Trigonometrische Auflösungen

für eine bestimmte Klasse von Dreiecksaufgaben.

(Hierbei eine Figurentafel.)

Beim Unterrichte in der Trigonometrie ist es gewiss von Wichtigkeit, dass der Schüler sich in der Anwendung und Handhabung, namentlich auch in der Umwandlung trigonometrischer Formeln eine gehörige Umsicht, Gewandtheit und Sicherheit erwerbe. Zur Erreichung dieses Zieles hat der Unterzeichnete bei seinem Unterrichte es immer als sehr zweckdienlich gefunden, von den Schülern mehrere solche Dreiecksaufgaben trigonometrisch behandeln zu lassen, bei welchen zwei Winkel und die Summe oder Differenz zweier oder mehrer beim Dreiecke vorkommenden Linien die gegebenen Stücke sind. Diese Klasse von Aufgaben nämlich lässt auf eine leichte Weise eine doppelte oder mehrfache Auflösung zu, indem man entweder vermittelst der gegebenen Summen- oder Differenzgleichung direct zur Auffindung der unbekannten Grössen schreitet, oder eine zur geometrischen Auflösung der Aufgabe führende Construction zur trigonometrischen Bestimmung der gesuchten Stücke benutzt. Bei den verschiedenen Auflösungen ergeben sich dann auch durchgängig Auflösungsformeln, die in der Form mehr oder weniger verschieden sind; und hiermit stellt sich dann für den Schüler von selbst die Aufforderung heraus, die Gleichheit dieser Formeln nachzuweisen. Der Unterzeichnete hat daher Veranlassung genommen, in dieser Gelegenheitsschrift eine kleine Samm-

1 *

lung derartiger Aufgaben mitzutheilen. Bei einigen hat der Verfasser die verschiedenen Auflösungen vollständig ausgeführt, nicht etwa, weil dieselben besondere Schwierigkeiten enthalten, — die Auflösungen sind vielmehr im Grunde sämmtlich leicht zu finden, — sondern blos, um zu zeigen, auf wie mannigfaltige Weise die Aufgaben zum Vortheil des Unterrichts ausgebeutet werden können. — Dass die Aufgaben leicht sind, gereicht ihnen nach des Verfassers Meinung nicht zum Tadel, sondern in Hinsicht auf den ausgesprochenen Zweck vielmehr zum Lobe. Indem nämlich der Schüler mit der eigentlichen Auflösung der Aufgabe leicht fertig wird, bleibt ihm desto mehr Zeit und Muth, sich in der Umwandlung der verschiedenen gefundenen Formeln zu üben. — Dass aber überhaupt bei der vorliegenden Arbeit keineswegs die Wissenschaft an sich, sondern nur das Didaktische in Betracht kam, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Coesfeld im Juli 1852.

F. H. Rump.

I. Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

1. Aufgabe. Gegeben $c + a = s$, β. (Fig. 1.) *)

Erste Auflösung. Da $a = c\cos\beta$, und $c + a = s$ gegeben ist, so ist auch $c + c\cos\beta = s$, und folglich

$$(1.)\ c = \frac{s}{1+\cos\beta}; \qquad (2.)\ a = c\cos\beta = \frac{s\cos\beta}{1+\cos\beta};$$

$$(3.)\ b = c\sin\beta = \frac{s\sin\beta}{1+\cos\beta}.$$

Zweite Auflösung. Um aus den gegebenen Stücken das Dreieck rein geometrisch zu construiren, lege man $DC = s$ hin und hieran den Winkel $FDC = \frac{1}{2}\beta$, errichte dann auf DC im Punkte C eine Senkrechte, welche mit der verlängerten DF in A zusammentrifft. Wird dann noch an DA der Winkel $DAB = \frac{1}{2}\beta$ angelegt, so ist ABC das verlangte Dreieck. — Diese geometrische Auflösung der Aufgabe führt zu folgender trigonometrischen Behandlung derselben:

An dem Dreieck ABC denke man sich BC um c bis D verlängert und D mit A verbunden; dann ist $DC = s$ und $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\beta$; demnach ergibt sich:

$$(4.)\ b = s\tan\tfrac{1}{2}\beta; \qquad (5.)\ a = b\cot\beta = s\tan\tfrac{1}{2}\beta\cot\beta;$$

$$(6.)\ c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{s\tan\frac{1}{2}\beta}{\sin\beta}.$$

Folgerung. Da die in beiden Auflösungen für dieselbe Seite gefundenen Werthe natürlicher Weise unter sich gleich sein müssen, so ergibt sich z. B. aus (1.) und (6.), dass

$$\frac{s}{1+\cos\beta} = \frac{s\tan\frac{1}{2}\beta}{\sin\beta},$$

und daher auch, dass, indem ich die Umkehrungen nehme und s auf beiden Seiten aufhebe,

$$1 + \cos\beta = \frac{\sin\beta}{\tan\frac{1}{2}\beta}$$

*) Die gebrauchten Linien- und Winkelbezeichnungen ergeben sich leicht aus den Figuren.

sein muss. Nun aber ist wirklich, wie aus der bekannten Hauptformel $cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1+cos\beta}{2}}$ folgt,

$$1 + cos\beta = 2cos\tfrac{1}{2}\beta^2,$$

und auch ist

$$\frac{sin\beta}{tang\frac{1}{2}\beta} = sin\beta cot\tfrac{1}{2}\beta = 2sin\tfrac{1}{2}\beta cos\tfrac{1}{2}\beta \times \frac{cos\frac{1}{2}\beta}{sin\frac{1}{2}\beta} = 2cos\tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Anmerkung. Wird der oben unter (1.) für c gefundene Werth in gleicher Weise umgeformt, so erhält man

$$c = \frac{s}{2cos\frac{1}{2}\beta^2}.$$

Es entsteht die Frage, ob sich dieser Ausdruck nicht unmittelbar aus der Figur auffinden lasse. In der That ist in dem Dreiecke ADC

$$AD = \frac{s}{cos\frac{1}{2}\beta},$$

und da in dem gleichschenkligen Dreiecke ABD

$$AB = c = \frac{AD}{2cos\frac{1}{2}\beta},$$

so ist auch

$$c = \frac{s}{2cos\frac{1}{2}\beta^2}.$$

Dritte Auflösung. Man verlängere AB um a bis E und ziehe CE, dann ist AE $= s$, $\sphericalangle E = \frac{1}{2}\beta$ und $\sphericalangle ACE = R + \frac{1}{2}\beta$. Hiernach ergibt sich aus dem Dreiecke AEC

$$b = \frac{ssin\frac{1}{2}\beta}{sin(R+\frac{1}{2}\beta)} = \frac{ssin\frac{1}{2}\beta}{cos\frac{1}{2}\beta} = stang\tfrac{1}{2}\beta.$$

Das Uebrige, wie bei Auflösung 2.

Anmerkung. Vermittelst des Dreieckes AEC ergibt sich, dass

$$EC = \frac{s\,sin(R-\beta)}{sin(R+\frac{1}{2}\beta)} = \frac{s\,cos\beta}{cos\frac{1}{2}\beta},$$

und dann vermittelst des Dr. EBC, dass

$$a = \frac{EC}{2cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Es ist also auch

$$a = \frac{scos\beta}{2cos\frac{1}{2}\beta^2},$$

welchen Ausdruck man ebenfalls aus (2.) vermittelst Umformung erhalten hätte.

2. Aufgabe. Gegeben $c + a = s$, α. (Fig. 1.)

Erste Auflösung. Da $c + csin\alpha = s$, so ist

$$(1.)\ c = \frac{s}{1+sin\alpha}; \qquad (2.)\ a = \frac{ssin\alpha}{1+sin\alpha}; \qquad (3.)\ b = \frac{scos\alpha}{1+sin\alpha}.$$

Zweite Auflösung. Man mache CD $=$ s und ziehe AD; dann ist $\sphericalangle$ D $= \frac{1}{2}(R-\alpha)$, und folglich

$$(4.)\ b = stang\tfrac{1}{2}(R-\alpha); \qquad (5.)\ a = btang\alpha = stang\tfrac{1}{2}(R-\alpha)tang\alpha;$$

$$(6.)\ c = \frac{b}{cos\alpha} = \frac{stang\frac{1}{2}(R-\alpha)}{cos\alpha}.$$

Folgerung. Aus der Vergleichung von (1.) und (6.) folgt, dass

$$1 + sin\alpha = \frac{cos\alpha}{tang\frac{1}{2}(R-\alpha)}$$

sein muss. Nun aber ergibt sich vermittelst Anwendung bekannter Hauptformeln, dass

$$\begin{aligned} 1 + sin\alpha &= sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2sin\tfrac{1}{2}\alpha cos\tfrac{1}{2}\alpha \\ &= (sin\tfrac{1}{2}\alpha + cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2. \end{aligned}$$

Desgleichen ist

$$\begin{aligned} \frac{cos\alpha}{tang\frac{1}{2}(R-\alpha)} &= (cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) \times \frac{cos\frac{1}{2}(R-\alpha)}{sin\frac{1}{2}(R-\alpha)}, \\ &= (cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) \times \frac{sin\frac{1}{2}(R+\alpha)}{sin\frac{1}{2}(R-\alpha)}, \\ &= (cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) \times \frac{sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}\alpha + cos\frac{1}{2}Rsin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}\alpha - cos\frac{1}{2}Rsin\frac{1}{2}\alpha}. \end{aligned}$$

Da nun $sin\frac{1}{2}R = cos\frac{1}{2}R$, und folglich diese Grössen im Zähler und Nenner des zweiten Factors sich aufheben, so ergibt sich nach Zerlegung des ersten Factors:

$$\begin{aligned} \frac{cos\alpha}{tang\frac{1}{2}(R-\alpha)} &= (cos\tfrac{1}{2}\alpha + sin\tfrac{1}{2}\alpha)(cos\tfrac{1}{2}\alpha - sin\tfrac{1}{2}\alpha) \times \frac{cos\frac{1}{2}\alpha + sin\frac{1}{2}\alpha}{cos\frac{1}{2}\alpha - sin\frac{1}{2}\alpha} \\ &= (cos\tfrac{1}{2}\alpha + sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2. \end{aligned}$$

Dritte Auflösung. Wird AE $=$ s gemacht und EC gezogen, so ist $\sphericalangle$ E $= \frac{1}{2}(R-\alpha)$ und $\sphericalangle$ ACE $= \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}\alpha$, und folglich

$$(7.)\ b = \frac{ssin\frac{1}{2}(R-\alpha)}{sin(\frac{3}{2}R-\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{ssin\frac{1}{2}(R-\alpha)}{sin\frac{1}{2}(R+\alpha)} = \frac{ssin\frac{1}{2}(R-\alpha)}{cos\frac{1}{2}(R-\alpha)} = stang\tfrac{1}{2}(R-\alpha).$$

Das Uebrige, wie bei Aufl. 2., oder auch, wie folgt:

Da im Dreiecke AEC

$$EC = \frac{ssin\alpha}{sin(\frac{3}{2}R-\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{ssin\alpha}{cos\frac{1}{2}(R-\alpha)},$$

so ist

$$(8.)\ a = \frac{EC}{2cos\frac{1}{2}(R-\alpha)} = \frac{ssin\alpha}{2cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2};$$

$$(9.)\ c = s - a = \frac{s(2\cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2 - \sin\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2}$$

$$= \frac{s(1+\cos(R-\alpha)-\sin\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2}$$

$$= \frac{s(1+\sin\alpha-\sin\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2} = \frac{s}{2\cos\frac{1}{2}(R-\alpha)^2}.$$

3. **Aufgabe.** Gegeben $c - a = d,\ \beta$.

4. **Aufgabe.** Gegeben $c - a = d,\ \alpha$.

Die Auflösungen entsprechend denen von Aufgabe 1. und 2.

5. **Aufgabe.** Gegeben $a + b = s,\ \beta$.

Erste Auflösung. $(1.)\ a = \frac{s}{1+\tan\beta}$; $(2.)\ b = \frac{s\tan\beta}{1+\tan\beta}$;

$$(3.)\ c = \frac{s}{(1+\tan\beta)\cos\beta} = \frac{s}{\cos\beta+\sin\beta}.$$

Zweite Auflösung. (Fig. 2.) Man verlängere BC um b bis D und ziehe AD; dann ist $\measuredangle D = \frac{1}{2}R$, $\measuredangle BAD = \frac{3}{2}R - \beta$, und demnach

$$(4.)\ c = \frac{s\sin\frac{1}{2}R}{\sin(\frac{1}{2}R-\beta)} = \frac{s\sin\frac{1}{2}R}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)};\qquad (5.)\ a = c\cos\beta = \frac{s\sin\frac{1}{2}R\cos\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)};$$

$$(6.)\ b = \frac{s\sin\frac{1}{2}R\sin\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)}.$$

Oder auch, da $AD = \frac{s\sin\beta}{\sin(\frac{3}{2}R-\beta)} = \frac{s\sin\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)}$, so ist

$$(7.)\ b = \frac{AD}{2\cos\frac{1}{2}R} = \frac{s\sin\beta}{2\cos\frac{1}{2}R\sin(\frac{1}{2}R+\beta)} = \frac{s\sin\frac{1}{2}R\sin\beta}{2\cos\frac{1}{2}R^2\sin(\frac{1}{2}R+\beta)} = \frac{s\sin\frac{1}{2}R\sin\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)},$$

indem $\sin\frac{1}{2}R = \cos\frac{1}{2}R$ und $2\cos\frac{1}{2}R^2 = 1+\cos R = 1$ ist. — Hiernach ergibt sich dann

$$(8.)\ a = s - b = \frac{s(\sin(\frac{1}{2}R+\beta) - \sin\frac{1}{2}R\sin\beta)}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)}$$

$$= s \times \frac{\sin\frac{1}{2}R\cos\beta + \cos\frac{1}{2}R\sin\beta - \sin\frac{1}{2}R\sin\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)} = \frac{s\sin\frac{1}{2}R\cos\beta}{\sin(\frac{1}{2}R+\beta)}.$$

6. **Aufgabe.** Gegeben $a - b = d,\ \beta$.

Die Auflösungen entsprechen denen von Aufgabe 5.

7. **Aufgabe.** Gegeben $a + b + c = s,\ \beta$. (Fig. 3.)

Erste Auflösung. $(1.)\ c = \frac{s}{1+\sin\beta+\cos\beta}$; $(2.)\ a = \frac{s\cos\beta}{1+\sin\beta+\cos\beta}$;

$$(3.)\ b = \frac{s\sin\beta}{1+\sin\beta+\cos\beta}.$$

Zweite Auflösung. Man verlängere die Hypotenuse nach beiden Seiten um a und b bis E und D, und ziehe EC und DC; dann ist DE $= s$, $\sphericalangle E = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle D = \frac{1}{2}(R-\beta)$, $\sphericalangle DCE = \frac{3}{2}R$. Nun ergibt sich zunächst:

$$EC = \frac{s sin\frac{1}{2}(R-\beta)}{sin\frac{3}{2}R} = \frac{s sin\frac{1}{2}(R-\beta)}{sin\frac{1}{2}R},$$

und demnach

$$(4.)\ a = \frac{EC}{2cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{s sin\frac{1}{2}(R-\beta)}{2sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}\beta};$$

$$(5.)\ b = a tang\beta = \frac{s sin\frac{1}{2}(R-\beta) tang\beta}{2sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}\beta};$$

$$(6.)\ c = \frac{a}{cos\beta} = \frac{s sin\frac{1}{2}(R-\beta)}{2sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}\beta cos\beta}.$$

Anmerkung. Hätte man statt EC zunächst die Linie DC bestimmt, so ergäbe sich

$$b = \frac{s sin\frac{1}{2}\beta}{2sin\frac{1}{2}Rcos\frac{1}{2}(R-\beta)} = \frac{s sin\frac{1}{2}\beta}{2sin\frac{1}{2}Rsin\frac{1}{2}(R+\beta)}.$$

Behufs der Auflösung unserer Aufgabe hätte man auch die Kathete BC nach beiden Seiten um c und b, oder auch die Kathete AC nach beiden Seiten um c und a verlängern können, und jedesmal würden sich die Auflösungsformeln mehr oder weniger anders entwickelt haben. Man sieht demnach, wie viel Gelegenheit hierbei geboten wird, den Schüler im Umformen trigonometrischer Ausdrücke zu üben. — Die Auflösungen folgender drei Aufgaben mögen hier übergangen werden.

8. Aufgabe. Gegeben $a + b - c = d$, β.

9. Aufgabe. Gegeben $b + c - a = d$, β.

10. Aufgabe. Gegeben $a + c - b = d$, β.

II. Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck.

11. Aufgabe. Gegeben $a + b = s$, β. (Fig. 4.)

Erste Auflösung. Da $a = 2b cos\beta$, so ist

$$(1.)\ b = \frac{s}{2cos\beta+1}; \qquad (2.)\ a = \frac{2s cos\beta}{2cos\beta+1}.$$

Zweite Auflösung. Man verlängere BC um b bis D, und ziehe AD; dann ist $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle BAD = 2R - \frac{3}{2}\beta$. Folglich

$$(3.)\ b = \frac{s sin\frac{1}{2}\beta}{sin\frac{3}{2}\beta}; \qquad (4.)\ a = \frac{2s sin\frac{1}{2}\beta cos\beta}{sin\frac{3}{2}\beta}.$$

Oder auch, weil $AD = \frac{s sin\beta}{sin\frac{3}{2}\beta}$ und $b = \frac{AD}{2cos\frac{1}{2}\beta}$, so ist

$$(5.)\ b = \frac{s\sin\beta}{2\sin\frac{3}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{2s\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{3}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{s\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{3}{2}\beta}.$$

Dritte Auflösung. Man verlängere AC um a bis E und ziehe BE: dann ist $\sphericalangle E = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle ABE = \frac{3}{2}\beta$, $\sphericalangle BAE = 2R - 2\beta$, und folglich

$$(6.)\ b = \frac{s\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{3}{2}\beta};$$

und da $BE = \frac{s\sin2\beta}{\sin\frac{3}{2}\beta}$ und $a = \frac{BE}{2\cos\frac{1}{2}\beta}$, so ist

$$(7.)\ a = \frac{s\sin2\beta}{2\sin\frac{3}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{s\sin\beta\cos\beta}{\sin\frac{3}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{2s\sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta}{\sin\frac{3}{2}\beta}.$$

12. Aufgabe. Gegeben $a - b = d$, β.

Erste Auflösung. $b = \frac{d}{2\cos\beta - 1}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. $b = \frac{d\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{3}{2}\beta}$; u. s. w.

13. Aufgabe. Gegeben $a + b = s$, α.

Erste Auflösung. $b = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}\alpha + 1}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. $b = \frac{s\sin\frac{1}{2}(R - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}R + \frac{3}{4}\alpha)} = \frac{s\sin\frac{1}{2}(R - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{3}{2}(R - \frac{1}{2}\alpha)}$; u. s. w.

14. Aufgabe. Gegeben $a - b = d$, α.

Erste Auflösung. $b = \frac{d}{2\sin\frac{1}{2}\alpha - 1}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. $b = \frac{d\cos\frac{1}{2}(R - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos\frac{3}{2}(R - \frac{1}{2}\alpha)}$; u. s. w.

15. Aufgabe. Gegeben der Umfang $2b + a = s$, β.

Erste Auflösung. $b = \frac{s}{2(\cos\beta + 1)}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. Man denke sich die Grundlinie a nach beiden Seiten um b verlängert, dann ergibt sich

$$b = \frac{s}{4\cos\frac{1}{2}\beta^2};\ \text{u. s. w.}$$

III. Aufgaben über das Dreieck überhaupt.

16. Aufgabe. Gegeben $a + b = s$, α, β. (Fig. 5.)

Erste Auflösung. Da $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ und folglich $a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = s$, so ist

(1.) $a = \frac{s\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$; (2.) $b = \frac{s\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$; (3.) $c = \frac{s\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}$.

Zweite Auflösung. Verlängert man BC d. h. a um b bis D, und zieht AD, so ist $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\gamma = R - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\sphericalangle BAD = \alpha + R - \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = R + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Folglich

(4.) $c = \frac{BD\sin ADB}{\sin BAD} = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

(5.) $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\times 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

$= \frac{s\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

(6.) $b = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{s\sin\beta}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

17. Aufgabe. Gegeben $a - b = d$, α, β.

Erste Auflösung. (1.) $a = \frac{s\sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$; (2.) $b = \frac{s\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$;

(3.) $c = \frac{s\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha - \sin\beta}$.

Zweite Auflösung. (4.) $c = \frac{d\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$; (5.) $a = \frac{d\sin\alpha}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

(6.) $b = \frac{d\sin\beta}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

18. Aufgabe. Gegeben $a \pm b$, α, γ.

19. Aufgabe. Gegeben $a - b$, β, γ.

20. Aufgabe. Gegeben $a + b + c = s$, α, β.

Erste Auflösung. (1.) $a = \frac{s\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$;

(2.) $b = \frac{s\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$; (3.) $c = \frac{s\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$.

Zweite Auflösung. (4.) $a = \frac{s\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; (5.) $b = \frac{s\sin\frac{1}{2}\beta}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

(6.) $c = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}$.

Folgerung. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

21. Aufgabe. Gegeben $a + b - c = d$, α, β.

Erste Auflösung. $a = \frac{d\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. $a = \frac{d\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; $b = \frac{d\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;
$c = \frac{d\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}$.

Folgerung. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta) = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

22. **Aufgabe.** Gegeben $a + c - b = d$, α, β.

Erste Auflösung. $a = \frac{d\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. $a = \frac{d\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; $b = \frac{d\sin\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;
$c = \frac{d\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}$.

Folgerung. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

23. **Aufgabe.** Von einem Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie und die Summe aus der Höhe h und einer Scheitelseite c gegeben. Man bestimme die Dreiecksseiten. (Fig. 6.)

Gegeben $h + c = s$, β, γ.

Erste Auflösung. Da $h = c\sin\beta$, so ist

(1.) $c = \frac{s}{1+\sin\beta}$; (2.) $a = \frac{s\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma(1+\sin\beta)}$; (3.) $b = \frac{s\sin\beta}{\sin\gamma(1+\sin\beta)}$.

Zweite Auflösung. Man verlängere AD um c bis E und ziehe EB; dann ist $\measuredangle E = \frac{1}{2}(R-\beta)$ und $EB = \frac{s}{\cos\frac{1}{2}(R-\beta)}$. Folglich

(4.) $c = \frac{s}{2\cos\frac{1}{2}(R-\beta)^2}$; (5.) $a = \frac{s\sin(\beta+\gamma)}{2\sin\gamma\cos\frac{1}{2}(R-\beta)^2}$;

(6.) $b = \frac{s\sin\beta}{2\sin\gamma\cos\frac{1}{2}(R-\beta)^2}$.

Anmerkung. Vergleiche Aufgabe 2., die der vorstehenden Aufgabe eigentlich zu Grunde liegt.

24. **Aufgabe.** Von einem Dreiecke sind zwei Winkel und die Summe aus der Grundlinie und dem Radius r des umschriebenen Kreises gegeben. (Fig. 7.)

Gegeben $a + r = s$, α, β.

Erste Auflösung. Da $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$, so ist $a = \frac{2s\sin\alpha}{2\sin\alpha+1}$; u. s. w.

Zweite Auflösung. Man verlängere den Radius OB um a bis D, und ziehe DC und OC; dann ist $\measuredangle D = \frac{1}{2}(R-\alpha)$, $OCD = \frac{3}{2}(R-\alpha)$, und demnach $OC = r = \frac{s\sin\frac{1}{2}(R-\alpha)}{\sin\frac{3}{2}(R-\alpha)}$, und folglich

$$a = 2r\sin\alpha = \frac{2s\sin\frac{1}{2}(R-\alpha)}{\sin\frac{3}{2}(R-\alpha)};\text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Vergl. Aufgabe 13.

25. Aufgabe. Von einem Dreiecke sind zwei Winkel und die Summe aus einer Scheitelseite c und der den Scheitelwinkel halbirenden Transversale m gegeben. (Fig. 8.)

Gegeben $c + m = s$, α, β.

Erste Auflösung. Es ist $m = \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}$, und daher

$$c + \frac{c\sin\beta}{\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)} = s;\text{ folglich}$$

$$(1.)\ c = \frac{s\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta+\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)};\qquad (2.)\ a = \frac{s\sin\alpha\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta+\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)};$$

$$(3.)\ b = \frac{s\sin\beta\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta+\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Zweite Auflösung. Man verlängere AD um c bis E und ziehe EB; dann ist $\measuredangle\, EBD = \beta + \frac{1}{4}\alpha$ und $EB = \dfrac{s\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin(\beta+\frac{1}{4}\alpha)}$; folglich

$$(4.)\ c = \frac{EB}{2\cos\frac{1}{4}\alpha} = \frac{s\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{2\cos\frac{1}{4}\alpha\sin(\beta+\frac{1}{4}\alpha)};\qquad (5.)\ a = \frac{s\sin\alpha\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{2\cos\frac{1}{4}\alpha\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\frac{1}{4}\alpha)};$$

$$(6.)\ b = \frac{s\sin\beta\sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)}{2\cos\frac{1}{4}\alpha\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\frac{1}{4}\alpha)}.$$

Folgerung. $\sin\beta+\sin(\beta+\gamma) = 2\cos\frac{1}{2}\gamma\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma)$.

26. Aufgabe. Von einem Dreiecke sind zwei Winkel und die Summe zweier Höhen gegeben; es sollen die Seiten bestimmt werden. (Fig. 9.)

Gegeben von dem Dreieck ABC $BD + CE = s$, $\measuredangle\, ABC = \beta$, $\measuredangle\, ACB = \gamma$.

Erste trigonometrische Auflösung. Da $CE = a\sin\beta$ und $BD = a\sin\gamma$, so ist $a\sin\beta+a\sin\gamma = s$, und folglich

$$(1.)\ a = \frac{s}{\sin\beta+\sin\gamma};\qquad (2.)\ b = \frac{s\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)};$$

$$(3.)\ c = \frac{s\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)}.$$

Erste geometrische Auflösung. Lege eine Linie $FG = s$ hin, beschreibe über dieselbe einen Kreisabschnitt FHG, dessen Peripheriewinkel $= 2R - (\beta+\gamma)$ ist, lege an FG den Winkel $HFG = \beta$ und ziehe HG. Halbire hierauf den Winkel FHG durch HK fälle FD $\perp$ HG und schneide von dieser Senkrechten das Stück DB = FK ab. Endlich ziehe aus B die Linie BC $\parallel$ FG und die Linie BA $\parallel$ FH; dann ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Beweis. Da der Winkel FHG halbirt ist, und $\triangle$ HFG $\sim$ $\triangle$ ABC, so ergibt sich:

$$FK : KG = HF : HG = AB : AC.$$

Da ferner in einem Dreiecke die Höhen mit ihren Grundlinien umgekehrt in Proportion stehen, so ist auch

$$AB : AC = BD : CE;$$

folglich auch

$$FK : KG = BD : CE.$$

Da nun BD = FK (Constr.), so ist auch CE = KG, und daher auch BD + CE = FK + KG = FG = s.

Zweite trigonometrische Auflösung. Aus der vorstehenden Construction ergibt sich, dass in dem Dreiecke HFK der Winkel $HKF = 2R - [\beta + R - \frac{1}{2}(\beta+\gamma)] = R + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Nun ist

$$BC = a = \frac{BD}{sin\gamma},$$

$$BD = FK = \frac{FH sin FHK}{sin HKF} = \frac{FH cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},$$

$$FH = \frac{FG sin HGF}{sin FHG} = \frac{s sin\gamma}{sin(\beta+\gamma)};$$

also $$BD = \frac{s sin\gamma cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} = \frac{s sin\gamma}{2 sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)};$$

folglich $$(4.)\ a = \frac{s}{2 sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)};$$

$$(5.)\ b = \frac{a sin\beta}{sin(\beta+\gamma)} = \frac{s sin\beta}{2 sin(\beta+\gamma) sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},$$

$$= \frac{s sin\beta}{4 sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)};$$

$$(6.)\ c = \frac{s sin\gamma}{4 sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}.$$

Anmerkung. Wenn man bei dem in der ersten Auflösung unter (1.) gefundenen Ausdrucke die bekannte Umwandelungsformel

$$sin\beta + sin\gamma = 2 sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

anwendet, so ergibt sich der in der zweiten Auflösung unter (4.) direct gefundene für die Rechnung jedenfalls bequemere Ausdruck. Aber nicht jede geometrische Construction führt zu einer bequemern trigonometrischen Auflösungsformel, wie folgende Construction zeigt.

Zweite geometrische Auflösung. (Fig. 10.)) Lege einen Winkel $MBN = \beta$ hin, schneide vom Schenkel BN ein beliebig grosses Stück BF ab, und lege an dieses den Winkel $BFG = \gamma$. Fälle $FH \perp BG$ und $BI \perp FG$, und verlängere BI beliebig bis O; mache $IK = FH$ und $BL = s$; verbinde dann K mit F und ziehe aus L $LC \parallel KF$. Endlich ziehe aus C die $CA \parallel FG$, und $\triangle$ ABC ist das verlangte.

Beweis. Fälle $CE \perp BA$. Nun ist

$$\begin{array}{l} BL : BK = BC : BF = BD : BI \\ \quad BC : BF = CE : FH \\ \hline BL : BK = BD : BI = CE : FH \\ \qquad = (BD + CE) : (BI + FH) \\ \qquad = (BD + CE) : (BI + IK) \\ \qquad = (BD + CE) : BK \\ \hline BL = BD + CE \end{array}$$

d. h. $BD + CE = s$.

Dritte trigonometrische Auflösung. Nach Anleitung der vorstehenden Auflösung muss BC d. h. a aus dem Dreiecke LBC trigonometrisch bestimmt werden. Von diesem Dreiecke ist zwar $LB = s$ und $\sphericalangle\, LBC = R - \gamma$ gegeben, aber die beiden andern Winkel kann man nicht unmittelbar durch die gegebenen Winkel β und γ ausdrücken, vielmehr ist dazu eine trigonometrische Hülfsgleichung nöthig. Es ist aber $\delta = IFK$, und

$$tang IFK = \frac{IK}{IF} = \frac{HF}{IF} = \frac{BF sin\beta}{BF cos\gamma} = \frac{sin\beta}{cos\gamma}.$$

Also ist $tang\delta = \frac{sin\beta}{cos\gamma}$. Hat man vermittelst dieser Hülfsgleichung den Winkel δ gefunden, so ergibt sich ferner

$$BC = \frac{BL sin E}{sin BCL}$$

oder $a = \dfrac{s cos\delta}{sin(\gamma + \delta)}$.

Man kann auch δ eliminiren. Aus der Hülfsgleichung erhält man nämlich

$$sin\delta = \frac{sin\beta cos\delta}{cos\gamma},$$

und folglich

$$a = \frac{s cos\delta}{sin\gamma cos\delta + cos\gamma sin\delta} = \frac{s cos\delta}{sin\gamma cos\delta + cos\gamma \times \dfrac{sin\beta cos\delta}{cos\gamma}} = \frac{s}{sin\beta + sin\gamma};$$

womit wiederum die in der ersten Auflösung gefundene Formel zum Vorschein kommt.

27. **Aufgabe.** Von einem Dreiecke sind zwei Winkel und die Summe aus der Höhe und der Grundlinie gegeben. Man bestimme die Seiten des Dreiecks. (Fig. 11.)

Gegeben $AD + BC = h + a = s$, β, γ.

Erste trigonometrische Auflösung. Da $BD = h\cot\beta$ und $CD = h\cot\gamma$, so ist $h + h\cot\beta + h\cot\gamma = s$, und folglich

$$h = \frac{s}{1+\cot\beta+\cot\gamma};$$

also (1.) $a = s - h = \dfrac{s(\cot\beta+\cot\gamma)}{1+\cot\beta+\cot\gamma}$; (2.) $b = \dfrac{h}{\sin\gamma} = \dfrac{s}{\sin\gamma(1+\cot\beta+\cot\gamma)}$;

$$(3.)\ c = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{s}{\sin\beta(1+\cot\beta+\cot\gamma)}.$$

Zweite trigonometrische Auflösung. Es ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}ah = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)};$$

folglich auch, indem auf beiden Seiten $\frac{1}{2}a$ aufgehoben und $s - a$ statt h eingeführt wird,

$$s - a = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)};$$

$$s = \frac{a(\sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Also (4.) $a = \dfrac{s\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma}$; (5.) $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{s\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma}$;

$$(6.)\ c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{s\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma}.$$

Erste geometrische Auflösung. Lege den Winkel $MBN = \beta$ hin; schneide von BN ein beliebig langes Stück BF ab, lege an BF den Winkel $EBF = \gamma$, fälle $EG \perp BF$, und schneide von FN das Stück $FH = EG$ ab. Theile dann $BI = s$ im Punkte K so, dass $BK : KI = BF : FH$; mache ferner $BC = BK$, und ziehe $CA \# FE$; dann ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis. Es ist

I. $BF : BK = FH : KI$

oder $BF : BC = EG : KI$

II. $BF : BC = BE : BA = EG : AD$.

Aus I. und II. folgt, dass $AD = KI$ und folglich auch $BC + AD = BK + KI = BI = s$ ist.

Dritte trigonometrische Auflösung. Gemäss der vorstehenden Auflösung ist

$$BK : KI = BF : FH = BF : EG,$$

$$EG = EF sin\gamma = \frac{BF sin\beta sin\gamma}{sin(\beta+\gamma)},$$

$$BK : KI = BF : \frac{BF sin\beta sin\gamma}{sin(\beta+\gamma)},$$

$$= sin(\beta+\gamma) : sin\beta sin\gamma,$$

$$BK : (BK+KI) = sin(\beta+\gamma) : (sin(\beta+\gamma)+sin\beta sin\gamma);$$

d. h. $a : s = sin(\beta+\gamma) : (sin(\beta+\gamma)+sin\beta sin\gamma)$;

folglich $a = \dfrac{s sin(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma)+sin\beta sin\gamma}$.

Zweite geometrische Auflösung. (Fig. 12.) Construire über $BE = s$ ein Dreieck FBE, in welchem $\sphericalangle B = \beta$ und $\sphericalangle E = \gamma$ ist; fälle in demselben die Höhe FG, und setze an BE ein Stück $EH = FG$ an; beschreibe über BH einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne $BI = BE$, fälle $IC \perp BH$, und ziehe endlich $CA \mathbin{\#} EF$; dann ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Beweis. Es ist $BH : BI = BI : BC$

$$BH : BE = BE : BC$$

$$(BH - BE) : BE = (BE - BC) : BC$$

d. h. $EH : BE = CE : BC$

oder I. $FG : BE = CE : BC$.

Auch ist, weil $\triangle FBG \sim \triangle ABD$ und $\triangle FBE \sim \triangle ABC$,

II. $FG : BE = AD : BC$.

Aus I. und II. folgt, dass $AD = CE$ und folglich auch $AD + BC = BC + CE = BE = s$ ist.

Vierte trigonometrische Auflösung. In dem bei der vorhergehenden Auflösung construirten Dreiecke IBC ist BC d. h.

$$a = BI cos\omega = s cos\omega.$$

Es ist aber $cos\omega = \dfrac{BI}{BH} = \dfrac{s}{BE+FG}$;

und da $FG = FE sin\gamma = \dfrac{BE sin\beta sin\gamma}{sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{s sin\beta sin\gamma}{sin(\beta+\gamma)}$,

so ist auch $cos\omega = \dfrac{sin(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma)+sin\beta sin\gamma}$,

und daher $a = \dfrac{s sin(\beta+\gamma)}{sin(\beta+\gamma)+sin\beta sin\gamma}$.