# Construction und Berechnung von Ovalen.

**Mannigfaltigkeit in den für die Schüler bestimmten Uebungsbeispielen ist gewiss für jeden Lehrer der Mathematik recht wünschenswerth. Das Mannigfaltige liesse sich nun wohl leicht erreichen, wenn man die Beispiele aus den verschiedenen Theilen der angewandten Mathematik hernehmen könnte. Solche Aufgaben nehmen aber in der Regel Kenntnisse in Anspruch, die man bei unsern Schülern nicht voraussetzen kann. Wir sind daher genöthigt, die Beispiele durchgängig aus der reinen Elementarmathematik zu entnehmen. Um nun auch hier Mannigfaltigkeit zu schaffen, bieten unter Anderm die Ovale und andere mit ihnen verwandte Linien, die ganz im Gesichtskreise der Schüler liegen, ein gutes Material, wie hoffentlich die vorliegende Arbeit darthun wird. Nur wolle man die Aufgaben nicht in der Allgemeinheit, wie die meisten derselben hier bearbeitet sind, von den Schülern bearbeiten lassen; das würde mehrentheils die Kräfte des Anfängers übersteigen. Aber jeder Lehrer wird leicht finden, wo und wie er statt der allgemeinen Data spezielle in die jedesmalige Aufgabe einführen muss. Die vorliegende Sammlung von Aufgaben soll nur dazu dienen, um aus derselben einzelne, nach dem Standpunkte der Schüler einzurichtende Aufgaben zu entnehmen. — Ich wünsche, dass diese meine Arbeit in der angegebenen Richtung gute Dienste leiste; dann ist der Zweck derselben erreicht.**

---

Soll über eine gegebene Linie $AB$ (Fig. 1.) als grosse Axe ein Oval beschrieben werden, so besteht bekanntlich das gewöhnliche Verfahren darin, dass man $AB$ in drei gleiche Theile theilt, aus den Theilungspunkten $H$ und $I$ mit $HA$ als Radius zwei Kreise beschreibt, die sich in $F$ und $G$ durchschneiden, und endlich aus diesen Durchschnittspunkten mit dem Durchmesser der beiden vorher beschriebenen Kreise als Radius die beiden Bögen $KCL$ und $NDM$ schlägt. — Verallgemeinern wir das in dieser Construction enthaltene Verfahren, so besteht dieses darin, dass von der gegebenen Linie $AB$ an beiden Enden gleiche Stücke, nämlich $HA=IB$ abgeschnitten und dann über das mittlere Stück $HI$ nach beiden Seiten zwei congruente gleichschenklige Dreiecke $HFI$ und $HGI$ beschrieben werden, wodurch das gleichseitige Viereck $FHGI$ entsteht, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der vier zu beschreibenden Bögen liefern. Um für das Folgende eine leichtere Rechnung zu gewinnen, wollen wir diese Verallgemeinerung dahin beschränken, dass **erstens** die gegebene Linie in $n$ gleiche Theile getheilt wird, wo dann die beiden äussersten Theile die Radien der links und rechts liegenden Bögen liefern, und dass **zweitens** die beiden gleichschenkligen Dreiecke entweder gleichseitig sein oder an ihren Scheiteln rechte Winkel haben sollen.

## I. Ein Oval, construirt über die grosse Axe vermittelst zweier gleichseitigen Dreiecke.

1. **Construction.** Schneide von der gegebenen grossen Axe $AB$ (Fig. 2.) an beiden Enden die Stücke $HA=IB=\frac{1}{n}AB$ ab, (wo $n$ eine ganze Zahl und $>2$ ist,) und schlage aus $H$ und $I$ mit $HI$ als Radius auf beiden Seiten von $AB$ Bögen, die sich in $F$ und $G$ durchschneiden. Alsdann beschreibe aus $H$ und $I$ die Sextanten $AK, AN, BL, BM$; ziehe ferner die Linie $FH$, welche über $H$ verlängert den Bogen $AN$ in $N$ trifft, und beschreibe mit dem Radius $FN$ aus $F$ und $G$ die Bögen $NDM$ und $KCL$; dann ist $ACBD$ das verlangte Oval.

2. **Berechnung.** Setzen wir die grosse Axe $AB=2a$, die kleine $CD=2b$ und bezeichnen den Umfang mit $p$, den Inhalt mit $F$, dann ist zunächst

$$HA=\frac{2}{n}a,\ FN=\frac{2(n-1)}{n}a,\ FH=HI=\frac{2(n-2)}{n}a,\ EH=\frac{n-2}{n}a,\ FE=EH\sqrt{3}=\frac{n-2}{n}a\sqrt{3}.$$

Demnach ergibt sich

(1.) $$b=ED=FD-FE=\frac{2(n-1)}{n}a-\frac{n-2}{n}a\sqrt{3}=\frac{2(n-1)-(n-2)\sqrt{3}}{n}a;$$

also $$2b=\frac{2(n-1)-(n-2)\sqrt{3}}{n}.2a.$$

(2.) $$\tfrac{1}{2}p=NAK+KCL=\tfrac{1}{3}.2\pi HA+\tfrac{1}{6}.2\pi FN,=\frac{2\pi}{3}.\frac{2}{n}a+\frac{\pi}{3}.\frac{2(n-1)}{n}a=\frac{n+1}{3n}.2\pi a;$$

also $$p=\frac{2(n+1)}{3n}.2\pi a.$$

(3.) $$\tfrac{1}{2}F=NAKH+HKCLI=NAKH+KCLG-\triangle HGI=\tfrac{1}{3}\pi HA^2+\tfrac{1}{6}\pi FN^2-HE^2\sqrt{3},$$
$$=\frac{\pi a^2}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{\pi a^2}{6}\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^2-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 a^2\sqrt{3},$$
$$=\tfrac{2}{3}.\frac{2+(n-1)^2}{n^2}.\pi a^2-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 a^2\sqrt{3};$$

also $$F=\tfrac{4}{3}.\frac{2+(n-1)^2}{n^2}.\pi a^2-2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2\sqrt{3}.$$

3. **Zusatz.** Werden statt der Sextanten $AK, AN, BL, BM$ die Trianten $AQ, AU, BR, BS$ (Fig. 2.) beschrieben und dann aus $F$ und $G$ mit dem Radius $FQ$ die Bögen $QOR$ und $UPS$ geschlagen, so entsteht die Linie $AOBP$, welche füglich **Sattellinie** genannt werden kann. Die Berechnung derselben liefert folgende Resultate:

(1.) $$b=EO=FE-FO=\frac{n-2}{n}a\sqrt{3}-\left\{\frac{2(n-2)}{n}a-\frac{2}{n}a\right\}=\frac{(n-2)\sqrt{3}-2(n-3)}{n}a;$$

also $$2b=\frac{(n-2)\sqrt{3}-2(n-3)}{n}.2a.$$

(2.) $$\tfrac{1}{2}p=UAQ+QOR=\tfrac{2}{3}.2\pi HA+\tfrac{1}{6}.2\pi FQ=\frac{4\pi}{3}.\frac{2a}{n}+\frac{\pi}{3}.(n-3).\frac{2a}{n}=\frac{n+1}{3n}.2\pi a$$

also $$p=\frac{2(n+1)}{n}.2\pi a.$$

Das oben berechnete Oval hat also mit dieser Sattellinie gleichen Umfang.

(3.) $\frac{1}{2}F = AUHQ + \triangle FHI - FQR, = \frac{2}{3}.\pi HA^2 + HE^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}.\pi FQ^2$

$$= \frac{2\pi}{3}\left\{\frac{2a}{n}\right\}^2 - \frac{\pi}{6}\left\{\frac{(n-3)2a}{n}\right\}^2 + \left\{\frac{(n-2)a}{n}\right\}^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{8}{3n^2}.\pi a^2 - \frac{2(n-3)^2}{3n^2}.\pi a^2 + \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2\sqrt{3}.$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{4-(n-3)^2}{n^2}\pi a^2 + \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2\sqrt{3};$$

also $$F = \frac{4}{3}.\frac{4-(n-3)^2}{n^2}.\pi a^2 + \frac{2(n-2)^2}{n^2}a^2\sqrt{3}$$

Anmerk. Bei der Construction der Sattellinie darf $n$ nicht zu gross genommen werden. Es muss nämlich $FO \leqq FE$ sein; also

$$\frac{n-3}{n}2a \leqq \frac{n-2}{n}.a\sqrt{3} \text{ oder } 2n-6 \leqq n\sqrt{3}-2\sqrt{3},$$

$$n \leqq \frac{6-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \text{ d. h. } \leqq 6+2\sqrt{3} \text{ d. h. } \leqq 9{,}46.$$

Es muss also $n < 10$ genommen werden.

Anmerk. Ergänzt man die aus $H$ und $I$ geschlagenen Bögen zu vollständigen Kreisen, so entstehen noch mehrere krummlinige Figuren, z. B. $QUSR$ und andere, (auch $KOLC$ ist zu beachten,) deren Berechnung sich nach dem Obigen leicht ergibt.

## II. Ein Oval, construirt vermittelst zweier rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke.

1. Construction. Errichte auf die gegebene grosse Axe $AB$ (Fig. 3.) in deren Halbirungspunkte $E$ die Senkrechte $FG$, schneide von $AB$ an beiden Enden die Stücke $HA = IB = \frac{1}{n}AB$ ab, mache ferner $EF = EG = EH$, ziehe $FH$ und verlängere diese Linie um $HA$ bis $N$. Werden dann aus $H$ und $I$ mit dem Radius $HA$ die Quadranten $NAK$, $MBL$, und aus $F$ und $G$ mit dem Radius $FN$ die Quadranten $NDM$, $KCL$ beschrieben, so ist $ACBD$ das verlangte Oval.

2. Berechnung. Benutzen wir die vorher eingeführten Bezeichnungen, so ist, da

$$EH = \frac{n-2}{n}a \text{ und } FH = EH\sqrt{2} = \frac{n-2}{n}a\sqrt{2},$$

(1.) $$b = EC = GC - GE = \frac{n-2}{n}a\sqrt{2} + \frac{2}{n}a - \frac{n-2}{n}a = \frac{(n-2)\sqrt{2}-(n-4)}{n}a;$$

also $$2b = \frac{(n-2)\sqrt{2}-(n-4)}{n}.2a.$$

(2.) $\frac{1}{2}p = NAK + KCL = \frac{1}{4}\cdot 2\pi HA + \frac{1}{4}\cdot 2\pi FN$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{2}{n}a + \frac{(n-2)\sqrt{2}+2}{n}a\right\} = \frac{(n-2)\sqrt{2}+4}{2n}.\pi a;$$

also $$p = \frac{(n-2)\sqrt{2}+4}{2n}.2\pi a.$$

(3.) $\frac{1}{2}F = NAKH + KCLG - \triangle HGI, = \frac{1}{4}\pi HA^2 + \frac{1}{4}\pi FN^2 - HE^2,$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[\left\{\frac{2}{n}\right\}^2 + \left\{\frac{(n-2)\sqrt{2}+2}{n}\right\}^2\right] - \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2,$$

$$= \frac{2n^2-8n+8+4(n-2)\sqrt{2}+8}{4n^2}.\pi a^2 - \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2,$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n^2-2n+4+(n-2)\sqrt{2}}{n^2}\,\pi a^2 - \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2;$$

also
$$F = \frac{n^2-4n+8+2(n-2)\sqrt{2}}{n^2}.\pi a^2 - 2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2,$$

$$= \frac{(n-2)(n+2\sqrt{2})-2(n-4)}{n^2}\,\pi a^2 - 2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2.$$

3. In entsprechender Weise, wie oben I. 3. ergibt sich (Fig. 3.) die Sattellinie *AOBPA*. Es muss jetzt aber $n<7$ genommen werden. Die Berechnung dieser Linie ergibt:

(1.) $2b = \frac{n-(n-2)\sqrt{2}}{n}.2a;$ (2.) $p = \frac{(n-2)\sqrt{2}+4}{2n}2\pi a;$

also hat auch hier die Sattellinie mit dem zugehörigen Ovale gleichen Umfang:

(3.) $F = \left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 a^2 - \frac{(n-2)(n+2-2\sqrt{2})}{n^2}.\pi a^2.$

## III. Ein Oval, construirt über die kleine Axe vermittelst gleichseitiger Dreiecke.

Ist statt der grossen die kleine Axe des Ovals gegeben, so kann man in ganz entsprechender Weise verfahren. Nach Analogie von I. ergibt sich folgende

1. Construction. Schneide von der kleinen Axe *CD* (Fig. 4.) an beiden Enden die gleichen Stücke, nämlich $FC = GD = \frac{1}{n}CD$, ab und construire über *FG* auf beiden Seiten die gleichseitigen Dreiecke *FHG* und *FIG*; schlage dann aus *F* und *G* mit dem Radius *FD* die Bögen *NDM* und *KCL*, welche die über *H* und *I* verlängerten Seiten der beiden Dreiecke in *N*, *M*, *L* und *K* treffen; beschreibe endlich aus *H* und *I* mit dem Radius *HN* die Bögen *NAK* und *MBL*. Dann ist *ACBD* das Oval und die durch *H* und *I* gehende Linie *AB* die grosse Axe desselben.

2. Berechnung. Unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen ergibt sich

(1.) $a = EA = EH + HN = EH + GD = \frac{(n-2)\sqrt{3}}{n}b + \frac{2}{n}b = \frac{(n-2)\sqrt{3}+2}{n}b;$

also
$$2a = \frac{(n-2)\sqrt{3}+2}{n}.2b.$$

(2.) $\frac{1}{2}p = NAK + KCL = \frac{1}{6}.2\pi HN + \frac{1}{3}.2\pi GK = \frac{1}{6}.2\pi.\frac{2b}{n} + \frac{1}{3}.2\pi.\frac{(n-1)2b}{n} = \frac{2n-1}{3n}.2\pi b;$

also
$$p = \frac{2(2n-1)}{3n}.2\pi b.$$

(3.) $\frac{1}{2}F=\frac{\pi}{6}.\overline{HN}^2+\frac{\pi}{3}.\overline{GK}^2-\overline{EG}^2\sqrt{3}$

$$=\frac{\pi}{6}\left\{\frac{2b}{n}\right\}^2+\frac{\pi}{3}\left\{\frac{(n-1)2b}{n}\right\}^2-\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 b^2\sqrt{3}$$

$$=\frac{\pi b^2}{3}.\frac{2+4(n-1)^2}{n^2}\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 b^2\sqrt{3};$$

also $$F=\frac{8(n-1)^2+4}{3n^2}\pi b^2-2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 b^2\sqrt{3}.$$

3. Bei der vorstehenden Construction liegt die Raute $FHGI$ so, dass ihre spitzigen Winkel über die grosse Axe fallen. Legt man aber im Punkte $F$ (Fig. 5) einen Winkel $HFD=\frac{1}{3}R$ an, so entsteht eine Raute, deren spitzige Winkel über die kleine Axe fallen. Die Rechnung für das hiernach entstehende Oval liefert

(1.) $2a=\frac{6(n-1)-(n-2)\sqrt{3}}{3n}.2b.$ (2.) $p=\frac{15(n-1)-4(n-2)\sqrt{3}}{9n}2\pi b;$

(3.) $F=4.\frac{9(n-1)^2+2(n-2)^2-4(n-1)(n-2)\sqrt{3}}{9n^2}\pi b^2-\frac{2(n-2)^2\sqrt{3}}{3n^2}b^2$

$$=\frac{4(11n-15)(n-1)+8-16(n-1)(n-2)\sqrt{3}}{9n^2}\pi b^2-\frac{2(n-2)^2\sqrt{3}}{3n^2}b^2.$$

## IV. Ein Oval, construirt über die kleine Axe vermittelst rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke.

1. **Construction.** Nachdem von $CD$ (Fig. 6.) die beiden Stücke $FC=GD=\frac{1}{n}CD$ abgeschnitten sind und durch $E$, den Halbirungspunkt von $CD$, eine Linie $XY\perp CD$ gezogen ist, werden von $E$ aus die Stücke $EH=EI=EF$ abgeschnitten, womit die Mittelpunkte der vier zu schlagenden Bögen gefunden sind. Das Uebrige ergibt sich nach Analogie von II.

2. **Berechnung.**

(1.) $2a=\frac{3n-4-(n-2)\sqrt{2}}{n}.2b;$ (2.) $p=\frac{2(n-1)-\frac{1}{2}(n-2)\sqrt{2}}{n}.2\pi b;$

(3.) $F=\frac{4(n-1)^2+(n-2)^2-2(n-1)(n-2)\sqrt{2}}{n^2}.\pi b^2-2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 b^2;$

$$=\frac{(5n-7)(n-1)+1-2(n-1)(n-2)\sqrt{2}}{n^2}.\pi b^2-2\left\{\frac{n-2}{n}\right\}^2 b^2.$$

## V. Construction und Berechnung eines Ovals, von welchem beide Axen gegeben sind.

### A. Vermittelst gleichseitiger Dreiecke.

Es seien (Fig. 7.) bei dem Ovale $ACBD$ $H$, $I$, $F$ und $G$ die Mittelpunkte der zu construirenden Bögen. Gegeben ist $EA=a$ und $EC=b$. Setzen wir $EH=x$, so ist $HN=HA=$

$a-x$, $FH=2x$, $FE=x\sqrt{3}$. Da nun $FD=FN$ sein muss, so ergibt sich die Gleichung

$$x\sqrt{3}+b=2x+a-x;$$

also

$$x=\frac{a-b}{\sqrt{3}-1}=\frac{a-b+(a-b)\sqrt{3}}{2}$$

Die geometrische Deutung dieses Ausdruckes liefert folgende

1. **Construction.** Nachdem die beiden Axen $AB$ und $CD$, sich unter rechten Winkeln gegenseitig halbirend, hingelegt sind, schneide von $AE$ das Stück $AO=CE$ ab, schlage aus $O$ mit $2OE$ einen Bogen, der die (verlängerte) $EC$ in $P$ schneidet, und trage dann von $EB$ das Stück $EQ=EP$ ab; halbire hierauf $OQ$ in $R$ und schneide von der grossen Axe von $E$ aus die Stücke $EH=EI=OR$ ab; dann schlage aus $H$ mit $HI$ zwei Bögen, welche die (verlängerte) kleine Axe in den Punkten $F$ und $G$ treffen. Jetzt sind $H$, $I$, $F$ und $G$ die Mittelpunkte der zu schlagenden Bögen, wonach sich das Fernere leicht ergibt.

Anmerk. Damit die Construction ausführbar sei, muss $EH<EA$ sein, d. h.:

$$\frac{a-b+(a-b)\sqrt{3}}{2}<a.$$

Die Entwickelung dieses Ausdrucks liefert, dass

$$b>2a-a\sqrt{3}$$

sein muss.

2. **Berechnung.** Zuförderst haben wir

$$HA=a-\frac{a-b+(a-b)\sqrt{3}}{2}=\frac{a+b-(a-b)\sqrt{3}}{2},$$

oder wenn wir $a-b=d$ setzen,

$$HA=a-\tfrac{1}{2}d(1+\sqrt{3}),\quad FN=IA=a+\tfrac{1}{2}d(1+\sqrt{3}).$$

Hiernach ist dann

(1.) $p=2\pi a-\frac{1}{3}\pi d(1+\sqrt{3});$

(2.) $F=\pi a^2+\pi d^2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{3})-\left\{\frac{\pi ad}{3}(1+\sqrt{3})+d^2(3+2\sqrt{3})\right\}.$

3. **Zusatz.** Setzt man, um die zu einer Construction führende Gleichung zu finden, $HA=x$, so ergibt sich

$$x=\frac{a+b-(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

Man kann auch $EF$ oder $CF$ als Unbekannte einführen. Im ersten Falle hat man

$$x=\frac{3(a-b)+(a-b)\sqrt{3}}{2},$$

im zweiten $x=\frac{3(a-b)+(a-b)\sqrt{3}}{2}-b.$

B. Vermittels rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke.

Es seien (Fig. 8.) $H$, $I$, $F$, $G$ die Mittelpunkte der zu beschreibenden Bögen. Setzen wir $EA=a$, $EC=b$ und $EH=EF=EI=EG=x$, so ist $HN=a-x$, $HF=x\sqrt{2}$, und da $FD=FN$ sein muss, so ist

$$x+b=x\sqrt{2}+a-x\,;$$

also $$x=\frac{a-b}{2-\sqrt{2}}=a-b+{}^{1}\!/_{2}(a-b)\sqrt{2}.$$

Hiernach ergibt sich:

1. **Construction.** Nachdem die beiden Axen, unter rechten Winkeln sich gegenseitig halbirend, hingelegt sind, schneide von $AE$ das Stück $AO=EC$ ab, mache $EP=EO$, ziehe $OP$ und halbire diese Linie in $Q$; trage dann von $OA$ das Stück $OH=OQ$ ab und mache endlich $EF=EI=EG=EH$, womit die vier Mittelpunkte gefunden sind. Das Fernere dann wie früher.

**Anmerkung.** Damit die Construction anwendbar sei, muss $EH<EA$ sein, also
$$a-b+{}^{1}\!/_{2}(a-b)\sqrt{2}<a.$$
Die Entwickelung dieses Ausdrucks führt darauf, dass $b>a\sqrt{2}-a$ sein muss.

2. **Berechnung.** Setzen wir $a-b=d$, so liefert die Rechnung

(1.) $p=2\pi a-\pi d$

(2.) $F=\pi a^2+(1+{}^{1}\!/_{2}\sqrt{2})\pi d^2-[\pi ad+(3+2\sqrt{2})d^2]$.

**C. Construction eines Ovals, dessen beide Axen gegeben sind, wobei die Bestimmung hinzukommt, dass die in der grossen Axe liegenden Mittelpunkte um einen aliquoten Theil der halben grossen Axe von dem Durchschnittspunkte der beiden Axen entfernt sein sollen.**

Es sei (Fig. 9 und 10.) $EH=EI=\frac{1}{n}EA=\frac{a}{n}$.

Setzen wir $FE=x$, so ist $FH=\sqrt{x^2+\left\{\frac{a}{n}\right\}^2}$; und da $FD=FN$ sein muss, so ist

$$x+b=\frac{n-1}{n}a+\sqrt{x^2+\left\{\frac{a}{n}\right\}^2}.$$

Die Auflösung liefert $x=\dfrac{[(n-2)a-nb][a-b]}{2[(n-1)a-nb]}$

1. Setzen wir in dieser allgemeinen Formel $n=2$, so geht dieselbe über in
$$x=\frac{b(a-b)}{2b-a};$$
und demnach ergibt sich folgende

**Construction.** Sind (Fig. 9.) $AB$ und $CD$ die unter rechten Winkeln sich halbirenden Axen, so schneide man von $AB$ das Stück $AP=CD$ ab und ziehe $PC$; ferner schneide man von $BE$ das Stück $BQ=CE$ ab und ziehe aus $Q$ $QF\#PC$. Macht man dann $EG=EF$ und halbirt $EA$ und $EB$ in den Punkten $H$ und $I$, so sind $H$, $I$, $F$ und $G$ die Mittelpunkte der zu schlagenden Bögen.

**Anmerkung.** Damit die Construction möglich sei, muss $2b>a$ d. h. $CD>EA$ sein.

2. Setzen wir $n=3$, so geht die allgemeine Gleichung über in
$$x=\frac{(b-{}^{1}\!/_{3}a)(a-b)}{2b-{}^{4}\!/_{3}a}$$; also folgende

**Construction.** Sind die beiden Axen (Fig. 10.) in gehöriger Weise hingelegt, so schneide man von der grossen Axe von $E$ aus die Stücke $EH = EI = \frac{1}{3}EA$ ab; verlängere ferner $EB$ über $B$ hinaus und mache $EO = CD$; darauf schneide von $OE$ das Stück $OP = AI$, und von $CE$ das Stück $CQ = EH$ ab und ziehe $PQ$; alsdann schneide von $BE$ das Stück $BR = CE$ ab und ziehe aus $R$ $RF \ddagger PQ$. Wird dann $EG = EF$ gemacht, so sind $H, I, F, G$ die gesuchten Mittelpunkte.

**Anmerkung.** Damit die Construction ausgeführt werden könne, muss $2b > \frac{4}{3}a$ d. h. $CD > AI$ sein.

**Anmerkung.** Zur Berechnung der beiden zuletzt construirten Ovale ist eine trigonometrische Rechnung nothwendig, indem zuvor der Winkel $FHE$ bestimmt werden muss.

**Anmerkung.** Man sieht leicht, wie die vorstehende allgemeine Aufgabe noch anders modificirt werden kann, z. B. indem man nicht $EH$, sondern $AH = \frac{1}{n}AE$, oder auch einer gegebenen Linie gleich setzt.

**D. Construction eines Ovals, von welchem ausser den beiden Axen auch noch die Entfernung der in der kleinen Axe liegenden Mittelpunkte vom Durchschnittspunkte der Axen gegeben ist.**

Sind (Fig. 11.) $F$ und $G$ die in der kleinen Axe liegenden Mittelpunkte, so soll ausser den beiden Axen auch noch $FE = GE = c$ gegeben sein. Setzen wir, indem $H$ und $I$ die in der grossen Axe liegenden Mittelpunkte sein sollen, $EH = EJ = x$, so ergibt sich, da $FD = FN$ sein muss, die Gleichung

$$c + b = a - x + \sqrt{c^2 + x^2};$$

und hiernach ist

$$x = \frac{[c - \frac{1}{2}(a-b)][a-b]}{c - (a-b)};$$

also folgende:

**Construction.** Nachdem die beiden Axen in gehöriger Weise hingelegt sind, schneide von $BE$ das Stück $BO = CE$, und dann von $FE$ das Stück $FP = EO$ ab, halbire auch $FP$ in $Q$; alsdann ziehe $PO$ und hierauf aus $Q$ eine Parallele zu $PO$, welche die $AB$ in $I$ trifft. Wird dann $EH = EI$ gemacht, so ist die Lage der in der grossen Axe befindlichen Mittelpunkte gefunden.

**Zusatz.** Damit die Auflösung ausführbar sei, muss immer $EI < EB$, d. h.

$$\frac{[c - \frac{1}{2}(a-b)][a-b]}{c - (a-b)} < a$$

sein. Die Entwickelung dieses Ausdrucks zeigt, dass

$$c > \frac{(a+b)(a-b)}{2b} \text{ sein muss.}$$

**Zusatz.** Nehmen wir an, dass die Mittelpunkte $F$ und $G$ in den Endpunkten $C$ und $D$ der kleinen Axe liegen sollen, setzen wir also $c = b$, so ist

$$x = \frac{\frac{1}{2}(3b-a)(a-b)}{2b-a}.$$

Hiernach ergibt sich dann die besondere Construction. Es muss aber $a<b\sqrt{3}$ sein.

Zusatz. Setzen wir $c=\frac{1}{2}b$, so ist

$$x=\frac{(b-\frac{1}{2}a)(a-b)}{\frac{3}{2}b-a};$$

jetzt muss aber $a<b\sqrt{2}$ sein.

Zusatz. Setzen wir $c=a$, so ist

$$x=\frac{\frac{1}{2}(a+b)(a-b)}{b};$$

hier aber muss $a<b+b\sqrt{2}$ sein.

Zusatz. Setzen wir $c=\frac{1}{2}a$, so ist

$$x=\frac{\frac{1}{2}b(a-b)}{b-\frac{1}{2}a};$$

aber es muss $a<\frac{1}{2}(b+b\sqrt{5})$ sein.

Anmerkung. Die in den obigen Zusätzen enthaltenen Formeln sind hier aus der zuerst gefundenen Hauptformel abgeleitet. Man hätte aber auch jeden einzelnen Fall für sich besonders behandeln können; und Letzteres wird in der Regel für Schüleraufgaben am zweckmässigsten sein.

## VI. Construction eines eigentlichen Ovals oder einer sogenannten Eilinie, wenn die Länge und Breite derselben gegeben sind.

Soll (Fig. 12.) $AB$ die Länge und $CD$ die Breite der Eilinie sein, so schneide man von $AB$ das Stück $AE=\frac{1}{2}CD$ ab, ziehe durch $E$ die Linie $FG\perp AB$ und beschreibe aus $E$ mit dem Radius $EA$ den Halbkreis $DAC$. Hierauf construire man nach einer der unter V. angegebenen Methoden über $EB$ als der halben grossen Axe das halbe Oval $CBD$, schneide also (um die unter V. B. angegebene Construction anzuwenden), von $BE$ das Stück $BO=EC$, und dann von $EC$ das Stück $EP=EO$ ab, ziehe $PO$, halbire diese Linie in $Q$, und trage von $OB$ das Stück $OI=OQ$ ab. Endlich schneide man von der (verlängerten) $CD$ von $E$ aus $EF=EG=EI$, und schlage aus $F$ und $G$ mit dem Radius $FD$, und aus $I$ mit dem Radius $IB$ Bögen, die das halbe Oval liefern.