Der

31. Satz im sechsten Buche der Elemente des Euklid.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένοις.

Euklid beweist diesen Satz so wie die übrigen im sechsten Buche der Elemente mit Anwendung der im fünften Buche ausführlich und in größter Allgemeinheit dargestellten Lehre von den Größenproportionen. Wenn man jedoch die Kenntniß einiger wenigen Sätze über die Lage gerader Linien und Ebenen im Raume voraussetzt, welche auch der erste Unterricht in der Stereometrie nicht übergehen kann, so läßt sich die Aehnlichkeit der Figuren vollständig so definiren, daß dabei der Unterschied zwischen commensurabeln und incommensurabeln Größen gar nicht hervortritt, und die Ableitung unseres Satzes braucht das Gebiet der anschaulichen Construction nicht zu verlassen, um aus den durch jenen Unterschied hervorgerufenen und im fünften Buche der Elemente geführten scharfsinnigen Untersuchungen vorher die nöthigen Beweismittel zu erlangen. Bei einer solchen reingeometrischen Behandlung der Aehnlichkeitslehre erscheinen zugleich die Verhältnisse der Längen gerader Linien und der Flächenräume ebener Figuren als besondere Größen für sich, und diese Größen sind keine anderen, als reelle Zahlen. Es liegt daher nahe, in einem besonderen Abschnitte noch die Grundregeln für die Rechnung mit diesen Zahlen, ohne vorher einen Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen zu machen, in völliger Allgemeinheit und Strenge abzuleiten und durch geometrische Betrachtungen zu begründen.

In der nun folgenden Darstellung werden gerade Linien und Ebenen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, in unbegrenzter Ausdehnung vorgestellt.

1. Zwei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche ebenfalls durch jenen Punkt geht, außerhalb welcher aber die beiden Ebenen keinen Punkt gemein haben.

2. Drei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich entweder in einer Geraden oder in drei Geraden.

3. Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, so schneiden sich diese entweder alle drei in einem Punkte oder sie sind alle drei zu einander parallel. Wenn nämlich irgend zwei von den drei Geraden sich schneiden und also die drei Ebenen einen Punkt mit einander gemein haben, so geht durch diesen auch die dritte Gerade (1).

4. Zwei Ebenen, welche sich nicht schneiden und also keinen Punkt mit einander gemein haben, heißen zu einander parallel.

5. Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende gerade Linien u und v in der einen Ebene parallel sind zu zwei sich schneidenden Geraden u′ und v′ in der anderen Ebene, nämlich wenn $u \parallel u'$ und $v \parallel v'$ ist.

Durch jedes der beiden gegebenen Paare paralleler Geraden kann man eine Ebene legen. Träfen nun die gegebenen Ebenen zusammen, schnitten sich also in der Geraden w, so müßte nicht nur $w \parallel u$ und $w \parallel u'$, sondern auch $w \parallel v$ und $w \parallel v'$ sein (3). Da aber sowohl u und v, als auch u' und v' sich schneiden, so kann w nicht zugleich parallel sein zu u und v oder zu u' und v'; folglich können die gegebenen Ebenen sich nicht schneiden und sind deshalb parallel.

6. Wenn zwei parallele Ebenen von einer andern Ebene geschnitten werden, so sind die Schnittlinien parallel.

7. Wenn in dem einen Schenkel eines Winkels, dessen Scheitel O sei, die Punkte A und B, in dem andern die Punkte C und D so angenommen werden, daß die Geraden AC und BD parallel sind, so sind sie immer parallel, wenn auch der Winkel ein anderer wird, die Punkte A, B, C, D aber ihre Lage in den Schenkeln unveränderlich beibehalten.

Nimmt man nämlich einen andern beliebigen Winkel an, welcher mit dem gegebenen Winkel den Scheitel O und den Schenkel OA gemein hat, aber in einer anderen Ebene liegt, bestimmt in dem andern Schenkel dieses Winkels die Punkte F und G so, daß $OF = OC$ und $OG = OD$ wird, und zieht AF und BG, so ist wiederum $AF \parallel BG$. Denn zieht man noch CF und DG, so sind die Dreiecke OFC und OGD gleichschenklig, folglich die vier Winkel an ihren Grundlinien CF und DG einander gleich und diese Grundlinien selbst parallel. Weil nun $CF \parallel DG$ und $AC \parallel BD$, so sind die Ebenen ACF und BDG parallel (5) und schneiden die Ebene BOG in den parallelen Geraden AF und BG (6).

8. Durch die Buchstaben a, b, c und die darauf folgenden sollen begrenzte gerade Linien von gegebener Länge, deren Lage aber gleichgültig ist, bezeichnet werden. Ferner soll die als Proportion geschriebene Formel $a : b = c : d$, ganz abgesehen von der Bedeutung, welche sie nach Euklid hat, zunächst nur die geometrische Aussage enthalten, daß, wenn man in dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels, dessen Scheitel O sei, die Linie $OA = a$, die $OB = b$, in dem andern Schenkel die $OC = c$, die $OD = d$ macht, alsdann die geraden Linien AC und BD parallel sind (7). In diesem Sinne nennen wir die Formel $a : b = c : d$ eine Linienproportion, in welcher die beiden Linienverhältnisse $a : b$ und $c : d$ einander gleich gesetzt sind; die beiden Linien eines Verhältnisses, z. B. a und b, nennen wir entsprechende Linien und alle vier Linien proportionirt. Die Proportion sprechen wir so aus: a verhält sich zu b wie c zu d, oder a hat zu b dasselbe Verhältniß, welches c zu d hat.

9. Wenn zwei Linienverhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie einander gleich; also wenn $a : b = c : d$ und $c : d = f : g$ ist, so ist auch $a : b = f : g$.

Für die Proportion $a : b = c : d$ gilt die in 8 angegebene Figur. Nimmt man ferner einen andern beliebigen Winkel DOG an in einer von der Ebene des Winkels BOD verschiedenen Ebene, und macht in seinem Schenkel OG die $OF = f$ und die $OG = g$, zieht CF und DG, so sind diese Geraden parallel, weil $c : d = f : g$ ist (8). Da nun $AC \parallel BD$ und $CF \parallel DG$ ist, so sind die Ebenen ACF und BDG parallel und schneiden die Ebene BOG in den parallelen Geraden AF und BG; folglich ist $OA : OB = OF : OG$ oder $a : b = f : g$.

10. Wenn $a : b = c : d$, also (8) $OA : OB = OC : OD$ ist, so ist auch $AC : BD = a : b = c : d$.

Zieht man durch den Punkt O die Parallele zu AC und durch A und B die Parallelen zu OC, welche jene Parallele in F und G schneiden, so ist $OF = AC$, $OG = BD$ und $OF : OG = OA : OB$ oder $AC : BD = a : b = c : d$ (9).

11. Zieht man in derselben Figur (8) noch die Linien AD und BC, so entstehen unter der Voraussetzung, daß $OA : OB = OC : OD$ sei, die gleichen Dreiecke OAD und OBC. Die Seiten OA und OD des einen schließen denselben Winkel O ein, wie die Seiten OB und OC des andern. Und setzt man umgekehrt voraus, daß das Dreieck OAD gleich sei dem Dreieck OBC, so ist $AC \parallel BD$, folglich $OA : OB = OC : OD$. Hieraus folgt der Satz:

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern und die diese Winkel einschließenden Seiten wiederkehrend proportionirt sind, so sind die Dreiecke gleich; und wenn in zwei gleichen Dreiecken ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern, so sind die diese gleichen Winkel einschließenden Seiten wiederkehrend proportionirt.

12. Wenn vier Linien proportionirt sind, so ist das Rechteck, welches die erste und vierte Linie zu Seiten hat, gleich dem Rechtecke, dessen Seiten gleich der zweiten und dritten Linie sind; und in zwei gleichen Rechtecken sind die Seiten, welche rechte Winkel einschließen, wiederkehrend proportionirt.

Zieht man in jedem Rechtecke eine Diagonale, so entstehen Dreiecke, für welche der Satz 11 gilt. Wenn diese Dreiecke gleich sind, so sind auch die Rechtecke gleich und umgekehrt.

Versteht man unter dem Ausdrucke $a \times b$ den Flächenraum, welchen das Rechteck einnimmt, dessen Grundlinie a und dessen Höhe b ist, so läßt sich der Satz so durch Zeichen ausdrücken:

Wenn $a : b = c : d$, so ist $a \times d = b \times c$,
und wenn $a \times d = b \times c$ ist, so ist auch $a : b = c : d$.

13. Wenn vier Linien proportionirt sind, so sind sie auch verwechselt proportionirt; also wenn $a : b = c : d$ ist, so ist auch $a : c = b : d$.

Aus der Proportion $a : b = c : d$ folgt, daß $a \times d = b \times c$ ist (12). Weil aber $b \times c = c \times b$ ist, so ist auch $a \times d = c \times b$, folglich $a : c = b : d$ (12).

14. Die folgenden Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Betrachtung der entsprechenden Figur (8):

Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $b : a = d : c$.
Wenn $a : b = c : d$ und $a = c$ ist, so ist auch $b = d$.
Wenn $a = c$ und $b = d$ ist, so ist $a : b = c : d$.

15. Zwei Figuren liegen perspektivisch, wenn jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern in der Weise entspricht, daß die Geraden, welche durch je zwei entsprechende Punkte gehen, sich sämmtlich in einem einzigen Punkte O schneiden.

Zwei perspektivisch liegende Figuren heißen ähnlich, wenn die Abstände der Punkte A, B, C, D . . . . . der einen Figur vom Punkte O alle dasselbe Verhältniß haben zu den Abständen ihrer entsprechenden Punkte α, β, γ, δ . . . . in der andern Figur von demselben Punkte O, wenn also $OA : O\alpha = OB : O\beta = OC : O\gamma$ . . . . ist, und dabei entweder je zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite von O liegen, oder auf entgegengesetzten Seiten von O. Im ersten Falle heißt O der äußere, im zweiten der innere Aehnlichkeitspunkt.

Weil in perspektivisch liegenden ähnlichen Figuren die Verhältnisse der Abstände entsprechender Punkte vom Aehnlichkeitspunkte gleich sind, so sind in solchen Figuren auch je zwei entsprechende gerade Linien parallel, nämlich $AB \parallel \alpha\beta$, $AC \parallel \alpha\gamma$, $CD \parallel \gamma\delta$ u. s. w. (8). Folglich sind auch je zwei entsprechende Winkel, welche von entsprechenden Linien in beiden Figuren gebildet werden, einander gleich. Endlich haben je zwei entsprechende Linien dasselbe Verhältniß zu einander; so ist z. B. $AB : \alpha\beta = CD = \gamma\delta$. Denn $AB : \alpha\beta = OA : O\alpha$ (10) und $CD : \gamma\delta = OC : O\gamma$; weil aber $OA : O\alpha = OC : O\gamma$ ist, so ist auch $AB : \alpha\beta = CD : \gamma\delta$ (9).

Wenn mit der einen von zwei perspektivisch liegenden ähnlichen Figuren eine dritte an einem beliebigen Orte im Raume congruent ist, so heißt die andere Figur dieser dritten ähnlich.

16. Soll ein Polygon construirt werden, welches einem gegebenen Polygone ähnlich sei, so kann man nur eine Seite des ersteren willkürlich annehmen, welche in dem gegebenen Polygone z. B. der Seite AB entspreche. Macht man nun A zum äußeren Aehnlichkeitspunkte und in der (nöthigenfalls verlängerten) AB die AB′ gleich der gegebenen Seite des zu construirenden Polygons, so findet man jeden andern Eckpunkt C′ des letzteren, welcher dem Eckpunkte C des gegebenen Polygons entspricht, durch die Proportion $AB : AB' = AC : AC'$ (15), also dadurch, daß man AC und durch B′ die Parallele zu

BC zieht: der Schnittpunkt C′ dieser Parallelen und der (nöthigenfalls verlängerten) AC ist alsdann der gesuchte Eckpunkt.

17. Wenn in zwei Polygonen P und Q die Winkel des einen der Reihe nach gleich sind den in derselben Ordnung liegenden Winkeln des andern, und jede Seite des einen dasselbe Verhältniß hat zu der ihr entsprechenden Seite des andern, zu derjenigen nämlich, welche an gleichen Winkeln liegt, so sind die Polygone ähnlich.

Entspricht dem Punkte A und der Seite AB im Polygone P der Punkt α und die Seite $\alpha\beta$ im Polygone Q, so construire man nach dem in 16 angegebenen Verfahren ein drittes dem Polygone P ähnliches Polygon R, welches mit P den Eckpunkt A als äußeren Aehnlichkeitspunkt gemein hat und worin die der AB entsprechende Seite AB′ gleich $\alpha\beta$ ist. Da alsdann die Winkel des Polygons R gleich sind den entsprechenden Winkeln des Polygons P, so sind sie auch gleich den ähnlichliegenden Winkeln des Polygons Q. Ferner hat man, wenn C′D′ und CD irgend zwei entsprechende Seiten in R und P sind, $C'D' : CD = AB' : AB = \alpha\beta : AB$ (15), aber auch, wenn die Seite $\gamma\delta$ in Q der CD in P entspricht, $\gamma\delta : CD = \alpha\beta : AB$, folglich $C'D' : CD = \gamma\delta : CD$ (9) und deshalb $C'D' = \gamma\delta$ (14). Die gleichen Winkel der Polygone R und Q folgen also in derselben Ordnung auf einander, wie die gleichen Seiten in ihnen; deshalb sind Q und R congruent, und weil R ähnlich P ist, so ist auch Q ähnlich P (15).

Hienach sind alle Quadrate ähnliche Figuren (14).

18. Zwei Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ sind ähnlich, wenn

a) zwei Seiten des einen dasselbe Verhältniß haben zu zwei Seiten des andern und diese Seiten gleiche Winkel einschließen, also wenn $AB : \alpha\beta = AC : \alpha\gamma$ und Winkel $A = \alpha$ ist;

b) die drei Seiten des einen zu den drei Seiten des andern dasselbe Verhältniß haben, also wenn $AB : \alpha\beta = AC : \alpha\gamma = BC : \beta\gamma$ ist;

c) zwei Winkel des einen gleich sind zweien Winkeln des andern, also wenn Winkel $A = \alpha$ und $B = \beta$ ist.

Man construirt nach dem in 16 angegebenen Verfahren das dem Dreiecke ABC ähnliche Dreieck AB′C′, in welchem die Seite $AB' = \alpha\beta$ ist. Dann folgt aus den Bedingungen der drei Fälle die Congruenz der Dreiecke AB′C′ und $\alpha\beta\gamma$ und damit auch die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$.

19. Zwei nicht concentrische Kreise in derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen) haben immer einen innern und, wenn die Kreise ungleich sind, zugleich auch einen äußern Aehnlichkeitspunkt.

Man zieht einen beliebigen Durchmesser in dem einen Kreise und einen zu ihm parallelen Halbmesser im andern; von den Geraden, welche durch die Endpunkte jenes Durchmessers und den Endpunkt dieses Halbmessers gehen, schneidet die eine die Centrale im innern und die andere die Verlängerung der Centralen im äußern Aehnlichkeitspunkte (15).

Wenn die Kreise concentrisch sind, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zusammen.

Alle Kreise sind demnach ähnliche Figuren.

20. Zwei ähnliche Polygone kann man in zwei ähnliche Dreiecke verwandeln, von denen jedes mit seinem Polygone eine Seite gemein hat, welche der gemeinschaftlichen Seite des andern entspricht.

Sollen zunächst die ähnlichen Vierecke ABCD und $\alpha\beta\gamma\delta$ in zwei ähnliche Dreieck verwandelt werden, welche mit den Vierecken die entsprechenden Seiten AB und $\alpha\beta$ gemein haben, so ziehe man BD und $\beta\delta$, ferner durch die entsprechenden Punkte C und γ die Parallelen zu BD und $\beta\delta$, welche die (nöthigenfalls verlängerten) AD und $\alpha\delta$ in L und λ schneiden, ziehe endlich BL und $\beta\lambda$. Dann sind die gegebenen Vierecke in die beiden ähnlichen Dreiecke ABL und $\alpha\beta\lambda$ verwandelt. Die Dreiecke CDL und $\gamma\delta\lambda$ sind nämlich gleichwinkelig, folglich ist $DL : \delta\lambda = DC : \delta\gamma = DB : \delta\beta$ (18, c; 15), und da

Winkel BDL = $\beta\delta\lambda$, so ist auch Winkel BLA = $\beta\lambda\alpha$ (18, a); folglich sind die Dreiecke ABL und $\alpha\beta\lambda$ ähnlich (18, c). Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man überhaupt zwei ähnliche Polygone in zwei ähnliche Dreiecke verwandeln.

21. Die als Proportion geschriebene Formel A : B = a : b, worin A und B die Flächenräume zweier Figuren, a und b wie früher zwei begrenzte gerade Linien bezeichnen, soll, ganz abgesehen von ihrer arithmetischen Bedeutung, vorläufig nur die geometrische Aussage enthalten, daß, wenn jene Figuren in zwei Rechtecke mit den Grundlinien a und b verwandelt werden, diese Rechtecke gleiche Höhe haben. Wir sagen dann: die beiden Flächenräume A und B verhalten sich zu einander wie die Linien a und b, und nennen den Ausdruck A : B ein Flächenverhältniß.

22. Wenn A : B = a : b und a : b = c : d, so ist auch A : B = c : d.

Verwandelt man die Flächenräume A und B in zwei Rechtecke mit den Grundlinien a und b, so haben diese, weil A : B = a : b ist, dieselbe Höhe h (21). Verwandelt man ferner den Flächenraum B in ein anderes Rechteck mit der Grundlinie d, dessen Höhe k sei, so ist B = b × h = d × k, folglich b : d = k : h (12) Weil aber a : b = c : d ist, so ist auch a : c = b : d (13), folglich a : c = k : h (9) und deshalb a × h = c × k (12). Nun ist A = a × h, also auch A = c × k und zugleich B = d × k, folglich A : B = c : d (21).

Haben demnach zwei Rechtecke auf den Grundlinien a und b gleiche Höhe, so haben auch die ihnen gleiche Rechtecke auf den Grundlinien c und d gleiche Höhe, wenn a : b = c : d ist.

23. Wenn A : B = a : b und C : D = a : b ist, so sagen wir: die beiden Flächenräume A und B verhalten sich zu einander wie die Flächenräume C und D, und drücken dieses durch die Formel A : B = C : D aus.

24. Zieht man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus dem Scheitel des rechten Winkels die Senkrechte zur Hypotenuse, so theilt diese das Dreieck in zwei dem ganzen und einander ähnliche Dreiecke (18, c), so daß jede Kathete des gegebenen Dreiecks die mittlere Proportionale zu dem an ihr liegenden Abschnitte der Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse ist. Folglich sind die Quadrate auf den Katheten gleich den Rechtecken, welche die Abschnitte der Hypotenuse zu Grundlinien und die Hypotenuse zur gemeinschaftlichen Höhe haben (12) und zusammen das Quadrat auf der Hypotenuse bilden. Demnach verhalten sich auch die Quadrate auf den Katheten zu einander wie die an ihnen liegenden Abschnitte der Hypotenuse (21) und sind zusammen gleich dem Quadrate auf der Hypotenuse.

25. Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Abschnitte der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, welches zwei entsprechende Seiten der ähnlichen Dreiecke zu Katheten hat, und sind zusammen gleich dem ähnlichen Dreiecke auf der Hypotenuse, in welchem diese jenen Seiten entspricht.

Man lege die gegebenen ähnlichen Dreiecke ABC und A′B′C′, in welchen die Seite AB der A′B′ entspricht, so aneinander, daß der Punkt A′ in B fällt, und die AB mit der A′B′ den rechten Winkel ABB′ bildet, ziehe AB′, errichte auf ihr das den gegebenen Dreiecken ähnliche Dreieck AB′C″ so, daß die AB′ der AB entspricht, der Winkel B′AC″ = BAC und der Winkel AB′C″ = BB′C′ ist, ziehe BD senkrecht zu der Hypotenuse AB′, wodurch diese in die beiden Abschnitte AD und DB′ getheilt wird und ziehe DC″. Dann ist

AD : AB = AB : AB′ und B′D : B′B = B′B : B′A (24),
ferner AB : AB = AC : AC″ und B′B : B′A = B′C′ : B′C″ (15),
folglich AD : AB = AC : AC″ und B′D : B′B = B′C′ : B′C″ (9),

Hienach ist Dreieck ABC = ADC″ und Dreieck B′BC′ = B′DC″ (11), d. h. die ähnlichen Dreiecke auf den Katheten sind gleich den Dreiecken von gleicher Höhe, welche die Abschnitte der Hypotenuse zu Grundlinien haben und zusammen das ähnliche Dreieck auf der Hypotenuse bilden. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich aber zu einander wie ihre Grundlinien, weil sie sich in Rechtecke von gleicher

Höhe auf denselben Grundlinien verwandeln lassen (21); folglich verhalten sich auch die ähnlichen Dreiecke auf den Katheten zu einander wie die an ihnen liegenden Abschnitte der Hypotenuse und sind zusammen gleich dem ähnlichen Dreiecke auf der Hypotenuse.

26. **Wenn die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks entsprechende Seiten dreier ähnlichen Polygone sind, so verhalten sich die Polygone auf den Katheten zu einander wie die an ihnen liegenden Abschnitte der Hypotenuse, und sind zusammen gleich dem Polygone auf der Hypotenuse.**

Weil die ähnlichen Polygone sich in ähnliche Dreiecke verwandeln lassen, welche die Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks zu entsprechenden Seiten haben (20), so folgt der Satz sogleich aus dem vorhergehenden (25).

27. Sind vier gerade Linien proportionirt, so verhalten sich zwei ähnliche Polygone auf der ersten und zweiten Linie zu einander wie irgend zwei andere ähnliche Polygone auf der dritten und vierten Linie.

Die gegebene Linienproportion sei a : c = b : d. Dann ist auch a : b = c : d (13), und die Figur, durch welche wir die Linienproportion a : b = c : d geometrisch deuten, sei dieselbe wie in 8, der Winkel BOD aber ein rechter. Zieht man noch aus O die gerade Linie, welche die AC in F und die BD in G unter rechten Winkeln schneidet, so ist AF : BG = CF : DG (10) oder AF : CF = BG : DG (13). Das Linienverhältniß AF : CF ist gleich dem Verhältnisse der ähnlichen Polygone auf OA und OC oder auf a und c, und das Linienverhältniß BG : DG ist gleich dem Verhältnisse der andern ähnlichen Polygone auf OB und OD oder auf b und d (26). Da aber die beiden Linienverhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich auch die ähnlichen Polygone auf a und c zu einander wie die ähnlichen Polygone auf b und d (22,23).

28. Zwei ähnliche Polygone verhalten sich zu einander wie irgend zwei andere ähnliche Polygone, welche zwei beliebige entsprechende Linien in den ersteren zu entsprechenden Seiten haben (15,27); insbesondere verhalten sich zwei ähnliche Polygone zu einander wie die Quadrate auf irgend zwei entsprechenden geraden Linien in ihnen, also auch wie die Quadrate auf ihren entsprechenden Seiten.

Arithmetische Bestimmungen.

29. Wenn in einem Dreiecke zwei zur Grundlinie parallele gerade Linien die beiden anderen Seiten des Dreiecks schneiden, so theilen sie jede dieser Seiten in drei Theile. Diese Theile seien von der Spitze des Dreiecks nach der Grundlinie hin in der einen Seite durch a, b, c, in der andern Seite durch d, f, g bezeichnet. Dann hat man folgende Proportionen:

1) b : a = f : d 2) c : a = g : d 3) b + c : a = f + g : d 4) c : b = g : f.

Diese Proportionen folgen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, die entstehen, wenn man aus den Theilungspunkten der einen Seite des gegebenen Dreiecks die Parallelen zur andern Seite zieht (18 c). Ist außerdem a = b = c, so hat man noch

5) a + a + a : a = d + d + d : d.

30. Aus dem Satze 9 ergibt sich, daß die Linienproportionen wirkliche Gleichungen sind und die Linienverhältnisse besondere Größen für sich bedeuten. Wenn man in dem Linienverhältnisse a + a + a : a für a irgend eine andere Linie d setzt, so erhält man nach der Gleichung 5 (29) immer wieder ein Linienverhältniß, welches jenem gleich ist, und zwar ist in allen diesen Verhältnissen das Hinterglied in dem Vordergliede dreimal enthalten. Man darf daher, wenn a eine beliebige gerade Linie bedeutet, a + a + a : a = 3 setzen, ebenso a + a : a = 2 und a : a = 1. Ueberhaupt bedeutet das Linienverhältniß a : b eine ganze Zahl, wenn a eine Summe mehrerer b, also b ein aliquoter Theil von a oder ein Maß von a ist. Wenn ferner c ein gemeinschaftliches Maß von a und b ist, diese Linien also commensurabel sind, so

bedeutet das Verhältniß $a : b$ immer eine rationale Zahl, d. h. eine durch die beiden ganzen Zahlen, welche die Verhältnisse $a : c$ und $b : c$ ausdrücken, genau bestimmte Zahl, die auch eine ganze Zahl sein kann. Aber nicht immer haben zwei Linien a und b ein gemeinschaftliches Maß; denn wenn c ein Maß von b ist, so ist auch jeder aliquote Theil von c ein Maß von b. Wie klein man aber auch einen solchen Theil d annehme, immer wird er noch eine ausgedehnte Linie und kein bloßer Punkt sein, und es wird noch unzählig viele Linien a geben, welche größer sind als nd und kleiner als $(n+1)d$, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Solche Linien a und b sind also incommensurabel und ihr Verhältniß $a : b$ bedeutet eine irrationale Zahl, d. h. eine solche, für welche sich nur zwei durch rationale Zahlen ausgedrückte Grenzen so bestimmen lassen, daß der Unterschied zwischen ihnen und der Irrationalzahl kleiner wird als jede noch so kleine rationale Zahl. Alle diese Zahlen heißen reelle Zahlen und sollen von jetzt an durch die Buchstaben p, q, r und die folgenden allgemein bezeichnet werden.

31. Da das Linienverhältniß $a : b$ eine bestimmte reelle Zahl r bedeutet, wenn a und b gerade Linien von bestimmter Länge sind, so muß auch umgekehrt die Linie a sich durch r und b ausdrücken lassen, und wir setzen deshalb $a = rb$, wenn $a : b = r$ ist. Dann folgt aus der Gleichung 1(29), daß, wenn $b : a = p$ ist, auch $f : d = p$, also $b = pa$ und $f = pd$ ist; ferner aus der Gleichung 2, daß, wenn $c = qa$, auch $g = qd$ ist; folglich hat man nach der Gleichung 3

$$pa + qa : a = pd + qd : d.$$

Wenn daher $pa + qa = sa$ ist, so ist immer $pd + qd = sd$, welche Längen auch die Linien a und d haben mögen; folglich hängt die Zahl s nur ab von den Zahlen p und q. Soll nun s die Summe von p und q, also $pa + qa = (p + q)a$ sein, so muß erstens auch $pa + qa = (q + p)a$ sein. Es ist aber $pa + qa = qa + pa = sa$, folglich s auf dieselbe Weise von q und p im zweiten Ausdrucke abhängig, wie von p und q im ersten. Ferner sei $(pa + qa) + ra = sa + ra = ta$; dann ist auch $pa + (qa + ra) = pa + va = ta$. Es geht also dieselbe Zahl t hervor, wenn man entweder die Zahl s mit der Zahl r so verknüpft, wie p und q zu s verknüpft sind, oder wenn man die Zahl p mit der Zahl v in derselben Weise verknüpft, in welcher auch q und r zu v verknüpft sind. Dadurch wird die zweite Bedingung erfüllt, unter welcher die fragliche Art der Verknüpfung eine Addition ist. Die dritte Bedingung endlich ist, daß mit jeder Aenderung von p oder q in der Gleichung $pa + qa = sa$ auch die Zahl s eine andere wird. Aendert sich nun z. B. q, so ändert sich auch qa, folglich auch $pa + qa$ oder sa; weil aber a sich nicht ändert, so muß s also zugleich mit q sich ändern. Die drei Bedingungen werden mithin erfüllt, unter welchen wir schreiben dürfen

$$\text{I.} \qquad pa + qa = (p + q)a.$$

Durch diese Formel wird zugleich die Art der Verknüpfung der Zahlen p, q und $p + q$ mit der Linie a als Multiplication bestimmt, so daß z. B. pa das Product der Zahl p und der Linie a ist.

32. Aus der Gleichung 4(29) folgt, daß, wenn $c = rb$, auch $g = rf$ ist; folglich hat man nach der Gleichung 2 $rb : a = rf : d$ oder, da nach der Gleichung 1 $b = pa$ und $f = pd$ ist (31),

$$r(pa) : a = r(pd) : d.$$

Wenn daher $r(pa) = ta$ ist, so ist immer $r(pd) = td$, welche Länge auch die Linien a und d haben mögen; folglich hängt die Zahl t nur ab von den Zahlen r und p. Um dieses auszudrücken, setzen wir $t = rp$ und suchen zu bestimmen, in welcher Art hier r und p miteinander zur Zahl t verknüpft sind. Es sei also $r(pa) = (rp)a$, dann ist auch, wenn q irgend eine andere Zahl ist, $r(pa) + q(pa) = (r + q)(pa)$ nach der Gleichung I; aber $r(pa) + q(pa) = (rp)a + (qp)a = (rp + qp)a$ und $(r + q)(pa) = [(r + q)p]a$; folglich $(rp + qp)a = [(r + q)p]a$, und deshalb $rp + qp = (r + q)p$. Durch diese Gleichung ist die fragliche Art der Verknüpfung der Zahlen miteinander als Multiplication bestimmt, und es ist daher auch

$$\text{II.} \qquad p(qa) = (pq)a$$

und unter pq das Product der Zahlen p und q zu verstehen. Ferner ist $p(q(ra)) = p((qr)a) = [p(qr)]a$ und $p(q(ra)) = (pq)(ra) = [(pq)r]a$; folglich

$$\text{III.} \qquad p(qr) = (pq)r.$$

Weil $p(qa) : qa = pa : a$ ist (31), so ist auch $p(qa) : pa = qa : a$ (13), aber $qa : a = q$, folglich

$$\text{IV.} \qquad p(qa) = q(pa).$$

Aus dieser und der Gleichung II folgt $(pq)a = q(pa) = (qp)a$, mithin

$$\text{V.} \qquad pq = qp.$$

Sämmtliche Grundregeln der Multiplication reeller Zahlen mit einander und mit geraden Linien von bestimmter Länge sind hiermit allgemein abgeleitet. Wie durch sie die andern Regeln der Multiplication und Division begründet werden, ist bekannt.

33. Wenn in dem Satze 22 $a = qb$, also $c = qd$ ist (31), so kann man den Satz auch so ausdrücken: Haben zwei Rechtecke von verschiedener Höhe denselben Flächenraum B, so hätten beide, wenn ihre Grundlinien q mal so groß würden, ihre Höhen aber dieselben blieben, wieder denselben Flächenraum A, so daß die Größe des letzteren nur abhängt von q und B. Um dieses auszudrücken, setzen wir $A = qB$ und suchen zu bestimmen, in welcher Art hier q und B zum Flächenraume A verknüpft sind. Ist nun $B = b \times h$ (22), so hat man $qb \times h = q(b \times h)$; ferner, wenn p eine beliebige Zahl bedeutet, $pB + qB = p(b \times h) + q(b \times h) = pb \times h + qb \times h = (pb + qb) \times h = (p + q) b \times h = (p + q)(b \times h) = (p + q)B$. Hierdurch ist die fragliche Art der Verknüpfung der Zahlen mit dem Flächenraume B als Multiplication bestimmt, so daß z. B. pB das Product der Zahl p und des Flächenraumes B ist. Ferner findet man $p(qB) = p(q(b \times h)) = p(qb \times h) = p(qb) \times h = (pq)b \times h = (pq)(b \times h) = (pq)B$. Es gelten also auch die Gleichungen I und II für den Fall, daß in ihnen statt der Linie a ein beliebiger Flächenraum gesetzt wird.

34. Das Verhältniß irgend zweier gleichartigen Größen bedeutet immer diejenige Zahl, mit welcher die zweite Größe zu multipliciren ist, um die erste als Product zu erhalten. So ist das Zahlenverhältniß $p : q = r$, wenn $rq = p$; das Linienverhältniß $a : b = q$, wenn $a = qb$ (31); und das Flächenverhältniß $A : B = q$, wenn $A = qB$ ist (33).

Die Zahlen, welche die Verhältnisse gerader Linien von gegebener Länge zu einer und derselben bestimmten geraden Linie m, und die Verhältnisse gegebener Flächenräume zu dem Quadrate $m \times m$ ausdrücken, heißen die Zahlenwerthe dieser Linien und Flächenräume, m heißt das Längenmaß und $m \times m$ oder M das Flächenmaß.

35. Der Zahlenwerth eines Rechtecks ist das Product der Zahlenwerthe seiner Grundlinie und Höhe.

Sind α und β die Zahlenwerthe der Grundlinie a und der Höhe b des Rechtecks $a \times b$, ist also $a = \alpha m$, $b = \beta m$ (34), so hat man $a \times b = (\alpha m) \times (\beta m) = \alpha(m \times \beta m) = \alpha(\beta m \times m) = \alpha(\beta(m \times m)) = (\alpha\beta) M$ (33).

Der Zahlenwerth eines Dreiecks ist die Hälfte des Productes der Zahlenwerthe seiner Grundlinie und Höhe, weil das Dreieck selbst die Hälfte des Rechtecks mit derselben Grundlinie und Höhe ist.

36. Das Verhältniß zweier Linien oder Flächenräume ist gleich dem Verhältnisse ihrer Zahlenwerthe.

Wenn $a : b = q$ und $a = \alpha m$, $b = \beta m$ ist, so hat man $a = qb$ oder $\alpha m = q(\beta m) = (q\beta)m$ nach der Formel II, folglich $\alpha = q\beta$ und $q = \alpha : \beta$ (34). Demnach $a : b = \alpha : \beta$. Ebenso wird der Beweis für das Flächenverhältniß $A : B$ geführt, indem man statt des Längenmaßes m das Flächenmaß M setzt.