalangle ACO = \delta$. Zusatz. Löse dieselben Aufgaben für den Fall, daß statt der absoluten Geschwindigkeit $v$ die Winkelgeschwindigkeit $\varphi$ gegeben ist.

**Aufgabe 14.** a) Auf einem Kreise $O$ mit dem Radius $r$ bewegt sich ein Punkt $A$ mit der Geschwindigkeit $v$; wann ist sein Abstand von einem zweiten Kreise $K$ ein Maximum oder Minimum, wenn $\sphericalangle AOK = \alpha$ gegeben ist? b) Statt $\alpha$ ist noch $AK = a$ und $\sphericalangle OAK = \beta$ gegeben. c) Statt $\alpha$ ist noch $OK = b$ und $AK = a$ gegeben. d) Statt $\alpha$ ist $OK = b$ und $\sphericalangle OAK = \beta$ gegeben. Zusatz. Löse dieselben Aufgaben für den Fall, daß statt $v$ die Winkelgeschwindigkeit $\varphi$ gegeben ist.

**Aufgabe 15.** a) Auf 2 konzentrischen Kreisen $O$ mit den Radien $R$ und $r$ bewegen sich die Punkte $A$ und $B$ mit der Geschwindigkeit $V$ und $v$. Wann ist ihr Abstand ein Maximum oder Minimum, wenn anfangs $\sphericalangle AOB = \alpha$ ist? ($\alpha < 180^0$).

b) Wie a), $\sphericalangle \alpha$ ist nicht gegeben, sondern $R$, $r$, $AB$, $\sphericalangle BAO$ und $\sphericalangle ABO$.

c) Die Punkte bewegen sich auf demselben Kreise.

**Aufgabe 16.** Wieviel Stunden, Minuten und Sekunden nach 5 h 43 m 17 sec bilden die Zeiger der Uhr zum ersten Male einen Winkel $\alpha$ mit einander? Wann decken sich die Zeiger zum ersten Male ($\alpha$ ein Minimum), und wann bilden sie zuerst eine gerade Linie ($\alpha$ ein Maximum)? Wann stehen die Zeiger zum ersten Male nach dieser Zeit senkrecht auf einander?

**Lösung.** Man benutze die Thatsache, daß der Winkelweg gleich dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit mal Zeit ist. Die Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers ist $\frac{360^0}{60 \cdot 60}$, die des kleinen Zeigers ist $\frac{1}{12}$ dieses Wertes.

**Aufgabe 17.** Auf 2 sich rechtwinkelig in $O$ schneidenden Straßen kann sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $V$ bewegen, in dem übrigen Teil der Ebene mit der Geschwindigkeit $v$. Ein Körper bewegt sich auf der einen Straße auf $O$ zu bis $A$ und von da geradlinig nach dem Punkt $B$ der anderen Straße, die Strecke $AB = l$ abschneidend, um sich hierauf von $O$ zu entfernen. Welche Lage muß $AB = l$ haben, damit möglichst viel an Zeit und Weg gespart wird?

**Lösung.** a) $OA = x$, $OB = y$, $l^2 = x^2 + y^2$. Es ist $x + y = M$ d. h. ein Maximum, wenn möglichst viel an Zeit und Weg spart werden soll. $x + \sqrt{l^2 - x^2} = M$ oder $x = \frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{M^2}{4}}$. Nun muß sein $\frac{l^2}{2} > \frac{M^2}{4}$. Höchstens kann sein $\frac{l^2}{2} = \frac{M^2}{4}$, dann giebt $M = l\sqrt{2}$ den Fall des Maximums, und es ist $x = \frac{M}{2} = \frac{1}{2} l \sqrt{2} = y$, d. h. $OAB$ muß ein gleichschenkliges Dreieck sein, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \alpha = 45^0$. b) Nenne $\sphericalangle OAB = \alpha$, so ist $x = l \cos\alpha$, $y = l \sin\alpha$, und der ersparte Weg ist $x + y = l(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Nun ist $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}$, wie man durch Quadrieren der Gleichung leicht einsieht. Der letzte Ausdruck wird ein Maximum für $\sin 2\alpha = 1$, d. h. $2\alpha = 90^0$ oder $\alpha = 45^0$. c) Geometrisch. Wann ist bei gegebener Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Summe der Katheten ein Maximum, oder wann ist bei gegebener Diagonale der Umfang eines Rechtecks ein Maximum? Die Determination der Aufgabe: „Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der Kathetensumme zu zeichnen" ergiebt leicht die Lösung. Zusatz. Zeige, daß es sich um ein Maximum an Zeit- und Wegersparnis handelt.

**Aufgabe 18.** Wie Nr. 17, nur ist die Geschwindigkeit auf der ersten Straße $V_1$, auf der zweiten $V_2$ und in dem übrigen Teil der Ebene, also auf $AB$, $v$.

**Aufgabe 19.** Wie Nr. 17, $OA$ und $OB$ stehen nicht senkrecht aufeinander, sondern bilden den Winkel $\beta$ mit einander.

**Aufgabe 20.** Wie Nr. 18, jedoch bilden $OA$ und $OB$ den Winkel $\beta$ mit einander.

**Aufgabe 21.** Ein Punkt $A$ hat von einer Geraden den Abstand $AB = a$. Auf der Geraden (Eisenbahn) bewegt man sich mit der Geschwindigkeit $V$, seitwärts derselben mit der Geschwindigkeit $v$. Wo muß ein Reisender die Bahn verlassen, um möglichst schnell nach $A$ zu gelangen?

**Lösung.** Der gesuchte Punkt heiße $C$; $BC = x$. $D$ und $E$ seien 2 Punkte der Geraden auf verschiedenen Seiten von $C$, welche eine derartige Lage haben, daß der Weg $AD$ dieselbe Zeit erfordert wie $DE + AE$. Es sei $DB = x_1$ und $EB = x_2$, also $DE = x_1 - x_2$. Es ist $AD = \sqrt{x_1^2 + a^2}$ und $AE = \sqrt{x_2^2 + a^2}$. Da nun die Zeit gleich dem Quotienten aus Weg und Geschwindigkeit ist, so ist: $\frac{\sqrt{x_1^2 + a^2}}{v} = \frac{\sqrt{x_2^2 + a^2}}{v} + \frac{x_1 - x_2}{V}$. Durch zweimaliges Quadrieren schafft man die Wurzeln weg, dann faßt man die Glieder mit gleich hohen Potenzen von $x_1$ und $x_2$ zusammen und dividiert durch $(x_1 - x_2)^2$. Es ergiebt sich $(x_1 - x_2)^2 \cdot \frac{v^4}{V^4} + (x_1 + x_2)^2 - 2\frac{v^2}{V^2}(2a^2 + x_1^2 + x_2^2) = 0$. Für den Fall des Minimums der Zeit ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen. $x = \pm \frac{av}{\sqrt{V^2 - v^2}}$. Ist z. B. $v = \frac{5}{13} V$, so ist $x = \pm \frac{5}{12} a$.

**Aufgabe 22.** Wie Nr. 21, auf der Bahn koste die Beförderung für die Gewichtseinheit auf der Längeneinheit $p$, auf einem Fuhrwerk seitwärts der Bahn $P$ Mark; wo ist die Bahn zu verlassen, damit der Transport bis $A$ möglichst billig sei? Setze in dem Resultat von Nr. 21 statt $V$ $P$ und statt $v$ $p$.

**Aufgabe 23.** Jemand ist auf einem Boote 3 km vom nächsten Punkt des geradlinigen Ufers entfernt. Er will einen Punkt desselben, der von letzterem wieder 5 km entfernt ist, in kürzester Zeit erreichen. Wenn er nun in der Stunde 4 km rudern, dagegen 5 km gehen kann, wo muß er dann landen?

**Lösung.** Benutze das Resultat von Nr. 21. $x = \frac{3 . 4}{\sqrt{25 - 16}} = 4$ km, d. h. 1 km vom Ziele entfernt.

**Aufgabe 24.** (Elementar schwierig zu lösen.) $A$ und $B$ seien die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises $O$ mit dem Radius $r$. Auf der Peripherie ist die Geschwindigkeit eines Körpers $V$, im Innern des Kreises $v$. Wo muß ein Punkt, der sich auf dem Kreise von $A$ nach $B$ bewegt, die Kreislinie verlassen, um möglichst schnell nach $B$ zu gelangen?

**Aufgabe 25.** Wie Nr. 24, $A$ und $B$ seien jedoch beliebige Punkte des Kreises, $\sphericalangle BOA = \beta$ gegeben.

**Aufgabe 26.** Aus einem cylindrischen Holzstamm denjenigen prismatischen Balken auszuschneiden, welcher die größte relative Festigkeit besitzt.

**Lösung.** Man denke sich durch den Stamm einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius $r$ senkrecht zur Achse des Cylinders gelegt. In den Kreis sei ein beliebiges Rechteck mit der Grundlinie $x_1$ und der Höhe $y_1$ eingezeichnet. Ist dies Rechteck die Grundfläche eines Prismas, so ist die relative Festigkeit desselben $F = f \cdot x_1 y_1^2$, worin $f$ eine Konstante bedeutet, die besonders von der Länge des Stammes und der Güte des Holzes abhängt. Es ist $x_1^2 + y_1^2 = 4r^2$ oder $y_1^2 = 4r^2 - x_1^2$. Daher ist $F = f(4r^2 x_1 - x_1^3)$. Es läßt sich ein zweites Rechteck mit den Seiten $x_2$ und $y_2$ einzeichnen, welches ein Prisma mit derselben Festigkeit giebt. Weise nach, daß ein zweites derartiges Rechteck existieren muß! Zeige übrigens auch, daß für $x = 0$ oder $y = 0$ die Festigkeit ein Minimum wird, und daß ein Maximum existieren muß. Für den zweiten prismatischen Balken wird $F = f(4r^2 x_2 - x_2^3)$. Es ist also $4r^2 \cdot (x_1 - x_2) - (x_1^3 - x_2^3) = 0$. Dividiert man durch $x_1 - x_2$, so ist $4r^2 - (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$. Es läßt sich demnach, wenn $x_1$ gegeben ist, $x_2$ berechnen. Stelle $F$ als Funktion von $x$ graphisch dar! Da nur einem einzigen Wert von $x$ ein Maximum von $F$ entspricht, so ist für diesen Fall $x_1 = x_2 = \xi$ zu setzen. $\xi$ und $\eta$ sollen die Seiten des Rechtecks sein, welches die größte relative Festigkeit liefert. $4r^2 = 3\xi^2$ oder $\xi = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$. $\xi$ ist mittlere Proportionale zu $2r$ und $\frac{2}{3}r$, kann also leicht gezeichnet werden. Da $y^2 = 4r^2 - x^2$ ist, ist auch $\eta^2 = 4r^2 - \xi^2 = \frac{8}{3}r^2$ oder $\eta = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$. $\eta$ ist mittlere Proportionale zu $2r$ und $\frac{4}{3}r$.

**Aufgabe 27.** Dieselbe Aufgabe für den Fall zu lösen, daß der Stamm schon der Länge nach mitten durchsägt ist, der Querschnitt ist ein Halbkreis.

**Lösung.** $\xi = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$, also halb so groß wie vorher, $\eta = \frac{2r}{3}\sqrt{6}$ wie in Nr. 26. Zwei Punkte des Rechtecks liegen auf der Peripherie, die beiden andern auf dem Durchmesser des Kreises. Die letzten beiden Punkte begrenzen $\eta$.

**Aufgabe 28.** Der Querschnitt eines Stammes sei ein Segment mit der Höhe $h$; es ist daraus ein prismatischer Balken mit maximaler Festigkeit herzustellen.

**Lösung.** Die Grundlinie eines beliebigen eingezeichneten Rechtecks ist $x$, die Höhe $y$; $y$ liegt auf der Sehne. Es ist, wenn $r$ der Radius des Kreises ist, $(h - x) \cdot (2r - h + x) = \frac{y^2}{4}$. Die Festigkeit ist $F = f \cdot x \cdot y^2$ oder $F = f \cdot 4x(h - x) \cdot (2r - h + x)$. Letzterer Ausdruck soll ein Maximum werden. Wenn in diesem Falle die Grundlinie des Rechtecks gleich $\xi$ ist, so ergiebt sich

$$\xi = -\frac{2}{3}(r - h) + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4r^2 - 2rh + h^2}.$$

Für $h = r$ wird $\xi = \frac{r}{3}\sqrt{3}$ wie oben. Es muß $h < r + \frac{r}{3}\sqrt{3}$ sein, für $h \geq r + \frac{r}{3}\sqrt{3}$ verhält sich das Segment wie ein voller Kreis, und es ist $\xi = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$.

**Aufgabe 29.** Der Querschnitt des Stammes sei ein Stück des Kreises, welches von zwei parallelen Sehnen begrenzt wird. Der Abstand beider Sehnen ist $H$, der Abstand der größten Sehne vom Mittelpunkte $h$ und $r$ der Radius des Kreises. Es ist aus dem Stamme ein prismatischer Balken von maximaler Festigkeit herzustellen.

**Lösung.** $\xi = -\frac{2}{3}h + \frac{1}{3}\sqrt{3r^2 + h^2}$, wenn beide Sehnen auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen, jedoch $\xi$ höchstens gleich $H$, $\eta = 2\sqrt{r^2 - (h + \xi)^2}$. Liegen die Sehnen auf verschiedenen Seiten, so ersetze $h$ durch $-h$. Es ist $\eta$ größer oder gleich der kleinsten Sehne.

**Aufgabe 30.** Wie Nr. 26, der ursprüngliche Querschnitt des Stammes sei aber eine Ellipse mit den Achsen $a$ und $b$; $a > b$.

**Lösung.** Die Höhe $y$ des eingezeichneten Rechtecks muß der großen Achse $a$ parallel sein, die Gleichung der Ellipse lautet also $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$. Sind wieder $\xi$ und $\eta$ die Seiten des eingezeichneten Rechtecks, welches eine maximale Festigkeit ergiebt, so findet man ähnlich wie bei Nr. 26 $\xi = \frac{b}{3}\sqrt{3}$ und $\eta = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Zusatz. Wie ändert sich das Resultat, wenn der Querschnitt eine halbe Ellipse ist, vom größten oder kleinsten Durchmesser auf der einen Seite begrenzt?

**Aufgabe 31.** Wie Nr. 26; der ursprüngliche Querschnitt sei parabolisch, einem Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$ einbeschrieben. (Nach Holzmüller, Ingenieur-Mathematik.)

**Lösung.** $\xi = a \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$ und $\eta = \frac{4}{5}b$ sind die Seiten des gesuchten Rechtecks.

**Aufgabe 32.** a) Wie Nr. 26, der ursprüngliche Querschnitt des Stammes ist aber ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$.

**Lösung.** $\xi = \frac{a}{3}(2 - \sqrt{3})$; $\eta = \frac{h(a - \xi)}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (a - \xi) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.

b) Ebenso, nur ist der ursprüngliche Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $a$ und Höhe $h$.

c) Desgleichen, jedoch ist der ursprüngliche Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c$ und der Höhe $h$ oder mit den Katheten $a$ und $b$.

**Aufgabe 33.** Ein Segelschiff wird von einem Winde fortgetrieben, dessen Geschwindigkeit $V$ ist; wie groß ist die Geschwindigkeit $v$ des Schiffes, wenn das Segel mit der Richtung des Windes einen Winkel $\varphi$ und mit der Richtung des Schiffes einen Winkel $\psi$ bildet? Zahlenbeispiel: $V = 4$ m, $\varphi = 70^0 40'$, $\psi = 61^0 15'$.

**Lösung.** Mit Benutzung des Satzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten ergiebt sich leicht $v = V \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi = 3{,}309$ m.

Zusatz. Der Wind bildet mit der Kursrichtung eines Segelschiffes den Winkel $\alpha$; welchen Winkel muß das Segel mit der Richtung des Schiffes bilden, damit das Schiff möglichst schnell vorwärts kommt?

**Lösung.** Es ergiebt sich leicht, daß $\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin\beta = M$ d. h. ein Maximum werden muß; dies ist aber gleich $\frac{1}{2}[\cos(\alpha - 2\beta) - \cos\alpha]$. Der letzte Ausdruck wird für $\alpha - 2\beta = 0$ ein Maximum, also $\beta = \frac{1}{2}\alpha$; d. h. das Segel muß den Winkel halbieren, den die Windrichtung mit der Richtung des Schiffes bildet.

**Aufgabe 34.** Dem Kurs eines Schiffes weht der Wind gerade entgegen. Unter welchem Winkel muß man im Zickzack fahren, um möglichst schnell vorwärts zu kommen, wenn die Richtung der Segel den vom Schiff und der Windrichtung gebildeten Winkel halbiert?

**Lösung.** Man muß im Zickzack fahren, sodaß alle Winkel $60^0$ betragen. Der Weg bis zum Ziel wird dadurch verdoppelt. Anmerkung. Man kann die Aufgabe dahin verallgemeinern, daß der Kurs des Schiffes und die Richtung des Windes den Winkel $\beta$ bilden sollen. Stets ergiebt sich $\alpha = \frac{1}{3}\beta$. Nach dem Wenden des Schiffes vertritt $4R - \beta$ die Stelle von $\beta$, so daß $\alpha' = \frac{1}{3} \cdot (4R - \beta)$ ist.

Der Zickzack hat stets den Winkel von $60^0$. Seine Lage wird bestimmt durch die Halbierungslinie des Winkels zwischen der Zielrichtung und der Richtung des herkommenden Windes. Seine Länge ist bei beliebig langen Zügen stets $2a \cdot \cos \frac{1}{3}(180^0 - \beta)$, wo $a$ der gerade Weg zum Ziele ist.

**Aufgabe 35.** Um $A$ ist eine starre Gerade $AB = a$ drehbar. An dem freien Ende derselben ist ein genügend langer Faden befestigt, welcher über die Rolle $C$ geht und durch ein Gewicht $P$ gespannt wird. Wann ist das durch $P$ auf $AB$ ausgeübte Drehungsmoment ein Minimum oder Maximum, wenn $AC = b$ ist?

**Aufgabe 36.** Übertragung mechanischer Arbeit durch die Kurbel. Der Kolben einer Dampfmaschine, einer Pumpe oder dergl. wirkt in der Richtung $DCA$, längs welcher sich die Kolbenstange $DC$ hin und her bewegt. Der Druck, den die Schubstange $CB$ gegen den Zapfen $B$ der Kurbel $BA$ ausübt, ist in der Richtung $AC$ genommen gleich dem Kolbendruck $P$, welcher während eines Hubes konstant gedacht werde. $AB = r$. Bei welcher Stellung von $AB$ ist der Druck am wirksamsten?

**Aufgabe 37.** Welches muß die Neigung einer schiefen Ebene von gegebener Länge sein, damit ein Körper auf ihr in der kürzesten Zeit heruntergleitet?

**Aufgabe 38.** Welches muß der Neigungswinkel einer schiefen Ebene von gegebener Basis sein, damit ein Körper auf ihr in der kürzesten Zeit herabgleitet?

**Lösung.** a) Die Basis heiße $b$, der Neigungswinkel $\alpha$, die Zeit $t$. Die Beschleunigung ist $g \,.\, \sin \alpha$. Es ist $\frac{b}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2$ oder $t = 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{g \,.\, \sin 2\alpha}}$. Es muß also $\alpha = 45^0$ sein, damit $t$ ein Minimum wird. b) Soll auf die Reibung Rücksicht genommen werden und ist der Reibungskoeffizient $\varrho = \operatorname{tg} \varepsilon$, so ist die Beschleunigung $\frac{g \,.\, \sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$, also muß $\sin(\alpha - \varepsilon) \,.\, \cos \alpha$ ein Maximum werden, damit $t$ ein Minimum wird. Nun läßt sich leicht ableiten, daß $\sin(\alpha - \varepsilon) \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot [\sin(2\alpha - \varepsilon) - \sin \varepsilon]$ ist. Es muß also $\alpha = 45^0 + \frac{1}{2} \varepsilon$ sein.

**Aufgabe 39.** Es sollen mittelst einer schiefen Ebene Steine von einem Punkte $A$ nach irgend einem Punkte $B$ einer vertikalen Wand in der kürzesten Zeit hinabgerollt werden.

**Lösung.** Nenne den Abstand des Punktes $A$ von der festen Wand $AC = b$ und $\sphericalangle CAB = \alpha$, so ist die Lösung wie in der letzten Aufgabe.

**Aufgabe 40.** Ein Körper (Schlitten) soll eine schiefe Ebene von der Länge $l$ hinablaufen und sich dann wagerecht weiterbewegen. Welche Neigung muß die schiefe Ebene haben, damit der Körper möglichst weit in der Horizontalebene fortlaufe?

**Lösung:** $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha = 35{,}2645^0.$

**Aufgabe 41.** Wie Nr. 40, nur soll die Reibung auf der schiefen Ebene Berücksichtigung finden Der Reibungskoeffizient sei $\varrho = \operatorname{tg} \varepsilon$.

**Lösung:** $\cos(2\alpha - \varepsilon) = \frac{1}{3} \cos \varepsilon$; z. B. $\varrho = \operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}04$, $\alpha = 36^0 25' 4''$ oder $\varrho = 0{,}36$, $\alpha = 45^0 45' 37''$.

Zusatz. Wie weit rollt der Körper in der Horizontalebene, wenn dort dieselbe Reibung wie auf der schiefen Ebene stattfindet? Die gesuchte Länge heiße $x$, es ist $2g \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot x = \frac{2gl \,.\, \sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \cdot \cos^2 \alpha$, also $x = \frac{l \,.\, \sin(\alpha - \varepsilon) \,.\, \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$. Für $\varrho = 0{,}04$ wird $x = 9{,}09 l$; für $\varrho = 0{,}36$ wird $x = 0{,}63 l$.

**Aufgabe 42.** Ein Körper vom Gewichte $P$ werde auf einer Horizontalebene fortgezogen mit einer Kraft $K$, welche mit der Horizontalebene einen Winkel $\alpha$ bildet. Diese Kraft habe nur die

Reibung, die $P$ auf der Unterlage verursacht, zu überwinden. Bei welchem Winkel $\alpha$ wird die Zugkraft ein Minimum?

**Lösung.** Von der Kraft $K$ dient die Komponente $K . \cos\alpha$ zur Fortbewegung der Last, $K . \sin\alpha$ wirkt dem Gewichtsdruck $P$ entgegen. Die Reibung ist also proportional $(P - K . \sin\alpha)$. Der Reibungskoeffizient sei $\varrho = \operatorname{tg}\varepsilon$. Es ist $K\cos\alpha = \varrho . (P - K\sin\alpha)$, also $K = \frac{\varrho . P}{\cos\alpha + \varrho . \sin\alpha}$. Damit $K$ ein Minimum wird, muß $\cos\alpha + \varrho\sin\alpha$ oder $\cos\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon\sin\alpha$ ein Maximum werden. Nun ist $\cos\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon . \sin\alpha = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}$, es muß daher $\alpha - \varepsilon = 0$ oder $\alpha = \varepsilon$ werden, um den Maximalwert zu erhalten; dann ist $K = P . \sin\varepsilon = \frac{P . \varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2}}$ das Minimum der Zugkraft. Bei Fuhrwerken auf schlechten Straßen ist $\varrho = \operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}07$; dies ergiebt $\varepsilon = 4^0$. Folglich ist die günstigste Richtung der Zugstange um $4^0$ zur horizontalen Bahn geneigt. Zusatz. Benutze die Schellbachsche Methode zur Ermittelung des Maximums von $\cos\alpha + \varrho . \sin\alpha$.

**Aufgabe 43.** Bis zu welcher Höhe steigt ein mit der Geschwindigkeit $c$ unter dem Winkel $\alpha$ schief aufwärts geworfener Körper?

**Lösung.** a) Nach $t$ Sekunden hat der Körper die Höhe $y = c . \sin\alpha . t - \frac{1}{2} g t^2$ erreicht. Benutze die Schellbachsche Methode, führe $t_1$ und $t_2$ ein, so daß für diese Zeiten die Höhe denselben Wert erhält. Es ist $c . \sin\alpha . (t_1 - t_2) - \frac{1}{2} g (t_1{}^2 - t_2{}^2) = 0$ oder $c . \sin\alpha - \frac{1}{2} g (t_1 + t_2) = 0$. Setze $t_1 = t_2$, so ist $t = \frac{c . \sin\alpha}{2g}$ die zur Erreichung der Maximalhöhe nötige Zeit. Die größte Höhe ist dann $y = \frac{c^2 . \sin^2\alpha}{2g}$. b) Es ist $y = c\sin\alpha . t - \frac{1}{2} g t^2$. Der nach $t$ Sekunden erreichte horizontale Abstand ist $x = c . \cos\alpha . t$. Eliminiere aus beiden Gleichungen $t$, so ist $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c^2 \cos^2\alpha}$ die Gleichung der Wurflinie. Dies ist eine Parabel. Um die Gleichung auf die Form der Scheitelgleichung der Parabel zu bringen. $\xi^2 = 2p\eta$, setze $x - \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g} = \xi$ und $\eta = -y + \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$. Daraus ersieht man sofort, daß die größte Höhe gleich $\frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$ und der horizontale Abstand in diesem Falle $\frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}$ sein muß. c) Wenn die größte Höhe erreicht ist, ist die Geschwindigkeit in der Richtung der $y$-Achse gleich null. Nun ist diese Geschwindigkeit $v_y = c . \sin\alpha - gt$. Ist dieselbe null, so ist $t = \frac{c . \sin\alpha}{g}$ u. s. w.

**Aufgabe 44.** Bei welchem Elevationswinkel ist die Zeit zur Erreichung der Maximalhöhe ein Maximum? $\alpha = 90^0$!

**Aufgabe 45.** Wann ist die lebendige Kraft eines mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ unter dem Elevationswinkel $\alpha$ geworfenen Körpers ein Minimum?

**Lösung.** Es ist $v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2$. Nun ist $v_x = c . \cos\alpha$, also unveränderlich, $v_y{}^2$ ist 0, wenn die Maximalhöhe erreicht ist. Dann ist demnach auch die lebendige Kraft ein Minimum. Praktische Bedeutung beim Auffangen eines geworfenen Gegenstandes.

**Aufgabe 46.** Unter welchem Elevationswinkel $\alpha$ muß ein Körper bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit $c$ geworfen werden, damit die Wurfweite ein Maximum ist?

**Lösung.** Um die Wurfweite zu erhalten, setze in der Gleichung der Wurflinie $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{c^2 \cos^2\alpha}$ die Höhe $y = 0$; man erhält die Wurfweite $w = \frac{c^2 . \sin^2\alpha}{g}$. Ist $\alpha = 45^0$, so ist $w$ ein Maximum.

**Aufgabe 47.** Dieselbe Aufgabe für den Fall zu lösen, daß das Gelände von der Anfangsstelle des Wurfes an gleichmäßig ansteigt und den Winkel $\beta$ mit der Horizontalebene bildet.

**Lösung.** Hat der Punkt, in welchem die schiefe Ebene von einem unter dem Elevationswinkel $\alpha$ geworfenen Körper getroffen wird, die Koordinaten $x$ und $y$, so ist $y = x\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 c^2 \cos^2\alpha}$, also

$x = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \frac{2c^2 . \cos^2\alpha}{g} = \frac{2\sin(\alpha - \beta) . \cos\alpha . c^2}{g . \cos\beta}$. Damit nun die Wurfweite ein Maximum wird, muß $2\sin(\alpha - \beta) . \cos\alpha = M$ sein. Nun ist $2\sin(\alpha - \beta) . \cos\alpha = \sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta$. Es muß also $2\alpha - \beta = 90^0$ oder $\alpha = 45^0 + \frac{1}{2}\beta$ sein.

Zusatz. Am Fuße eines Berges, der unter dem Winkel $\beta$ ansteigt, soll eine Kanone den Berg hinauf abgefeuert werden. Wie muß man den Lauf richten, um einen möglichst fernen Punkt des Berges zu treffen? Beispiel: $\beta = 10^0$. Unter welchem Winkel mußte die Kugel abgeschossen werden, um einen in der schiefen Ebene um die Strecke $w$ entfernten Punkt zu treffen?

**Aufgabe 48.** Wie Nr. 47, jedoch soll das Gelände sich neigen und den Winkel $\beta$ mit der Horizontalebene bilden. Ersetze $+\beta$ durch $-\beta$.

**Aufgabe 49.** Unter welchem Elevationswinkel muß ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ geworfen werden, damit eine um Strecke $a$ entfernte vertikale Wand möglichst hoch getroffen werde?

**Lösung.** $\operatorname{tang}\alpha = \frac{c^2}{ag}$.

**Aufgabe 50.** Beim Prüfen einer Feuerspritze zeigte sich, daß sie den senkrecht aufsteigenden Strahl $h$ Meter hoch treiben kann. Auf welchen Punkt einer $a$ Meter entfernten Wand muß man zielen, um mit dieser Spritze einen möglichst hohen Punkt zu treffen?

**Lösung.** Wie Nr. 49; $c^2 = 2gh$, also $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2h}{a}$.

**Aufgabe 51.** Wie groß ist beim Foucaultschen Pendelversuch unter der geographischen Breite $\varphi$ die Ablenkung in einer Stunde? Beispiel: $\varphi = 51^0 22'$. Zusatz. Wo auf der Erdoberfläche ist die Ablenkung ein Minimum?

**Aufgabe 52.** Wo auf der Erdoberfläche ist das Gewicht eines Körpers ein Maximum, wo ein Minimum, wenn man die Erde als Kugel mit dem Radius $r = 6370$ km ansieht? Wie groß ist die durch die Abnahme der Centrifugalkraft hervorgerufene Zunahme eines Körpers an Gewicht, wenn derselbe vom Äquator nach einem Orte mit der geographischen Breite $\varphi$ gebracht wird? Der Körper hat, an einem der Pole gewogen, das Gewicht 1000 kg.

**Aufgabe 53.** Von welcher Höhe muß eine vollkommen elastische Kugel auf den Boden fallen, damit sie einen bestimmten Punkt ihrer ersten Bahn, der um $h$ über dem Boden liegt, in der kürzesten Zeit wieder erreicht?

**Lösung.** $x = \frac{4}{3}h$.

**Aufgabe 54.** Ein vollkommen elastischer Körper, welcher die vertikale Strecke $h$ durchfallen hat, wird von einer um $\alpha^0$ gegen die Horizontalebene geneigten schiefen Ebene so zurückgeworfen, daß er eine parabolische Wurflinie beschreibt. Welche Neigung muß die schiefe Ebene haben, damit der Körper, wenn er zuerst wieder die Ebene trifft, eine möglichst große horizontale Entfernung von der ursprünglichen Fallrichtung hat?

**Lösung.** Der Körper erlangt durch den Fall die Geschwindigkeit $c = \sqrt{2gh}$ und wird so zurückgeworfen, daß der Elevationswinkel $90^0 - 2\alpha$ ist. Nun ist die sogenannte schiefe Wurfweite bei dem Elevationswinkel $\alpha$ und dem Neigungswinkel $\beta$ gleich $W = \frac{2c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cdot \cos^2\beta}$, also der horizontale Abstand $x = \frac{2c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cdot \cos\beta}$. Hierin ist für $\alpha$ $90^0 - 2\alpha$ und für $\beta$ $\alpha$ zu setzen, dann ist $x = \frac{2c^2 \sin 2\alpha}{g}$ d. h. $x$ ist für $\alpha = 45^0$ ein Maximum. Die schiefe Wurfweite selbst wäre natürlich für $\alpha = 90^0$ möglichst groß gewesen.

**Aufgabe 55.** Gerader zentraler Stoß unelastischer Körper. Die Stoßrichtung fällt mit der Bewegungsrichtung zusammen und geht durch die Schwerpunkte. Ein Körper mit der Masse $M$ und der Geschwindigkeit $C$ trifft auf einen in derselben Richtung sich bewegenden Körper mit der Masse $m$ und der Geschwindigkeit $c$. Die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper wird $v = \frac{MC + mc}{M + m}$. Wie groß muß $c = x$ bei gegebenen Werten für $M$, $m$ und $C$ sein, damit der Zuwachs an lebendiger Kraft beim zweiten Körper ein Maximum wird?

**Lösung.** Der Zuwachs des zweiten Körpers an lebendiger Kraft ist

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m x^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{(MC + mx)^2}{(M + m)^2} - x^2\right].$$

Es muß $(MC + mx)^2 - (M + m)^2 x^2$ ein Maximum werden. Nach der Schellbachschen Methode erhält man leicht $x = \frac{m \cdot C}{M + 2m}$. Ist $m = M$, so ist $x = \frac{C}{3}$ die gesuchte Geschwindigkeit. Weise an einem Beispiel nach, daß es sich um ein Maximum handelt. Für $M = m$ ist der Zuwachs für $x = \frac{1}{3} C$ gleich $0{,}167 \cdot mC^2$, für $x = 0$ ist er $0{,}125\, mC^2$, für $x = \frac{1}{2} C$ ist er $0{,}156\, mC^2$, für $x = \frac{2}{3} C$ $0{,}125\, mC^2$. Für den Fall, daß $C = c$ oder daß $c = -C$ ist, findet keine Übertragung statt. Ist $c > C$ oder ist $c < -C$, so findet beim zweiten Körper sogar ein Verlust an lebendiger Kraft statt. Für $-C < c < +C$ findet ein Zuwachs statt, dabei muß für ein bestimmtes $c$ zwischen diesen Grenzen der Zuwachs ein Maximum sein. Ist $M$ nicht gleich $m$, so findet beim zweiten Körper nur Zuwachs an lebendiger Kraft statt zwischen den Grenzen $-\frac{MC}{m} < c < +C$.

**Aufgabe 56.** Gerader zentraler Stoß vollkommen elastischer Körper, sonst wie Nr. 55.

**Lösung.** Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeit des ersten Körpers $V = C - \frac{2m \cdot (C - c)}{M + m}$, die des zweiten $v = c + \frac{2M(C - c)}{M + m} = \frac{2MC - c(M - m)}{M + m}$. Es ist $c = x$. Die Zunahme der lebendigen Kraft des zweiten Körpers ist $\frac{1}{2} m (v^2 - x^2)$. Daher muß

$$[2MC - x(M - m)]^2 - (M + m)^2 \cdot x^2$$

ein Maximum werden. Nach der Schellbachschen Methode ergiebt sich für diesen Fall leicht $x = -\frac{C \cdot (M - m)}{2m}$. Ist z. B. $M = m$, so ist $x = 0$. Wenn nämlich der zweite Körper anfangs in Ruhe ist, so erhält er nach dem Stoße die ganze lebendige Kraft des ersten Körpers, da dessen Geschwindigkeit null wird und bei dem Stoß elastischer Körper bekanntlich kein Verlust an lebendiger Kraft eintritt. Daraus erhellt sofort, daß es sich um einen Maximalwert handelt. Führe diesen Nachweis aber außerdem noch entsprechend wie in Nr. 55.

**Aufgabe 57.** Maximalleistung eines unterschlächtigen Wasserrades. Eine Wassermasse $M$ fließt mit einer Geschwindigkeit $V$ gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades. Die Umfangsgeschwindigkeit der Radschaufeln sei $v$. Bei welchem Verhältnis zwischen $V$ und $v$ wird die Arbeit ein Maximum?

**Lösung.** Die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Kraft mal Weg. Ist die Geschwindigkeit des Rades null, so ist auch die Arbeit null. Ist $v = V$, d. h. bewegt sich das Rad mit derselben Geschwindigkeit wie das Wasser, so ist der auf die Schaufeln ausgeübte Druck und also auch die Arbeit gleich null. Dazwischen muß ein besonders günstiges Verhältnis zwischen $v$ und $V$ vorhanden sein. Der Druck des fließenden Wassers ist proportional der Wassermasse $M$ und der Differenz $V - v$, der Weg der Radschaufeln in einer Sekunde ist $v$. Die Arbeit des Wassers in einer Sekunde ist also $A = k \cdot M(V - v) \cdot v$, wo $k$ eine Konstante ist. $v = \frac{1}{2} V$ ist derjenige Wert, für welchen die Arbeitsleistung des Wassers ein Maximum wird.

Zusatz. In der Nähe des Maximums oder Minimums ändert sich eine Funktion nur langsam; Nachweis durch die graphische Darstellung von $A$ als Funktion von $v$.

**Aufgabe 58.** Wann ist das Trägheitsmoment einer Geraden $AB = l$ ein Minimum, wenn die Achse $O$ die Gerade rechtwinkelig kreuzt und von derselben den kürzesten Abstand $OC = a$ hat?

**Lösung.** $BC$ sei gleich $b$, so ist das Trägheitsmoment $T = \frac{Ml^2}{12} + M \cdot \left[\left(\frac{l}{2} + b\right)^2 + a^2\right]$, wenn $M$ die Masse der Geraden ist. $T$ ist ein Minimum für $b = -\frac{l}{2}$, d. h. $C$ muß mit der Mitte von $AB$ zusammenfallen.

**Aufgabe 59.** Wann wird das Trägheitsmoment eines Rechtecks von gegebenem Inhalt $J$ ein Maximum oder Minimum, wenn die Drehungsachse auf der Ebene des Rechtecks im Schwerpunkt senkrecht steht?

**Lösung.** Die Seiten sollen $a$ und $b$, die Masse $M$ heißen. Es ist $T = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$. Man findet leicht, daß bei gegebenem Inhalt $J = ab$ $T$ ein Minimum wird für $a = b = \sqrt{J}$ und ein Maximum für $a = 0$ und $b = \infty$ oder $a = \infty$ und $b = 0$. Es ist auch $T = \frac{M}{12}d^2$, wenn $d$ die Diagonale ist. Man kann die Lösung also auch zurückführen auf die geometrische Aufgabe: Wann ist bei gegebenem Inhalt eines Rechtecks die Diagonale ein Minimum? Es ist $d^2 = a^2 + b^2$ und $J = ab$, also $2a = \sqrt{d^2 + 2J} + \sqrt{d^2 - 2J}$, d. h. $d^2 \geq 2J$, wenn $a$ reell bleiben soll. $d^2 = 2J$ ergiebt den kleinsten Wert von $d$. Dann ist $a = b$. Zusatz. Bei einem rechtwinkeligen Parallelepiped mit den Kanten $a$, $b$ und $c$ ist, wenn die Achse parallel mit $c$ durch den Schwerpunkt geht, ebenfalls $T = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$, also ein Minimum für $a = b$, wenn $c$ konstant sein soll.

**Aufgabe 60.** Wann ist das Trägheitsmoment eines rechtwinkeligen Dreiecks bei gegebenem Inhalt ein Minimum, wenn die Achse senkrecht zur Ebene desselben steht und durch den Schwerpunkt oder den Scheitel des rechten Winkels oder die Mitte der Hypotenuse geht?

**Lösung.** Die Katheten müssen gleich sein.

**Aufgabe 61.** Die entsprechende Aufgabe für ein gleichschenkliges Dreieck zu lösen.

**Lösung.** Die Grundlinie heiße $a$, die Schenkelseite $b$, die Höhe zur Grundlinie $h$. Es ist $J = \frac{ah}{2}$ gegeben. A) Die Achse geht durch den Schwerpunkt. Es ist $T = M \cdot \frac{2b^2 + a^2}{36} = M\frac{4h^2 + 3a^2}{72}$. Für $a = \frac{2\sqrt{J}}{\sqrt[4]{3}}$ und $h = \frac{2J}{a} = \sqrt{J} \cdot \sqrt[4]{3}$ wird $T$ ein Minimum. Dann ist das Dreieck gleichseitig.

B) Die Achse geht durch die Spitze. $T = M \cdot \left(\frac{b^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right) = \frac{M}{24}(a^2 + 12h^2)$. Bei gegebenem Inhalt ist $T$ ein Minimum für $a = 2\sqrt{J} \cdot \sqrt[4]{3}$ und $h = \sqrt{J} : \sqrt[4]{3}$.

C) Die Achse geht durch die Mitte der Grundlinie. Es ist $T = \frac{M \cdot b^2}{6} = \frac{M}{6}\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)$. Für einen gegebenen Inhalt wird $T$ ein Minimum, wenn $a = 2\sqrt{J}$ und $h = \sqrt{J} = \frac{1}{2}a$ ist.

**Aufgabe 62.** Wann ist das polare Trägheitsmoment der Ellipse mit dem Inhalt $J$ ein Minimum?

**Lösung.** $T = \frac{J}{4} \cdot (a^2 + b^2)$, wenn $a$ und $b$ die große und kleine Achse der Ellipse sind. $J = ab\pi$. $T$ wird ein Minimum für $a = b$; dann wird aus der Ellipse ein Kreis.

**Aufgabe 63.** Wenn man in der vertikalen Seitenwand eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes, welches auf einer horizontalen Ebene steht, in verschiedenen Höhen Öffnungen anbringt und das Gefäß immer ganz mit Flüssigkeit gefüllt erhält, so stellt jeder Flüssigkeitsstrahl eine Parabel dar.

Welcher Strahl fließt mit der größten Geschwindigkeit aus? Welcher erzielt die größte Sprungweite auf der horizontalen Ebene?

**Lösung.** Die Ausflußgeschwindigkeit ist so groß, als wenn der Abstand vom Niveau der Flüssigkeit bis zur Öffnung durchfallen wäre. Unten ist dieselbe also am größten. Die Sprungweite ist jedoch für eine Öffnung ganz unten oder oben ein Minimum. Die Höhe der Flüssigkeit sei $h$, der Abstand der Öffnung von der Horizontalebene $x$, vom Niveau $y$; die Ausflußgeschwindigkeit ist dann $v = \sqrt{2gy}$. Ist $t$ die Zeit bis zur Erreichung der Horizontalebene, so ist $x = \frac{1}{2}gt^2$ und $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. Die Sprungweite ist $vt = 2\sqrt{xy}$. Da $x + y = h$ ist, so ist $xy$ ein Maximum, wenn $x = y = \frac{1}{2}h$ ist. Errichtet man über der vertikalen Seitenlinie einen Halbkreis, so ist $\sqrt{xy}$ gleich der auf der Seitenlinie senkrechten Sehne. Dieselbe ist ein Maximum, wenn $x = y = \frac{1}{2}h$ ist.

**Aufgabe 64.** Wie Nr. 63, jedoch steht das Gefäß am Fuße einer ansteigenden schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\beta$ oder am Rande einer horizontalen Ebene und einer abfallenden Ebene mit demselben Neigungswinkel.

**Aufgabe 65.** a) Eine Torricellische Röhre von 1 m Länge werde bis zu einer Höhe $v = 50$ cm mit Quecksilber gefüllt und dann mit dem offenen Ende 2 cm tief in Quecksilber getaucht. Das Gefäß, in welchem sich das letztere befindet, sei so weit, daß die Niveauveränderung, die das aus der Röhre ausfließende Quecksilber verursacht, in der Rechnung vernachlässigt werden kann. Wie groß ist die Ausdehnung der Luft, welche ursprünglich $v = 50$ cm der Röhre einnahm, bei einem äußeren Barometerstand von 76 cm?

**Lösung.** Die Ausdehnung sei gleich $x$ cm. Nach dem Mariotteschen Gesetz ist

$$76 \cdot 50 = [76 - (98 - 50 - x)] \cdot (50 + x).$$

Also ist $x = 23{,}6$. Nachweis durch das Experiment.

b) Die Ausdehnung $x = 23{,}6$ cm ist gegeben. Berechne die anfängliche Länge $v$ der Luftsäule.

**Lösung.** $v : (v + x) = [76 - (98 - v - x)] : 76$. Also $v = 49 - x \pm \sqrt{49^2 - 98x + 22x}$. Für $x = 23{,}6$ ergiebt sich $v_1 = 50$ cm und $v_2 = 0{,}8$ cm.

c) Wann ist die Ausdehnung ein Maximum? Es muß $49^2 - 98x + 22x = 0$, d. h. $x = 31{,}6$ cm und $v = 17{,}4$ cm sein.

Zusatz. Löse dieselbe Aufgabe für eine 77 cm lange Röhre, die nur 1 cm tief eingetaucht wird. Es ist dann $v : (v + x) = (v + x) : 76$. Stelle $x$ als $f(v)$ graphisch dar. Es ist $v^2 + 2vx + x^2 = 76v$, also $v = 38 - x \pm \sqrt{38^2 - 76x}$ und $38^2 - 76x = 0$, oder $x = 19$ und $v = 19$ für den Fall des Maximums der Ausdehnung.

d) Wann ist, wenn $v$ wieder die ursprüngliche Höhe der abgeschlossenen Luftsäule und $x$ die Ausdehnung bezeichnet, für eine 77 cm lange Röhre, die 1 cm tief eingetaucht ist, $x = v$ oder $\frac{1}{2}v$ oder $\frac{1}{3}v$ oder $\frac{3}{4}v$ oder $\frac{2}{3}v$ oder $\frac{1}{4}v$? Antwort. $x = 19$ oder $33{,}78$ oder $42{,}75$ oder $24{,}82$ oder $27{,}36$ oder $48{,}64$.

**Aufgabe 66.** Ein Körper bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v$ auf dem Umfange eines Kreises $O$ mit dem Radius $r$. Wie erscheint die Bewegung von einem sehr weit entfernten Punkt $P$ der Ebene des Kreises aus betrachtet? Wann ist von $P$ aus betrachtet die Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum? Wie groß erscheint die Beschleunigung? Bewegung der Sonnenflecke, wenn die Erde sich in der Ebene des Sonnenäquators befindet.

**Aufgabe 67.** Freier Fall eines Körpers in einem durch den Erdmittelpunkt gehenden engen Kanal. Die Erdmasse wird als homogen vorausgesetzt. Wann ist die Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum?

**Aufgabe 68.** Hallström hat die Ausdehnung des Wassers bei Temperaturen innerhalb 0,8 und 32,5 Grad Celsius durch 64 Versuche bestimmt und folgende Formel gefunden:

$$s = 1 + 0{,}000052939\,t - 0{,}0000065322\,t^2 + 0{,}00000001445\,t^3,$$

worin $s$ das spezifische Gewicht und $t$ die Temperatur des Wassers bezeichnet. Wann ist die Dichtigkeit des Wassers ein Maximum?

**Lösung.** Wir setzen $s = 1 + \alpha t - \beta t^2 + \gamma t^3$ und führen $t_1$ und $t_2$ in bekannter Weise ein, sodaß beide dasselbe $s$ ergeben. Dann ist $\alpha \cdot (t_1 - t_2) - \beta(t_1^2 - t_2^2) + \gamma(t_1^3 - t_2^3) = 0$. Dividiert man durch $t_1 - t_2$, so ist $\alpha - \beta(t_1 - t_2) + \gamma(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0$. Für den Fall des Maximums der Dichte ist $t_1 = t_2 = t$ zu setzen. Dann ist $\alpha - 2\beta t + 3\gamma t^2 = 0$ oder $t = \frac{\beta}{3\gamma} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{9\gamma^2}}$. Für das obere Vorzeichen der Quadratwurzel erhält man durch Einsetzen der Werte die Temperatur $t = 4{,}108$ Grad Celsius, bei welcher das Wasser die größte Dichtigkeit hat.

**Aufgabe 69.** Zwei Punkte $A$ und $B$, deren Entfernung gleich $2a$ ist, haben eine Ladung von je $+e$ Coulomb. Auf der Mittelsenkrechten, die auf $AB$ errichtet ist, sind die Punkte $X$ und $Y$ zu bestimmen, wo die abstoßende Kraft beider Elektricitätsmengen auf die positive Einheit ein Maximum ist.

**Lösung.** Auf einen Punkt im Unendlichen ($+\infty$ und $-\infty$) üben die Punkte keine abstoßende Kraft aus, ebenso nicht auf $C$, die Mitte von $AB$, da beide Kräfte sich dort gegenseitig aufheben. Das eine Maximum liegt also zwischen $C$ und $+\infty$, das andere zwischen $C$ und $-\infty$. Ein beliebiger Punkt $P$ der Mittelsenkrechten habe von $A$ oder $B$ die Entfernung $r$, es sei $\sphericalangle PAB = \alpha = \sphericalangle PBA$. Nun übt $A$ sowohl wie $B$ auf $P$, wenn dort die positive Einheit ist, die Abstoßung $\frac{e}{r^2} = \frac{e\cos^2\alpha}{a^2}$ aus. Diese Kräfte kann man in die Komponenten $\frac{e\cos^2\alpha}{a^2} \cdot \cos\alpha$ und $\frac{e\cos^2\alpha}{a^2} \cdot \sin\alpha$ zerlegen. Die ersteren heben sich auf, die letzteren verstärken sich, und $P$ erleidet die Gesamtabstoßung $K = \frac{2e\cos^2\alpha}{a^2}\sin\alpha$. Für den Fall des Maximums muß $\cos^2\alpha\sin\alpha$ oder $\sin\alpha - \sin^3\alpha$ möglichst groß sein. Wenn für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ $K$ denselben Wert hat, so ist $(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) - (\sin^3\alpha_1 - \sin^3\alpha_2) = 0$ oder

$$2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot [1 - (\sin^2\alpha_1 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin^2\alpha_2)] = 0.$$

Man dividiere durch $2 \cdot \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so ist entweder $\cos\alpha = 0$ d. h. $\alpha = \pm 90^0$, oder $3\sin^2\alpha = 1$ also $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Die beiden ersten Fälle ergeben das Minimum, die beiden letzten Werte das Maximum der Abstoßung, wenn man die Richtung der Bewegung nicht betrachtet. Analytisch stellen $\alpha = +90^0$ und $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Minimum, $\alpha = -90^0$ und $\sin\alpha = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum dar. Konstruiere $\alpha$ geometrisch, wenn $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist.

**Aufgabe 70.** 4 Punkte, welche die Ecken eines Quadrats bilden, sind gleich stark elektrisch geladen. Wann ist die Abstoßung auf die gleichnamige elektrische Einheit ein Maximum, wenn sich dieselbe auf einer Geraden bewegt, die im Schnittpunkt der Diagonalen auf der Ebene des Quadrats senkrecht steht?

**Aufgabe 71.** Ein dünner Kreisring ist elektrisch geladen; wann ist die Abstoßung auf die gleichnamige Einheit ein Maximum, wenn sich letztere auf einer Geraden bewegt, die im Mittelpunkte des Kreises auf der Ebene desselben senkrecht steht?

**Aufgabe 72.** a) Löse die Aufgabe 69 für den Fall, daß $A$ und $B$ der Sitz einer Kraft ist, die auf einen Punkt der Mittelsenkrechten nicht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, sondern einfach umgekehrt proportional der Entfernung abstoßend wirkt.

b) Desgleichen für den Fall, daß $A$ und $B$ der Sitz gleicher Kräfte ist, welche auf einen Punkt der Mittelsenkrechten umgekehrt proportional der 3. Potenz der Entfernung abstoßend wirken.

c) Giebt es ein Maximum oder Minimum, wenn die Kräfte in $A$ und $B$ auf einen Punkt der Mittelsenkrechten direkt proportional der Entfernung wirken (z. B. elastische Kräfte)?

**Aufgabe 73.** Auf einer Geraden befinden sich die Punkte $A$ und $B$ in der Entfernung $d$, $A$ hat eine Ladung $E$, $B$ $e$. In welchem Punkt der Geraden ist die Wirkung beider Elektricitätsmengen auf die positive Einheit a) null; b) ein Maximum oder Minimum? [$E$ und $e$ können gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben d. h. gleiche oder verschiedene Elektricitätsarten bedeuten.]

**Lösung.** a) Nach dem Coulombschen Gesetze ergiebt sich für einen Punkt zwischen $A$ und $B$ $\frac{E}{x^2} = \frac{e}{(d-x)^2}$, für einen Punkt der Verlängerung $\frac{E}{x^2} = \frac{e}{(x-d)^2}$, wenn $E$ und $e$ die absoluten Werte der Ladungen sind und $x$ der Abstand des Punktes von $A$ ist. Es ist $x = \frac{dE}{E-e} \pm \frac{d}{E-e}\sqrt{Ee}$. Es sei $E > e$. Sind beide Elektricitätsarten gleich, so giebt es nur einen Punkt zwischen $A$ und $B$, welcher der gesuchten Bedingung genügt, also hat nur das untere Zeichen Bedeutung; sind dagegen die Elektricitätsarten verschieden, so liegt der Punkt auf der Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus, also ist nur das obere Zeichen zu nehmen. Beispiel 1) $d = 7{,}5$ cm, $E = +20$ Coulomb, $e = +5$ Coulomb, $x = 5$ cm. 2) $d = 75$ cm, $E = 20$ Coulomb positiver Elektricität, $e = 5$ Coulomb negativer Elektricität, $x = 15$ cm.

b) Nimm $A$ als Koordinatenanfang, die Gerade $AB$ als Abscissenachse und zeichne für jeden Punkt der Geraden die von beiden Ladungen herrührende Kraftwirkung als Ordinate und zwar für die beiden in a) gegebenen Zahlenbeispiele. Erfolgt die Bewegung infolge der Gesamtwirkung nach rechts, so sei die Gesamtkraft positiv; erfolgt dieselbe nach links, so ist sie negativ zu nehmen. Aus der Betrachtung der erhaltenen Kurven geht hervor, daß für den Fall, daß $E$ und $e$ gleichnamig sind, kein Maximum oder Minimum im eigentlichen Sinne existiert. Ist $x = 0$ oder $x = d$, so ist die Kraftwirkung $\pm\infty$. Hat aber $A$ die Ladung von $E$ Coulomb positiver und $B$ $e$ Coulomb negativer Elektricität, so ändert sich die Kraftwirkung auf die positive Einheit zwischen $A$ und $B$ so, daß sie in $A$ $+\infty$ ist, dann abnimmt, hierauf wieder wächst und in $B$ wieder $+\infty$ ist. Es muß also zwischen $A$ und $B$ ein Minimum existieren. Auf der Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus ist die Wirkung zuerst $-\infty$ d. h. auf $B$ zu gerichtet, bei $x = \frac{d \cdot E}{E-e} + \frac{d}{E-e} \cdot \sqrt{Ee}$ ist sie null, dann wächst sie und ist im Unendlichen wieder null; es muß also auf der Verlängerung ein Maximum existieren. Für einen Punkt zwischen $A$ und $B$ wirken beide Kräfte in gleichem Sinne, $A$ stößt die positive Einheit ab, $B$ zieht sie an. $\frac{E}{x^2} + \frac{e}{(d-x)^2}$ muß ein Minimum werden, wenn $x$ der Abstand des Punktes von $A$ ist. Nach der Schellbachschen Methode ergiebt sich leicht

$$\frac{-2E}{x^3} + \frac{2e}{(d-x)^3} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d-x}{x} = \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{E}}, \quad \text{also} \quad x = \frac{d\sqrt[3]{E}}{\sqrt[3]{E}+\sqrt[3]{e}}.$$

Ist z. B. $E = 8e$, so ist $x = \frac{2}{3}d$; oder ist wie oben $d = 7{,}5$, $E = 20$, $e = 5$, so ist $x = 4{,}497$. Für einen Punkt der Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus wirken die von $A$ und $B$ ausgehenden Kräfte im entgegengesetzten Sinne auf die positive Einheit. $\frac{E}{x^2} - \frac{e}{(x-d)^2}$ muß ein Maximum werden. Man erhält leicht $x = \frac{d \cdot \sqrt[3]{E}}{\sqrt[3]{E}-\sqrt[3]{e}}$. Ist z. B. $E = 8e$, so ist jetzt $x = 2a$; oder ist $d = 7{,}5$, $E = 20$, $e = 5$, so ist $x = 20{,}277$.

**Zusatz.** Wie würde sich die letzte Aufgabe ändern, wenn die Elektricität nicht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, sondern einfach umgekehrt proportional der Entfernung oder umgekehrt proportional der 3. Potenz der Entfernung wirken würde?

**Aufgabe 74.** Zwei Punkte $A$ und $B$, deren Entfernung gleich $d$ ist, besitzen die Ladung $E$ bezw. $e$ positiver Elektricität; in welchem Punkt der Geraden $AB$ ist das Potential ein Minimum?

**Lösung.** Das Potential eines Punktes in Bezug auf einen anderen mit der Elektricitätsmenge $E$ ist $\frac{E}{x}$, wenn $x$ die Entfernung beider Punkte ist. Das Potential eines Punktes in Bezug auf mehrere Punkte ist $\sum\left(\frac{\pm E}{x}\right)$. Zwischen $A$ und $B$ muß ein Minimum existieren, da in $A$ und $B$ das Potential gleich $\infty$ wird und von $A$ auf $B$ zu und auch von $B$ auf $A$ zu abnimmt. $\frac{E}{x} + \frac{e}{d-x}$ soll ein Minimum werden. Nach der Schellbachschen Methode erhält man leicht

$$\frac{-E}{x^2} + \frac{e}{(d-x)^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d-x}{x} = \pm\sqrt{\frac{e}{E}} \quad \text{und} \quad x = \frac{d\sqrt{E}}{\sqrt{E}+\sqrt{e}}$$

für den Fall des Minimums, da das negative Zeichen keinen brauchbaren Wert liefert. Es ist auch $x = \frac{dE}{E-e} - \frac{d}{E-e}\sqrt{Ee}$, wenn $E > e$. Zahlenbeispiele: 1) $E = e$, $x = \frac{1}{2}d$; 2) $d = 90$, $E = 25$, $e = 16$, $x = 50$; 3) $d = 75$, $E = 20$, $e = 5$, $x = 50$. Zeichne die Kurve des Potentials für die Werte $d = 10$, $E = 10$, $e = 10$.

Zusatz. Haben $A$ und $B$ verschiedene Ladungen, so existiert kein Maximum oder Minimum zwischen $A$ und $B$. Berechne für diesen Fall den Punkt zwischen $A$ und $B$, wo das Potential null ist. $\frac{E}{x} - \frac{e}{d-x} = 0$ oder $x = \frac{dE}{E+e}$.

**Aufgabe 75.** Zwei Punkte $A$ und $B$, deren Entfernung $d$ ist, haben die Ladungen $E$ und $e$. $E$ ist positive, $e$ negative Elektricität, und $E > e$. Für welchen Punkt auf der Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus ist das Potential ein Maximum?

**Lösung.** a) Die Entfernung eines Punktes der Verlängerung von $A$ sei $x$. Für $x = \infty$ ist das Potential null. Für welchen Punkt der Verlängerung ist es ebenfalls null? $\frac{E}{x} - \frac{e}{x-d} = 0$ ergiebt $x = \frac{d \cdot E}{E-e}$. Zwischen $x = \infty$ und $x = \frac{d \cdot E}{E-e}$ ist $P$ nicht null, sondern positiv. Es muß also ein Maximum vorhanden sein. $\frac{E}{x} - \frac{e}{d-a} = M$. Nach der Schellbachschen Methode erhält man leicht $x = \frac{d \cdot (E - \sqrt{Ee})}{E-e}$. b) $\frac{E}{x} - \frac{e}{x-d} = M$ ergiebt auch $x = \frac{Md+E-e}{2M} \pm \sqrt{\frac{(Md+E-e)^2 - 4dEM}{4M^2}}$. Für den Fall des Maximums muß der Radikand gleich null sein. Daraus folgt $M = \frac{E+e}{d} \pm \frac{2\sqrt{Ee}}{d}$, worin jedoch nur das obere Zeichen brauchbar ist. Es ist dann $x = \frac{Md+E-e}{2M}$ oder $x = \frac{d(E-\sqrt{Ee})}{E-e}$ wie vorher.

**Aufgabe 76.** Wie sind $n$ Elemente, von denen jedes die elektromotorische Kraft $E$ und den inneren Widerstand $w$ besitzt, zu schalten, damit bei gegebenem äußeren Widerstande $W$ die Stromstärke $J$ ein Maximum wird?

**Lösung.** Nach dem Ohmschen Gesetze ist $J = \frac{E'}{W'}$, wenn $E'$ die gesamte elektromotorische Kraft und $W'$ der Gesamtwiderstand des Stromkreises ist. Schaltet man die sämtlichen Elemente hintereinander, so ist $J = \frac{nE}{nw + W}$. Schaltet man dagegen alle Elemente parallel, so ist $J = \frac{E}{\frac{w}{n} + W}$. Außerdem kann man die $n$ Elemente in $x$ Gruppen hintereinander und in jeder Gruppe $y$ Elemente parallel schalten. Dann ist $J = \frac{x \cdot E}{x \cdot \frac{w}{y} + W}$, worin $x \cdot y = n$ zu setzen ist. $J = \frac{nE}{xW + yW}$ muß also ein Maximum werden. Der Nenner $xw + yW$ muß ein Minimum werden. Es ist $xy = n$ und $xw \cdot yW = nwW$ gegeben. Die Summe $xw + yW$ ist ein Minimum, wenn die Summanden einander gleich werden, da das Produkt der Summanden konstant ist. Die entsprechende geometrische Aufgabe lautet: Welches Rechteck hat bei gegebenem Inhalt einen möglichst kleinen Umfang? Behandle übrigens den Ausdruck $xw + yW = F$ nach der Schellbachschen Methode. Man findet also: $xw = yW$ oder $W = \frac{w \cdot x}{y}$, d. h. der äußere Widerstand muß gleich dem inneren sein.

Zusatz. Die Schaltung der Rollen eines Grammeschen Ringes einer Dynamomaschine erfolgt in entsprechender Weise.

**Aufgabe 77.** a) Durch wieviel Centimeter eines Drahtes, von welchem 1 cm einen Widerstand von $R$ Ohm hat, muß man ein Element, welches die elektromotorische Kraft $E$ Volt und den inneren Widerstand $W$ Ohm hat, schließen, damit die in dem Drahte entwickelte Wärmemenge möglichst groß ist? Nach Joule ist dieselbe gleich dem Produkt aus dem Widerstand und dem Quadrat der Stromstärke.

b) Ein Element mit der elektromotorischen Kraft $E$ und dem inneren Widerstande $W$ soll durch einen $n$ cm langen Draht geschlossen werden; welchen Widerstand muß die Längeneinheit dieses Drahtes haben, damit die in dem Draht entwickelte Wärme möglichst groß ist?

**Aufgabe 78.** In der geraden Linie, welche zwei leuchtende Punkte $A$ und $B$ verbindet, soll diejenige Stelle $C$ bestimmt werden, wo die schwächste Beleuchtung stattfindet.

**Lösung.** Es sei $AB = a$, $AC = x$ und die Lichtintensität im Abstande 1 von $A$ und $B$ $J$ bezw. $i$. Dann ist die Lichtstärke in $C$ gleich $L = \frac{J}{x^2} + \frac{i}{(a-x)^2}$. Dieselbe wird ein Minimum für $x = \frac{a\sqrt[3]{J}}{\sqrt[3]{J} + \sqrt[3]{i}}$. (Siehe Nr. 73.) Zahlenbeispiele: 1) $J = i$; $x = \frac{1}{2}a$. 2) $J = 8i$; $x = \frac{2}{3}a$. 3) $J = 2i$; $x = 0{,}56\,a$.

**Aufgabe 79.** Unter welchem Einfallswinkel müssen die Strahlen einer Lichtquelle $L$ auf das um Strecke $c$ entfernte Flächenelement $S$ fallen, damit die Beleuchtung desselben möglichst stark ist?

**Aufgabe 80.** Wie hoch muß eine Lichtquelle $A$ senkrecht über dem Punkte $B$ der Ebene $E$ sich befinden, damit ein von $B$ um $a$ entfernter Punkt (Flächenelement) $C$ der Ebene am stärksten beleuchtet werde?

**Lösung.** Weise nach, daß ein Maximum vorhanden ist! Es sei $AB = x$, $AC = y$, $\measuredangle ABC = \alpha$ und die Lichtintensität im Abstande 1 von $A$ gleich $i$. Der Einfallswinkel in $C$ ist gleich $90^0 - \alpha$. Die Lichtstärke in $C$ ist dann $J = \frac{i \cdot \sin\alpha}{y^2}$ oder, da $y = \frac{a}{\cos\alpha}$,

$$J = \frac{i \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{a^2} = \frac{i \cdot}{a^2}\,(\sin\alpha - \sin^3\alpha).$$

$J$ ist ein Maximum, wenn $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $y = \frac{a}{\cos\alpha} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = \sqrt{y^2 - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. (Siehe Aufgabe 69.)

Zusatz. Eine Lichtquelle $C$ befindet sich in einer Ebene um Strecke $a$ von Punkt $B$ derselben Ebene entfernt. Wie hoch über der Ebene muß sich das Flächenelement $A$ (kleiner Spiegel) befinden, damit die Beleuchtung desselben möglichst groß ist, wenn dasselbe auf der in $B$ auf der Ebene errichteten Senkrechten parallel der Ebene verschoben wird?

**Aufgabe 81.** Zwei gleiche Lichtquellen $A$ und $B$ haben die Entfernung $a$. Auf $AB$ ist in der Mitte eine Senkrechte errichtet, auf welcher ein kleines Flächenelement (Punkt) $C$ verschoben werden kann, so daß seine Ebene immer auf der Mittelsenkrechten senkrecht steht, also parallel $AB$ ist. Wie groß muß der Abstand des Punktes $C$ von $AB$ sein, damit seine Belichtung möglichst groß ist?

**Aufgabe 82.** Zwischen der Lichtquelle $A$ und dem um Strecke $a$ entfernten Punkt $B$ befindet sich ein Hindernis für die Lichtstrahlen. Um $B$ zu beleuchten, soll ein kleiner Spiegel (Punkt) $S$ auf einer Geraden, die in der Mitte von $AB$ auf $AB$ senkrecht steht, parallel mit $AB$ so lange verschoben werden, bis die Belichtung des Punktes $B$ möglichst groß ist. Wie groß ist dann der Abstand des Spiegels von $AB$?

**Aufgabe 83.** Wie Nr. 79; die Lichtquelle $A$ bewege sich jedoch von $B$ aus auf einer Geraden, die mit der Ebene den Winkel $\beta$ bildet.

**Lösung.** $x^2 : [x^2(1+\operatorname{tg}^2\beta) - 2ax\operatorname{tg}\beta + a^2\operatorname{tg}^2\beta]^3$ muß ein Maximum werden, wenn $x$ der Abstand eines Punktes der Geraden von der Ebene ist. Es ergiebt sich

$$x = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{4(1+\operatorname{tg}^2\beta)} + \frac{a\operatorname{tg}\beta}{4(1+\operatorname{tg}^2\beta)}\sqrt{9+8\operatorname{tg}^2\beta}.$$

**Aufgabe 84.** Ein leuchtender Punkt bewegt sich auf einem Halbkreis, dessen Ebene senkrecht zu einer anderen Ebene steht. Wo muß sich dieser Punkt befinden, damit er ein in der Schnittlinie beider Ebenen liegendes unendlich kleines Flächenelement, welches vom Kreismittelpunkt den Abstand $a$ hat, am stärksten beleuchtet? Der Radius des Kreises heiße $r$. (Nach Maurer.)

**Lösung.** Ist $x$ die Entfernung eines Punktes des Halbkreises von dem Flächenelement, so muß $\frac{-(a^2-r^2)^2}{x^6} + \frac{2(a^2+r^2)}{x^4} - \frac{1}{x^2}$ ein Maximum werden. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{6(a^2-r^2)^2}{x^7} - \frac{8(a^2+r^2)}{x^5} + \frac{2}{x^3} = 0 \text{ ist oder } x^2 = 2(a^2+r^2) \mp \sqrt{a^4+14a^2r^2+r^4}.$$

Von diesen Werten ist der zweite unmöglich, da sonst $x > a + r$ wäre.

**Aufgabe 85.** a) Welches ist der Ort, von welchem aus die Strecke $AB$ immer in gleicher Größe erscheint?

b) Es stehe $CD$ senkrecht auf der Verlängerung von $AB$ in $C$; von welchem Punkte auf $CD$ erscheint die Strecke $AB$ am größten? Konstruiere den Kreis, welcher durch $A$ und $B$ geht und $CD$ in $X$ berührt. $Y$ sei ein beliebiger Punkt auf $CD$. Weise nach, daß $\sphericalangle AXB > \sphericalangle AYB$.

**Aufgabe 86.** In einer Ebene sind auf einer Geraden $L$ zwei Strecken $AB = a$ und $CD = c$ gegeben, $BC$ sei gleich $b$; es soll unter allen Punkten der Ebene, von denen man die beiden Strecken unter gleichem Winkel sieht, derjenige bestimmt werden, für welchen dieser Winkel ein Maximum ist.

**Lösung.** Weise nach, daß ein Maximum vorhanden ist. Es giebt immer zwei Punkte, von denen aus man $AB$ und $CD$ unter gleichem Winkel sehen kann. Diese beiden Punkte sind die Durchschnittspunkte zweier Kreise, deren Peripheriewinkel über $AB$ und $CD$ einander gleich sind. Der gesuchte Punkt ist der Berührungspunkt zweier Kreise, von denen $AB$ und $CD$ je eine Sehne ist. Die gemeinschaftliche Tangente $t$ beider Kreise möge $BC$ in $E$ schneiden, so ist, wenn man $BE = x$ setzt, $t^2 = x(a+x) = (b-x).(b+c-x)$ und $x = \frac{b.(b+c)}{a+2b+c}$. Eine andere Konstruktion der beiden Kreise ergiebt sich leicht mit Hilfe der Potenzlinie.

**Aufgabe 87.** Zwei Punkte $A$ und $B$, welche auf derselben Seite der Geraden $L$ liegen, haben von derselben die Entfernungen $AC = a$ und $BD = b$, die Projektion von $AB$ auf $L$ sei

$CD = c$; auf der Geraden ist der Punkt $E$ zu bestimmen, für welchen die Summe der Verbindungslinien mit $A$ und $B$ ein Minimum ist.

**Lösung.** a) Zeichne zu $B$ den symmetrischen Punkt $B'$ auf der andern Seite der Geraden, so daß $BD = BD'$ ist. Dann ist $BE = B'E$ und $AE + BE = AE + B'E$. Letzterer Ausdruck ist ein Minimum, wenn $AEB'$ eine gerade Linie ist. Dann ist $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED = \sphericalangle B'ED$, wie bei der Spiegelung. Ein Lichtstrahl, welcher an der Geraden reflektiert werden soll, gelangt also in einem Minimum der Zeit von $A$ nach $B$.

b) Setze $CE = x$, so ist $DE = c - x$ und $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$, $BE = \sqrt{b^2 + (c - x^2)}$. Es soll $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} = F$ ein Minimum werden. Führe $x_1$ und $x_2$ ein, so daß $F_1 = F_2$ wird. Dann ist $\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x_2^2}\right) + \left(\sqrt{b^2 + (c - x_1)^2} - \sqrt{b^2 + (c - x_2)^2}\right) = 0$. Um durch $x_1 - x_2$ dividieren zu können, multiplizieren und dividieren wir jetzt die beiden Wurzeldifferenzen mit der betreffenden Wurzelsumme, dann ist $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x_2^2}} + \dfrac{x_1^2 - x_2^2 - 2c(x_1 - x_2)}{\sqrt{b^2 + (c - x_1)^2} + \sqrt{b^2 + (c - x_2)^2}} = 0$. Dividieren wir durch $x_1 - x_2$ und setzen wir $x_1 = x_2 = x$, so ist $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \dfrac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$. Setzen wir nun $\sphericalangle CAE = \alpha$ und $\sphericalangle DBE = \beta$, so ist $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$ und $\dfrac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin\beta$, also $\sin\alpha - \sin\beta = 0$ oder $\alpha = \beta$.

**Aufgabe 88.** $A$ und $B$, zwei Punkte außerhalb eines Kreises $O$, sollen mit einem Punkt $C$ der Peripherie verbunden werden, so daß $AC + BC$ ein Minimum ist.

**Lösung.** Es muß $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO$ sein. Weise dies geometrisch nach mit Benutzung von Aufgabe 87a. Bei der Spiegelung an einem Kreise oder einer Kugel ist der Weg der Lichtstrahlen also auch ein Minimum. Zusatz. Weise ebenso nach, daß bei der Spiegelung an einer Ellipse der Weg der Strahlen ein Minimum ist.

**Aufgabe 89.** $A$ und $B$ seien zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden $L$; $A$ habe von $L$ den Abstand $AC = a$, $B$ den Abstand $BD = b$, und es sei $CD = c$. Auf $L$ ist der Punkt $E$ so zu bestimmen, daß der Weg $AE + BE$ in einem Minimum der Zeit zurückgelegt wird, wenn auf der einen Seite der Geraden die Geschwindigkeit $V$ und auf der andern die Geschwindigkeit $v$ herrscht. (Nachweis, daß bei der Brechung eines Lichtstrahles nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz das Licht in einem Minimum der Zeit von $A$ nach $B$ gelangt.)

**Lösung.** a) Setze $CE = x$, so muß $\dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} = \dfrac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v} = F$ ein Minimum werden. Verfährt man ganz wie in Nr. 87b), so erhält man $\dfrac{x}{V \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} = \dfrac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$ für den Fall des Minimums. Nun sei $\sphericalangle CAE = \alpha$ und $\sphericalangle EBD = \beta$, so ist $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$ und $\dfrac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin\beta$ also $\dfrac{\sin\alpha}{V} = \dfrac{\sin\beta}{v}$ oder $\sin\alpha = \dfrac{V}{v}\sin\beta$ oder $\sin\alpha = n\sin\beta$.

b) Geometrischer Nachweis; siehe Koppe, Physik.

**Aufgabe 90.** Wann ist die Ablenkung eines Lichtstrahles durch ein Prisma mit dem brechenden Winkel $\gamma$ ein Minimum?

**Lösung.** Der Brechungsexponent der Glassorte sei $n$, der Einfallswinkel eines Lichtstrahles an der ersten Begrenzungsfläche des Prismas sei $\alpha_1$, der Brechungswinkel $\beta_1$. An der Austrittsstelle bilde der Strahl mit dem Einfallslot im Glas den Winkel $\beta_2$ und außen den Winkel $\alpha_2$. Es kann sein 1) $\gamma = \beta_1 + \beta_2$, dann ist die totale Ablenkung $D = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$. Ist 2) $\beta_2 = 0$ und $\gamma = \beta_1$, so ist $D = \alpha_1 - \gamma$; und ist 3) $\gamma = \beta_1 - \beta_2$, so ist $D = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$.

Nachweis durch das Experiment, daß ein Minimum der Ablenkung existiert! Versuche die Lösung nach der Schellbachschen Methode, obwohl dieselbe etwas umständlich ist. Einfacher ist folgende Lösung:

$$\sin\alpha_1 = n\cdot\sin\beta_1 \quad \text{und} \quad \sin\alpha_2 = n\cdot\sin\beta_2, \quad \text{also}$$

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = n\cdot(\sin\beta_1 + \sin\beta_2) \quad \text{und} \quad \sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 = n\cdot(\sin\beta_1 - \sin\beta_2) \quad \text{oder}$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = n\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = n\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Die Division der letzten beiden Gleichungen ergiebt:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\beta_1-\beta_2}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Nun ist $\operatorname{tang}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} > \operatorname{tang}\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$, da $\alpha_1 > \beta_1$ und $\alpha_2 > \beta_2$, wenn $n > 1$ ist. Es ist daher $\operatorname{tang}\frac{\beta_1-\beta_2}{2} < \operatorname{tang}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ d. h. $\beta_1 - \beta_2 < \alpha_1 - \alpha_2$ oder im Grenzfall $\operatorname{tang}\frac{\beta_1-\beta_2}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = 0$, wenn $\beta_1 = \beta_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ ist. Also ist $\cos(\beta_1 - \beta_2) \geq \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$. Nun kann man $\alpha_1 > \alpha_2$ und somit auch $\beta_1 > \beta_2$ voraussetzen, da man willkürlich den größeren der beiden Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ mit dem ersten Buchstaben bezeichnen kann. Da $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = n\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ ist, so ist $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \geqq n\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ oder $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \geqq n\cdot\sin\frac{1}{2}\gamma$. Im Grenzfalle ergiebt sich $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = n\sin\frac{1}{2}\gamma$, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist. Nennen wir für diesen Fall $\alpha_1$ und $\alpha_2$ kurz $\alpha$, so ist $\sin\alpha = n\cdot\sin\frac{1}{2}\gamma$. Es war aber $D = 2\alpha - \gamma$, also ist $n = \frac{\sin\frac{1}{2}(D+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$. Diese Gleichung ist besonders wichtig für die Bestimmung von Brechungsexponenten. Eine geometrische Ableitung der letzten Gleichung siehe z. B. in dem Grundriß von Jochmann und Hermes.

**Aufgabe 91.** Wann ist die Ablenkung eines Lichtstrahles ein Minimum, der durch einen Cylinder so hindurchgeht, daß die Ebene des gebrochenen Strahles auf der Achse des Cylinders senkrecht steht? Löse dieselbe Aufgabe für zweimalige Brechung eines Strahles durch eine Kugel.

**Aufgabe 92.** Berechne das Maximum der Ablenkung eines Lichtstrahles, der in eine Kugel eindringt, im Innern reflektiert wird und wieder durch Brechung nach außen gelangt. (Gang der Strahlen in den Wassertropfen beim gewöhnlichen Regenbogen.)

**Lösung.** Der Einfallswinkel eines Strahles sei $\alpha$, der Brechungswinkel $\beta$, der Radius stellt das Einfallslot dar. Bei der Reflexion an der gegenüberliegenden Wand ist der Einfalls- und Reflexionswinkel gleich $\beta$. Bei der zweiten Brechung bildet der Strahl mit dem Radius innen den Winkel $\beta$ und außen $\alpha$. Um die Ablenkung $D$ zu erhalten, verlängere den einfallenden und austretenden Strahl, bis sich beide schneiden, und verbinde den Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel. Es ist $D = 4\beta - 2\alpha$. Für rotes Licht ist $n = \frac{108}{81}$ bei Wassertropfen. Da $\sin\alpha = n\sin\beta$ und $D = 4\beta - 2\alpha$ ist, so ist auch $\sin\left(2\beta - \frac{D}{2}\right) = n\sin\beta$. Führt man nach der Schellbachschen Methode $\beta_1$ und $\beta_2$ ein unter der Annahme, daß beide dasselbe $D$ liefern, so ist $\sin\left(2\beta_1 - \frac{D}{2}\right) = n\sin\beta_1$ und $\sin\left(2\beta_2 - \frac{D}{2}\right) = n\sin\beta_2$. Bildet man die Differenz der letzten beiden Gleichungen, so ergiebt sich nach einer einfachen Umformung

$$\sin(\beta_1 - \beta_2)\cdot\cos\left(\beta_1 + \beta_2 - \frac{D}{2}\right) = n\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$$

oder

$$2\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\cdot\cos\left[\beta_1+\beta_2-\frac{D}{2}\right] = n\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Dividiert man durch $\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ und setzt $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, so ist $2\cdot\cos\left(2\beta - \frac{D}{2}\right) = n\cos\beta$, oder, da

$2\beta - \frac{D}{2} = \alpha$, $2\cos\alpha = n\cos\beta$. Also ist $4\cos^2\alpha = n^2\cos^2\beta$ und $4\cdot(1-\sin^2\alpha) = n^2\cdot(1-\sin^2\beta)$ oder $4 - 4\sin^2\alpha = n^2 - n^2\sin^2\beta$. Da nun $n\sin\beta = \sin\alpha$ ist, so ist $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$. Setzt man $n = \frac{108}{81}$, so ergiebt sich hieraus $\alpha = 59^0 23'$ und als Maximum der Ablenkung $D = 42^0 2'$. Für blaues Licht ist $n = \frac{109}{81}$ und $\alpha = 58^0 40'$, $\beta = 39^0 24'$, $D = 40^0 16'$. Da eine Funktion in der Nähe eines Maximums oder Minimums sich nur langsam ändert, so tritt ein unter den berechneten Winkeln auffallendes Bündel paralleler Strahlen auch parallel aus. Die Bedingung zur Entstehung eines Regenbogens ist also gegeben. Berechne die Breite des Bogens unter Berücksichtigung der Thatsache, daß die Sonne einen scheinbaren Durchmesser von $32'$ hat. Berechne die Höhe des Regenbogens, wenn der Mittelpunkt der Sonnenscheibe die Höhe $h$ hat.

**Aufgabe 93.** Berechne das Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahles, der durch Brechung in das Innere einer Kugel gelangt, dort zweimal reflektiert wird und dann wieder durch Brechung nach außen gelangt. (Gang der Strahlen in den Wassertropfen der Luft beim Nebenregenbogen.)

**Lösung.** Die Ablenkung ist $D = 2R - 6\beta + 2\alpha$, also muß $\sin\left(\frac{D}{2} + 3\beta - 90^0\right) = n\sin\beta$ ein Minimum werden. Ähnlich wie in Nr. 91 erhält man $\sin\alpha = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$ und für rotes Licht, wenn $n = \frac{108}{81}$, $\alpha = 71^0 49' 55''$, $\beta = 45^0 26' 51''$ und $D = 50^0 58'$; für violettes Licht $n = \frac{109}{81}$, $\alpha = 71^0 26' 9''$, $\beta = 44^0 47' 7''$ und $D = 54^0 10'$.

**Aufgabe 94.** Löse dieselbe Aufgabe für den Fall, daß im Innern 3 Reflexionen stattfinden.

**Lösung.** $D = 4R - 8\beta + 2\alpha$. Man erhält $\sin\alpha = \sqrt{\frac{16-n^2}{15}}$. Für rotes Licht ist $n = \frac{4}{3}$, $\alpha = 76^0 50' 20''$, $\beta = 46^0 54' 40''$ und $D = 138^0 23' 20''$; für violettes Licht ist $n = \frac{109}{81}$, $\alpha = 70^0 59' 14''$; $\beta = 45^0 9' 40''$, $D = 140^0 59' 8''$.

**Aufgabe 95.** (Nach Maurer.) In welcher Stellung zur Sonne und Erde erscheint uns die Venus am hellsten?

**Lösung.** Ist $S$ der Mittelpunkt der Sonne, $E$ der der Erde und $V$ der der Venus, so muß $\sphericalangle SEV = 39^0 43' 28''$ sein