

I.

Über Dreiecke, in denen ein Winkel das Vielfache eines andern ist.

§. 1.

In einer Programmabhandlung des Münsterschen Paulinischen Gymnasiums vom Jahre 1845 behandelt Boner eine Reihe von Aufgaben, welche sich auf Dreiecke beziehen, deren Seiten in arithmetischer Progression stehen. Die Abhandlung ist sehr lesenswert und trägt wie die wenig zahlreichen mathematischen Aufsätze Boners überhaupt das eigenartige Gepräge dieses scharfsinnigen Mannes. In §. 6. der gedachten Abhandlung bemerkt der Verfasser, dass das Dreieck mit den Seiten 4, 5, 6 die merkwürdige Eigenschaft hat, welche unsere Überschrift angibt. Die Winkel desselben sind nämlich

$$\alpha = 41^\circ 25', \quad \beta = 55^\circ 46', \quad \gamma = 82^\circ 49',$$

d. h. es ist

$$\gamma = 2\alpha, \quad \beta = 180^\circ - 3\alpha.$$

Ebenso behandelt Boner die Aufgabe $\gamma = 3\alpha$, wo dann $\beta = 180 - 4\alpha$ folgen muss. Da er die Bedingung der Äquidifferenz der Seiten festhält, so ist die Aufgabe völlig bestimmt. Er findet die Seiten:

$$a = 1, \quad b = 1,4215, \quad c = 1,8430$$

und die Winkel

$$\alpha = 32^\circ 32', \quad \beta = 49^\circ 52', \quad \gamma = 97^\circ 36'.$$

Lassen wir aber die Äquidifferenz als Forderung fallen, so wird die Aufgabe unbestimmt. Dafür findet sich aber eine Reihe höchst interessanter Lösungen, die wir in den folgenden Zeilen mitteilen wollen.

§. 2.

Aufgabe. In welchen Dreiecken ist $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 180 - 3\alpha$? Der Sinussatz liefert alsbald die Gleichungen:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}.$$

Entwickeln wir die linken Seiten nach den bekannten Formeln, so wird

$$\frac{b}{a} = 2 \cos \alpha, \quad \frac{c}{a} = 4 \cos^2 \alpha - 1.$$

Setzen wir nun, unter p und q zwei relative Primzahlen verstehend,

$$2 \cos \alpha = \frac{p}{q},$$

so erhalten wir als Lösung:

$$a = q^2, \quad b = pq, \quad c = p^2 - q^2. \dots \dots \dots (1.)$$

Für p und q können wir nun beliebige ganzzahlige Werte annehmen. Nur muss, weil $\cos \alpha < 1$ ist, $p < 2q$ und, da c positiv sein muss, $p > q$ sein, also

$$2q > p > q.$$

Für $q = 2$, erhalten wir nur einen brauchbaren Wert $p = 3$, also

$$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 5.$$

Dies ist genau die Lösung Boners.

Für $q = 3$ erhalten wir

$$6 > p > 3,$$

also 2 Lösungen $p = 4$ und $p = 5$. Diesen entsprechen die Dreiecke

$$a = 9, \quad b = 12, \quad c = 7;$$

$$a = 9, \quad b = 15, \quad c = 16.$$

Für $q = 4$ finden wir

$$8 > p > 4.$$

Hier scheinen zunächst 3 Lösungen zu existieren, nämlich $p = 5, 6, 7$. Allein die Lösung $p = 6$ ist zu verwerfen, da es mit q den Faktor 2 gemeinsam hat. Wir erhalten die Dreiecke

$$a = 16, \quad b = 20, \quad c = 9;$$

$$a = 16, \quad b = 28, \quad c = 33.$$

Für $q = 5$ haben wir

$$10 > p > 5.$$

Demnach $p = 6, 7, 8, 9$; und die Dreiecke:

$$a = 25, \quad b = 30, \quad c = 11$$

$$a = 25, \quad b = 35, \quad c = 24$$

$$a = 25, \quad b = 40, \quad c = 39$$

$$a = 25, \quad b = 45, \quad c = 56.$$

§. 3.

In welchen Dreiecken ist $\beta = 3\alpha, \gamma = 180^\circ - 4\alpha$?

Wir haben hier die Formeln

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}.$$

Machen wir die Entwicklung, so wird

$$\frac{b}{a} = 4 \cos^2 \alpha - 1, \quad \frac{c}{a} = 4 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha = 8 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha.$$

Demnach erhalten wir wieder durch die Annahme

$$2 \cos \alpha = \frac{p}{q}$$

die Dreiecke :

$$a = q^3, \quad b = q(p^2 - q^2), \quad c = p(p^2 - 2q^2). \quad \dots \quad (2.)$$

Wir haben wieder p und q ohne gemeinsamen Faktor vorausgesetzt. Es muss nun zunächst $p < 2q$ sein, da $\cos \alpha < 1$. Ferner muss aber auch $p^2 > 2q^2$ sein, da c positiv ist, und somit erhalten wir die Ungleichungen:

$$4q^2 > p^2 > 2q^2.$$

Für $q = 2$ wird $16 > p^2 > 8$, also $p = 3$ einzige brauchbare Lösung und so entsteht das Dreieck :

$$a = 8, \quad b = 10, \quad c = 3.$$

Für $q = 3$ wird $36 > p^2 > 18$, also $p = 5$ einzige brauchbare Lösung, welche zu dem Dreieck führt:

$$a = 27, \quad b = 48, \quad c = 35.$$

Für $q = 4$ wird $64 > p^2 > 32$, also einzig $p = 7$, mit dem Dreiecke:

$$a = 64, \quad b = 132, \quad c = 119.$$

Für $q = 5$ wird $100 > p^2 > 50$, also $p = 9$ und

$$a = 125, \quad b = 280, \quad c = 279.$$

Diese Auflösung ist merkwürdig. Da b nahe mit c übereinstimmt, so muss das entstehende Dreieck nahezu gleichschenkelig sein. Wäre es genau gleichschenkelig, so wäre $3\alpha = 180 - 4\alpha$, also $\alpha = \frac{180}{7}$. Wir haben also hier eine annähernde Konstruktion des regulären Vierzehnecks, mithin des Siebenecks gewonnen. Sie lautet: „Man mache den Radius des Kreises = 56. Dann ist die Seite des Vierzehnecks, welches ihm eingeschrieben werden kann, 25.“

$$q = 6 \text{ liefert } 144 > p^2 > 72, \quad p = 11$$

$$q = 7 \text{ liefert } 196 > p^2 > 98, \quad p = 11, 12, 13.$$

§. 4.

Um die Aufgabe allgemein zu lösen, setzen wir

$$\beta = m\alpha, \quad \gamma = 180^\circ - (m + 1)\alpha.$$

Demnach
$$\frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\sin (m + 1)\alpha}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}.$$

Wir müssen also die linken Seiten nach Potenzen einer Grösse entwickeln. Wir wählen dazu $\cos \alpha$. Dann wird:

$$\psi(\cos \alpha) = \frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha} = b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos^3 \alpha + \dots$$

Sei ebenso $F(\cos \alpha) = \cos m\alpha = a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos^2 \alpha + a_3 \cos^3 \alpha \dots$, dann wird: $\cos m\alpha + i \sin m\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^m = F(\cos \alpha) + i \sin \alpha \cdot \psi(\cos \alpha)$, also wenn $\cos \alpha = \lambda$ gesetzt wird, oder $\sin \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2}$,

$$(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})^m = F(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \psi(\lambda)$$

Entsprechend hat man $(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})^m = F(\lambda) - \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \psi(\lambda)$, also

$$\psi(\lambda) = \frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})^m - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})^m}{2\sqrt{\lambda^2 - 1}} \dots \dots \dots (3.)$$

Die Form dieser Gleichung gibt zu erkennen, dass für ein gerades m die Funktion $\psi(\lambda)$ nur ungerade Potenzen von λ enthält, also b_0, b_2, b_4 verschwinden. Umgekehrt verschwinden für ein ungerades m die Koeffizienten b_1, b_3, b_5 u. s. w. Bildet man $\psi(\lambda): \lambda^{m-1}$ und setzt dann $\lambda = \infty$, so wird der Wert 2^{m-1} erhalten. Also beginnt die Entwicklung von $\psi(\lambda)$ mit einem Term $2^{m-1} \lambda^{m-1}$. Wir setzen daher:

$$\psi(\cos \alpha) = \frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha} = 2^{m-1} \cos^{\overset{m-1}{\alpha}} + a_{m-3} \cdot 2^{m-3} \cos^{\overset{m-3}{\alpha}} + \dots + a_{m-k} \cdot 2^{m-k} \cos^{\overset{m-k}{\alpha}} + \dots,$$

wobei natürlich $k = 2v + 1$ ist und $a_{m-1} = 1$.

Nun erhält man leicht für $\psi(\lambda)$ durch Ableitung:

$$(\lambda^2 - 1) \psi'(\lambda) + \lambda \psi(\lambda) = m \frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})^m + (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})^m}{2}$$

und endlich durch Wiederholung des Differentierens:

$$(\lambda^2 - 1) \psi''(\lambda) + 3 \lambda \psi'(\lambda) = (m^2 - 1) \psi(\lambda),$$

oder, da $(a_{m-1} = 1)$, $\psi(\lambda) = 2^{m-1} \lambda^{m-1} + a_{m-3} \cdot 2^{m-3} \lambda^{m-3} + a_{m-5} \cdot 2^{m-5} \lambda^{m-5} + \dots$
 $+ a_{m-k} \cdot 2^{m-k} \lambda^{m-k} + \dots,$

zur Bestimmung der Koeffizienten die folgende Formel:

$$a_{m-k} = \frac{4(m-k+2)(m-k+1)}{(k-1)(k-1-2m)} a_{m-k+2},$$

oder wenn wir setzen

$$k = 2v + 1,$$

$$a_{m-2v-1} = - \frac{(m-2v+1)(m-2v)}{v(m-v)} a_{m-2v+1}.$$

Daher hat man, weil $a_{m-1} = 1$,

$$v = 1, \quad a_{m-3} = - (m-2)$$

$$v = 2, \quad a_{m-5} = \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2}$$

$$v = 3, \quad a_{m-7} = - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$v = 4, \quad a_{m-9} = \frac{(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

also allgemein: $a_{m-2v-1} = (-1)^v \frac{(m-v-1)(m-v-2)\dots(m-2v)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v}$.

Wir haben also die folgende Reihenentwicklung:

$$\frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha} = (2 \cos \alpha)^{m-1} - \frac{m-2}{1} (2 \cos \alpha)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos \alpha)^{m-5}$$

$$- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \cos \alpha)^{m-7} + \frac{(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2 \cos \alpha)^{m-9} - \dots$$

Nehmen wir daher $2 \cos \alpha = \frac{p}{q}$, so ergibt sich jetzt allgemein:

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = q^m, \\ b = q \left\{ \begin{array}{l} p^{m-1} - \frac{m-2}{1} p^{m-3} q^2 + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} p^{m-5} q^4 \\ - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{m-7} q^6 + \dots \end{array} \right\}, \\ c = p^m - \frac{m-1}{1} p^{m-2} q^2 + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} p^{m-4} q^4 \\ - \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{m-6} q^6 + \dots \end{array} \right.$$

Dabei muss nun $p < 2q$ sein und c positiv, also, was dasselbe sagt, $\sin(m+1)\alpha$ positiv oder $\alpha < \frac{180}{m+1}$. Mithin $\cos \alpha > \cos \frac{180}{m+1}$, mithin $\frac{p}{q} > 2 \cos \frac{180}{m+1}$, $2q \cos \frac{180}{m+1} < p < 2q$.

Als Beispiel nehmen wir $m = 5$. Wir untersuchen also die Dreiecke, in denen ist:

$$\beta = 5\alpha, \quad \gamma = 180 - 6\alpha.$$

Dafür fanden wir oben: $\left. \begin{array}{l} a = q^5, \\ b = q (p^4 - 3 p^2 q^2 + q^4), \\ c = p^5 - 4 p^3 q^2 + 3 p q^4 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5.)$

Da nun $\cos \frac{180}{6} = \cos 30 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, so findet die Ungleichung statt: $4q^2 > p^2 > 3q^2$
 Man gelangt hiernach zu den kleinsten Zahlen $p=7, q=4$ und zu dem Dreiecke
 $a = 1024, b = 1220, c = 231$.

§. 5.

Man kann nun noch eine allgemeinere Aufgabe wie folgt aussprechen:

$$\alpha = m\delta, \beta = n\delta, \gamma = 180 - (m+n)\delta.$$

D. h. man verlangt Dreiecke, in denen zwei Winkel ein rationales Verhältnis haben. Obgleich es keine Schwierigkeit macht, das Resultat allgemein niederzuschreiben, wollen wir uns nur auf den einfachsten Fall beschränken:

$$\alpha = 2\delta, \beta = 3\delta, \gamma = 180 - 5\delta.$$

Dann muss sein: $\frac{\sin 3\delta}{\sin 2\delta} = \frac{b}{a}, \frac{\sin 5\delta}{\sin 2\delta} = \frac{c}{a},$

also: $\frac{(2 \cos \delta)^2 - 1}{2 \cos \delta} = \frac{b}{a}, \frac{(2 \cos \delta)^4 - 3(2 \cos \delta)^2 + 1}{2 \cos \delta} = \frac{c}{a}.$

Setzen wir wieder $2 \cos \delta = \frac{p}{q}$, so wird $\frac{b}{a} = \frac{p^2 - q^2}{pq}, \frac{c}{a} = \frac{p^4 - 3p^2q^2 + q^4}{p^2q^2},$
 mithin kann als Lösung gelten: $a = pq^3, b = q^2(p^2 - q^2), c = p^4 - 3p^2q^2 + q^4.$

Als erste Ungleichung haben wir wieder $p < 2q$: als zweite $180 > 5\delta, \delta < 36^\circ,$
 $\cos \delta > \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{p}{q}.$ Demnach $2q > p > q \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

Diese Ungleichung kann man umformen in $4q^2 > p^2 > q(p+q).$

Als kleinstes Zahlbeispiel findet man: $p=5, q=3,$
 mithin das Dreieck: $a = 135, b = 144, c = 31.$

Wir stellen die numerischen Rechnungsergebnisse wie folgt zusammen:

	a	b	c	α	β	γ
$\beta = 2\alpha$	4	6	5	41° 24', 6	82° 49', 2	55° 46', 2
	9	12	7	48° 11', 4	96° 22', 7	35° 25', 9
	9	15	16	33° 33', 5	67° 6', 9	79° 19', 6
	16	20	9	51° 19', 1	102° 38', 1	26° 2', 8
	16	28	33	28° 57', 3	57° 54', 6	93° 8', 1
	25	30	11	53° 7', 8	106° 15', 6	20° 36', 6
	25	35	24	45° 34', 4	91° 8', 8	43° 16', 9
	25	40	39	36° 52', 2	73° 44', 4	69° 23', 4
$\beta = 3\alpha$	8	10	3	41° 24', 6	124° 13', 7	14° 21', 7
	27	48	35	33° 33', 4	100° 40', 4	45° 46', 2
	64	132	119	28° 57', 3	86° 51', 9	64° 10', 8
	125	280	279	25° 50', 4	77° 31', 6	76° 38', 0
$\beta = 5\alpha$	1024	1220	231	28° 57', 5	144° 46', 5	6° 16', 0
$\beta = 3\delta, \alpha = 2\delta$	135	144	31	67° 6', 8	100° 40', 4	12° 12', 8

Die Winkel sind mit Hilfe 5-stelliger Tafeln und zwar durch den Cosinus-Satz berechnet worden. Die Zehntel der Minuten unterliegen daher der bekannten Unsicherheit.