Den Gegenstand der folgenden kleinen Abhandlung bildet das Theorem: „Werden über den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach Außen oder auch nach Innen hin gleichseitige Dreiecke gezeichnet und deren Mittelpunkte je zu Dreiecken verbunden, so sind auch diese Dreiecke gleichseitig; und diese Dreiecke stehen in Bezug auf ihre Größe zu dem ursprünglichen Dreieck in der einfachen Beziehung, daß ihr Flächen-Unterschied dem ursprünglichen Dreieck gleich ist."

Der erste Theil dieses Lehrsatzes ist bekannt; gleichwohl dürfte der in Nachstehendem gelieferte einfache Beweis desselben vielleicht der Beachtung werth sein.

Erklärung der Figur:

ABC ist das beliebige Dreieck. Ueber seinen Seiten sind nach Außen hin die gleichseitigen Dreiecke BCA_1 ACB_1 ABC_1 und nach Innen hin die gleichseitigen Dreiecke BCA_2 ACB_2 ABC_2 gezeichnet. Die Mittelpunkte dieser regulären Dreiecke sind bezüglich durch S_1 S_2 S_3 respective O_1 O_2 O_3 bezeichnet und diese Punkte sind zu den Dreiecken $S_1 S_2 S_3$ und $O_1 O_2 O_3$ verbunden worden. Diese Punkte haben auf den Verbindungslinien $A_1 A_2$ $B_1 B_2$ $C_1 C_2$ eine solche Lage, daß beispielsweise $S_1 A_1 = S_1 B = S_1 C = S_1 O_1 = O_1 B = O_1 C = O_1 A_2 = {}^1/_3\, A_1 A_2$ u. s. w. ist.

I. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der beiden Geraden $A A_1$ und $B B_1$ mit M, so ist, da

$$CA = CB_1$$
$$CA_1 = CB$$

und $\sphericalangle\, ACA_1 = ACB + BCA_1 = ACB + ACB_1 = BCB_1$ ist $\triangle\, ACA_1 \cong BCB_1$. Daher ist 1) $AA_1 = BB_1$ und 2) $\sphericalangle\, AA_1C = CBB_1$ und $\sphericalangle\, CAA_1 = CB_1B$. Demgemäß ist, wenn man M mit C verbindet, sowohl Viereck MCA_1B als auch MCB_1A je ein Kreisviereck, mithin $\sphericalangle\, BMA_1 = BCA_1 = 60^0$ und $\sphericalangle\, CMA_1 = CBA_1 = 60^0$. Daher ist $\sphericalangle\, AMB = 360^0 - 4.60^0 = 120^0$; und da $\sphericalangle\, BC_1A = 60^0$ ist, so ist auch Viereck MAC_1B ein Kreisviereck, mithin, wenn M mit C_1 verbunden wird, $\sphericalangle\, AMC_1 = ABC_1 = 60^0$ und also $= A_1MC$; die Verbindungslinien MC_1 und MC bilden demgemäß eine Gerade, welche, da auch $\triangle\, CC_1A \cong BB_1A$ ist, der Geraden BB_1 gleich ist. — Auf der Peripherie des durch die 4 Punkte $M\ A\ C_1\ B$ legbaren Kreises sind C_1 A und B drei äquidistante Punkte; es ist daher nach einem bekannten Satze $MC_1 = MA + MB$, woraus, wenn auf beiden Seiten CC_1 addirt wird, folgt: $CC_1 = MA + MB + MC$.

Aus dem Gesagten ergeben sich also folgende Wahrheiten:

1) Die drei Verbindungslinien AA_1 BB_1 CC_1 schneiden sich in einem Punkte M.

2) Diese Linien sind an Länge einander gleich.

Den Gegenstand der folgenden kleinen Abhandlung bildet das Theorem: „Werden über den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach Außen oder auch nach Innen hin gleichseitige Dreiecke gezeichnet und deren Mittelpunkte je zu Dreiecken verbunden, so sind auch diese Dreiecke gleichseitig; und diese Dreiecke stehen in Bezug auf ihre Größe zu dem ursprünglichen Dreieck in der einfachen Beziehung, daß ihr Flächen-Unterschied dem ursprünglichen Dreieck gleich ist."

Der erste Theil dieses Lehrsatzes ist bekannt; gleichwohl dürfte der in Nachstehendem gelieferte einfache Beweis desselben vielleicht der Beachtung werth sein.

Erklärung der Figur:

ABC ist das beliebige Dreieck. Ueber seinen Seiten sind nach Außen hin die gleichseitigen Dreiecke BCA_1 ACB_1 ABC_1 und nach Innen hin die gleichseitigen Dreiecke BCA_2 ACB_2 ABC_2 gezeichnet. Die Mittelpunkte dieser regulären Dreiecke sind bezüglich durch S_1 S_2 S_3 respective O_1 O_2 O_3 bezeichnet und diese Punkte sind zu den Dreiecken $S_1 S_2 S_3$ und $O_1 O_2 O_3$ verbunden worden. Diese Punkte haben auf den Verbindungslinien $A_1 A_2$ $B_1 B_2$ $C_1 C_2$ eine solche Lage, daß beispielsweise $S_1 A_1 = S_1 B = S_1 C = S_1 O_1 = O_1 B = O_1 C = O_1 A_2 = \frac{1}{3} A_1 A_2$ u. s. w. ist.

I. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der beiden Geraden AA_1 und BB_1 mit M, so ist, da

$$CA = CB_1$$
$$CA_1 = CB$$

und $\sphericalangle ACA_1 = ACB + BCA_1 = ACB + ACB_1 = BCB_1$ ist $\triangle ACA_1 \cong BCB_1$. Daher ist 1) $AA_1 = BB_1$ und 2) $\sphericalangle AA_1C = CBB_1$ und $\sphericalangle CAA_1 = CB_1B$. Demgemäß ist, wenn man M mit C verbindet, sowohl Viereck MCA_1B als auch MCB_1A je ein Kreisviereck, mithin $\sphericalangle BMA_1 = BCA_1 = 60^\circ$ und $\sphericalangle CMA_1 = CBA_1 = 60^\circ$. Daher ist $\sphericalangle AMB = 360^\circ - 4 . 60^\circ = 120^\circ$; und da $\sphericalangle BC_1A = 60^\circ$ ist, so ist auch Viereck MAC_1B ein Kreisviereck, mithin, wenn M mit C_1 verbunden wird, $\sphericalangle AMC_1 = ABC_1 = 60^\circ$ und also $= A_1MC$; die Verbindungslinien MC_1 und MC bilden demgemäß eine Gerade, welche, da auch $\triangle CC_1A \cong BB_1A$ ist, der Geraden BB_1 gleich ist. — Auf der Peripherie des durch die 4 Punkte M A C_1 B legbaren Kreises sind C_1 A und B drei äquidistante Punkte; es ist daher nach einem bekannten Satze $MC_1 = MA + MB$, woraus, wenn auf beiden Seiten CC_1 addirt wird, folgt: $CC_1 = MA + MB + MC$.

Aus dem Gesagten ergeben sich also folgende Wahrheiten:

1) Die drei Verbindungslinien AA_1 BB_1 CC_1 schneiden sich in einem Punkte M.

2) Diese Linien sind an Länge einander gleich.

3) Der Punkt M hat zu dem Dreieck ABC eine solche Lage, daß von ihm aus gesehen die drei Seiten gleich lang, nämlich alle drei unter demselben Gesichtswinkel von 120° erscheinen, daß ferner die Summe der Strahlen $MA + MB + MC = AA^1 = BB^1 = CC^1$ ist.

4) Die um die Dreiecke BCA_1 ACB_1 ABC_1 beschriebenen Kreise, deren Mittelpunkte eben S_1 S_2 S_3 sind, schneiden sich in dem einen Punkte M.

II. Verbindet man M mit den Punkten S_1 S_2 S_3 und zieht außerdem die Linien (Radien) S_1B S_1C S_3B S_2C, so sind auf Grund ihrer Uebereinstimmung in allen Seiten einerseits die beiden Dreiecke S_1 S_3 M und S_1 S_3 B, andererseits die Dreiecke S_1 S_2 M und S_1 S_2 C deckend. Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, M S_1 S_3 = B S_1 S_3 = \tfrac{1}{2}\, M S_1 B$$

und $$\sphericalangle\, M S_1 S_2 = C S_1 S_2 = \tfrac{1}{2}\, M S_1 C$$

also auch $$\sphericalangle\, M S_1 S_3 + M S_1 S_2 = \tfrac{1}{2}\,(M S_1 B + M S_1 C) \text{ d. h.}$$

$$\sphericalangle\, S_3 S_1 S_2 = \tfrac{1}{2}\, B S_1 C = 60^\circ.$$

Ebenso ergibt sich, daß auch die Winkel S_1 S_2 S_3 und S_1 S_3 S_2 einzeln $= 60^\circ$ sind.

Das durch die Verbindung der Mittelpunkte gebildete $\triangle\, S_1 S_2 S_3$ ist demzufolge stets gleichseitig.

III. Vertauscht man die Punkte M gegen N, A_1 gegen A_2, B_1 gegen B_2, C_1 gegen C_2, und ebenso S_1 gegen O_1, S_2 gegen O_2 und S_3 gegen O_3, so ergibt eine buchstäblich übereinstimmende Erörterung, bei der man nur die Winkel N O_1 B und N O_1 C als convexe aufzufassen hat, daß auch

1) die Linien AA_2 BB_2 CC_2 sich in einem Punkte N schneiden,

2) daß diese Linien einander gleich sind,

3) daß der Punkt N zu dem Dreieck ABC eine solche Lage hat, daß von ihm aus gesehen die Seiten AB und BC gleich lang, dagegen AC gerade doppelt so lang, jene nämlich je unter dem Gesichtswinkel von 60°, diese unter einem Winkel von 120° erscheinen — und daß $NA + NC - NB = A A_2 = B B_2 = C C_2$ ist,

4) daß die um die Dreiecke BCA_2 ACB_2 ABC_2 beschreibbaren Kreise, deren Mittelpunkte O_1 O_2 O_3 sind, sich in dem einen Punkt N schneiden,

5) daß endlich auch $\sphericalangle\, O_3 O_1 O_2 = 60^\circ = O_3 O_2 O_1$, daß also auch das Dreieck $O_1 O_2 O_3$ gleichseitig ist.

IV. Berechnung der Länge der hauptsächlichsten Linien aus den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC.

Bekanntlich ist

$$AA_1^2 = BA^2 + BA_1^2 - 2BA.BA_1 \cos ABA_1$$
$$= c^2 + a^2 - 2\, ca \cos(\beta + 60^\circ)$$

Da nun aber
$$\cos(\beta + 60^\circ) = \cos\beta \cos 60^\circ - \sin\beta \sin 60^\circ$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos\beta - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sin\beta$$
$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4ac} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{2\triangle}{ac}\ ^{*)}$$
$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 4\triangle\sqrt{3}}{4ac}$$
ist, so hat man

$$AA_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\triangle\sqrt{3}}{2}$$

*) $\triangle$ bezeichnet den Flächeninhalt des Hauptdreiecks ABC.

und da in diesem Ausdruck für AA_1^2 die Seiten des Urdreiecks symmetrisch auftreten, so ist das ein Beweis dafür, daß die drei Linien AA^1 BB^1 CC^1 an Länge gleich seien.

Da $4\triangle = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ und

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$ ist, so erhält man

für die unmittelbare Berechnung der Linie AA^1 aus den Dreiecksseiten den Ausdruck:

$$AA_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2))}}$$
$$+ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2))}}$$

In derselben Weise findet man, daß

$$AA_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4\triangle\sqrt{3}}{2}$$ sei, woraus folgt:

$$AA_1^2 + AA_2^2 = a^2+b^2+c^2.$$

Es sei $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$; dann hat man zur Bestimmung dieser drei Unbekannten das Gleichungensystem

$$y^2 + z^2 + yz = a^2$$
$$x^2 + z^2 + xz = b^2$$
$$x^2 + y^2 + xy = c^2.$$

Aber so einfach auch diese Gleichungen auf den ersten Blick zu sein scheinen, so würde man doch bei ihrer Lösung auf äußerst weitläufige Rechnungen stoßen, wenn man nicht aus dem Vorstehenden obendrein wüßte, daß

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\triangle\sqrt{3}}{2}}$$ sei.

Bezeichnet man den Werth dieses Ausdrucks durch l, so führt nämlich die Subtraction der zweiten und dritten Gleichung von der ersten zu den neuen Gleichungen

$$y^2 - x^2 + z(y-x) = a^2 - b^2$$
$$z^2 - x^2 + y(z-x) = a^2 - c^2$$ oder

$$(y-x)(y+x+z) = a^2 - b^2$$
$$(z-x)(z+x+y) = a^2 - c^2,$$

so daß man also für die Bestimmung von x, y, z die 3 einfachen Gleichungen hat

$$y - x = \frac{a^2-b^2}{l}$$

$$z - x = \frac{a^2-c^2}{l}$$

$$x + y + z = l$$

$$\text{woraus folgt:}\quad x = \frac{l^2 + b^2 + c^2 - 2\,a^2}{3\,l}$$

$$y = \frac{l^2 + a^2 + c^2 - 2\,b^2}{3\,l}$$

$$z = \frac{l^2 + a^2 + b^2 - 2\,c^2}{3\,l}$$

Ganz analoge Resultate ergeben sich für die von N nach den Ecken des Dreiecks ABC gezogenen Linien.

Die Linie $S_1\,A_1$ hat als Radius des dem Dreieck BCA_1 umschriebenen Kreises die Länge $\frac{a}{\sqrt{3}}$; daher ist $A_1\,A_2 = a\sqrt{3}$, $B_1\,B_2 = b\sqrt{3}$, $C_1\,C_2 = c\sqrt{3}$; die Längen dieser Strecken verhalten sich also gerade so zu einander, wie die Seiten des Hauptdreiecks.

Es ist $S_1\,S_2^2 = CS_1^2 + CS_2^2 - 2CS_1 \,.\, CS_2 \cos S_1\,CS_2$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2\,a\,b}{3} \cos(\gamma + 2.\,30^0) \quad \text{oder, da}$$

$$\cos(\gamma + 60^0) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 4\,\triangle\sqrt{3}}{4\,a\,b} \quad \text{ist}$$

$$S_1\,S_2^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\,\triangle\sqrt{3}}{6}$$

und in diesem einfachen Resultat ist ein zweiter Beweis für die Gleichseitigkeit des Dreiecks $S_1\,S_2\,S_3$ enthalten. Auch ergibt sich daraus, daß $A\,A_1^2 = 3\,S_1\,S_2^2$ sei. Die Seite des regulären, einem Kreise mit dem Halbmesser $S_1\,S_2$ einbeschriebenen Dreiecks würde also gerade die Länge von $A\,A_1$ haben.

In ganz übereinstimmender Weise ergibt sich

$$O_1\,O_2^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\,\triangle\sqrt{3}}{6}$$

und daher ist $A\,A_2^2 = 3\,O_1\,O_2^2$ und also auch:

$$A\,A_1 : A\,A_2 = S_1\,S_2 : O_1\,O_2$$

V. Die Flächeninhalte der Dreiecke $S_1\,S_2\,S_3$ und $O_1\,O_2\,O_3$ sind gegeben durch die Formeln:

$$S_1\,S_2\,S_3 = \frac{S_1\,S_2^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2}{4}\sqrt{3} + \frac{c^2}{4}\sqrt{3}}{6} + \tfrac{1}{2}\,\triangle$$

$$= \tfrac{1}{6}\,(BCA_1 + ACB_1 + ABC_1) + \tfrac{1}{2}\,ABC$$

$$\text{und}\quad O_1\,O_2\,O_3 = \tfrac{1}{6}\,(BCA_1 + ACB_1 + ABC_1) - \tfrac{1}{2}\,ABC.$$

Daher ist

$$S_1\,S_2\,S_3 + O_1\,O_2\,O_3 = \frac{BCA_1 + ACB_1 + ABC_1}{3}$$

$$S_1\,S_2\,S_3 - O_1\,O_2\,O_3 = ABC.$$

Die Summe unserer Dreiecke ist also gleich dem arithmetischen Mittel der über den Seiten des Hauptdreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke, und ihre Differenz ist dem Hauptdreieck selbst gleich.