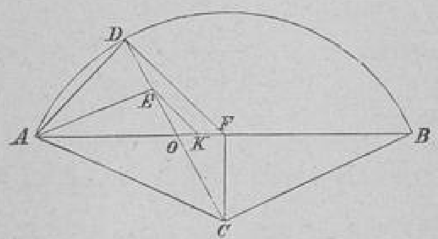
II.

Angebliche Dreiteilung des Winkels

von Herrn Averdieck, Lehrer an der Volksschule in Büsbach, dort im 72. Lebensjahre am 23. Februar 1883 gestorben.

Fragliche Konstruktion erhielt ich zur Beurteilung im Oktober 1882 von ihrem Erfinder.



ACB sei der zu teilende Winkel. Man mache AC = BC, beschreibe den Bogen AB, ziehe die Sehne AB, ferner FC $\perp$ AB.

Nun greife man den beliebigen Punkt D auf dem Bogen heraus, ziehe DC, mache AD = AE, ziehe DF und EK $\parallel$ DF.

Dann wird behauptet, AK sei die Sehne des Drittels vom Winkel ACB, oder AK lasse sich auf den Bogen ADB gerade 3 mal als Sehne eintragen.

Diese Konstruktion enthält die Willkür, den Punkt D beliebig anzunehmen; damit ist der einfachste Weg zu ihrer Prüfung gewiesen, und wir verwandeln daher die Konstruktion in folgende Aufgabe.

„Gegeben der Winkel ACB $= \alpha$, ferner AC = CB = r. Der Punkt D soll derart gewählt werden, dass wenn man AK als Sehne einträgt, der zugehörige Centriwinkel $\frac{\alpha}{3}$ wird."

Sei DCA $= \beta$, so ist β zu bestimmen.

$$\text{Aus OE : OD = OK : OF, folgt: OK} = \frac{\text{OE . OF}}{\text{OD}}$$

$$\text{Daher AK = AF} - \text{OF} + \text{OK} = \frac{\text{AF . OD} - \text{OF . DE}}{\text{OD}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

$$\text{Nun ist aber AF} = \text{r.} \sin\frac{\alpha}{2}, \; \text{FC} = \text{r.} \cos\frac{\alpha}{2}, \; \text{CO} = \frac{\text{r.} \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)},$$

$$\text{OD} = \text{r} - \text{r.} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}\;; \; \text{OF} = \frac{\text{r.} \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} . \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right).$$

Um DE zu finden beachte man, dass das Dreieck DAE $\sim$ DCA ist, also

DE : DA = DA : AC

Da nun DA $= 2$ r. $\sin\frac{\beta}{2}$, so folgt DE $= 4$ r. $\sin^2\frac{\beta}{2}$.

Durch Einsetzung in Formel (1) findet man nun:

$$AK = r \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}\right] - 4\cos\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right).\sin^2\frac{\beta}{2}}{1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}$$

Dieser Ausdruck wird transformiert in

$$AK = r \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}.\ \sin\frac{\beta}{2}.\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Nun soll aber AK die Sehne des Drittelbogens sein, also zum Centriwinkel $\frac{\alpha}{3}$ gehören. Folglich muss sein:

$$AK = 2r\sin\frac{\alpha}{6}$$

Daher die Gleichung für β:

$$\sin\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}.\ \sin\frac{\beta}{2}.\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (3.)$$

Wollte man diese Gleichung in gewöhnlicher Weise behandeln, so würde man nicht nur auf ziemlich weitläufige Rechnungen stossen, sondern wahrscheinlich auch die Form des Endresultats nicht sofort erkennen. Wir setzen:

$$\cos\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right);\ \text{dann wird}\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(b^3 + \frac{1}{b^3}\right).$$

Ferner setzen wir: $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right).$

Dann erhalten wir aus (3.) die reciproke Gleichung 6ten Grades:

$$\lambda^6(b^2+1) - 2b^2\lambda^4 - 2b^6\lambda^2 + b^6(b^2+1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4.)$$

Dieselbe besitzt die Wurzel $\lambda = \pm b$, so dass die linke Seite durch $\lambda^2 - b^2$ teilbar ist. Es bleibt dann:

$$(b^2+1)\lambda^4 + b^2(b^2-1)\lambda^2 = b^4(b^2+1) \quad \ldots\ldots \quad (5.)$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{b^2}{\lambda^2} = 2i.\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{3}\right);\ \frac{1}{b} - b = -2i.\sin\frac{\alpha}{6}.$$

Und daher reduciert sich (5.) auf die einfache Lösung:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{3} - \beta\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6} \quad \ldots\ldots \quad (6.)$$

Nimmt man hierzu den obigen Wert $\lambda = b$, welcher zu $\beta = \frac{\alpha}{3}$ führt, so hat man folgendes Schlussergebnis:

„Die Konstruktion wird in 2 Fällen genau richtig; e r s t e n s wenn $\beta = \frac{\alpha}{3}$ genommen wird, z w e i t e n s, wenn β so gewählt wird, dass Gl. (6.) befriedigt ist. Beide Werte liegen im

Intervall Null bis $\frac{\alpha}{3}$, und daher erklärt sich die Bemerkung des Herrn Averdieck, es sei zweckmässig, den Punkt D in der Nähe der wirklichen Trisection, aber etwas näher bei A zu nehmen. Wir haben nämlich so Aussicht, zwischen die beiden Punkte zu kommen, welche die Aufgabe strenge lösen, und das ist zweifellos ein günstiger Ausgangspunkt für die näherungsweise Dreiteilung des Winkels.

Wie sehr die Konstruktion der Wahrheit nahe kommt, zeigt die folgende Zusammenstellung:

$$\alpha = 90^0$$

$$\begin{cases} \beta = 10^0 \quad ; \; 12^0 \quad ; \; 16^0 \quad ; \; 20^0 \quad ; \; 22^0 \quad ; \\ \gamma = 34^0\,44', 6; \; 33^0\,40', 0; \; 31^0\,50', 4; \; 30^0\,30', 5; \; 30^0\,2', 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 22^0\,30' \quad ; \; 24^0 \quad ; \; 26^0 \quad ; \; 30^0 \\ \gamma = 29^0\,48', 0; \; 29^0\,45', 8; \; 29^0\,38', 7; \; 30^0 \end{cases}$$

γ bedeutet den wirklichen der Sehne AK entsprechenden Centriwinkel. Für $\beta = 22^0\,18', 05$ wird $\gamma = 30$. Die beiden strengen Lösungen sind also durch $\beta = 22^0\,18', 05$ und $\beta = 30^0$ gegeben. Unsere Tabelle zeigt, dass in dem Intervall zwischen diesen Werten die Abweichung noch nicht die Grösse eines halben Bogengrades erreicht. Demnach kann es nicht auffallen, dass die Zeichnung einen solchen Fehler nicht oder kaum verrät.

Es würde nicht uninteressant sein, zu ermitteln, welcher Centriwinkel β zwischen den beiden strengen Ausgangspunkten liegend die ungünstigste Lage gibt und wie gross, selbst in diesem ungünstigsten Falle die Annäherung ist. Ferner würde es sich gewiss der Mühe lohnen, die hier durch Rechnung gefundenen Resultate geometrisch zu bestätigen.

Unter den mir bekannten Näherungskonstruktionen der Winkeldreiteilung verdient die vorliegende sicher nicht den letzten Platz. Ehre dem Andenken ihres Erfinders!

Coesfeld, 1885. **Dr. K. Schwering.**