Geometrische

und

trigonometrische Auflösungen

einiger Dreiecks- und Vierecks-Aufgaben.

(Hierzu eine Figurentafel.)

Bei der Berechnung eines Dreiecks und überhaupt eines geometrischen Constructs gelangt man in der Regel auf sicherem Wege dadurch zu einem günstigen Resultate, dass man für die Aufgabe zuerst eine geometrische Construction aufstellt und dann nach Anweisung dieser Construction und dieselbe verfolgend die gesuchten Stücke berechnet. Wie dieses in der Ausführung sich gestalte, habe ich auf den folgenden Blättern an fünf verschiedenen Aufgaben nachgewiesen. — Wenn nun auch eine solche Behandlung von Aufgaben schon an sich nicht ohne wissenschaftliches Interesse ist, so hat mich doch nicht so sehr dieser Umstand zu der vorliegenden Arbeit veranlasst, als vielmehr der didaktische Vortheil, den man beim Unterrichte aus der bezeichneten Behandlungsweise gewinnen kann. Es wird nämlich jeder Sachverständige mit mir darin einverstanden sein, dass die Uebungen der Schüler im Auflösen von Aufgaben desto fruchtbringender, namentlich auch desto anregender sein werden, je mehr dieselben hierbei mit Selbstständigkeit forschen und auffinden, je mehrseitiger sie die Aufgabe betrachten und je mehr Wahrheiten sie aus derselben ableiten können. Hierzu aber giebt das angedeutete Verfahren bei Behandlung geometrischer Aufgaben gleichsam von selbst Veranlassung. Was zuvörderst die geometrische Auflösung betrifft, so bietet sich erstlich immer die Untersuchung dar, ob die Construction ein oder mehrere Resultate liefere. Ist das Erstere der Fall, so stellt sich unmittelbar nach den gegebenen Bedingungsstücken ein Lehrsatz über die Congruenz und Aehnlichkeit zweier Dreiecke heraus; sind aber verschiedene Resultate da, so hat der Schüler zu forschen und festzustellen, welche nähere Bedingungen hinzukommen müssen, damit die Dreiecke congruent oder ähnlich seien. — Hierauf bietet die Aufgabe bei Aufstellung der Determination eine neue Seite für die Untersuchung dar, indem die Construction in ihrem ganzen Verlaufe durchzunehmen und bei jedem Theile festzustellen ist, ob derselbe immer oder unter welcher Bedingung ausführbar sei. Dabei ist es dann auch noch recht gut möglich, dass die Determination auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt wird, so dass dieselbe in zwei verschiedenen Formen sich darstellt (Vergl. I., 2. Anm.), wo es dann Gelegenheit giebt, die Identität zweier in der Form verschiedenen Ausdrücke nachzuweisen. — Was nun ferner die Berechnung der Aufgabe angeht, so ist diese dem Verlaufe der Construction gemäss anzulegen, wobei sich dann zunächst die Frage aufwirft, ob man die gesuchten Stücke unmittelbar aus den gegebenen bestimmen könne, oder ob man gezwungen sei oder doch besser daran thue, eine Hülfsgrösse in die Rechnung einzuführen. Ist das Letztere der Fall, so hat man besonders nachzuforschen, welche der bei der Construction sich bildenden Grössen für die Gestaltung des Constructs vorzugsweise von Einfluss ist, um hiernach die Hülfsgrösse zu wählen. (Vergl. die unter I. und IV. behandelten Aufgaben, ferner die vierte und sechste trigonometrische Auflösung der unter II. behandelten Aufgabe.) Bei der Berechnung der gesuchten Stücke ist es nun wohl der Fall, dass eins oder mehrere derselben auf verschiedenen Wegen gefunden werden können, so dass sich für dieselbe Grösse zwei der Form nach verschiedene Ausdrücke ergeben. Da giebt es dann wieder Gelegenheit, die Gleichheit dieser Ausdrücke nachzuweisen. (Vergl. II., 7. Anm.; 10. Anm.; 13. Anm.) Ist die Berechnung der Aufgabe ausgeführt, so wirft sich ferner, falls die geometrische Construction verschiedene Resultate aufweiset, die Frage auf, wie sich diese verschiedenen Resultate bei der Berechnung herausstellen. Endlich kann auch aus der trigonometrischen Auflösung (unabhängig von der geometrischen) die Determination der Aufgabe abgeleitet werden, was wiederum eine neue Aufgabe für den Schüler bildet. (Vergl. I., 7, 9; ferner IV., 4.) Auf diese Weise bietet eine und dieselbe Aufgabe Gelegenheit zu Uebungen der mannigfachsten Art.

I.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren und zu berechnen, von welchem eine Seite, der ihr gegenüberliegende Dreieckswinkel und die diese Seite halbirende Transversale gegeben sind.

Gegeben $BC = a$, $BAC = \alpha$, $AE = t$, wobei $BE = EC$ sein soll. (Fig. 1 und 2.)

1. **Geometrische Auflösung.** Beschreibe über $BC = a$ einen des Winkels α fähigen Kreisbogen und schlage aus E, dem Halbirungspunkte von BC, mit t als Radius einen Bogen, der den ersteren Bogen in A trifft. Werden dann AB und AC gezogen, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

2. **Determination.** Verbinde E mit O, dem Mittelpunkte des über BC beschriebenen Bogens, und verlängere die Linie EO, bis sie diesen Bogen in F trifft. Ziehe auch FB Nun sind drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich $\alpha <, >$ oder $= R$ ist.

Ist erstens $\alpha < R$, (Fig. 1.), so muss, damit der mit t beschriebene Bogen den über BC beschriebenen treffe,

(1.) $EA > EB$, d. h. $t > \frac{a}{2}$, aber

(2.) $EA \leqq EF$, d. h. $t \leqq \frac{a}{2} \cot\frac{1}{2}\alpha$ sein.

Ist zweitens $\alpha > R$ (Fig. 2.), so muss

(1.) $EA < EB$, d. h. $t < \frac{a}{2}$, aber

(2.) $EA \geqq EF$ d. h. $t \geqq \frac{a}{2} \cot\frac{1}{2}\alpha$ sein.

Ist drittens $\alpha = R$, so darf t nur $= \frac{1}{2}a$ sein, und die Aufgabe wird eine unbestimmte.

Anmerk. Bei der Determination hätte auch $EF = OF \pm OE = \frac{a}{2\sin\alpha} + \frac{a}{2}\cot\alpha$ bestimmt werden können. Hiernach entsteht für den Schüler die Aufgabe, nachzuweisen, dass $\frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha = \cot\frac{1}{2}\alpha$ ist.

3. **Nachweise der verschiedenen Dreiecke**, die möglicher Weise nach der Construction sich ergeben können. Die beiden Bögen durchschneiden sich in zwei Punkten A und A_1. Der zweite Punkt liefert jedoch ein Dreieck, welches von dem ersten Dreieck nur in der Lage verschieden ist. Hiernach stellen sich die beiden folgenden Lehrsätze über die Congruenz und Aehnlichkeit heraus.

Anmerk. Bei Aufstellung der Beweise für die beiden folgenden Lehrsätze verfolge man die oben gegebene geometrische Auflösung, indem man beachtet, welche einzelne Dreiecke sich der Reihe nach bis zur fertigen Construction des verlangten Dreiecks gestalten. Es entsteht aber zuerst, um den Mittelpunkt O zu bestimmen, das Dreieck BEO; dann folgt, indem zur Bestimmung des Punktes A aus O und E Bögen geschlagen werden, das Dreieck AOE; wird dann A mit B verbunden, so ergiebt sich das Dreieck ABE, und demnächst durch Ziehung der Linie AC das verlangte Dreieck ABC. Ganz in derselben Reihenfolge bieten sich auch diese Dreiecke bei den folgenden Beweisen dar.

4. Lehrsatz. Wenn bei einem Dreieck eine Seite, die sie halbirende Transversale und der dieser Seite gegenüberliegende Dreieckswinkel denselben Stücken eines andern Dreiecks gleich sind, so sind die Dreiecke deckend. (Fig. 1.) — Man denke sich ein entsprechendes zweites Dreieck, und es sei dasselbe mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet; dann ist

Annahme. $BC = bc$, $AE = ae$, wobei $BE = EC$, $be = ec$,
$BAC = bac$.

Satz. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Beweis. $\underline{BE = be, BEO = beo, BOE = BAC = bac = boe;}$

$\underline{\triangle BOE \cong \triangle boe;}$

$EO = eo$, $BO = bo$, also auch $AO = ao$,
$\underline{AE = ae;}$

$\underline{\triangle AOE \cong \triangle aoe;}$

$\underline{AEO = aeo;}$

$BEO - AEO = beo - aeo$,

d. h. $BEA = bea$,
$\underline{BE = be, AE = ae;}$

$\underline{\triangle ABE \cong \triangle abe;}$

$AB = ab$, $ABC = abc$,
$\underline{BC = bc;}$

$\triangle ABC \cong abc$.

5. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken ein Paar Seiten mit den sie halbirenden Transversalen in demselben Verhältnisse steht, und die diesen Seiten gegenüberliegenden Dreieckswinkel gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich. — Der Beweis ergiebt sich leicht nach Analogie des vorhergehenden Satzes.

Anmerk. Bei den jetzt folgenden trigonometrischen Behandlungen des Dreiecks ist ebenfalls der Verlauf der geometrischen Auflösung beachtet; das zuerst entstehende Dreieck BOE und dann das Dreieck EOA liefern die Grundlage der Rechnung. — Um nicht weitläufig zu werden, ist nur der Fall in Betracht gezogen, dass $\alpha < R$.

6. Erste trigonometrische Auflösung. (Fig. 1.) Aus dem Dreiecke BOE ergiebt sich $BO = AO = \frac{a}{2\sin\alpha}$, $EO = \frac{a}{2}\cot\alpha$. Wird nun der Winkel $AEO = \varepsilon$ als Hülfsgrösse in die Rechnung eingeführt, so erhält man aus dem Dreiecke AOE

$$\cos\varepsilon = \frac{AE^2 + EO^2 - AO^2}{2AE \times EO},$$

und indem man für EO und AO die eben gefundenen Werthe substituirt und einige Reductionen vornimmt,

$$\cos\varepsilon = \frac{(2t + a)\ (2t - a)}{4at}\ tng\alpha.$$

Da nun hiernach die Winkel $AEB = R - \varepsilon$ und $AEC = R + \varepsilon$ bekannt sind, so ergeben sich die Winkel und Seiten des Dreiecks ABC, wie folgt:

$$(1.)\ \cot ABC = \cot\beta = \frac{BE - AE\cos AEB}{AE\sin AEB} = \frac{a}{2t\cos\varepsilon} - tng\varepsilon;$$

$$(2.)\ \cot ACB = \cot\gamma = \frac{a}{2t\cos\varepsilon} + tng\varepsilon;$$

$$(3.)\ AC = b = \sqrt{(t^2 + \frac{a^2}{4} + at\sin\varepsilon)};$$

$$(4.)\ AB = c = \sqrt{(t^2 + \frac{a^2}{4} - at\sin\varepsilon)}.$$

7. Determination, aus der vorstehenden Auflösung abgeleitet. Ist $\alpha < R$, so muss (1.) der Winkel AEO d. h. $\varepsilon < R$, aber (2.) $\varepsilon \geqq 0°$ sein. Damit die erste Bedingung erfüllt werde, muss $\cos\varepsilon$ immer positiv sein, was nur dadurch erreicht wird, dass in der für $\cos\varepsilon$ gefundenen Formel der Factor $2t - a$ immer positiv bleibt, demnach muss also (1.) $t > \frac{a}{2}$ sein. Damit ferner $\varepsilon \geqq 0°$ sei, muss $\cos\varepsilon \leqq 1$ sein, also auch

$$\frac{(2t + a)\ (2t - a)}{4at}\ tng\alpha \leqq 1,$$

$$(4t^2 - a^2)\sin\alpha \leqq 4at\cos\alpha,$$

$$(4t^2 - a^2) \times 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha \leqq 4at(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2),$$

$$4t^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - a^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha \leqq 2at\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 2at\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$$2t\sin\tfrac{1}{2}\alpha(2t\cos\tfrac{1}{2}\alpha + a\sin\tfrac{1}{2}\alpha) \leqq a\cos\tfrac{1}{2}\alpha(2t\cos\tfrac{1}{2}\alpha + a\sin\tfrac{1}{2}\alpha),$$

also (2.) $t \leqq \frac{a}{2}\cot\tfrac{1}{2}\alpha$.

8. Zweite trigonometrische Auflösung. Nachdem AO und EO wie früher bestimmt sind, führe man den Winkel $AOE = \omega$ als Hülfsgrösse ein; dann ist

$$\cos\omega = \frac{AO^2 + OE^2 - AE^2}{2AO \times OE},$$

oder, indem man substituirt und reducirt,

$$\cos\omega = \frac{a^2(1 + \cos\alpha^2) - 4t^2\sin\alpha^2}{2a^2\cos\alpha} = \frac{2a^2 - (a^2 + 4t^2)\sin\alpha^2}{2a^2\cos\alpha};$$

oder auch

$$\cos\omega = \frac{a^2 - 4t^2 + (a^2 + 4t^2)\cos\alpha^2}{2a^2\cos\alpha};$$

oder auch nach einer andern bekannten Formel, indem man einige Reductionen und Umformungen vornimmt,

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{a}\sqrt{\frac{(2t\cos\frac{1}{2}\alpha)^2 - (a\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}{\cos\alpha}}.$$

Nun ergiebt sich zur Bestimmung der Winkel und Seiten des Dreiecks *ABC* ganz einfach

$$(1.)\ ACB = \gamma = \tfrac{1}{2}AOB = \tfrac{1}{2}(\omega - \alpha);$$
$$(2.)\ ABC = \beta = 2R - (\alpha + \gamma) = 2R - \tfrac{1}{2}(\omega + \alpha);$$
$$(3.)\ AC = b = \frac{a\sin\frac{1}{2}(\omega + \alpha)}{\sin\alpha};\quad (4.)\ AB = c = \frac{a\sin\frac{1}{2}(\omega - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

9. **Determination**, aus der vorstehenden Berechnung abgeleitet. Ist $\alpha < R$, so muss, damit ein Dreieck entstehen könne,

$$(1.)\ \omega > \alpha,\ \text{aber}\ (2.)\ \omega \leqq 2R$$

sein. Demnach muss also auch $\cos\omega < \cos\alpha$, aber $\cos\omega \geqq -1$ sein. Hiernach erhält man mit Benutzung des eben für $\cos\omega$ gefundenen Werthes:

$$(1.)\ \cos\alpha > \frac{a^2(1 + \cos\alpha^2) - 4t^2\sin\alpha^2}{2a^2\cos\alpha},$$
$$2a^2\cos\alpha^2 > a^2 + a^2\cos\alpha^2 - 4t\sin\alpha^2,$$
$$4t^2\sin\alpha^2 > a^2(1 - \cos\alpha^2)\ \text{d. h.} > a^2\sin\alpha^2,$$
$$t > \frac{a}{2}.$$

$$(2.)\ \frac{a^2(1 + \cos\alpha^2) - 4t^2\sin\alpha^2}{2a^2\cos\alpha} \geqq -1,$$
$$4t^2\sin\alpha^2 \leqq a^2(1 + 2\cos\alpha + \cos\alpha^2),$$
$$2t\sin\alpha \leqq a(1 + \cos\alpha),$$
$$t \leqq \frac{a}{2} \times \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\ \text{d. h.} \leqq \frac{a}{2}\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

In gleicher Weise kann auch der oben für $\sin\frac{1}{2}\omega$ angegebene Werth benutzt werden, wobei dann zu beachten ist, dass (1.) $\sin\frac{1}{2}\omega > \sin\frac{1}{2}\alpha$ aber (2.) $\sin\frac{1}{2}\omega \leqq 1$ sein muss.

II.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren und zu berechnen, von welchem eine Seite und diejenigen beiden Winkel gegeben sind, welche die von einem Endpunkte der gegebenen Seite zum Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogene Transversale mit der halbirten und mit der dritten Seite bildet. (Fig. 3.)

Von einem Dreiecke ABC ist gegeben $BC = a$, $BDC = \omega$, $DBA = \varphi$, wobei $AD = DC$ sein soll.

1. **Erste geometrische Auflösung.** Lege den Winkel $KEL = \varphi$ hin und lege an den einen Schenkel KE desselben in einem beliebigen Punkte F den Winkel $KFM = \omega$, wodurch der Punkt G in der Linie EC bestimmt wird; mache $FH = FE$ und ziehe HG; mache $HI = a$ und ziehe $IC \mathbin{\#} EK$, welche Parallele die EL in C trifft; ziehe $CB \mathbin{\#} IH$ und $CD \mathbin{\#} GF$, und verlängere CD um sich selbst bis A. Wird dann nach AB gezogen, so ist ABC das verlangte Dreieck.

2. **Determination.** Damit ein Durchschnittspunkt G entstehen könne, muss $KFM > KEL$ d. h. $\omega > \varphi$ sein.

3. **Congruenz zweier Dreiecke,** die in den genannten Stücken übereinstimmen. — Man könnte, wie früher angegeben ist, für den Beweis der Congruenz die Construction des Dreiecks verfolgen; allein wegen der Gleichheit der beiden Winkelpaare gestaltet sich die Sache viel einfacher. Denken wir uns nämlich ein zweites entsprechendes Dreieck mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet, so ist zunächst $\sphericalangle\, BAD = bad$, und folglich $\triangle\, BAD \sim \triangle\, bad$, und demnächst $\triangle\, BDC \sim \triangle\, bdc$. Und da nun $BC = bc$, so ist auch $\triangle\, BDC \cong \triangle\, bdc$, woraus sich dann ergiebt, dass $\triangle\, ABC \cong \triangle\, abc$ ist. — Der Beweis für die Aehnlichkeit aus der Gleichheit der beiden Winkelpaare ist hiermit auch geliefert.

4. **Erste trigonometrische Auflösung.** (Fig. 3.) In dem zuerst entstandenen Dreieck EFG setze man die nach ihrer Grösse willkürlich angenommene Linie $EF = m$, dann ist $FG = \dfrac{m\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$; demnach ergiebt sich aus dem Dreiecke FGH

$$\cot FGH = \frac{FG - HF\cos\omega}{HF\sin\omega};$$

oder indem man substituirt und beachtet, dass $FGH = ACB = \gamma$ ist,

$$(1.)\ \cot\gamma = \left(\frac{m\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)} - m\cos\omega\right) : m\sin\omega = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)\sin\omega} - \cot\omega.$$

Ferner ist

$$(2.)\ \alpha = \omega - \varphi;\ (3.)\ \beta = 2R - (\gamma + \omega - \varphi);$$

wonach sich dann die beiden Seiten b und c in bekannter Weise ergeben.

5. **Zweite geometrische Auflösung.** (Fig. 4.) Schlage über $BC = a$ einen des Winkels ω fähigen Bogen, dessen Mittelpunkt O ist, und einen des Winkels φ fähigen Bogen, dessen Mittelpunkt in P liegt. Ziehe PB und schlage über diese Linie einen Halbkreis, der den des Winkels ω fähigen Bogen in D trifft. Ziehe CD und verlängere diese Linie um sich selbst bis A; dann ist, wenn man AB zieht, $\triangle\, ABC$ das verlangte.

6. Determination. Damit der über PB beschriebene Halbkreis den des Winkels ω fähigen Bogen schneide, darf M, der Mittelpunkt des Halbkreises nicht in BO, sondern muss oberhalb dieser Linie liegen. Es muss also BP oberhalb BO liegen und demnach $BPE < BOE$, d. h. $\varphi < \omega$ sein.

7. Zweite trigonometrische Auflösung. (Fig. 4.) In dem Dreiecke

MBO ($\cong\triangle$ MDO) ist $MB = \frac{a}{4\sin\varphi}$, $OB = \frac{a}{2\sin\omega}$, $MBO = \mathrm{R} - \varphi - (R - \omega)$ $= \omega - \varphi$; demnach ergiebt sich

$$\cot MOB = \cot ACB = \cot\gamma = \frac{OB - MB\cos MBO}{MB\sin MBO}$$

$$= \frac{2\sin\varphi}{\sin\omega\sin(\omega - \varphi)} - \cot(\omega - \varphi).$$

Das Folgende wie in der ersten Auflösung.

Anmerk. Aus Vergleichung der in der ersten und in der zweiten Auflösung für $\cot\gamma$ gefundenen Werthe ergiebt sich, dass

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\omega\sin(\omega - \varphi)} - \cot\omega = \frac{2\sin\varphi}{\sin\omega\sin(\omega - \varphi)} - \cot(\omega - \varphi)$$

oder $$\cot(\omega - \varphi) - \cot\omega = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega\sin(\omega - \varphi)}$$

sein muss; was von den Schülern nachzuweisen ist.

8. Dritte geometrische Auflösung. (Fig. 5.) Halbire $BC = a$ in E; schlage über BE einen des Winkels φ, und über EC einen des Winkels $\omega - \varphi$ fähigen Bogen, welche beide Bögen sich in D durchschneiden. Ziehe CD und verlängere diese Linie um sich selbst bis A. Wird dann AC gezogen, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

9. Dritte trigonometrische Auflösung. (Fig. 5.) Aus dem Dreiecke QEO, in welchem $QE = \frac{a}{4\sin\varphi}$, $OE = \frac{a}{4\sin(\omega - \varphi)}$, $QEO = \omega$ bekannt sind, ergiebt sich

$$\cot QOE = \cot\gamma = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)\sin\omega} - \cot\omega.$$

10. Vierte trigonometrische Auflösung. (Fig. 5.) Führt man den Winkel $DBE = OQE = \mu$ als Hülfsgrösse ein, so ergiebt sich aus dem Dreiecke QEO

$$\cot\mu = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega\sin\varphi} - \cot\omega = \cot\varphi - 2\cot\omega;$$

und demnach hat man

(1.) $BAC = \alpha = \omega - \varphi$; (2.) $ABC = \beta = \varphi + \mu$;
(3.) $ACB = \gamma = 2R - (\omega + \mu)$;
(4.) $AC = b = \frac{a\sin(\varphi + \mu)}{\sin(\omega - \varphi)}$; (5.) $AB = c = \frac{a\sin(\omega + \mu)}{\sin(\omega - \varphi)}$.

oder auch

(4.) $b = 2DC = \frac{2a\sin\mu}{\sin\omega}$; (5.) $c = 2DE = 4QE\sin\mu = \frac{a\sin\mu}{\sin\varphi}$.

Anmerk. Aus den beiden in der vorigen Auflösung für b gefundenen Werthen stellt sich heraus, dass

$$\frac{\sin(\varphi+\mu)}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{2\sin\mu}{\sin\omega}$$

sein muss. In der That ist

$$\frac{\sin(\varphi+\mu)}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{\sin\varphi\cos\mu+\cos\varphi\sin\mu}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{\sin\mu(\sin\varphi\cot\mu+\cos\varphi)}{\sin(\omega-\varphi)};$$

indem nun der früher unter 10. für $\cot\mu$ gefundene Werth substituirt wird, ist der zuletzt gefundene Ausdruck

$$=\frac{\sin\mu(\sin\varphi(\cot\varphi-2\cot\omega)+\cos\varphi)}{\sin(\omega-\varphi)};$$

wird nun endlich für $\cot\varphi - 2\cot\omega$ das ihm gleiche $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{2\cos\omega}{\sin\omega}$ gesetzt und dann reducirt, so ergiebt sich, dass

$$\frac{\sin(\varphi+\mu)}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{2\sin\mu}{\sin\omega}.$$

Ebenso muss auch

$$\frac{\sin(\omega+\mu)}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{\sin\mu}{\sin\varphi}$$

sein, wie sich aus den beiden für c gefundenen Werthen ergiebt.

11. Vierte geometrische Auflösung. (Fig. 6.) Schlage über $BC = a$ einen des Winkels ω, und über $BE = \frac{1}{2}a$ einen des Winkels φ fähigen Bogen, welche beide Bögen sich in D durchschneiden; ziehe CD und verlängere diese Linie um sich selbst bis A u. s. w.

12. Fünfte trigonometrische Auflösung. (Fig. 6.) Verbindet man die Mittelpunkte O und P der beiden Bögen unter sich und mit B, so sind in dem Dreiecke PBO die beiden Seiten PB, OB und der Winkel $PBO = \omega - \varphi$ bekannt, und demnach ist

$$\cot POB = \cot ACB = \cot\gamma = \frac{2\sin\varphi}{\sin\omega\sin(\omega-\varphi)} - \cot(\omega-\varphi);$$ u. s. w., wie bei der zweiten Auflösung.

13. Sechste trigonometrische Auflösung. (Fig. 6.) Man führe den Winkel $POE = \psi$ als Hülfsgrösse ein; dann ist, da in dem Dreiecke PEO $PE = \frac{a}{4\sin\varphi}$, $OE = \frac{a}{2}\cot\omega$, $PEO = \varphi$ bekannt sind,

$$\cot\psi = 2\cot\omega - \cot\varphi.$$

Nun hat man

$$(1.)\ \alpha = \omega - \varphi;\ (2.)\ \gamma = \tfrac{1}{2}DOB = POB = \psi - \omega;$$

$$(3.)\ \beta = 2R - (\psi - \varphi);\ (4.)\ b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\omega-\varphi)};$$

$$(5.)\ c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin(\psi-\omega)}{\sin(\omega-\varphi)};$$

oder auch, indem man $DC = \frac{1}{2}b$ aus dem Dreiecke DBC, und $DE = \frac{1}{2}c$ aus dem Dreiecke DBE berechnet und beachtet dass $DBC = 2R - \psi$ ist,

$$(4.)\ b = \frac{2a\sin\psi}{\sin\omega};\ (5.)\ c = \frac{a\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Anmerk. Aus Vorstehendem ergiebt sich, dass

$$\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)} = \frac{2\sin\psi}{\sin\omega} \text{ und } \frac{\sin(\psi + \omega)}{\sin(\omega - \varphi)} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

sein muss.

III.

In mehr oder minder ähnlicher Weise als wie die beiden vorhergehenden lassen sich auch folgende Aufgaben behandeln. Nämlich ein Dreieck zu construiren und zu berechnen, von welchem gegeben ist:

1. eine Seite, der gegenüberliegende Dreieckswinkel und die zugehörige Höhe;
2. eine Seite, der gegenüberliegende Dreieckswinkel und noch derjenige Winkel, den die gegebene Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet;
3. eine Seite, ein anliegender Winkel und noch derjenige Winkel, den die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet;
4. zwei Seiten und derjenige Winkel, den die dritte Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet;
5. eine Seite, die zugehörige Höhe und derjenige Winkel, welchen eine zweite Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet;
6. eine Seite, die dieselbe halbirende Transversale und derjenige Winkel, den eine zweite Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet;
7. eine Seite, die zugehörige Höhe und derjenige Winkel, welchen die die beiden andern Seiten halbirenden Transversalen unter sich bilden;
8. eine Seite, die dieselbe halbirende Transversale und derjenige Winkel, welchen die die beiden andern Seiten halbirenden Transversalen unter sich bilden;
9. eine Seite, der Winkel, den diese Seite mit der sie halbirenden Transversale bildet, und noch derjenige Winkel, welchen die die beiden andern Seiten halbirenden Transversalen unter sich bilden;
10. eine Seite, ein anliegender Winkel und derjenige Winkel, welchen die die beiden andern Seiten halbirenden Transversalen unter sich bilden;
11. zwei Seiten und derjenige Winkel, welchen die die eine dieser Seiten halbirende Transversale mit der die dritte Seite halbirenden bildet.

Anmerk. Bei mehr zusammengesetzten Aufgaben, zu welchen auch die zuletzt aufgeführten gehören, führe man bei der trigonometrischen Auflösung mehrere Hülfsgrössen in die Rechnung ein. So z. B. bei der 10. Aufg., in welcher (Fig. 7.) $BC = a$, $ABC = \beta$, $BOC = \omega$ gegeben sind. Hier ist die geometrische Auflösung folgende: Beschreibe über BC einen des Winkels ω fähigen Bogen, mache $BG = \frac{1}{3}a$ und lege in G den Winkel $OGC = \beta$ an, wodurch der Punkt O bestimmt wird; ziehe CO und verlängere diese Linie um $OF = \frac{1}{2}OC$; lege durch F die Linie $BA = 2BF$ und ziehe AF. Hiernach ergiebt sich folgende trigonometrische Auflösung: Ziehe aus M, dem Mittelpunkte des beschriebenen Bogens, $MH \perp BC$, ferner MB, MG, MO. Führen wir nun $MGH = \delta$ und $MOG = o$ als Hülfsgrössen ein, so haben wir

$$\text{tng}\delta = 3\cot\omega,\ \sin o = \frac{MO\sin(\beta - \delta)}{MO} = \frac{\sin\omega\sin(\beta - \delta)}{3\cos\delta}.$$

Da nun $OG = \frac{1}{3}AB$ d. h. $= \frac{1}{3}c$, so ist

$$(1.)\ c = \frac{3a\sin(\beta - \delta + o)}{2\sin\omega\sin(\beta - \delta)}$$

$$(2.)\ \cot\gamma = \frac{2\sin\omega\sin(\beta - \delta)}{3\sin\beta\sin(\beta - \delta + o)} - \cot\beta;\ \text{u. s. w.}$$

IV.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren und zu berechnen, von welchem die Höhe, der Winkel am Scheitel und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben sind. (Fig. 8.)

Von einem Dreiecke ABC ist gegeben $AD = h$, $BAC = \alpha$ und $OG = \varrho$.

1. **Geometrische Auflösung.** Lege den Winkel $KAL = \alpha$ hin und halbire denselben durch AM; errichte $AI = \varrho \perp AK$ und ziehe aus I eine zu AK parallele Linie, welche die AM in einem Punkte O schneidet; beschreibe aus O mit ϱ einen Kreis; beschreibe ferner über AO einen Halbkreis und lege in denselben eine Sehne $AF = h - \varrho$; verlängere dann AF bis D, so dass $AD = h$ ist, und errichte auf AD in D eine Senkrechte, welche die Schenkel AK und AL in B und C schneidet; dann ist $\triangle\ ABC$ das verlangte.

2. **Determination.** Damit $AO = h - \varrho$ in den Halbkreis gelegt werden könne, muss $h - \varrho \leqq AO$, d. h. $\leqq \dfrac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ sein, also

$$(1.)\ h \leqq \frac{\varrho(1 + \sin\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Damit ferner die auf AD errichtete Senkrechte die beiden Schenkel AK und AL treffe, ist erforderlich, dass

$$(2.)\ h > 2\varrho \text{ sei.}$$

3. **Trigonometrische Auflösung.** Man führe den Winkel AEB als Hülfsgrösse ein; er sei mit ε bezeichnet. Dann ist, da $AEB = AOF$,

$$\sin\varepsilon = \frac{AF}{AO},\ \text{oder da } AO = \frac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\sin\varepsilon = \frac{(h - \varrho)\ \sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho}.$$

Nun ist (1.) $ABC = \beta = 2R - (\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)$; (2.) $ACB = \gamma = \varepsilon - \frac{1}{2}\alpha$;

$$(3.)\ AC = b = \frac{h}{\sin(\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha)};\ (4.)\ AB = c = \frac{h}{\sin(\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)};$$

$$(5.)\ a = \frac{h\sin\alpha}{\sin(\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)\sin(\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha)};$$

oder indem man in dem letztern Ausdrucke den Nenner entwickelt, die Multiplication vollzieht, dann für die vorkommenden Cosinus die Sinus in Rechnung bringt und endlich für $\sin\varepsilon$ dessen Werth substituirt,

$$(5.)\ a = \frac{2\varrho^2\cot\frac{1}{2}\alpha}{h - 2\varrho}.$$

4. Determination, aus der vorstehenden Rechnung abgeleitet. Damit erstlich ε einen reellen Werth habe, muss in dem oben für $\sin\varepsilon$ gefundenen Ausdrucke der Zähler kleiner als der Nenner oder höchstens demselben gleich sein, woraus sich ergiebt:

$$(1.)\ h \leqq \frac{\varrho(1 + \sin\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha};$$

und damit ferner DE den Schenkel AC treffe, muss $\varepsilon > \frac{1}{2}\alpha$, also auch $\sin\varepsilon > \sin\frac{1}{2}\alpha$ sein, d. h.

$$\frac{(h - \varrho)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho} > \sin\frac{1}{2}\alpha$$

d. h. (2.) $h > 2\varrho$.

Anmerk. Da sich aus den gegebenen Stücken nur ein Dreieck construiren lässt, so müssen zwei Dreiecke, die in den gegebenen Stücken h, α, ϱ übereinstimmen, congruent sein, desgleichen müssen sie ähnlich sein, wenn bei ihnen α gleich ist, h und ϱ aber bei beiden in demselben Verhältnisse stehen. Die Beweise ergeben sich leicht, wenn man nur den Gang der Construction verfolgt.

V.

In ähnlicher Weise lassen sich folgende Aufgaben behandeln. Ein Dreieck zu construiren und zu berechnen, von welchem gegeben ist:

1. ein Winkel, die denselben halbirende Transversale und der Radius des eingeschriebenen Kreises;
2. die Höhe, der Winkel am Scheitel und die denselben halbirende Transversale;
3. die Höhe, die den Winkel am Scheitel halbirende Transversale und der Radius des eingeschriebenen Kreises;
4. ein Winkel an der Grundlinie, die Höhe und der Radius des eingeschriebenen Kreises;
5. der Radius des eingeschriebenen Kreises und die Winkel des Dreiecks;
6. der Radius des eingeschriebenen Kreises, die Höhe und noch derjenige Winkel, welchen die die beiden an der Grundlinie liegenden Dreieckswinkel halbirenden Transversalen unter sich bilden;

7. der Radius des eingeschriebenen Kreises, die einen Dreieckswinkel halbirende Transversale und derjenige Winkel, welcher von den die beiden andern Dreieckswinkel halbirenden Transversalen gebildet wird;

8. der Radius des eingeschriebenen Kreises, die Höhe und derjenige Winkel, welchen die den Winkel am Scheitel halbirende Transversale mit einer zweiten, ebenfalls einen Dreieckswinkel halbirenden Transversale bildet;

9. der Winkel am Scheitel, der Radius des eingeschriebenen Kreises und der Winkel, welchen die Höhe mit der den Winkel am Scheitel halbirenden Transversale bildet;

10. der Radius des eingeschriebenen Kreises, die Höhe und der Winkel, welchen die Höhe mit der den Winkel am Scheitel halbirenden Transversale bildet;

11. der Radius des eingeschriebenen Kreises, die den Winkel am Scheitel halbirende Transversale und der Winkel, den diese Transversale mit der Höhe des Dreiecks bildet.

VI.

Pothonots Aufgabe. Von einem Vierecke $ABCD$ (Fig. 9.) sind zwei Seiten $AB = a$, $BC = b$, der von ihnen gebildete Winkel $ABC = \beta$ und noch diejenigen beiden Winkel gegeben, welche die Diagonale BD mit den beiden nicht gegebenen Seiten bildet, nämlich $BDA = \omega$ und $BDC = \varphi$. Es sollen die beiden andern Viereckswinkel, nämlich $DAB = \alpha$ und $DCB = \gamma$ bestimmt werden.

Auflösung. Die geometrische Construction führt dahin, dass über AB ein des Winkels ω, und über BC ein des Winkels φ fähiger Bogen geschlagen wird, welche Bögen sich dann in D treffen. Hiernach stellt sich folgende Berechnung heraus. Nachdem die Mittelpunkte O und P der beiden Bögen mit einander verbunden, auch die Radien OB, OD, PB, PD gezogen sind, ergiebt sich für das Dreieck OBP, in welchem $\sphericalangle\, OBP$ mit ψ bezeichnet sein mag,

$$OB = \frac{a}{2\sin\omega},\ PB = \frac{b}{2\sin\varphi},\ \psi = \beta - (R-\omega) - (R-\varphi) = \beta + \omega + \varphi - 2R.$$

Da nun $\triangle\, OBP \cong ODP$, und folglich $POB = POD = BAD = \alpha$, und ebenso $OPB = DCB = \gamma$ ist, so ist auch

$$(1.)\ \cot\alpha = \frac{OB - PB\cos\psi}{PB\sin\psi} = \frac{a\sin\varphi}{b\sin\omega\sin\psi} - \cot\psi;$$

$$(2.)\ \cot\gamma = \frac{PB - OB\cos\psi}{OB\sin\psi} = \frac{b\sin\omega}{a\sin\varphi\sin\psi} - \cot\psi.$$

VII.

Aufgabe. Von einem Dreiecke ABC (Fig. 10.) seien die beiden Seiten $AC = b$, $AB = c$ und der von denselben gebildete Winkel $BAC = \alpha$ gegeben. Man soll die beiden

Seiten um die Stücke BK und CL verlängern, so dass diese Stücke in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen und die ihre Endpunkte verbindende gerade Linie KL eine gegebene Grösse d hat.

1. **Geometrische Auflösung.** Schneide von AB und AC zwei Stücke AD und AE ab, so dass $AD : AE = m : n$, verbinde D mit E und ziehe $CF \parallel DE$. Verlängere BC um sich selbst bis G, schlage aus G mit d als Radius einen Bogen, der die CF in H trifft, und ziehe $HI \parallel BA$. Alsdann verlängere AB bis K, so dass $BK = IH$, desgleichen AC bis L, so dass $CL = IC$, womit die Aufgabe gelöset ist.

Beweis. (1.) Es ist $BK : CL = IH : IC = AD : AE = m : n$. Die Verlängerungen haben also das verlangte Verhältniss. (2.) Ziehe $BM \parallel CL$, $LM \parallel CB$ und verbinde K mit M und L, desgleichen auch H mit G. Nun ist $BK = IM$, $BM = CL = IC$ und $KBM = HIC$, und folglich $\triangle KBM \cong HIC$, woraus folgt, dass $KM = HC$ und $KMB = HCI$, also auch $KML = HCG$ ist; ausserdem ist in den beiden Dreiecken KML und HCG die Seite $ML = BC = CG$. Folglich sind die beiden Dreiecke deckend und daher $KL = HG = d$. Die Verbindungslinie KL hat also die verlangte Grösse.

2. **Trigonometrische Auflösung.** Aus dem Dreiecke ABC ergiebt sich

$$\cot ACB = \cot\gamma = \frac{b - c\cos\alpha}{c\sin\alpha},$$

und aus dem Dreiecke AFC, in welchem $AF = \frac{m}{n}AC = \frac{mb}{n}$,

$$\cot ACF = \cot\eta = \frac{n - m\cos\alpha}{m\sin\alpha}.$$

Nun hat man aus dem Dreiecke HCG, in welchem $CG = BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ und der Winkel $HCG = 2R - (\gamma + \eta)$ und $HG = d$ ist,

$$\sin CHG = \sin\varepsilon = \frac{CG\sin(\gamma - \eta)}{HG} = \frac{\sin(\gamma - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{d}$$

und demnach

$$HC = \frac{HG\sin HGC}{\sin HCG} = \frac{d\sin(\gamma - \eta - \varepsilon)}{\sin(\gamma - \eta)}.$$

Setzen wir nun $BK = x$ und $CL = y$, so ergiebt sich aus dem Dreiecke IHC

$$x = IH = \frac{HC\sin HCI}{\sin HIC} = \frac{d\sin(\gamma - \eta - \varepsilon)\sin\eta}{\sin(\gamma - \eta)\sin\alpha};$$

$$y = IC = \frac{HC\sin IHC}{\sin HIC} = \frac{d\sin(\gamma - \eta - \varepsilon)\sin(\alpha + \eta)}{\sin(\gamma - \eta)\sin\alpha}.$$

Wir haben also zur Auflösung unserer Aufgabe folgende Gleichungen:

$$(1.)\ \cot\gamma = \frac{b - c\cos\alpha}{c\sin\alpha},\quad (2.)\ \cot\eta = \frac{n - m\cos\alpha}{m\sin\alpha},$$

$$(3.)\ \sin\varepsilon = \frac{\sin(\gamma - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{d},$$

$$(4.)\ x = \frac{d\sin(\gamma - \eta - \varepsilon)\sin\eta}{\sin(\gamma - \eta)\sin\alpha},$$

$$(5.)\ y = \frac{d\sin(\gamma - \eta - \varepsilon)\sin(\alpha + \eta)}{\sin(\gamma - \eta)\sin\alpha}.$$

Setzen wir $\frac{c}{b} = \mu$ und $\frac{m}{n} = \nu$, so gehen die drei ersten Gleichungen über in:

$$(1.)\ \cot\gamma = \frac{1 - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha},\quad (2.)\ \cot\eta = \frac{1 - \nu\cos\alpha}{\nu\sin\alpha},$$

$$(3.)\ \sin\varepsilon = \frac{b}{d}\sin(\gamma - \eta)\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu\cos\alpha}.$$

3. **Determination.** Wir haben drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich CF in der Construction oberhalb CB, oder auf CB oder unterhalb zu liegen kommt, — oder, um diese Fälle auf die gegebenen Stücke zurückzuführen, ob $\frac{n}{m} >$, oder $=$, oder $< \frac{b}{c}$ ist. Nur der erste Fall soll hier erörtert werden, indem die übrigen Fälle sich hiernach leicht ergeben. — Soll also für den ersten Fall eine Auflösung mit der Bestimmung Statt finden können, dass die Stücke BK und CL in den Verlängerungen von AB und AC liegen, (und nicht von B und C aus von AB und AC abgeschnitten werden,) so muss der von G aus mit d als Radius beschriebene Bogen die CF in der Richtung von C nach F hin treffen. Ist nun der Winkel FCB d. h. der Winkel $\gamma - \eta < R$, (Fig. 10.), so wird dies nur dann geschehen, wenn $GH > GC$, d. h. $d > \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ ist. (Sollen aber die Stücke BK und CL auch von BA und CA abgeschnitten werden können, so muss, wenn man $GN \perp CF$ fället, $GH \geqq GN$ d. h. $d \geqq \sin(\gamma - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ sein.) Ist aber FCB d. h. $\gamma - \eta$ ein stumpfer Winkel (Fig. 11.), so ist bei der Bestimmung, dass die Stücke BK und CL in den Verlängerungen von AB und AC liegen sollen, immer eine Auflösung möglich, so lange $d \geqq \sin(\beta - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ ist; und ist dabei $d < CG$ d. h. $< \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, so ergeben sich, da der mit d beschriebene Bogen die CF in der Richtung von C nach F zweimal trifft, auch zwei Resultate für die Auflösung. — Da nun β und η keine **unmittelbar** gegebenen Stücke sind, so ist noch zu untersuchen, welche Bedingung von den gegebenen Stücken erfüllt werden müsse, damit $\beta - \eta$ ein stumpfer Winkel werde. Es ist

$$\cot\gamma = \frac{b - c\cos\alpha}{c\sin\alpha} \text{ und } \operatorname{tng}\eta = \frac{m\sin\alpha}{n - m\cos\alpha};$$

also $$\cot\gamma + \operatorname{tng}\eta = \frac{(b - c\cos\alpha)(n - m\cos\alpha) + cm\sin\alpha^2}{c\sin\alpha(n - m\cos\alpha)},$$

woraus sich nach einigen leichten Umformungen ergiebt:

$$\cos(\gamma - \eta) = \frac{(bn + cm - (bm + cn)\cos\alpha)\sin\gamma\cos\eta}{c\sin\alpha(n - m\cos\alpha)}.$$

Damit nun $\gamma - \eta$ ein stumpfer Winkel sei, muss zuvörderst $\gamma > R$, (also $\alpha < R$,) und $\eta < R$, und dann muss der so eben für $\cos(\gamma - \eta)$ gefundene Werth negativ sein. Damit letzteres Statt finde, ist nöthig, dass

$$bn + cm < (bm + cn)\cos\alpha,$$

oder: $$\frac{b}{c} < \frac{n\cos\alpha - m}{n - m\cos\alpha}.$$

Ist aber $bn + cm \geqq (bm + cn)\cos\alpha$, so ist $\gamma - \eta$ im ersten Falle ein spitziger, im zweiten ein rechter Winkel.

Fassen wir das Gewonnene zusammen, so stellt sich für den Fall, dass $\frac{n}{m} > \frac{b}{c}$, und unter der Bedingung, dass die gesuchten Stücke BK und CL auf den Verlängerungen von AB und AC liegen sollen, folgendes als Determination heraus: Ist $bn + cm \geqq (bm + cn)\cos\alpha$, so muss $d > \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ sein, und es ist nur ein Resultat da. Ist aber $bn + cm < (bm + cn)\cos\alpha$, so muss, damit überhaupt ein Resultat möglich sei, $d \geqq \sin(\beta - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ sein. Ist $d < \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ aber $d > \sin(\beta - \eta)\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, so ergeben sich zwei Resultate. Ist endlich $d > \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, so ergiebt sich nur ein Resultat. *)

*) Die vorstehende Aufgabe wurde zuerst in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik Band XXVIII, Hft. 3 S. 344, von dem Herausgeber des Archivs in zweifacher Weise auf dem Wege der Rechnung gelöset, worauf der Verfasser der vorliegenden Schrift in demselben Archiv Band XXIX, Hft. 4, S. 440 die hier gegebene geometrische und trigonometrische Auflösung mittheilte. — Herr Professor Grunert hatte ferner (Band XXVIII, Hft. 3, S. 349), eine zweite Aufgabe hinzugefügt, die nämlich, das Minimum der Linie d zu bestimmen. Diese Aufgabe ist durch die oben unter 3. gegebene Determination gelöset.

Fig. 1.

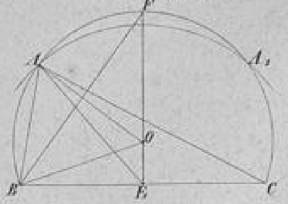

Fig. 2.

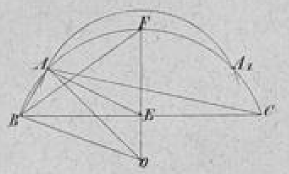

Fig. 3.

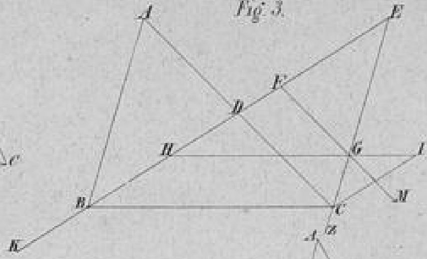

Fig. 4.

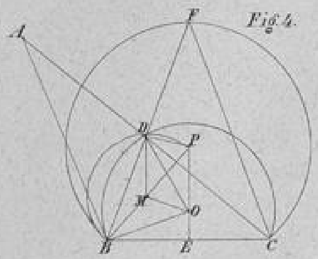

Fig. 5

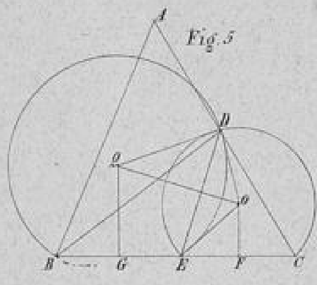

Fig. 6.

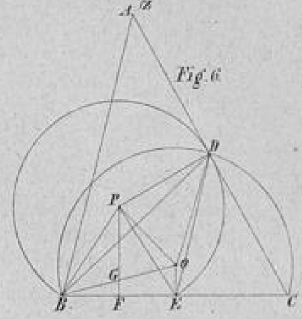

Fig. 7.

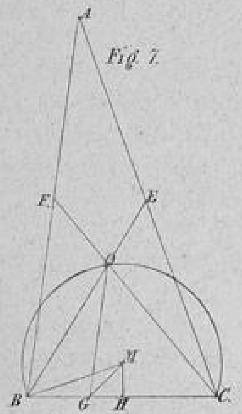

Fig. 8.

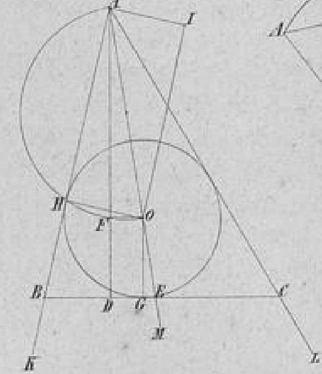

Fig. 9.

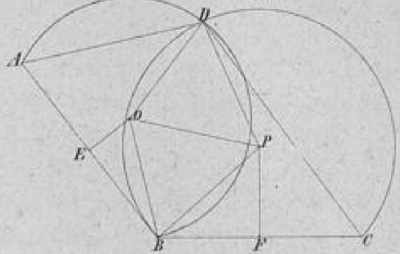

Fig. 10.

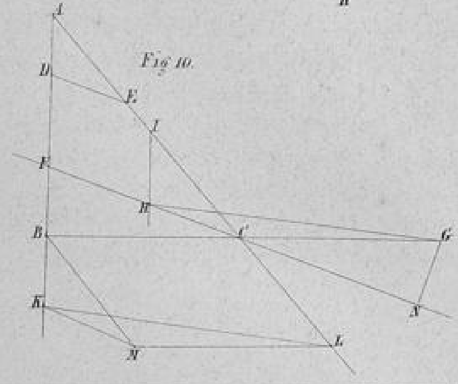

Fig. 11.