Einige stereometrische Aufgaben.

§. 1.

Aufgabe. Bei einem Rechtecke ABED (Fig. 1.) sei über die Seite AB ein Halbkreis beschrieben. Denkt man sich nun die Figur um die gegenüberliegende Seite DE herumgedreht, so entsteht hierdurch ein Körper, dessen Seitenoberfläche von dem Halbkreise erzeugt wird. Man bestimme die Grösse dieser Seitenoberfläche aus den Seiten des Rechtecks.

Erster Fall: Der Halbkreis liegt ausserhalb des Rechtecks.

Auflösung. Man lege in den Halbkreis ANB ein halbes regelmässiges Vieleck so hinein, dass die beiden äussersten Seiten mit ihren Endpunkten in A und B zu liegen kommen; dann fälle man aus den Eckpunkten des halben Vielecks die Linien FH, IK, ... senkrecht auf DE. Dreht sich nun die Figur in der angegebenen Weise herum, so werden von den Paralleltrapezen AFHD, FIKH, ... lauter Kegelstumpfe beschrieben. Die Berechnung der Seitenoberflächen dieser Stumpfe liegt uns zunächst ob.

Man setze $BE = a$, $AB = 2r$, und die von der Vielecksseite FI beschriebene Fläche sei mit k bezeichnet. Ferner fälle man $CL \perp FI$, $LM \perp DE$ und auch $FQ \perp IK$. Dann ist

$$k = 2\pi \times ML \times FI = 2\pi(a + PL) \times FI$$
$$= 2\pi a \times FI + 2\pi \times PL \times FI.$$

Da nun $\triangle PLC \sim \triangle QFI$, und folglich $PL \times FI = CL \times FQ = CL \times UR$ ist, so ist auch

$$k = 2\pi a \times FI + 2\pi \times CL \times UR.$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für die Seitenoberflächen der übrigen abgestumpften Kegel. Folglich erhält man als Summe K der Seitenoberflächen sämmtlicher Kegelstumpfe

$$K = 2\pi a(AF + FI + \ldots.) + 2\pi \times CL(AU + UR + \ldots.)$$
$$= 2\pi a(AF + FI + \ldots.) + 2\pi \times CL \times 2r.$$

Lässt man nun das eingeschriebene halbe regelmässige Vieleck durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenanzahl in den Halbkreis übergehen, so erhält man die gesuchte, von dem Halbkreise bei der Drehung erzeugte, Seitenoberfläche, deren Grösse durch V bezeichnet sein mag. Hierbei wird aber $AF + FI + \ldots = \pi r$ und $CL = r$; folglich ist

$$V = 2\pi a \times \pi r + 2\pi r \times 2r = 2\pi^2 ar + 4\pi r^2.$$

Zweiter Fall: Der Halbkreis fällt über das Rechteck, wobei, wie man leicht sieht, immer $r \leqq a$ sein muss.

Auflösung. Man verfahre wie beim ersten Falle; dann ergiebt sich, wenn V_1 die Grösse der von dem Halbkreise AN_1B beschriebenen Seitenoberfläche bezeichnet,

$$V_1 = 2\pi a \times \pi r - 2\pi r \times 2r = 2\pi^2 ar - 4\pi r^2.$$

§. 2.

Zusatz. Bei der Drehung beschreibt der ganze Kreis $ANBN_1$ einen körperlichen Ring, dessen Oberfläche W durch die Summe $V + V_1$ angegeben wird. Folglich ist

$$W = 4\pi^2 ar = 2\pi r \times 2\pi a.$$

Die Oberfläche des Ringes ist also der Seitenoberfläche eines senkrechten Cylinders gleich, der den Kreis $ANBN_1$ zur Grundfläche hat, dessen Höhe aber dem Umfange des mit a beschriebenen Kreises gleich ist; — oder auch: die Oberfläche des Ringes ist der Seitenoberfläche eines senkrechten Cylinders gleich, der den mit a beschriebenen Kreis zur Grundfläche, und den Umfang des Kreises $ANBN_1$ zur Höhe hat.

§. 3.

Zusatz. Der äussere Theil V der Ringoberfläche wird erhalten, wenn man zu der halben Seitenoberfläche eines der im §. 2. angegebenen Cylinder die Oberfläche der mit r beschriebenen Kugel addirt; subtrahirt man aber die Kugeloberfläche von der halben Oberfläche des Cylinders, so erhält man den innern Theil V_1 der Ringoberfläche.

§. 4.

Zusatz. Es ist $V - V_1 = 8\pi r^2 = 2 \times 4\pi r^2$, d. h. der Unterschied zwischen dem äussern Theile V der Ringoberfläche und ihrem innern Theile V_1 beträgt die doppelte Oberfläche der mit r beschriebenen Kugel. Der genannte Unterschied ist demnach ganz unabhängig von der Grösse der Linie BE.

§. 5.

Zusatz. Es sei um den Kreis $ANBN_1$ das Quadrat STT_1S_1 gelegt. Bezeichnet nun X die ganze Oberfläche des Körpers, welchen das Quadrat bei der Drehung beschreibt, so ist

$$X = 2\pi(a + r) \times 2r + 2\pi(a - r) \times 2r + 2\pi[(a + r)^2 - (a - r)^2]$$
$$= 16\pi ar.$$

Es verhält sich also (§. 2.)

$$W : X = 4\pi^2 ar : 16\pi ar,$$
$$= \pi : 4.$$

§. 6.

Zusatz. Es sei über die Seite AB kein Halbkreis beschrieben, sondern man denke sich über die beiden Hälften dieser Linie zwei Halbkreise geschlagen, und dann sei wiederum die Figur um DE gedreht. Hierbei sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die beiden Halbkreise entweder ausserhalb des Rechtecks ABED liegen oder über dasselbe fallen. Bezeichnen wir für den ersten Fall die von den beiden Halbkreisen beschriebene Seitenoberfläche des jetzt entstehenden Körpers mit v_2, so ist

$$v_2 = 2(2\pi^2 a \times \tfrac{1}{2}r + 4\pi \times \tfrac{1}{4}r^2) = 2\pi^2 ar + \tfrac{1}{2} \times 4\pi r^2.$$

Ferner seien über die Drittel der Seite AB drei Halbkreise beschrieben, welche zunächst wieder ausserhalb des Rechtecks liegen sollen, und es sei die Seitenoberfläche des jetzt entstehenden Körpers mit v_3 bezeichnet; dann ist

$$v_3 = 3(2\pi^2 a \times \tfrac{1}{3}r + 4\pi \times \tfrac{1}{9}r^2) = 2\pi^2 ar + \tfrac{1}{3} \times 4\pi r^2.$$

Ebenso ergiebt sich ferner bei entsprechender Bezeichnungsweise

$$v_4 = 2\pi^2 ar + \tfrac{1}{4} \times 4\pi r^2;$$
$$v_5 = 2\pi^2 ar + \tfrac{1}{5} \times 4\pi r^2;$$

u. s. w.

Fallen aber die Halbkreise über das Rechteck, so ist, wenn die Seitenoberflächen in gleicher Weise mit υ_2, υ_3, υ_4, ... bezeichnet werden,

$$\upsilon_2 = 2\pi^2 ar - \tfrac{1}{2} \times 4\pi r^2;$$
$$\upsilon_3 = 2\pi^2 ar - \tfrac{1}{3} \times 4\pi r^2;$$
$$\upsilon_4 = 2\pi^2 ar - \tfrac{1}{4} \times 4\pi r^2;$$

u. s. w.

Beschreibt man über die einzelnen Theile der Seite AB ganze Kreise, so entstehen bei der Drehung vollständige Ringe, und als Summe der Oberflächen aller jedesmaligen Ringe ergiebt sich

$$v_2 + \upsilon_2 = 4\pi^2 ar = W \text{ (§. 2.)};$$
$$v_3 + \upsilon_3 = 4\pi^2 ar = W;$$
u. s. w.

Die Gesammtoberflächen aller jedesmaligen Ringe sind also immer unter sich gleich und zwar so gross, als die Oberfläche des vom Kreise $ANBN_1$ beschriebenen Ringes. Dieses Resultat hätte sich auch unmittelbar vermittelst §. 2. finden lassen. Auch sieht man leicht, dass sich auch bei ungleicher Eintheilung der Seite AB die Summe der Ringoberflächen nicht ändert, wenn nur über sämmtliche Theile Kreise beschrieben werden.

§. 7.

Aufgabe. Den Inhalt des im §. 1. bezeichneten Körpers aus den Seiten des Rechtecks zu berechnen. (Fig. 2.)

Erster Fall: Der Halbkreis liegt ausserhalb des Rechtecks.

Auflösung. Man theile die Seite AB in 2n gleiche Theile $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots$, und lege durch die Punkte C_1, C_2, C_3, ... die Linien A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3, ... parallel zu AD. Zieht man nun die Sehnen AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., so entstehen die Paralleltrapeze AA_1D_1D, $A_1A_2D_2D_1$, ..., und diese beschreiben bei der Drehung lauter abgestumpfte senkrechte Kegel. Wir wollen den Inhalt des von AA_1D_1D beschriebenen Kegelstumpfes mit σ_1, den Inhalt des folgenden mit σ_2 u. s. w. bezeichnen. Ferner setze man jeden einzelnen Theil der Linie AB, nämlich AC_1, C_1C_2, C_2C_3, u. s. w. $= h$; auch sei noch $A_1C_1 = x_1$, $A_2C_2 = x_2$, $A_3C_3 = x_3$, u. s. w., und wie früher $AD = a$, $AB = 2r$. Dann ist

$$\sigma_1 = \frac{\pi h}{3}\Big(a^2 + (a + x_1)^2 + a(a + x_1)\Big)$$
$$= \pi ah(a + x_1) + \frac{\pi h}{3} \cdot x_1^2 = \;.\;\;.\;\;. = \pi a^2 h + \pi a \cdot hx_1 \quad + \frac{\pi h}{3} \cdot x_1^2;$$
$$\sigma_2 = \frac{\pi h}{3}\Big((a + x_1)^2 + (a + x_2)^2 + (a + x_1)(a + x_2)\Big)$$
$$= \pi ah(a + x_1 + x_2) + \frac{\pi h}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = \pi a^2 h + \pi a(hx_1 + hx_2) + \frac{\pi h}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2);$$

ebenso ferner

$$\sigma_3 = \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. = \pi a^2 h + \pi a(hx_2 + hx_3) + \frac{\pi h}{3}(x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3);$$
$$\sigma_4 = \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. = \pi a^2 h + \pi a(hx_3 + hx_4) + \frac{\pi h}{3}(x_3^2 + x_4^2 + x_3x_4);$$

u. s. w.   u. s. w.

Bei diesen Ausdrücken bezeichnet das erste Glied $\pi a^2 h$ den Inhalt derjenigen Cylinder, die durch AC_1D_1D, $C_1C_2D_2D_1$, u. s. w. beschrieben werden, und es ist der Inhalt aller dieser Cylinder zusammengenommen $= \pi a^2 \times 2nh = \pi a^2 \times 2r = 2\pi a^2 r$. Setzt man nun

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots\ldots + \sigma_{2n} = \Sigma,$$

so ist

$$\Sigma = \left\{\begin{array}{l} 2\pi a^2 r \\ + 2\pi a(hx_1 + hx_2 + hx_3 + \ldots\ldots\ldots + hx_{2n-1}) \\ + \frac{\pi h}{3} \cdot x_1^2 + \frac{\pi h}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Der im zweiten Gliede vorkommende Factor $hx_1 + hx_2 + \ldots\ldots$ giebt den Flächeninhalt des Vieleckes $BAA_1A_2 \ldots\ldots A_{2n-1}$; denn hx_1 giebt das Rechteck $AC_1A_1\beta$, hx_2 das Rechteck $C_1C_2A_2\beta_1$, u. s. w., und um wieviel die oberhalb des Halbmessers A_nC_n liegenden Rechtecke den Flächeninhalt der obern Hälfte des Vielecks überschreiten, um soviel bleiben die unterhalb A_nC_n liegenden Rechtecke gegen den Flächeninhalt der andern Hälfte des Vieleckes zurück. Ferner bezeichnet in dem oben für Σ gefundenen Ausdrucke das Glied $\frac{\pi h}{3} \cdot x_1^2$ den Inhalt eines Kegels, welcher von dem Dreiecke AC_1A_1 durch Drehung um AC_1 beschrieben wird; das folgende Glied $\frac{\pi h}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)$ bezeichnet den Inhalt des durch $A_1C_1C_2A_2$ beschriebenen Kegelstumpfes, wenn sich nämlich dieses Paralleltrapez um C_1C_2 bewegt; und so werden durch die folgenden Glieder des obigen Ausdruckes lauter abgestumpfte Kegel angegeben, bis endlich das letzte Glied $\frac{\pi h}{3} \cdot x^2_{2n-1}$ den durch das Dreieck $A_{2n-1}C_{2n-1}B$ beschriebenen Kegel ausdrückt. Bezeichnen wir nun die Summe aller dieser Kegelstumpfe mit Einschluss der beiden Kegel mit K, und den Flächeninhalt des Vielecks $BAA_1A_2 \ldots\ldots A_{2n-1}$ mit V, so ist

$$\Sigma = 2\pi a^2 r + 2\pi a \times V + K.$$

Wird nun 2n unendlich gross angenommen, so giebt V den Inhalt des mit r beschriebenen Halbkreises AA_nB, und K liefert den Inhalt einer mit r beschriebenen Kugel; Σ aber geht in den Inhalt des von DAA_nBE beschriebenen Körpers über; und folglich ist, wenn wir diesen Inhalt mit S bezeichnen,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi a^2 r + 2\pi a \times \frac{\pi r^2}{2} + \frac{4\pi r^3}{3}, \\ &= 2\pi a^2 r + \pi^2 a r^2 + \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Zweiter Fall: Der Halbkreis fällt über das Rechteck.

Auflösung. Verfährt man ganz in entsprechender Weise wie beim ersten Falle, so ist, wenn S_1 den Inhalt des von $DA\alpha_n BE$ beschriebenen Körpers bezeichnet,

$$S_1 = 2\pi a^2 r - \pi^2 a r^2 + \frac{4\pi r^3}{3}.$$

§. 8.

Zusatz. In den für S und S_1 gefundenen Ausdrücken bezeichnet das erste Glied $2\pi a^2 r = \pi a^2 \times 2r$ den Inhalt des von DABE beschriebenen Cylinders, wenn sich nämlich dieses Rechteck um DE herumdreht; das zweite Glied $\pi^2 a r^2 = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi a$ bezeichnet den Inhalt eines Halbcylinders, der den mit r beschriebenen Halbkreis zur Grundfläche, und den Umfang des mit a beschriebenen Kreises zur Höhe hat; das dritte Glied giebt, wie schon vorher gefunden wurde, den Inhalt der mit r beschriebenen Kugel. Hiernach ist es leicht, die für S und S_1 gefundenen Werthe in Worten auszudrücken.

§. 9.

Zusatz. Es sei der Inhalt des Ringes, der bei der Drehung von dem ganzen Kreise $AA_nB\alpha_n$ beschrieben wird, mit Z bezeichnet; dann ist

$$Z = S - S_1 = 2\pi^2 a r^2 = \pi r^2 \times 2\pi a;$$

der Ring ist also einem Cylinder gleich, der den Kreis $AA_nB\alpha_n$ zur Grundfläche, und den Umfang des mit AD beschriebenen Kreises zur Höhe hat. (Vergl. §. 2.)

§. 10.

Zusatz. Subtrahirt man den Inhalt des von dem Rechtecke DABE beschriebenen Cylinders von S (§. 7.), so erhält man den äussern, vom Halbkreise AA_nB beschriebenen, Theil des Ringes. Wird der Inhalt dieses Theiles mit T bezeichnet, so ist

$$T = \pi^2 a r^2 + \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Um aber den Inhalt T_1 des innern Theils des Ringes zu erhalten, muss man S_1 (§. 7.) von dem genannten Cylinder abziehen. Demnach ist

$$T_1 = \pi^2 a r^2 - \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Im §. 8. ist die geometrische Bedeutung von $\pi^2 a r^2$ angegeben; die für T und T_1 gefundenen Werthe lassen sich demnach leicht in Worten ausdrücken. (Vergl. §. 3.)

§. 11.

Zusatz. Es ist $T - T_1 = 2 \times \tfrac{4}{3}\pi r^3$. (Vergl. §. 4.)

§. 12.

Zusatz. Es sei um den Kreis $AA_nB\alpha_n$ das Quadrat GFIH gelegt, und der Inhalt des bei der Drehung von diesem Quadrate beschriebenen Körpers heisse Y; dann ist

$$Y = \pi(a + r)^2 \times 2r - \pi(a - r)^2 \times 2r = 8\pi ar^2;$$

und folglich

$$\begin{aligned} Z : Y &= 2\pi^2ar^2 : 8\pi ar^2 \quad (\S.\ 9.) \\ &= \pi \quad : 4. \quad (\text{Vergl. } \S.\ 5.) \end{aligned}$$

§. 13.

Zusatz. Man denke sich, wie im §. 6., zuerst über die beiden Hälften der Seite AB zwei Halbkreise beschrieben, dann über die Drittel von AB drei Halbkreise, u. s. w.; und zwar sollen die Halbkreise zunächst ausserhalb des Rechtecks liegen. Bezeichnen wir nun den Gesammtinhalt der bei der jedesmaligen Drehung von den Halbkreisen beschriebenen Halbringe mit $t_2, t_3, t_4, \ldots,$ so ist gemäss §. 10.

$$t_2 = 2\left(\pi^2a \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r^3}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi^2ar^2 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$t_3 = 2\left(\pi^2a \cdot \frac{r^2}{9} + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r^3}{8}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi^2ar^2 + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

u. s. w.

Für den Fall aber, dass die Halbkreise über das Rechteck fallen, ist bei entsprechender Bezeichnungsweise

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi^2ar^2 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3} \cdot \pi^2ar^2 - \frac{1}{3^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

u. s. w.

Ferner ist dann der Gesammtinhalt der bei der jedesmaligen Drehung beschriebenen ganzen Ringe

$$t_2 + \tau_2 = \pi^2ar^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi^2ar^2 = \tfrac{1}{2}Z \quad (\S.\ 9.)$$

$$t_3 + \tau_3 = \tfrac{2}{3}\pi^2ar^2 = \tfrac{1}{3} \cdot 2\pi^2ar^2 = \tfrac{1}{3}Z$$

u. s. w.

welches letztere Resultat auch unmittelbar aus §. 9. hätte gewonnen werden können.

§. 14.

Vermittelst des Bisherigen lassen sich leicht folgende und ähnliche Aufgaben lösen.

Aufgabe 1. Es drehe sich (Fig. 1.) der Kreis $ANBN_1$ um die festliegende Tangente S_1T_1. Wie verhält sich a) die Oberfläche des hierdurch entstehenden Ringes zur Oberfläche einer Kugel, für welche $ANBN_1$ ein grösster Kreis ist? b) wie der Inhalt des Ringes zu dem der Kugel? — Das Verhältniss ist bei a) wie $\pi : 1$; bei b) wie $3\pi : 2$.

Aufgabe 2. Es sei (Fig. 3.) bei dem Halbkreise ADB in dem Mittelpunkte C der Radius CD senkrecht auf AB errichtet, und über CD sei der Kreis M beschrieben; dann denke man sich die Figur um AB gedreht. Wie verhält sich a) die Oberfläche des von M beschriebenen Ringes zu der Oberfläche der von ADB beschriebenen Kugel? b) wie der Inhalt des Ringes zu dem der Kugel? — Das Verhältniss ist bei a) wie $\pi : 4$; bei b) wie $3\pi : 16$.

Aufgabe 3. Es seien (Fig. 3.) durch die drei Punkte A, D, B Tangenten an den Halbkreis gelegt, welche sich in den beiden Punkten F und E durchschneiden, und dann sei die Figur um FE gedreht. Wie verhält sich a) die Oberfläche des von dem Kreise M beschriebenen Ringes zu der von der Linie ADB beschriebenen Fläche? b) wie der Inhalt des von M beschriebenen Ringes zu dem Inhalte des von der Fläche ADBEF beschriebenen Körpers? — Das Verhältniss ist bei a) wie $\pi : (2\pi - 4)$; bei b) wie $3\pi : (40 - 12\pi)$.

Aufgabe 4. Wenn sich aber (Fig. 3.) der Kreis M nebst dem Halbkreise ADB um die Tangente BE dreht, wie verhält sich dann a) die Oberfläche des von M beschriebenen Ringes zu der krummen Oberfläche des von ADB beschriebenen Halbringes? b) wie der Inhalt des ersten Körpers zu dem des zweiten? — Das Verhältniss ist bei a) wie $1 : 1$; bei b) wie $1 : 2$.

Aufgabe 5. Es sei (Fig. 4.) in den Quadranten ADBC der Kreis DGF gelegt, und hierauf denke man sich die Figur um BC gedreht. Wie verhält sich a) die Oberfläche des von DGF beschriebenen Ringes zur Oberfläche der von CDBA beschriebenen Halbkugel? b) wie der Inhalt des Ringes zu dem der Halbkugel? — Das Verhältniss ist bei a) wie $2\pi(3 - 2\sqrt{2}) : 1$; bei b) wie $3\pi(5\sqrt{2} - 7) : 1$.

Aufgabe 6. Wenn sich aber (Fig. 4.) der Quadrant ADBC nebst dem Kreise DGF um die durch A gelegte Tangente dreht, wie verhält sich dann a) die Oberfläche des von DGF beschriebenen Ringes zu der von ADB beschriebenen Fläche? b) wie der Inhalt des Ringes zum Inhalt des von ADBC beschriebenen Körpers? — Das Verhältniss ist bei a) wie $4\pi(3\sqrt{2} - 4) : (\pi - 2)$; bei b) wie $4\pi(10 - 7\sqrt{2}) : (\pi - \frac{4}{3})$.

Aufgabe 7. Es seien (Fig. 4.) an den Quadranten ADBC die beiden Tangenten AE und BE gelegt, und man denke sich das Dreieck ABE um AE gedreht. Es soll der Inhalt des von ABE beschriebenen Körpers berechnet werden, wenn der Radius des Quadranten gegeben ist. — Setzt man $CB = r$, so ist der gesuchte Inhalt $= \pi r^3(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\pi)$.

Fig. 1.

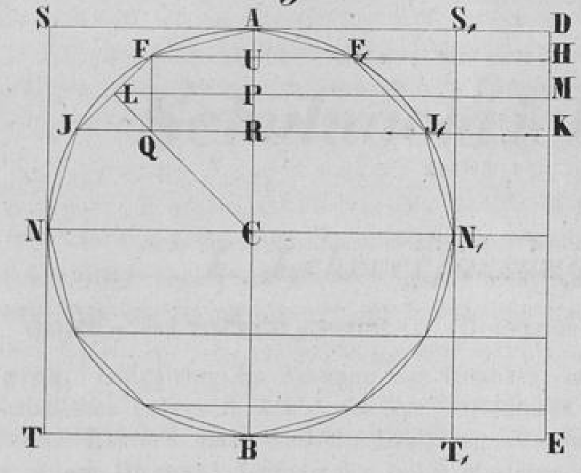

Fig. 3.

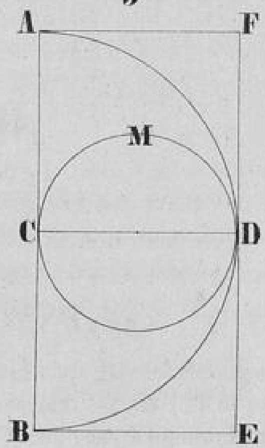

Fig. 2.

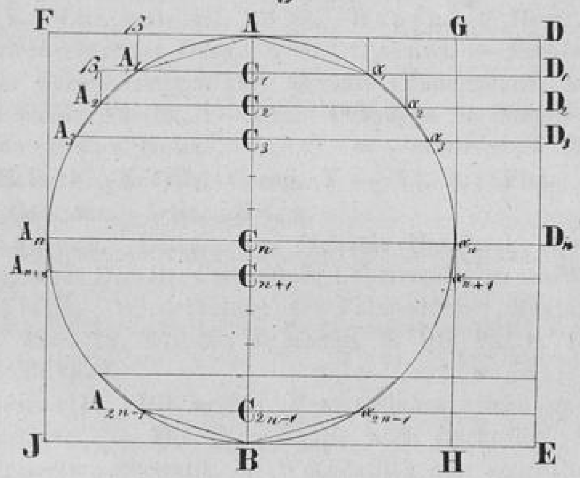

Fig. 4.