Die Fundamentalaufgaben über die veränderliche geradlinige Bewegung im luftleeren Raume und im widerstehenden Mittel nebst ihren Auflösungen.

Für den allgemeinsten Fall der veränderlichen Bewegung, bei welchem die bewegende Kraft selbst als veränderlich angenommen wird, genügt zur vollständigen Bestimmung der Bewegungserscheinungen während einer beliebigen Zeit die Differentialgleichung der Bewegung eines materiellen Punktes unter der Voraussetzung, daß seine Anfangszustände bekannt sind. Die gegenseitige Abhängigkeit der bei der veränderlichen Bewegung in Betracht kommenden vier Größen, der Geschwindigkeit $= v$, der ihr entsprechenden Zeit $= t$, des bezüglichen durchlaufenen Raumes $= x$ und der bewegenden Kraft $= \varphi$ drückt die Dynamik für jeden Moment aus durch die Formeln

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v dv}{dx}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich, sobald eine der vier Größen in Function einer andern dargestellt ist, die beiden übrigen in Function eben derselben ausdrücken. Dadurch erhält man zwei Relationen mit 3 Variabelen, welche mit Rücksicht auf die dritte daraus resultirende Gleichung als der Ausdruck für die Abhängigkeit je zweier dieser drei Veränderlichen unter einander anzusehen sind.

Hiermit ist die Möglichkeit der Herleitung aller Bewegungsgesetze für einen besonderen Fall gegeben, indem jedes der einschlagenden Probleme durch diese in zwei Aufgaben zu entwickelnden Beziehungen als vollständig gelös't betrachtet werden muß.

Weil ferner 4 Elemente sich auf sechsfache Weise ohne Wiederholung zur zweiten Klasse combiniren lassen, so erhält man sechs Fälle, in welchen jede der vier Größen φ, x, t, v als Function einer der drei übrigen erscheinen kann, und weil nach dem Vorigen ein jeder derselben durch die Auflösung zweier Aufgaben sich erledigt, so ergeben sich ganz allgemein zwölf Hauptaufgaben, auf welche die Entwickelung sämmtlicher Gesetze über veränderliche Bewegung für jeden möglichen concreten Fall zurückgeführt werden kann. Sie sind in schematischer Bezeichnung:

A.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
$\varphi = f(x)$	v	$v^2 = 2\int f(x)\,dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$
$\varphi = f(x)$	t	$t = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$, wo $F(x) = 2\int f(x)\,dx$ ist
$\varphi = f(v)$	t	$t = \int \frac{dv}{f(v)}$
$\varphi = f(v)$	x	$x = \int f(t)\,dt = \int \frac{v\,dv}{f(v)}$
$\varphi = f(t)$	v	$v = \int f(t)\,dt$
$\varphi = f(t)$	x	$x = \int F(t)\,dt$, wobei $F(t) = v$ ist
$x = f(t)$	v	$v = \frac{dx}{dt}$
$x = f(t)$	φ	$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$
$v = f(t)$	x	$x = \int f(t)\,dt$
$v = f(t)$	φ	$\varphi = \frac{df(t)}{dt}$
$v = f(x)$	φ	$\varphi = f^1(x)\,f(x)$
$v = f(x)$	t	$t = \int \frac{dx}{f(x)}$

Im Folgenden soll nur die geradlinige Bewegung behandelt werden und zwar unter der Voraussetzung, daß das Gesetz der Veränderlichkeit der Bewegung gegeben ist. Den Ausgangspunkt bilde die Annahme, daß ein materieller Punkt in einem Abstande a von einer Kraft φ nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung angezogen werde.

Bezeichnet man mit g ihre Wirkung auf einen zweiten Punkt, welcher in der Angriffslinie der Kraft liegt und von letzterer die Entfernung r hat, so hat man für den Augenblick, in welchem der erstere Punkt den Raum x zurückgelegt hat

$$g : \varphi = (a-x)^2 : r^2$$

oder
$$\varphi = \frac{g r^2}{(a-x)^2}$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit, welche der Punkt nach Zurücklegung des Raumes x erlangt hat, erhält man nach der ersten Aufgabe

$$v^2 = 2gr^2 \int \frac{dx}{(a-x)^2} + C$$

Behufs der Integration setze man

$$a - x = z, \text{ woraus } x = a - z \text{ folgt,}$$

und es wird demnach

$$v^2 = -2gr^2 \int \frac{dz}{z^2} = \frac{2gr^2}{a-x} + C$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit = o, so wird

$$C = -\frac{2gr^2}{a-x}$$

und da mit v = o auch x = o wird, so ist

$$C = -\frac{2gr^2}{a}$$

Somit erhält man

$$\text{I} \qquad v = r\sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}} \qquad v = f(x)$$

als Ausdruck der Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn.

Zur Entwickelung der gegenseitigen Abhängigkeit von t und v hat man

$$t = \int \frac{dv}{\phi}$$

Setzt man in $\phi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}$ den Werth für x in Function von v aus I, so wird

$$\phi = \frac{\left(\frac{2gr^2}{a} + v^2\right)^2}{4gr^2}$$

Dadurch bestimmt sich

$$t = 4gr^2 \int \frac{dv}{\left[\left(r\sqrt{\frac{2g}{a}}\right)^2 + v^2\right]^2}$$

Es ist aber

$$\int \frac{dv}{\left[\left(r\sqrt{\frac{2g}{a}}\right)^2 + v^2\right]^2} = \frac{a}{4gr^2}\left[\frac{av}{2gr^2 + av^2} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arctang} \frac{v}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\right] + C$$

Also

$$t = \frac{a^2 v}{2gr^2 + av^2} + \frac{a}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} + C$$

Die Constante C ist gleich Null, weil für v = o auch t = o ist.

Mithin

$$\text{II} \quad t = \frac{a^2 v}{2gr^2 + av^2} + \frac{a}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \qquad t = f(v)$$

Durch die Gleichungen I. und II. ist die vollständige Lösung des Problemes gegeben. Die Beantwortung der diesen Gegenstand betreffenden möglichen Fragen stellt das folgende Schema dar, wobei der Raumersparniß wegen die Herleitung der Gleichungen übergangen ist.

B.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
x	v	$v = r\sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}$	$v = f(x)$
t	v	$\frac{rv\sqrt{2ag}}{2gr^2 + av^2} + \text{arc tang}\,\frac{v}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{rt}{a}\sqrt{\frac{2g}{a}}$	$v = f(t)$
v	x	$x = \frac{a^2v^2}{2gr^2 + av^2}$	$x = f(v)$
t	x	$\sqrt{ax - x^2} - a\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = rt\sqrt{\frac{2g}{a}} - \frac{a\pi}{2}$	$x = f(t)$
v	t	$t = \frac{a^2v}{2gr^2 + av^2} + \frac{a}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\text{arc tang}\,\frac{v}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}$	$t = f(v)$
x	t	$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{ax - x^2} + a\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right)\right]$	$t = f(x)$

Die Gleichungen $v = f(t)$ und $x = f(t)$ sind transscendent und annähernd numerisch aufzulösen.

Sollen die Bewegungsgesetze für den Augenblick angegeben werden, in welchem der Punkt in dem Abstande r von der anziehenden Kraft eintrifft, so hat man in B. aus der Bedingungsgleichung $a = r + x$ die geeigneten Substitutionen zu machen und erhält alsdann:

C.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
v	x	$x = \frac{rv^2}{2gr - v^2}$	$x = f(v)$
t	x	$\sqrt{(r+x)}\,\left[rx + (r+x)\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\sqrt{\frac{x}{r}}\right)\right] = rt\sqrt{2g}$	$x = f(t)$
$x = a - r$	t	$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{r(a-r)} + a\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\sqrt{\frac{r}{a-r}}\right)\right]$	$t = f(x)$
v	t	$t = \frac{1}{2gr - v^2}\left[rv + \frac{2gr^2}{\sqrt{2gr - v^2}}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{v^2}{2gr - v^2}}\right]$	$t = f(v)$
$x = a - r$	v	$v = \sqrt{\frac{2gr(a-r)}{a}}$	$v = f(x)$
t	v	$v = \sqrt{\frac{2grx^1}{r + x^1}}$ wenn x^1 den Raum bezeichnet, welchen der Punkt nach $x = f(v)$ in der Zeit t zurücklegt.	$v = f(t)$

Vorstehende Relationen haben für jeden Werth der Constanten g und r Geltung. Sie umfassen daher ganz allgemein alle die Fälle, in welchen die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung ausgeübt wird. Substituirt man deshalb für g die Größe der Schwerkraft der Erde an der Oberfläche, für r den Erdradius und betrachtet a als einen bedeutenden Abstand von der Erdoberfläche, so ist in dem Schema B. die Beantwortung aller Fragen gegeben, welche sich an die Aufgabe knüpfen:

Es sollen die Bewegungszustände eines materiellen Punktes, welcher in einem bedeutenden Abstande von der Erdoberfläche nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung von der Schwere angezogen wird, für jeden beliebigen Zeitmoment bestimmt werden.

Dabei behandelt Schema C. alle die Aufgaben, welche sich unter der Annahme, daß der Punkt auf die Erdoberfläche aufschlägt, stellen lassen. Als Bedingungsgleichung für diesen Fall erhält man aus $t = f(v)$

$$2gr > v^2$$

d. h. es ist $\sqrt{2gr}$ das Maximum der Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper an der Oberfläche der Erde durch seinen Fall erlangen kann, vorausgesetzt, daß keine Widerstände Statt haben.

Um von der Entwickelung der Gesetze der oben behandelten veränderlichen Bewegung zu denjenigen überzugehen, welche die gleichförmig beschleunigte d. i. also diejenige, bei welcher die wirkende Kraft während der Dauer ihrer Einwirkung eine gleiche Stärke beibehält, darstellen, hat man den durchlaufenen Raum x als sehr klein im Vergleich mit dem Abstande r anzunehmen. Setzt man zu dem Zwecke $a = r + h$, in $v = f(x)$ des Schema B, wo h im Vergleich mit r sehr klein ist, so erhält man

$$v^2 = 2gx \frac{r^2}{(h+r)^2 - (h+r)x} = 2gx \frac{1}{\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{2h}{r} - \frac{hx}{r^2} - \frac{x}{r} + 1}$$

Vernachlässigt man hierin die Größen von der Ordnung $\frac{h}{r}$ und $\frac{x}{r}$, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{III} \qquad v = \sqrt{2gx}$$

Um unter dieser Voraussetzung $t = f(x)$ herzuleiten, verwandle man zuvor die Gleichung $t = f(x)$ in Schema B in die folgende:

$$t = \sqrt{\frac{1}{2g}} \left[\frac{a}{r} \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{x}{a}} - \frac{a}{r} \sqrt{a} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{\pi a \sqrt{a}}{2r} \right]$$

Um den Grenzwerth des ersten in der Klammer stehenden Gliedes zu erhalten, hat man

$$\frac{a}{r}\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{x}}{r}\left(1 - \frac{x}{2a} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2} \cdots\right)$$

oder nach der Substitution von $a = r + h$

$$= \left(1 + \frac{h}{r}\right)\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{2(r+h)} - \frac{1}{8}\left[\frac{x}{r+h}\right]^2 \cdots\right)$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder, in welchem $\frac{h}{r}, \frac{x}{r+h}$ vorkommen,

$$\frac{a}{r}\sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{x}{a}} = \sqrt{x}$$

Entwickelt man in dem zweiten Gliede der Klammer $\operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{x}{a}}$ in eine Reihe, so wird

$$\frac{a}{r}\sqrt{a} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{a}{r}\sqrt{a}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\sqrt{\left[\frac{x}{a}\right]^3}}{12} \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi a \sqrt{a}}{2r} - \frac{a}{r}\sqrt{x} - \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2}\sqrt{x} \ldots$$

und nachdem man wie früher substituirt und das dritte Glied weggelassen hat,

$$= \frac{r + h}{2r} \pi \sqrt{r + h} - \left(1 + \frac{h}{r}\right) \sqrt{x} = \frac{r + h}{2r} \pi \sqrt{r + h} - \sqrt{x}$$

Dadurch wird $t = 2 \sqrt{\frac{x}{2g}}$ oder IV $x = \frac{g}{2} t^2$

Mit den Gleichungen III und IV ist das Problem über die gleichförmig beschleunigte Bewegung gelös't, welcher Art auch die bewegenden Kräfte sind. Wenn man für die verschiedenen Kräfte nur den Werth von g sich ändern läßt, so sind dieselben der Ausdruck für alle derartigen Bewegungsgesetze, sei es, daß der stetige Druck von einer gespannten Feder oder einem comprimirten Gase ausgeübt wird, daß die Erdschwere ein festes oder flüssiges Molekül, oder ein Magnetpol den Punkt anzieht. So erhält man in III. das hydro- und aërodynamische Prinzip der Ausflußgeschwindigkeit von Fluiden aus einem Gefäße, wenn x die Druckhöhe bezeichnet. Versteht man unter x die Fallhöhe, so hat man III. und IV. ganz allgemein als Fallgesetze zu betrachten.

Sieht man sie als Gesetze für den freien Fall an, so hat man unter g die volle Wirkung der Erdschwere zu verstehen. Um x, t, v numerisch bestimmen zu können, muß g durch den Versuch ermittelt werden. Betrachtet man demnach auch g als unbekannt, so sind in den folgenden Gleichungen alle Beziehungen zwischen den vier Größen x, t, v, g ausgedrückt.

D.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
x	v	$v = \sqrt{2gx}$
t	v	$v = gt$
v	x	$x = \frac{v^2}{2g}$
t	x	$x = \frac{g}{2} t^2$
x	t	$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$
v	t	$t = \frac{v}{g}$
r, x	g	$g = \frac{v^2}{2x}$
v, t	g	$g = \frac{v}{t}$
x, t	g	$g = \frac{2x}{t^2}$

Die drei letzten Relationen geben die drei theoretischen Möglichkeiten der numerischen Bestimmung von g an, entweder aus der Beobachtung des Fallraumes **x** in der Zeit t, oder des Fallraumes x und der bezüglichen Endgeschwindigkeit v, oder endlich der Endgeschwindigkeit v in der Zeit t.

Die erste Methode liefert bekanntlich keine genauen Resultate, weshalb man genöthigt ist, diese Bestimmung auf anderem Wege zu machen, indem man durch Verminderung der Einwirkung der Schwere die Fallräume kleiner werden läßt. Dies ermöglicht die schiefe Ebene und die Atwoodsche Fallmaschine, welch letzterer Apparat auch die Beobachtung der Endgeschwindigkeit v für die beiden übrigen Methoden gestattet. Für diesen geht g über in $\frac{g\,m}{2M + m}$, wenn man mit M die Masse eines der beiden im

Gleichgewicht stehenden Gewichte und mit m die des Auflagegewichtes bezeichnet; bei dem Falle auf der schiefen Ebene wirkt die Schwere mit $g \sin \beta$, wenn β den Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont vorstellt. Daher werden die beiden Hauptgleichungen
für die Atwoodsche Maschine

$$\text{V} \quad v = \sqrt{\frac{2gmx}{2M+m}} \qquad\qquad \text{VI} \quad x = \frac{gmt^2}{2(2M+m)}$$

und für die schiefe Ebene

$$\text{VII} \quad v = \sqrt{2gx \sin \beta} \qquad\qquad \text{VIII} \quad x = \frac{g}{2} t^2 \sin \beta$$

Die folgenden Schemata enthalten die Beantwortung der Fragen, zu welchen diese Relationen in Hinsicht der möglichen Bestimmungsmethoden für g, der geeigneten Wahl des Verhältnisses $\frac{M}{m}$ und $\sphericalangle \beta$, so wie der gewöhnlich vorkommenden Aufgaben veranlassen.

E.

Für die Atwoodsche Maschine.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
$x, t, \frac{M}{m}$	g	$g = \frac{2x(2M+m)}{mt^2}$	$v, g, \frac{M}{m}$	t	$t = \frac{v(2M+m)}{gm}$
$x, v, \frac{M}{m}$	g	$g = \frac{v^2(2M+m)}{2mx}$	$x, g, \frac{M}{m}$	v	$v = \sqrt{\frac{2gmx}{2M+m}}$
$t, v, \frac{M}{m}$	g	$g = \frac{v(2M+m)}{mt}$	$t, g, \frac{M}{m}$	v	$v = \frac{gmt}{2M+m}$
$g, t, \frac{M}{m}$	x	$x = \frac{gmt^2}{2(2M+m)}$	x, t, g	$\frac{M}{m}$	$\frac{M}{m} = \frac{gt^2 - 2x}{4x}$
$g, v, \frac{M}{m}$	x	$x = \frac{v^2(2M+m)}{2gm}$	x, v, g	$\frac{M}{m}$	$\frac{M}{m} = \frac{2gx - v^2}{2v^2}$
$x, g, \frac{M}{m}$	t	$t = \sqrt{\frac{2x(2M+m)}{gm}}$	v, t, g	$\frac{M}{m}$	$\frac{M}{m} = \frac{gt - v}{2v}$

F.

Für die schiefe Ebene.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
x, t, β	g	$g = \frac{2x}{t^2 \sin \beta}$	v, g, β	t	$t = \frac{v}{g \sin \beta}$
x, v, β	g	$g = \frac{v^2}{2x \sin \beta}$	x, g, β	v	$v = \sqrt{2gx \sin \beta}$
t, v, β	g	$g = \frac{v}{t \sin \beta}$	t, g, β	v	$v = gt \sin \beta$
g, t, β	x	$x = \frac{gt^2}{2} \sin \beta$	x, t, g	β	$\beta = \arcsin \frac{2x}{gt^2}$
g, v, β	x	$x = \frac{v^2}{2g \sin \beta}$	x, v, g	β	$\beta = \arcsin \frac{v^2}{2gx}$
x, g, β	t	$t = \sqrt{\frac{2x}{g \sin \beta}}$	v, t, g	β	$\beta = \arcsin \frac{v}{gt}$

Man findet den Zahlwerth von $g = 9{,}8088$ Meter.

In der Allgemeinheit, in welcher die Formeln III. und IV. ihre Geltung haben für jede Art der gleichförmig beschleunigten Bewegung, enthalten sie weiterhin auch die Auflösung der Aufgabe: Wenn ein constanter Druck von k Pfund während der Zeit von t Sekunden auf einen Körper von p Pfund stetig einwirkt, wie groß ist die nach t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit und welche Wegstrecke wird der Körper in dieser Zeit durchlaufen? wobei es nur darauf ankommt, den entsprechenden Werth von g, welcher g, genannt sei, zu finden. Vergleicht man die Wirkung der Kraft mit der der Schwere, so ist

$$k : p = g, : g$$

woraus $$g, = \frac{g\,k}{p}.$$

Alsdann erhält man

$$\text{IX} \quad v = \sqrt{\frac{2\,g\,k\,x}{p}} \qquad\qquad \text{X} \quad x = \frac{g\,k\,t^2}{2\,p}$$

Die sämmtlichen Aufgaben, welche sich an diesen Gegenstand knüpfen lassen, finden im Folgenden ihre Behandlung:

G.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
v, k, p	x	$x = \frac{p\,v^2}{2\,g\,k}$
t, k, p	x	$x = \frac{g\,k\,t^2}{2\,p}$
x, k, p	v	$v = \sqrt{\frac{2\,g\,k\,x}{p}}$
t, k, p	v	$v = \frac{g\,k\,t}{p}$
a, k, p	t	$t = \sqrt{\frac{2\,p\,x}{g\,k}}$
v, k, p	t	$t = \frac{p\,v}{g\,k}$
x, v, p	k	$k = \frac{p\,v^2}{2\,g\,x}$
x, t, p	k	$k = \frac{2\,p\,x}{g\,t^2}$

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
v, t, p	k	$k = \frac{p\,v}{g\,t}$
x, v, k	p	$p = \frac{2\,g\,k\,x}{v^2}$
x, t, k	p	$p = \frac{g\,k\,t^2}{2\,x}$
v, t, k	p	$p = \frac{g\,k\,t}{v}$
v, x	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p} = \frac{v^2}{2\,g\,x}$
x, t	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p} = \frac{2\,x}{g\,t^2}$
t, v	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p} = \frac{v}{g\,t}$

Die in Schema D. aufgestellten Gesetze sind der Ausdruck der freien Fallbewegung nur unter der Voraussetzung, daß keine Art von Widerständen stattfinde, daß dieselbe also im leeren Raume vor sich gehe.

Es sollen nunmehr die Gesetze des freien Falles unter Berücksichtigung eines widerstehenden Mediums allgemein entwickelt werden.

Bei der Unvollkommenheit der über den Widerstand der elastischen Mittel geltenden Theorie hat das Experiment die Basis für die Auffindung der Hauptgesetze abgeben müssen. Darnach nimmt man an, daß der Widerstand, welchen ein Körper bei seiner Bewegung in einem luftförmigen Fluidum erleidet, als eine Kraft anzusehen ist, welche senkrecht auf jeden beliebigen Punkt seiner Oberfläche wirkend

1) dem Quadrate der in der eben erwähnten Normale gerichteten relativen Geschwindigkeit v des Körpers und
2) der Dichte ϱ des widerstehenden Fluidums direct proportional ist. Sodann ist derselbe noch weiter abhängig von der besonderen Form des Körpers.

Hiernach wird der Widerstand, wenn man durch Einführung eines Coeffizienten α den besonderen Umständen, unter welchen die Bewegung erfolgt, Rechnung trägt, gemessen durch

$$W = \alpha \varrho v^2$$

Reduzirt man ihn auf die Masseneinheit, so hat man

$$\frac{W}{M} = \frac{\alpha \varrho v^2}{M} = \frac{\alpha \varrho v^2}{V C}$$

wenn V das Volumen und D die Dichte des Körpers bezeichnet.

Ist letzterer, um den einfachsten Fall zu nehmen, eine Kugel, deren Radius r ist, so ist

$$\alpha = \frac{r^2 \pi}{8 g}$$

und man erhält

$$\frac{W}{M} = \frac{v^2}{\frac{32 \, g r D}{3 \varrho}}$$

als den Widerstand, welcher auf die Einheit der Masse der Kugel wirkt. Setzt man zur Vereinfachung die Geschwindigkeit $= k$, welche der Kugel zu ertheilen wäre, damit die widerstehende Kraft gleich ihrem Gewichte g sei und γ für $\frac{1}{\frac{32}{3} g}$, so ist $\frac{\gamma k^2 \varrho}{r D} = g$

wodurch man den veränderten Ausdruck für die Kraft des Widerstandes erhält

$$\frac{W}{M} = \frac{g v^2}{k^2}$$

Hiernach hat man für den senkrechten Fall die beschleunigende Kraft

$$\phi = g - g \frac{v^2}{k^2} = \frac{g}{k^2} (k^2 - v^2) = \frac{d v}{d t}$$

Daher $$d t = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{d v}{k^2 - v^2}$$

also XI $$t = \int \frac{k^2}{g} \cdot \frac{d v}{k^2 - v^2} + C = \frac{k}{2 g} \, l \, \frac{k + v}{k - v}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach v ergibt

$$v = k \, \frac{e^{\frac{2 g t}{k}} - 1}{e^{\frac{2 g t}{k}} + 1}$$

Um $x = f(t)$ zu erhalten, substituire man letzteren Werth für v in

$$d x = v \, dt$$

wodurch

$$x = k \int \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}\, dt + C \quad = \quad \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{e^{\frac{gt}{k}}} + C$$

Zur Bestimmung der Constante muß für $t = o$ auch $x = o$ gesetzt werden; woraus

$$C = -\frac{k^2}{g}\, l\, 2$$

Daher XII $$x = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2\, e^{\frac{gt}{k}}} \qquad x = f(t)$$

Hieraus ergibt sich die folgende Zusammenstellung aller Aufgaben nebst ihren Lösungen.

II.

Für den freien Fall einer Kugel im elastischen Medium.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
v	t	$t = \frac{k}{2g}\, l\, \frac{k + v}{k - v}$	$t = f(v)$
x	t	$t = \frac{k}{g}\, l \left[e^{\frac{gx}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1} \right]$	$t = f(x)$
t	v	$v = k.\, \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$	$v = f(t)$
x	v	$v = k \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}}}$	$v = f(x)$
t	x	$x = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2\, e^{\frac{gt}{k}}}$	$x = f(t)$
v	x	$x = \frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{k^2}{k^2 - v^2}$	$x = f(v)$

Aus $v = f(t)$ und $x = f(v)$ folgt die Bedingungsgleichung

$$v < k$$

d. h. in jedem Moment ist die Endgeschwindigkeit kleiner als diejenige Geschwindigkeit ist, welche dem Körper zu ertheilen wäre, damit der Widerstand, welchen sie erfährt, gleich ihrem Gewichte sei. Hieraus folgt auch, daß die beschleunigende Kraft $\varphi = g - g\frac{v^2}{k^2}$ eines in einem elastischen Fluidum fallenden Körpers kleiner ist, als wenn er im leeren Raume fallen würde.

Aus $v = f(t)$ geht hervor, daß mit wachsendem t v immer mehr $= k$ wird, weil dafür $\lim \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$ der Einheit um so näher kommt. Deshalb nimmt die verzögernde Kraft $g\,\frac{v^2}{k^2}$ immer mehr zu, und die beschleunigende Kraft als der Ueberschuß des Gewichtes des Körpers über den Luftwiderstand in demselben Maaße ab. Da nun $v < k$, so ist v um so kleiner, je kleiner k ist oder da $k = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\ \sqrt{\frac{D\,r}{\varrho}}$, je kleiner D und r und je größer ϱ ist. Daraus ergibt sich das Gesetz, daß die verschiedenen Körper in der Luft nicht gleich schnell fallen, daß von zwei Kugeln diejenige mit geringerer Geschwindigkeit fallen wird, welche bei gleichem Volumen die leichtere ist,

welche die kleinere ist, wenn beide von demselben Materiale sind,

welche bei geringerem Volumen die geringere Dichte besitzt,

welche, wenn die Verschiedenheit des Mittels in Betracht kommt bei geringerem Volumen und geringerer Dichte im dichteren Medium fällt.

Substituirt man für $D = \frac{M}{V}$, so wird

$$k = \sqrt{\frac{3\,g}{\gamma\,\pi}}\ \sqrt{\frac{M}{4\,r^2}}$$

d. h. diejenige fällt langsamer, welche bei gleichem Gewichte die größere Oberfläche hat, oder auch für welche das Verhältniß der Masse zu ihrer Oberfläche am kleinsten ist, ein Gesetz, welches die Erfahrung für alle Körper dahin bestätigt, daß, wenn einem Körper bei demselben Gewichte eine verschieden große Oberfläche gegeben wird, oder ein Körper in verschiedener Lage zum Falle gebracht wird, sein Fall um so langsamer erfolgt, je größer die Oberfläche ist, mit welcher er sich der Luft entgegen bewegt.

— Je größer der Werth des Verhältnisses $\frac{v}{k}$ wird, um so mehr nähert sich die beschleunigende Kraft der Null d. h. jeder Körper strebt bei seinem Falle dahin, sich immer mehr demjenigen Bewegungszustande zu nähern, in welchem die Bewegung von einer beschleunigten in eine gleichförmige übergeht, und es erreicht alsdann die Geschwindigkeit v diejenige Grenze k, bei welcher der Widerstand der Luft gleich ist dem Gewichte des fallenden Körpers. Um das Maaß von Schnelligkeit zu untersuchen, in welchem dies für denselben Augenblick bei verschiedenen Körpern stattfindet, hat man $\lim \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$ für ein veränderliches k zu bestimmen. Durch Umformung erhält man

$$\lim \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} = \lim \frac{e^{\frac{gt}{k}}\ e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}$$

Dieser Grenzwerth wird um so schneller gleich Eins, je rascher $e^{-\frac{gt}{k}}$ abnimmt, und dies geschieht, je kleiner k ist. Daher erhält man für den Uebergang zur gleichförmigen Bewegung Bedingungen, welche mit denjenigen übereinstimmen, die für das Fallen eines Körpers mit geringerer Fallgeschwindigkeit aufgestellt worden sind.

Die Ableitung der Gesetze beim freien Falle im luftleeren Raume unter der Voraussetzung, daß der materielle Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit besitze, geschieht aus der in Entwickelung von I vorkommenden Formel

$$v^2 = \frac{2\,g\,r^2}{a - x} + C$$

durch die Bestimmung der zugehörigen Constante. Ist diese Anfangsgeschwindigkeit $= c$, so wird

$$c^2 = \frac{2\,g\,r^2}{a} + C$$

also
$$C = c^2 - \frac{2\,g\,r^2}{a}$$

Daher
$$v^2 = 2\,g\,r^2 \frac{x}{a\,(a - x)} + c^2$$

oder nach der Substitution von $a = h + r$ und nach der Reduction

$$\text{XIII} \qquad v = \sqrt{2\,g\,x + c^2}$$

Auf analogem Wege erhält man

$$\text{XIV} \qquad t = \frac{v - c}{g}$$

Betrachtet man g als constant, so erhält man, da sich unter den übrigen vier Größen je zwei durch die beiden andern finden lassen

I.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
t, c	x	$x = c\,t + \frac{g}{2}\,t^2$	v, c	t	$t = \frac{v - c}{g}$
v, t	x	$x = t\,(v - \frac{g}{2}\,t)$	v, x	t	$t = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2\,g\,x}}{g}$
v, c	x	$x = \frac{v^2 - c^2}{2\,g}$	x, c	t	$t = \frac{\sqrt{c^2 + 2\,g\,x} - c}{g}$
t, c	v	$v = c + g\,t$	v, t	c	$c = v - g\,t$
x, t	v	$v = \frac{x + \frac{g}{2}\,t^2}{t}$	x, t	c	$c = \frac{x - \frac{g}{2}\,t^2}{t}$
x, c	v	$v = \sqrt{2\,g\,x + c^2}$	v, x	c	$c = \sqrt{v^2 - 2\,g\,x}$

Erfolgt der Fall in einem widerstehenden Mittel, so erhält man unter den für das Schema H aufgestellten Bedingungen aus der allgemein geltenden Gleichung XI $t = \frac{k}{2\,g}\,l\,\frac{k + v}{k - v} + C$, da für $t = o$, $v = c$ ist

$$C = -\frac{k}{2\,g}\,l\,\frac{k + c}{k - c}$$

Daher wird

$$\text{XV} \qquad t = \frac{k}{2\,g}\,l\,\frac{(k + v)\,(k - c)}{(k - v)\,(k + c)}$$

Um $x = f(v, c)$ zu entwickeln, hat man

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2), \text{ woraus}$$

$$x = \frac{k^2}{g}\int\frac{v\,dv}{k^2 - v^2} = -\frac{k^2}{2g}\,l\,(k^2 - v^2) + C$$

Die Constante ergibt sich für den angenommenen Bewegungszustand dadurch, daß man für $x = o$, $v = c$ erhält.

$$C = \frac{k^2}{2g}\,l\,(k^2 - c^2)$$

Daher

$$\text{XVI} \qquad x = \frac{k^2}{2g}\,l\,\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2}$$

Dadurch erhält man zur Beantwortung der hieran sich knüpfenden möglichen Aufgaben:

K.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
v, c	t	$t = \frac{k}{2g}\,l\,\frac{(k+v)(k-c)}{(k-v)(k+c)}$	$t = f(v, c)$
v, c	x	$x = \frac{k^2}{2g}\,l\,\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2}$	$x = f(v, c)$
t, c	v	$v = k\,\dfrac{\frac{k+c}{k-c}\,e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{\frac{k+c}{k-c}\,e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$	$v = f(t, c)$
x, c	v	$v = \dfrac{\sqrt{k^2\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right) + c^2}}{e^{\frac{gx}{k^2}}}$	$v = f(x, c)$
t, v	c	$c = k\,\dfrac{1 + \frac{v-k}{v+k}\,e^{\frac{2gt}{k}}}{1 + \frac{k-v}{k+v}\,e^{\frac{2gt}{k}}}$	$c = f(t, v)$
x, v	c	$c = \sqrt{k^2 + (k^2 - v^2)\,e^{\frac{2gx}{k^2}}}$	$c = f(x, v)$

Die übrigen Fragen $t = f(v, x)$, $v = f(x, t)$, $x = f(v, t)$, $c = f(x, t)$, $t = f(x, c)$, $x = f(t, c)$ werden aus den vorstehenden Relationen durch die geeigneten Substitutionen beantwortet.

Aus $v = f(t, c)$ geht hervor, daß auch für diese Art der Bewegung in allen Fällen

$v < k$ ist.

Wird ein Körper mit einer Geschwindigkeit $= c$ in einer Richtung bewegt, welche der Richtung der Schwere entgegengesetzt ist, so hat man in den Formeln XIII und XIV $-g$ statt g zu setzen, und es ist alsdann

XVII $\qquad v = \sqrt{c^2 - 2gx}$

XVIII $\qquad t = \dfrac{c - v}{g}$

Dadurch erhält man für die gleichförmig verzögerte Bewegung

II.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
t, c	x	$x = ct - \frac{g}{2} t^2$	c, x	t	$t = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2gx}}{g}$
t, v	x	$x = (v + \frac{g}{2} t) t$	t, v	c	$c = v + gt$
c, v	x	$x = \frac{c^2 - v^2}{2g}$	t, x	c	$c = \frac{2x + gt^2}{2t}$
t, c	v	$v = c - gt$	v, x	c	$c = \sqrt{v^2 + 2gx}$
t, x	v	$v = \frac{2x - gt^2}{2t}$	v = o, t	c	$c = gt$
c, x	v	$v = \sqrt{c^2 - 2gx}$	v = o, c	t	$t = \frac{c}{g}$
c, v	t	$t = \frac{c - v}{g}$	v = o, c	x	$x = \frac{c^2}{2g}$
v, x	t	$t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gx}}{g}$			

Die drei letzten Formeln geben die Beziehungen an, welche stattfinden für den Augenblick, in welchen der Punkt den Gipfel seiner Bahn erreicht. Sie drücken aus:

1) den Werth der Anfangsgeschwindigkeit, falls das Steigen während der Zeit t erfolgen soll;
2) die Zeit, während welcher der Punkt steigt, wenn er in die Anfangsgeschwindigkeit = c versetzt worden ist;
3) die dafür eintretende Steighöhe.

Setzt man für g den Werth $\frac{K}{p} g$, so gehen die Formeln XVII und XVIII über in den Ausdruck, welcher die Bewegungsgesetze angibt für den Fall, daß auf einen Körper von p *Pfd.*, welcher bereits eine Anfangsgeschwindigkeit von c Fuß besitzt, eine Kraft von k *Pfd.* in unveränderlicher Stärke während t Sekunden in gerade entgegengesetzter Richtung einwirkt. Dann erhält man

XIX $\qquad v = \sqrt{c^2 - \dfrac{2gkx}{p}}$

XX $\qquad t = \dfrac{p\,(c - v)}{g\,k}$

Demnach beantworten sich alle hier einschlagenden Aufgaben durch

M.

Gegeben.	Gesucht	Auflösung.
p, c, k, x	v	$v=\sqrt{c^2-\frac{2gkx}{p}}$
p, k, c, t	v	$v=c-\frac{gkt}{p}$
p, k, x, t	v	$v=\frac{x}{t}-\frac{gkt}{2p}$
p, c, k, v	x	$x=\frac{p(c^2-v^2)}{2gk}$
p, k, c, t	x	$x=ct-\frac{gkt^2}{2p}$
p, k, v, t	x	$x=vt+\frac{gkt^2}{2p}$
p, k, x, v	c	$c=\sqrt{v^2+\frac{2gkx}{p}}$
p, k, v, t	c	$c=v+\frac{gkt}{p}$
p, k, x, t	c	$c=\frac{x}{t}+\frac{gkt}{2p}$
p, k, c, v	t	$t=\frac{k(c-v)}{gk}$
p, k, v, x	t	$t=\frac{-pv+\sqrt{p^2v^2+2gkpx}}{gk}$
p, k, x, c	t	$t=\frac{cp-\sqrt{c^2p^2-2gkpx}}{gk}$
p, c, x, v	k	$k=\frac{k(c^2-v^2)}{2gx}$
p, c, v, t	k	$k=\frac{p(c-v)}{gt}$
p, c, x, t	k	$k=\frac{2p(ct-x)}{gt^2}$
p, x, v, t	k	$k=\frac{2p(x-tv)}{gt^2}$
c, k, x, v,	p	$p=\frac{2gkx}{c^2-v^2}$
k. c, v, t	p	$p=\frac{gkt}{c-v}$
k, c, x, t	p	$p=\frac{gkt^2}{2(ct-x)}$
k, x, v, t	p	$p=\frac{gkt^2}{2(x-tv)}$
v, c, t	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p}=\frac{c-v}{gt}$
c, v, x	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p}=\frac{c^2-v^2}{2gx}$
x, c, t	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p}=\frac{2(ct-x)}{gt^2}$
v, x, t	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p}=\frac{2(x-vt)}{gt^2}$
v=o, k, p, t	c	$c=\frac{k}{p}gt$
v=o, k, p, c	t	$t=\frac{cp}{gk}$
v=o, p, c, t	k	$k=\frac{cp}{gt}$
v=o, k, c, t	p	$p=\frac{gkt}{c}$
v=o, c, p, k	x	$x=\frac{c^2p}{2gk}$
v=o, c, p, x	k	$k=\frac{c^2p}{2gx}$
v=o, p, x, k	c	$c=\sqrt{\frac{2gkx}{p}}$
v=o, k, c, x	p	$p=\frac{2gkx}{c^2}$

Geht die vertikal aufsteigende Bewegung in einem widerstehenden elastischen Mittel vor sich, so hemmen sowohl die Schwere als auch der Widerstand der Flüssigkeit die Bewegung. Daher hat man

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{g}{k^2}(v^2+k^2) \qquad \text{also} \qquad t=-\frac{k^2}{g}\int\frac{dv}{v^2+k^2}+C$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $= c$, so bestimmt sich die Constante dadurch, daß für $t = o$ wird $v = c$, und es ist dafür $\frac{gt}{k}=\text{arc tang}\,\frac{c}{k}-\text{arc tang}\,\frac{v}{k}=\text{arc tang}\,\frac{k(c-v)}{k^2+cv}$

Mithin ist **XXI** $t = \frac{k}{g} \text{ arc tang } \frac{k\,(c - v)}{k^2 + c\,v}$

Da weiterhin $\phi = \frac{v\,d\,v}{d\,x}$ und $\phi = - g \frac{v^2 + k^2}{k^2}$,

so ist $\frac{g}{k^2}\, d\,x = - \frac{v\,d\,v}{v^2 + k^2}$

folglich $\frac{2\,g\,x}{k^2} = - \int \frac{2\,v\,d\,v}{v^2 + k^2} + C \quad = - \,l\,(v^2 + k^2) + C$

Weil $v = c$ wird für $x = o$, so ist

$$C = l\,(v^2 + k^2)$$

also **XXII** $x = \frac{k^2}{2\,g}\, l \frac{c^2 + k^2}{v^2 + k^2}$ Dadurch erhält man

N.

Geg.	Ges.	Auflösung	
v, c	t	$t = \frac{k}{g} \text{ arc tang } \frac{k\,(c - v)}{k^2 + c\,v}$	$t = f\,(v, c)$
c, x	t	$t = \frac{k}{g} \text{ arc sin } \frac{k}{k^2 + c^2} \left[c\,e^{\frac{g\,x}{k^2}} + \sqrt{c^2 + k^2\,(1 - e^{\frac{2\,g\,x}{k^2}})} \right]$	$t = f\,(c, x)$
x, v	t	$t = \frac{k}{g} \text{ arc tang } \frac{k}{v^2 e^{\frac{2\,g\,x}{k^2}} - k^2} \left[v\,e^{\frac{2\,g\,x}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2\,g\,x}{k^2}}\,(v^2 + k^2) - k^2} \right]$	$t = f\,(x, v)$
t, c	v	$v = k. \frac{c \cos \frac{g\,t}{k} - k \sin \frac{g\,t}{k}}{k \cos \frac{g\,t}{k} + c \sin \frac{g\,t}{k}}$	$v = f\,(t, c)$
c, x	v	$v = \frac{\sqrt{c^2 + k^2\,(1 - e^{\frac{2\,g\,x}{k^2}})}}{e^{\frac{g\,x}{k^2}}}$	$v = f\,(c, x)$
x, t	v	$v = \frac{k\,(\cos \frac{g\,t}{k} - e^{-\frac{g\,x}{k^2}})}{\sin \frac{g\,t}{k}}$	$v = f\,(x, t)$
c, v	x	$x = \frac{k^2}{2\,g}\, l \frac{c^2 + k^2}{v^2 + k^2}$	$x = f\,(c, v)$
c, t	x	$x = \frac{k^2}{g}\, l\,(\cos \frac{g\,t}{k} + \frac{c}{k} \sin \frac{g\,t}{k})$	$x = f\,(c, t)$
v, t	x	$x = \frac{k^2}{2\,g}\, l \frac{k^2\,(1 + \text{tang}^2 \frac{g\,t}{k})}{(k - v \text{ tang } \frac{g\,t}{k})^2}$	$x = f\,(v, t)$

Geg.	Ges.	Auflösung	
v, t	c	$c = k \dfrac{v + k \text{ tang } \frac{g t}{k}}{k - v \text{ tang } \frac{g t}{k}}$	$c = f(v, t)$
x, v	c	$c = \sqrt{e^{\frac{2 g x}{k^2}} (k^2 + v^2) - k^2}$	$c = f(x, v)$
x, t	c	$c = \dfrac{k}{\sin \frac{g t}{k}} \left[e^{\frac{g x}{k^2}} - \cos \frac{g t}{k} \right]$	$c = f(x, t)$

Die sechs folgenden Formeln geben die Bewegungsgesetze an für den Fall, daß die Kugel in dem höchsten Punkte ihrer Bahn angelangt ist.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
$v = 0, c$	t	$t = \dfrac{k}{g} \text{ arc tang } \dfrac{c}{k}$	$t = f(c)$
$v = 0, x$	t	$t = \dfrac{k}{g} \text{ arc cos } \dfrac{\sqrt{k}}{e^{\frac{g x}{k^2}}}$	$t = f(x)$
$v = 0, c$	x	$x = \dfrac{k^2}{2 g} \, l \, \dfrac{c^2 + k^2}{k^2}$	$x = f(c)$
$v = 0, t$	x	$x = \dfrac{k^2}{2 g} \, l \, \dfrac{k}{\cos^2 \frac{g t}{k}}$	$x = f(t)$
$v = 0, t$	c	$c = k \text{ tang } \dfrac{g t}{k}$	$c = f(t)$
$v = 0, x$	c	$c = k \sqrt{e^{\frac{2 g x}{k^2}} - 1}$	$c = f(x)$

Aus $t = f(c)$ d. i. $t = \frac{k}{g} \text{ arc tang } \frac{c}{k}$ folgt, daß t mit wachsendem c größer wird d. h. von zwei Kugeln unter übrigens gleichen Umständen steigt diejenige länger, welche die größere Anfangsgeschwindigkeit besitzt. Untersucht man den Ausdruck in Bezug auf ein variabeles k, so hat man ihn umzuformen in

$$t = \frac{c}{g} \cdot \frac{\text{arc tang } \frac{c}{k}}{\frac{c}{k}}$$

Da nun $\lim \dfrac{\text{arc tang } \frac{c}{k}}{\frac{c}{k}} = 1$ für ein großes k, so geht daraus hervor, daß zwei Kugeln, welche dieselbe Anfangsgeschwindigkeit besitzen, nicht eine gleiche Zeit hindurch steigen, sondern daß die Dauer des Steigens eine längere ist für diejenige, welche den größeren Durchmesser und die größere Dichtigkeit besitzt, oder für welche das Verhältniß der Masse zur Oberfläche am größten ist.

Ebenso ergibt sich durch Umformung der Gleichung $x = f(c)$ in

$$e^{\frac{2gx}{k^2}} = 1 + \left(\frac{c}{k}\right)^2$$

daß für dasselbe c einem größeren k ein größeres x entspricht, daß also auch die größere Steighöhe der größeren und dichteren Kugel zukommt, vorausgesetzt, daß beide in eine gleiche Anfangsgeschwindigkeit versetzt worden sind. Um die Gesetze zu ermitteln, welche sich auf die Bewegungszustände beim Rückwege der Kugel beziehen, hat man für x die Steighöhe

$$x = \frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{k^2 + c^2}{k^2}$$

in den betreffenden Formeln des Schema H. zu setzen. Dafür erhält man:

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
$x = \frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{k^2 + c^2}{k^2}$, c	v	$v = c\, \frac{k}{\sqrt{c^2 + k^2}}$	$v = f(c)$
v	c	$c = \frac{v k}{\sqrt{k^2 - v^2}}$	$c = f(v)$
c	t^1	$t^1 = \frac{k}{g}\, l\, \frac{c + \sqrt{c^2 + k^2}}{k}$	$t^1 = f(v)$
t^1	c	$c = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{t^1 g}{k}} - e^{-\frac{t^1 g}{k}}\right)$	$v = f(t^1)$

$v = f(c)$ lehrt, daß in jedem Falle die Kugel in dem Punkte, von welchem aus sie aufgestiegen ist, mit einer geringeren Geschwindigkeit ankommt, als diejenige ist, welche sie im Momente des Aufsteigens hatte. Fernerhin zeigen die veränderten Ausdrücke für v

$$v = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{k}\right)^2}}$$

daß v um so größer ist, je größer c und k sind d. h.

von zwei gleichen Kugeln schlägt mit größerer Geschwindigkeit diejenige wieder auf, welche die größere Anfangsgeschwindigkeit besaß,

von zwei verschiedenen Kugeln mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit diejenige, für welche das Verhältniß der Masse zur Oberfläche am größten ist.

Zur Vergleichung der für den Rückweg der Kugel erforderlichen Zeitdauer t^1 mit der Zeit t, welche zum Aufsteigen gebraucht wird, erhält man durch Substitution des aus $t = f(c)$ sich ergebenden Werthes für $\frac{k}{g}$ in $t^1 = f(v)$

$$t^1 = t\, \frac{l\left(\frac{c}{k} + \sqrt{\left(\frac{c}{k}\right)^2 + 1}\right)}{\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{k}}$$

Weil $\lim \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{k} = \frac{\pi}{2}$ und $\lim l\left(\frac{c}{k} + \sqrt{\left(\frac{c}{k}\right)^2 + 1}\right) = \infty$ ist, falls $\frac{c}{k} = \infty$ angenommen wird, so folgt, daß für ein wachsendes $\frac{c}{k}$ der Zähler des t begleitenden Faktors schneller wächst als der Nenner, und daß also die Falldauer größer ist als die Dauer des Steigens, was auch schon daraus geschlossen werden kann, daß die in dem Ausgangspunkt erlangte Endgeschwindigkeit unter allen Umständen kleiner ist als die Anfangsgeschwindigkeit. Ferner geht noch daraus hervor, daß die Differenz des Zählers und des Nenners um so kleiner ausfallen wird, je kleiner $\frac{c}{k}$ ist. Daher ist der Zeitunterschied beim Fallen und Steigen geringer bei derjenigen von zwei Kugeln,

für welche, wenn sie dieselbe Anfangsgeschwindigkeit besitzen, das Verhältniß der Masse zur Oberfläche am größten ist,

und für diejenige von zwei gleichen Kugeln, welcher die geringere Anfangsgeschwindigkeit ertheilt worden ist.

Die Zeit, während welcher die Kugel steigt und fällt, drückt sich aus durch

$$t^{11} = \frac{k}{g}\left[\operatorname{arc\,tang} \frac{c}{k} + l\left(\frac{c}{k} + \sqrt{\left(\frac{c}{k}\right)^2 + 1}\right)\right]$$

Wird durch momentane Einwirkung einer Kraft auf einen Körper demselben eine Geschwindigkeit $= c$ mitgetheilt, so hat man unter der Annahme, daß die Bewegung in einem widerstehenden Mittel vor sich geht und von der Wirkung der Schwerkraft unabhängig ist, zur Ermittelung der Geschwindigkeit

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = -g\frac{v^2}{k^2}$$

also

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\int \frac{g}{k^2}\,dt$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{v} = \frac{g}{k^2}\,t + C$$

Für $t = o$ ist $v = c$; also ist $C = \frac{1}{c}$

Mithin $$\frac{1}{v} = \frac{g}{k^2}\,t + \frac{1}{c}$$ oder

XXIII $$v = \frac{ck^2}{cgt + k^2}$$

Den durchlaufenen Raum x findet man durch die Substitution dieses Werthes für v in

$$dx = v\,dt$$

wodurch

$$dx = \frac{c\,dt}{\frac{cgt}{k^2} + 1}$$

oder

$$x = c\int \frac{dt}{\frac{cgt}{k^2} + 1} = \frac{k^2}{g}\,l\,\frac{k^2 + cgt}{k^2} + C$$

Die Constante ist $= o$, weil für $t = o$ auch $x = o$ ist. Daher

XXIV $$x = \frac{k^2}{g}\,l\,\frac{k^2 + cgt}{k^2}$$

Aus diesen beiden Formeln wird gefolgert:

O.

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.	
c, t	v	$v = \frac{c\,k^2}{c\,g\,t + k^2}$	$v = f\,(c, t)$
c, x	v	$v = \frac{c}{e^{\frac{g\,x}{k^2}}}$	$v = f\,(c, x)$
x, t	v	$v = \frac{k^2}{g\,t}\left(1 - e^{-\frac{g\,x}{k^2}}\right)$	$v = f\,(x, t)$
c, v	t	$t = \frac{(c - v)\,k^2}{c\,g\,v}$	$t = f\,(c, v)$
c, x	t	$t = \frac{k^2\left(e^{\frac{g\,x}{k^2}} - 1\right)}{g\,c}$	$t = f\,(c, x)$
x, v	t	$t = \frac{k^2}{g\,v}\left(1 - e^{-\frac{g\,x}{k^2}}\right)$	$t = f\,(x, v)$
c, t	x	$x = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{k^2 + c\,g\,t}{k^2}$	$x = f\,(c, t)$
c, v	x	$x = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{c}{v}$	$x = f\,(c, v)$
t, v	x	$x = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{k^2}{k^2 - g\,t\,v}$	$x = f\,(t, v)$
t, v	c	$c = \frac{k^2\,v}{k^2 - g\,t\,v}$	$c = f\,(t, v)$
t, x	c	$c = \frac{k^2\left(e^{\frac{g\,x}{k^2}} - 1\right)}{g\,t}$	$c = f\,(t, x)$
v, x	c	$c = v\,e^{\frac{g\,x}{k^2}}$	$c = f\,(v, x)$

Die hieraus sich ergebenden Bedingungsgleichungen sind

$$\frac{k^2}{g\,t} > v < c$$

Auch bei dieser Art der Bewegung findet man, daß einem größeren k eine Zunahme der Endgeschwindigkeit, der Wegestrecke und der Bewegungsdauer entspricht, daß also beispielsweise von zwei Geschützkugeln aus demselben Materiale und von gleicher Anfangsgeschwindigkeit die größere weiter fliegen wird.

Berichtigung. Pag. X Zeile 3 und 4 von unten lese man **der Kugel** statt dem Körper.

Pag. XI Zeile 13 von oben $k = \sqrt{\frac{3\,g}{\gamma\,\varrho}}\;\sqrt{\frac{M}{4\,r^2\,\pi}}$ statt $k = \sqrt{\frac{3\,g}{\gamma\,\pi}}\;\sqrt{\frac{M}{4\,r^2}}$