Der mathematische Unterricht in seiner Beziehung zur philosophischen Propädeutik.

Vorliegende Abhandlung ist veranlaßt worden durch die vom Königlichen Provinzial-Schul-Collegium zu Münster der diesjährigen Westfälischen Direktoren-Conferenz zur Besprechung vorgelegte Frage, ob und in wiefern außer dem Unterrichte im Deutschen auch andere Lehrgegenstände Anknüpfungspunkte bieten für die philosophische Propädeutik.

Nach einer Verfügung des hohen Ministerii für geistliche und Unterrichts-Angelegenheiten vom 7. Januar 1856 soll fortan die philosophische Propädeutik nicht mehr als besonderer Lehrgegenstand auf den Gymnasien behandelt werden, und ist dem Lehrer des Deutschen die schwierige Aufgabe geworden, die philosophische Propädeutik mit dem Unterrichte im Deutschen zu verbinden.

Es ist dies in der That eine mehr als schwierige Aufgabe, wenn die Behandlung der philosophischen Propädeutik eine wissenschaftliche sein, d. h., wenn Gründlichkeit, Ordnung und Vollständigkeit darin herrschen soll. Und doch kann nur bei einer wissenschaftlichen Behandlung dieses Unterrichtszweiges der Erfolg erzielt werden, welcher bei der Wichtigkeit des Gegenstandes für den zu Universitätsstudien übergehenden Jüngling wünschenswerth ist.

Welches Fachstudium auch der Student ergreift, er soll sich, und das mit Recht, zunächst dem Studium der Philosophie widmen. Und da ist es in der That von großem Nutzen für ihn, wenn er schon auf dem Gymnasium mit den Hauptmomenten der Psychologie und Logik gründlich vertraut wird, wenn er einen Lehrer hat, der es versteht, ihn bei der Behandlung der philosophischen Propädeutik soweit zu bringen, daß er das Studium der Philosophie lieb gewinnt. Er wird dann nicht, wie es leider meistens der Fall ist, die philosophischen Collegia bloß belegen, (wie man zu sagen pflegt), um dem Gesetze äußerlich zu genügen; er wird die Zeit und Gelegenheit benutzen, um seinen Geist mit Kenntnissen zu bereichern, welche ihn begierig und fähig machen, die wichtigsten Wahrheiten, welche dem menschlichen Erkennen zugänglich sind, zu erfassen und sich zu eigen zu machen. Er wird sich besonders im gereifteren Alter glücklich schätzen, daß er in den jüngeren Jahren Anregung fand, sein Denken den höchsten Objecten des menschlichen Wissens zuzuwenden; denn er wird dann nicht in den oft Geist tödtenden Arbeiten des Alltagslebens stecken bleiben und in der Erfüllung dieser seine Bestimmung als Mensch erreicht zu haben glauben, sondern vielmehr, nachdem er jenen, wie seine Pflicht ist, genügt hat, sich immer wieder höhern Beschäftigungen zuwenden, welche der edleren Hälfte seines Wesens entsprechend und somit so recht eigentlich und im Grunde allein seines Denkens und Strebens ganz würdig sind.

Die ganze Aufgabe des Menschen, als eines mit Vernunft und Verstand begabten Wesens, besteht darin, die Wahrheit zu erkennen, d. h. sein Denken mit dem Wesen und den Gesetzen der Erkenntnißobjecte in Uebereinstimmung zu bringen. — Wahrheit ist die geistige Speise des Menschen; ohne sie ist es öde und leer in seinem Innern; ohne die Nahrung der Wahrheit fühlt der Geist sich unbehaglich und ist er nimmer befriedigt. Alle Menschen, groß und klein, gebildete und ungebildete, suchen daher die Wahrheit aus innerer Nothwendigkeit und so sind in gewissem Sinne alle Menschen Philosophen, da Philosophie zunächst Liebe zur Weisheit d. i. zur Erkenntniß der Wahrheit bedeutet. In diesem Sinne ist auch das Glauben Philosophie, und zwar, wenn es sich auf die rechte Auctorität stützt, die sicherste und beste von allen, weil jeder Zweifel ausgeschlossen ist. Ja ohne Glauben gibt es keine wahre Philosophie; denn gerade die wichtigsten Wahrheiten, deren Besitz allein wahres Glück und volle Zufriedenheit gewährt, ist der Mensch durch die bloße Vernunft zu erfassen nicht im Stande. Glücklich allein der Mensch, welcher geleitet an der Hand Gottes und im Lichte seiner Offenbarungen die Wahrheit sucht; er wird die Wahrheit finden, während derjenige, welcher in seinem Forschen nach Wahrheit sich ganz und allein auf die Kraft seiner beschränkten Vernunft verläßt, im Finstern umhertappt und, anstatt Nahrung zu finden, die seinem Geiste zusagt, ihn stärkt und belebt, den Gifttrank des Irrthums schlürft, welcher sein Inneres zerfrißt, so daß er Tag und Nacht sich ruhelos wälzt und ein Dasein ohne Frieden und voll Qual in dumpfer Verzweiflung endet.

Die Wahrheit ist an sich nur Eine und ihre Idee hat Realität in Gott. Auf ihn müssen deßhalb alle die verschiedenen Strahlen unseres Denkens, Sinnens und Trachtens gerichtet sein, müssen sich, wenn auch noch so vielfach durch verschiedene Media gebrochen und abgelenkt, in ihm als dem gemeinschaftlichen Brennpunkte concentriren. Deßhalb ist die rechte Philosophie nichts Anderes, als Theologie, und jede andere Wissenschaft, wie sie auch heiße, soll ihrem geistigen Zwecke nach philosophische Propädeutik sein, sei es, daß sie den Geist auf die Quelle der Wahrheit unmittelbar hinlenke und selbst schon die Wahrheit in einzelnen Erscheinungen ihm vorführe, sei es, daß sie das geistige Auge für die Strahlen des Wahrheitslichtes empfänglich mache und ihm, ich möchte sagen, ein Teleskop herrichte, wodurch dasselbe fähig wird, den für das unbewaffnete Auge unsichtbaren Wahrheitsstern zu erspähen.

Wenn in ersterem Sinne vor allen die Religionswissenschaft philosophische Propädeutik ist, so ist es im letzteren Sinne besonders die Mathematik.

Die Mathematik, die exacteste unter den Wissenschaften, gewöhnt uns, ja man kann sagen, zwingt uns, richtig zu definiren. Die richtige Definition aber ist das Fundament des richtigen Urtheils, sowie auch der richtigen Eintheilung. Die Mathematik lehrt uns vor Allem richtig schließen, indem sie mit eiserner Consequenz die Gedanken zu einer wohl geordneten und fest gegliederten Kette verbindet. — Richtig Definiren aber, richtig urtheilen, richtig eintheilen, richtig schließen, das ist es ja, was formaliter den Philosophen macht.

Durch die unumstößliche, unbezweifelbare Gewißheit in ihren Wahrheiten und Operationen gewährt die Mathematik dem Geiste besondere Befriedigung und weckt in Folge dessen den Eifer und das Streben, die Wahrheit in allen ihren Erscheinungen zu erkennen.

Die Mathematik ist eine Wissenschaft des Verstandes; in seinem Dienste aber sind thätig das Anschauungsvermögen und die Einbildungskraft in ihren verschiedenen Functionen. —

Raum und Zahl sind die Fundamentalbegriffe, mit welchen sie operirt, jener gegeben durch die sinnliche Anschauung, dieser durch die Vernunftanschauung der Einheit.

Unsere Erkenntnisse (zunächst Begriffe) sind theils apriorische, d. h. solche, die unserem Geiste unmittelbar seinem Wesen nach eigen und eben deßhalb von aller Erfahrung unabhängig sind; theils sind sie aposteriorische oder empirische, d. h. solche, welche wir durch die Erfahrung uns aneignen. So sind alle unsere Erkenntnisse auf dem Gebiete der Naturwissenschaft empirischer Natur. Die Mathematik dagegen rühmt sich in ihren Erkenntnissen der Apriorität; daher die apodiktische Gewißheit in ihrer Demonstration; sie ist unabhängig von der Erfahrung der Art, daß sie sogar dieser ihre Gesetze vorschreibt. — Ein in dieser Beziehung ausgezeichnetes Beispiel ist die Entdeckung des Planeten Neptun. Von Arago veranlaßt, unterwarf nämlich Le Verrier in Paris die Störungen in der Bahn des Uranus dem mathematischen Calcül und gewann die Ueberzeugung, daß jene Störungen nur von einem noch unbekannten Planeten herrühren könnten. Er bestimmte den muthmaßlichen Ort des fraglichen Planeten, theilte ihn dem Dr. Galle in Berlin mit, damit dieser seine Beobachtungen dahin lenke, und dieser fand noch an demselben Abende (23. September 1846), wo ihm Le Verrier's Mittheilung zukam, den Planeten an dem bezeichneten Orte.

Doch kommt eine absolute Unabhängigkeit von aller Erfahrung nur der Arithmetik zu; denn die Begriffe der Einheit und des Verhältnisses, welche ihr zu Grunde liegen, sind in der That a priori gegeben. Die Geometrie dagegen ist in sofern von der Erfahrung abhängig, als der Begriff des Raumes nur durch die sinnliche Wahrnehmung gewonnen werden kann. Ist der Begriff des Raumes gewonnen, dann construirt allerdings die Einbildungskraft in dem als leer vorgestellten Raume die geometrischen Gebilde und ist von da ab das Erkennen ein apriorisches. Aber selbst so ist das mathematische Erkennen noch kein Erkennen a priori in dem Sinne, daß aller Einfluß der Empirie in jeder Beziehung ausgeschlossen wäre. So könnte es z. B. vorkommen, daß man bei einer gewissen Linie, die man unter den verschiedensten Verhältnissen gezogen, zu der Ueberzeugung gelangte, sie müsse zu einer gewissen anderen Linie parallel sein, ohne jedoch sofort zur mathematischen Erkenntniß der Wahrheit zu gelangen d. h. sofort den Beweis liefern zu können. Auf diese Weise wird häufig durch die Empirie dem Denkgeiste eine Wahrheit gewissermaßen aufgedrängt, deren volle, freie Erkenntniß derselbe aber erlangt, indem er nach apriorischen Denkgesetzen die Behauptung seinen Kriterien unterwirft und so entscheidet, ob die Behauptung wahr sei oder nicht, oder wenigstens, ob sie wahr sein könne und wahr sein müsse.

Anschauung und Einbildungskraft gehen in der Mathematik dem Verstande bei seinen Operationen stets zur Seite, sowie auch jene nie ohne diesen operiren. Anschauung und Einbildungskraft liefern dem Verstande den Stoff, welchen er dann in der Weise verarbeitet, daß er zunächst die den Anschauungen und Einbildungscombinationen entsprechenden Begriffe bildet, durch die Definition Klarheit in dieselben bringt und durch die Division Deutlichkeit und Ordnung. Es tritt dann weiter der Verstand auf als Urtheilskraft, indem er die verschiedenen mathematischen Begriffe in Verbindung setzt, (bejahend und verneinend, problematisch, assertorisch und apodiktisch). Ihren Abschluß erlangt die Verstandesthätigkeit dann im Beweise, wo der Verstand, als das Vermögen des Schlusses auftritt, d. h. durch Urtheilen aus einem Urtheile ein neues Urtheil herleitet.

Die Einbildungskraft aber ist thätig in der Mathematik sowohl reproducirend als auch producirend, indem sie nicht allein die Bilder gehabter Anschauungen und früherer Vorstellungen in uns wieder erweckt, sondern auch durch Umgestaltung und Combination neue Vorstellungen schafft. — Es kommt an und für sich der Einbildungskraft nicht darauf an, ob ihre Schöpfungen der anerkannten oder erreichbaren Wirklichkeit entsprechen (Dichtungsvermögen); sie arbeitet sowohl im Dienste der Wahrheit als auch der Lüge; ihre Thätigkeit ist im Allgemeinen so lange ungehindert, als die Producte derselben für die Anschauung zugänglich sind. Obwohl sie nun in der Mathematik, wie gesagt, stets in Verbindung mit dem Verstande arbeitet, so eilt sie doch auch hier in vielen Fällen dem Verstande voraus, so daß der Geist die Wahrheit zuerst noch in dunkler Ferne so eben schimmern sieht (ahnt), und erst, wenn er mit dem Verstande ihr näher rückt, sie in vollem Lichte klar und deutlich erkennt. So folgt der Verstand der Einbildungskraft in ihren mathematischen Schöpfungen wenn auch hier und da in größerer Entfernung, stets nach und schützt sie, alles Vage und Unbestimmte fern haltend, vor Ausschweifungen in ihren Gebilden. Der Verstand setzt ihr gewissermaßen Grenzsteine, tritt ihr an jedem derselben als strenger Controleur entgegen und jagt sie, so wie er eine Contravention entdeckt, über die Grenze zurück, indem er ihre Producte confiscirt und sie selbst in Fesseln legt. — Die Phantasie zu zügeln gibt es daher kein besseres Mittel, als das Studium der Mathematik, dieser exacten Wissenschaft, wo die Einbildungskraft mit dem Verstande unter einem Joche zieht und so gleichen Schritt mit ihm zu halten gezwungen ist.

Der reproducirenden Einbildungskraft als Erinnerungsvermögen oder Gedächtniß ist in der Mathematik eine besondere Stütze geboten durch die unmittelbare Verbindung der Vorstellungen mit der sinnlichen Anschauung, sowie durch das enge und nothwendige Ineinandergreifen der einzelnen Denkacte. — Die Thätigkeit und zwar angestrengte Thätigkeit des Gedächtnisses ist für das Studium der Mathematik unbedingt nothwendig; doch muß diese Thätigkeit eine secundäre sein, untergeordnet der Thätigkeit des Verstandes; hier darf nichts dem Gedächtnisse anvertrauet werden, ohne daß es zugleich vom Verstande klar erfaßt würde, wie das z. B. in der Geschichte bei dem Lernen der Jahreszahlen der Fall ist. Die Lehrsätze der Mathematik werden nicht allein (als Behauptungen von Wahrheiten) gelernt; sie sollen auch in ihren Beweisen begriffen werden; und nicht allein dieses; man muß sie auch in ihrem Zusammenhange erfassen, sodaß man das ganze Lehrgebäude in seinen nothwendigen Theilen sowohl, als auch in den vorzüglichsten Erweiterungen klar überschauet.

Das Verhältniß der Verstandesthätigkeit zu dem Gedächtnisse in der Mathematik ist ein Punkt, welchen man als Lehrer nicht genug beachten kann. Es kommt bei dem Anfänger in dem Studium der Mathematik eben Alles darauf an, daß er Verstand und Gedächtniß in dem rechten Verhältnisse zu einander anwendet, daß er zuerst einen Beweis zu verstehen sucht, (wo dann das Behalten, so zu sagen, von selbst kommt), und nicht, wie das oft der Fall ist, sich an's nackte Auswendiglernen gibt. Dieser leidige Umstand, daß die Mathematik von den Anfängern so vielfach als Gedächtnißkram behandelt wird, möchte wohl hauptsächlich Schuld sein, daß so viele Schüler, die bei dem ersten Bekanntwerden mit der Mathematik sich derselben mit großer Lust zuwandten, ihr bald mit einem wahren horror den Rücken kehren, indem das Studium derselben für sie eine Geistesquälerei ist. Denn es kann in der That für den Geist keine größere Plage geben, als das Auswendiglernen von nicht verstandenen mathematischen Beweisen. — Wird dagegen der Knabe in der rechten Weise geleitet, wird er angehalten, das, was er hört und sieht, vor Allem zuerst zu verstehen und dann zu behalten, so, meine ich, ist es unmöglich, daß er nicht mit Lust und Liebe Mathematik studire, es sei denn, daß er geistig durchaus unbegabt sei oder überhaupt keinen Sinn habe für wissenschaftliches Streben; und ist das der Fall, so sollte man ihn von vorn herein von jeder Schule für höhere geistige Bildung ausschließen.

Es wurde gesagt, daß dem Gedächtniß in der Mathematik eine kräftige Stütze geboten werde durch die Anschauung. Es gilt dies zunächst in Beziehung auf die Geometrie; aber selbst bei den mehr abstracten Operationen der Zahlenlehre kann die Anschauung dem Gedächtnisse zu Hülfe kommen. Man kann es, wenn man mit Lebhaftigkeit sich die Zahlen, mit welchen man rechnet, an einer bestimmten Stelle, etwa auf einer Wand oder selbst im leeren Raume als geschrieben vorstellt, dahin bringen, daß man die Zahlen wie mit dem leiblichen Auge anschauet. Diese geistig-körperliche Anschauung der Zahlen gewährt dem noch weniger Geübten beim Kopfrechnen eine große Erleichterung für die Gedächtnißthätigkeit.

Nachdem wir uns in dem Bisherigen in allgemeinen Betrachtungen ergangen haben über die Geistesthätigkeiten, welche die Mathematik in Anspruch nimmt, und die Beziehungen jener Functionen zu einander, wollen wir nunmehr näher eingehen auf das Verhältniß, in welchem die Mathematik zu dem in dieser Wissenschaft operirenden Hauptvermögen, dem Verstande, steht.

Jede Thätigkeit muß, wenn sie ihrem Zwecke entsprechen soll, eine geordnete sein, d. h. sie muß sich an gewisse Regeln binden, bestimmten Gesetzen sich unterwerfen. — Die Thätigkeit des Denkens hat zum Zwecke die Erkenntniß der Wahrheit; soll dieser Zweck erreicht werden, so muß das Denken ein geordnetes, gesetzmäßiges sein. Die Gesetze aber, welchen der Denkgeist folgen muß, sind, weil die Erkenntniß der Wahrheit für ihn unabweisbares Bedürfniß ist, mit Nothwendigkeit in seinem Wesen gegeben, und er käme mit sich selbst in Widerspruch, wollte er jenen apriorischen Gesetzen die Anerkennung versagen.

Die Lehre von den Denkgesetzen ist die L o g i k; ihre Aufgabe ist, die Grundgesetze (principia) des Denkens aufzustellen und aus ihnen die Gesetze für die verschiedenen Denkoperationen d. i. die B i l d u n g der B e g r i f f e, U r t h e i l e und S c h l ü s s e zu entwickeln.

Jede Wissenschaft bringt, weil aus einzelnen Denkacten bestehend, die Gesetze der Logik zur Anwendung; doch treten bei keiner diese Gesetze so deutlich, ich möchte sagen, so nackt hervor, wie in der Mathematik. — Natürlich; denn keine andere Wissenschaft ist in dem Maße reine Verstandeswissenschaft, wie die Mathematik es ist; alle übrigen Wissenschaften sind mehr, als sie, der Mitwirkung anderer Seelenvermögen unterworfen, und kommt deßhalb in ihnen die Anwendung der Denkgesetze weniger scharf und deutlich zum Vorschein. Die Mathematik ist in allen ihren Operationen eine einfach angewandte Logik.

Der erste mathematische Unterricht, welchen das Kind erhält, ist der Unterricht im Z ä h l e n. Aber das Zählenlernen wird wohl nur bei wenigen Kindern in der rechten Weise geleitet. Es pflegt dasselbe eine bloße Gedächtnißübung zu sein, ein nacktes Auswendiglernen der Zahlwörter, ohne daß sich damit die Anschauung der Zahlbegriffe verbindet.

Das Zählen basirt in der Anschauung der Einheit; aus der Einheit entwickelt sich, oder es tritt ihr gegenüber die Mehrheit, und das Zählen besteht darin, daß die Mehrheit durch die Einheit bestimmt wird: es wird der Begriff der Allheit gebildet, d. h. die Mehrheit wird zu einer Einheit zusammengefaßt. Diesem Vorgange entsprechend sollte auch das Kind zählen lernen. Es wird ihm eine Einheit vorgeführt, dieser werden Mehrheiten gegenübergestellt, von der niedrigsten angefangen, in stetig fortschreitender Folge. Bei jeder Mehrheit wird ein Abschluß gemacht durch den Begriff der Allheit; es werden die Zahlbegriffe zur Anschauung gebracht und sofort die entsprechenden Zahlwörter eingeprägt.

Das Kind würde nun wohl sein Zählen in dieser Weise fortsetzen wollen, daß es jegliche Mehrheit auffaßte als einen Complex ursprünglicher Einheiten, ohne zwischen höheren und niedrigeren Mehrheiten eine Beziehung zu setzen der Art, daß es eine niedrigere Mehrheit als höhere Einheit aufstellte für die Auffassung irgend einer höheren Mehrheit: es würde so viele verschiedene Zahlwörter verlangen, als Mehrheiten ihm entgegenträten. — Wie schwer würde es ihm aber dann werden, etwa bis 100 zu zählen! — Und bis 1000 zählen würden wohl nicht viele Menschen lernen. Gibt es ja in der That Völker, welche im Zählen nicht über 5 hinausgekommen sind und jede Mehrheit über 5 eine Menge nennen. — Jetzt aber ist es selbst für das Kind leicht, jede beliebige Mehrheit in eine Zahl zu fassen, da wir ein Zahlensystem haben, d. h. eine gewisse Mehrheit (die 10) als höhere Einheit (Grundzahl oder Basis) hinstellen und aus dieser beliebig fortschreitend stets höhere Einheiten (100, 1000, 10000 u. s. w.) entstehen lassen nach demselben Gesetze, wie jene erste höhere Einheit selbst aus der ursprünglichen Einheit gebildet wurde. Hat demnach das Kind zunächst zählen gelernt bis 10 und ist ihm das Wesen des Zahlensystemes zum klaren Verständniß gebracht, so wird es ohne Mühe für jede Menge die rechte Zahl zu finden wissen.

Die Bildung der Zahlen erfolgt zunächst in der Anschauung (Vorstellung) gewisser Objekte (benannte Zahlen); es werden aber, nachdem die Zahlen in ihrem Verhältniß zu einander klar angeschauet sind, und eine Fertigkeit in dieser Anschauung gewonnen ist, dieselben als abstracte (unbenannte) Zahlen dem Gedächtnisse anvertrauet und von diesem mit Leichtigkeit reproducirt.

An das Zählen schließt sich unmittelbar die erste und einfachste der Grundoperationen des Rechnens an. Das Addiren ist gewissermaßen ein sprungweises Zählen, indem mit einer Zahl anstatt der Einheit als solcher eine andere Zahl (Mehrheit) zu einer neuen Einheit verbunden wird; daher man das Addiren auch Zuzählen nennt. Das Subtrahiren setzt das Addiren in sofern voraus, als die durch die Subtraction zu bildende Zahl so beschaffen sein muß, daß sie zu der zu subtrahirenden addirt die Zahl, von welcher subtrahirt werden soll, geben muß. — Sind die zu addirenden Zahlen einander gleich, so wird die Addition zur Multiplication. In der Division aber wird die Frage beantwortet, wie oft sich von einer Zahl eine andere subtrahiren lasse, oder, für das praktische Rechnen besser gefaßt, ist die Division die Bestimmung der Zahl, welche mit einer von zwei Zahlen (dem Divisor) multiplicirt die andere (den Dividendus) gibt. — Wie die Addition gleicher Summenden zur Multiplication führt, gerade so führt diese bei gleichen Faktoren auf die erste der sogenannten Rangoperationen, das Potenziren. Dieses selbst aber involvirt die beiden übrigen Rangoperationen, das Radiciren und Logarithmisiren, jenachdem nach der Wurzel der Potenz oder nach dem Exponenten gefragt wird.

Wir sehen aus dieser kurzen Darstellung des Hauptinhalts der niedern Zahlenlehre, in wie innigem und leichtem Zusammenhange die einzelnen Operationen derselben zu einander stehen, wie aus der einfachsten sich die übrigen mit einer gewissen Nothwendigkeit ergeben.

Der Hauptzweck des Rechnenunterrichts auf seiner ersten Stufe ist, daß das Kind die erforderliche Fertigkeit erlange in den einfachsten Zahlenoperationen, im sogenannten mechanischen Rechnen. Man wird also zwar das Kind beim ersten Rechnenunterrichte nicht quälen mit gelehrten Definitionen und Eintheilungen, wird auch nicht für alle Regeln Beweise führen wollen, welche in jeder Beziehung die Probe der Wissenschaftlichkeit bestehen; allein, da doch Erklärungen gegeben werden müssen, so ist es von Wichtigkeit und nothwendig, daß nicht etwas für Definition ausgegeben wird, was im Grunde nichts ist, als eine Uebersetzung; daß man z. B. nicht etwa Subtrahiren erklärt: die Subtraction ist diejenige Rechnung, in welcher von einer Zahl eine andere abgezogen wird. Solches Verfahren leitet den jungen Geist irre, macht ihn wähnen, er sei zur Klarheit gelangt, während er noch im Dunkeln tappt, und erstickt in ihm den Drang nach klarer Einsicht, indem er gewöhnt wird, sich mit Redensarten zu begnügen.

Aus diesem höheren Gesichtspuncte ist es auch sehr zu empfehlen, ja zu fordern, daß schon das Kind seine Regeln nicht bloß anwenden, sondern auch verstehen lerne in ihrer Begründung. Es ist dies insbesondere zu bemerken in Beziehung auf die Regeln der Bruchrechnung.

Was das Addiren und Subtrahiren der Brüche angeht, so ist das Verfahren auch für das Kind leicht verständlich, weil es im Grunde nichts ist, als ein Rechnen mit benannten ganzen Zahlen. Auch die bekannte Regel für die Auffindung des kleinsten Generalnenners wird selbst für einen Sextaner begreiflich sein, wenn ihm wiederholt und an manchfachen Beispielen gezeigt wird, und wenn er dann selbst zeigen muß, wie die gefundene Zahl zunächst ein Generalnenner ist, und dann auch, weßhalb sie der kleinste Generalnenner ist. Die Begründung jener Regel faßt sich leicht in folgende Worte: Die so (nach der Regel) gefundene Zahl ist ein Generalnenner, weil sie alle diejenigen Faktoren enthält, welche erforderlich sind, damit die gegebenen Nenner in ihr enthalten seien; auch ist sie der kleinste Generalnenner, weil sie nur so viele Faktoren enthält, als erforderlich sind, damit die gegebenen Nenner in ihr enthalten seien.

Die Regeln über die Multiplication und Division der Brüche finden eine sehr einfache, leicht faßliche Begründung, wenn dem Schüler die Wahrheit zum klaren Bewußtsein gebracht ist, daß der Werth eines Bruchs um so viel mal größer wird, als man den Zähler vergrößert und um so viel mal kleiner wird, als man den Nenner vergrößert, so wie auch umgekehrt. Der Beweis für die Regel z. B., daß eine Zahl durch einen Bruch dividirt wird, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, würde dann in folgender Weise zu führen sein: Ist z. B. 5 zu dividiren durch $\frac{3}{4}$, so dividire man zunächst 5 durch 3; das gibt $\frac{5}{3}$; da man nun aber den Divisor 4 mal zu groß genommen hat, so ist der Quotient 4 mal zu klein geworden, muß also, damit er der richtige werde, 4 mal so groß genommen werden; und so erhält man $\frac{5 \times 4}{3}$, wofür man nach der schon bekannten Regel für die Multiplication setzen kann $5 \times \frac{4}{3}$.

So wird der Schüler nach und nach eingeführt in das Wesen des mathematischen Beweises. Da aber der Beweis nichts ist, als eine kürzere oder längere Reihe von Schlüssen, so ist die Uebung in den sogenannten bürgerlichen Rechnungen, wenn diese in der rechten Weise betrieben werden, in dieser Beziehung von besonderem Nutzen. Soll dies aber der Fall sein, so dürfen jene Rechnungen nicht nach einem todten Schematismus gemacht werden, sondern es muß der Verstand bei jedem einzelnen Rechnungsacte als einem Denkacte sich Rechenschaft geben von der Gesetzmäßigkeit desselben; hierzu zwingt ihn das Prinzip vom zureichenden Grunde. Es wird dies aber nach meiner Ueberzeugung in keiner Weise besser und sicherer erreicht, als durch die sogenannte Schlußrechnung, bei dem Zurückgehen auf die Einheit. Die Kettenregel, das Rechnen nach dem Strich und wie man es nennen mag, selbst die Proportionen werden zu leicht zu einem todten Schematismus. Dagegen fordert die Schlußrechnung ein ununterbrochenes scharfes Nachdenken über den Zusammenhang der einzelnen Denkacte und ist zudem faßlicher, als die übrigen Methoden.

Das arithmetische Denken in seinen einfacheren Operationen bringt hauptsächlich das Identitätsprinzip im engeren Sinne und das Prinzip vom zureichenden Grunde zur Anwendung, weniger oder gar nicht die Prinzipien des Widerspruchs und des ausgeschlossenen Dritten, und zwar ist das Zählen, sowie auch ferner das Addiren (Zuzählen) und das Multipliciren (Zuzählen gleicher Posten) nur eine arithmetische Darstellung des Identitätsprinzips, ohne daß das Causalitätsgesetz dabei besonders zum Bewußtsein käme. Wohl ist aber letzteres der Fall bei den gewissermaßen umgekehrten Operationen der Subtraction und Division. Denn, sagt man: $12-5=7$, so ist damit wenigstens bei dem Anfänger immer der Gedanke der Begründung verbunden: den $7+5=12$. Ebenso folgt wenigstens bei der zusammengesetzten Division dem Gedanken: $12:4=3$ sofort der Gedanke: denn $3 \times 4 = 12$.

Der Schüler betritt eine höhere Stufe in seinem mathematischen Erkennen, wenn er in die Mathematik im engeren Sinne des Worts, in die Geometrie, die Rangoperationen, die Lehre von den Gleichungen u. s. w. eingeführt wird. Jetzt nehmen Definitionen, Eintheilungen und Beweise den Charakter der strengen Wissenschaftlichkeit an.

Dem System der Geometrie wird zweckmäßiger Weise die sogenannte geometrische Anschauungslehre vorausgeschickt; denn das erste Erforderniß eines richtigen Begriffes ist die bestimmte und richtige Anschauung. Ist die richtige Anschauung gewonnen, so werden die Begriffe gebildet und diese durch Definitionen und Eintheilungen (und zwar zunächst Haupteintheilungen) zur Klarheit und Deutlichkeit gebracht. Darauf werden die Axiome und Postulate der Wissenschaft aufgestellt und dann endlich das System von Lehrsätzen, Zusätzen und Aufgaben, und zwar zunächst solcher, welche für das System nothwendig sind, von denen die nachfolgenden die vorhergehenden zur nothwendigen Voraussetzung haben. — Das einfache System gestattet aber eine unendliche Manchfaltigkeit von Erweiterungen in den einzelnen Partien durch Lehrsätze, Zusätze und Aufgaben.

Die geometrischen Anschauungen sind theils Constructionen der Art, daß sie den Charakter der räumlichen Begrenztheit in sich tragen (Figur, Körper), theils verbindet sich mit ihnen die Vorstellung des unbegrenzten Raumes (Linie, Winkel, Ecke). Dies „Unbegrenzt" ist aber nicht nothwendig gleichbedeutend mit „Unendlich" (infinitum); vielmehr bedeutet es in den meisten Fällen so viel, als „Unbestimmt" (indeterminatum), wodurch freilich die Bedeutung „Unendlich" nicht ausgeschlossen wird.

Gewisse Beziehungen aber fordern die Vorstellung des unendlichen Raumes, oder besser gesagt, der unendlichen Ausdehnung. — Alle Gegensätze finden ihre Ausgleichung im Unendlichen, entweder im unendlich Großen, oder im unendlich Kleinen. — Die Gegensätze der Convergenz und Divergenz berühren sich, gleichen sich aus (sind identisch) im Parallelismus, und es findet diese Ausgleichung Statt im Unendlichen: parallele Linien sind solche, deren Convergenzpunkt in unendlicher Entfernung liegt. — Entgegengesetzte Bewegungen finden ihre Ausgleichung im unendlich Kleinen, in der Null.

Hierhin gehörige interessante Beispiele liefert uns insbesondere auch die Betrachtung der trigonometrischen Funktionen in Beziehung auf ihr Verhalten bei dem Hindurchgehen des Winkels durch die verschiedenen Quadranten. Geht eine Funktion aus dem Positiven in das Negative über oder umgekehrt, so geht sie durch 0 oder ∞. — Umgekehrt folgt hieraus, daß die Sinus, Tangenten und Cotangenten entgegengesetzter Winkel entgegengesetzt sein müssen, weil $\sin 0 = 0$, $\tang 0 = 0$, $\cot 0 = \infty$; dagegen müssen die Cosinus entgegengesetzter Winkel gleiches Vorzeichen haben, da $\cos 0 = 1$, also beim Hindurchgehen des Winkels durch 0 kein Hindurchgehen der Funktion durch das Unendliche eintritt.

Das erste Prinzip der Logik ist das der Identität (principium identitatis): „Jeder Begriff ist gleich der Summe seiner Merkmale“. Dasselbe Prinzip stellt auch die Mathematik an ihre Spitze in dem Axiome: „Jede Größe ist sich selbst gleich ($A = A$).“

Das zweite Prinzip der Logik, der Satz vom zureichenden Grunde (principium causae sufficientis): „Setze nichts ohne zureichenden Grund“ kommt wohl in keiner Wissenschaft mit solcher Prägnanz zur Anwendung, wie in der Mathematik. Sie ist so recht die Wissenschaft der Gründe; keine Behauptung kann passiren ohne die Beantwortung der Frage: Warum ist das so? Daher ist die Mathematik die Wissenschaft der Gründlichkeit; ihr Studium hält die Oberflächlichkeit im Denken von uns fern und übt deßhalb auch nothwendig einen wohlthätigen Einfluß aus auf unsere Handlungsweise. Wer gewöhnt ist, stets consequent zu denken, der wird auch Consequenz üben im Handeln, und thut er das nicht, so wird er unzufrieden sein mit sich selbst, da er mit sich selbst in Widerspruch tritt. — So hat das Studium der Mathematik auch eine moralische Bedeutung. Wer es redlich meint mit seiner Entwickelung als Mensch und das Ziel, welches ihm als vernünftig-freiem Wesen gesteckt ist, zu erreichen strebt, für den wird das Studium der Mathematik ein kräftiger Hebel sein zum Fortschritt in der sittlichen Vervollkommnung; denn Consequenz im Denken und Handeln, das ist es, was einen Charakter macht. —

Anwendungen der Prinzipien des Widerspruchs (principium contradictionis): „Das Setzen eines Prädikats und das Aufheben desselben Prädikats in Einem Denkacte ist unmöglich“, und des ausgeschlossenen Dritten (principium exclusi tertii sive medii): „Von entgegengesetzten Bestimmungen kommt einem Gegenstande nur eine zu, und ist die eine gesetzt, so muß die andere aufgehoben werden“, welche Gesetze im Grunde besondere Darstellungen des Identitätsprinzips sind, liefern die indirekten Beweise. Jeder indirekte Beweis beginnt mit dem Gedanken: Entweder ist $A = B$, oder es ist $A =$ Nicht B (tertium non datur); es ergibt sich nun z. B., daß A nicht $=$ Nicht B ist; folglich ist $A = B$.

Die Begriffe der Mathematik zeichnen sich aus durch einleuchtende Klarheit, weil sie zugleich

Anschauungen zu sein pflegen; und es sind die Erklärungen und Eintheilungen der Mathematik besonders geeignet, als Beispiele bei dem propädeutischen Unterrichte aufgeführt zu werden, weil es in der Mathematik meistens so leicht ist, das herauszufinden, worauf es bei einer richtigen Erklärung oder Eintheilung ankommt.

Die Eigenschaften einer richtigen Erklärung faßt die Logik in die kurzen Worte: „Definitio fit per genus proximum et differentiam specificam". Sehen wir, wie diese Regel z. B. bei der Definition des Begriffs „Parallelogramm" zur Anwendung kommt. — Diese Definition heißt: „Ein Parallelogramm ist dasjenige Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind." — Hier ist Viereck das genus proximum, der zunächst höhere Gattungsbegriff, und es würde somit gegen den ersten Theil der Regel gefehlt sein, wollte man sagen: „Ein Parallelogramm ist diejenige Figur, in welcher u. s. w." — Das Merkmal des spezifischen Unterschiedes, durch welches der Begriff von den übrigen Arten derselben Gattung unterschieden wird (Trapez oder Paralleltrapez), liegt in den Worten: „in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind".

Für die Eintheilung ist vor Allem zuerst die Regel zu beachten: „Divisio ne careat fundamento", d. h. die Eintheilung muß sich beziehen auf eine wesentliche Bestimmung des einzutheilenden Begriffs. So kann z. B. bei dem Begriffe „Parallelogramm" diese Beziehung hergenommen sein von den Seiten und von den Winkeln der Figur. Fehlerhaft wäre es, die Parallelogramme eintheilen zu wollen etwa nach der Größe ihres Flächeninhalts, weil die Größe des Flächeninhalts keine wesentliche Bestimmung des Begriffs „Parallelogramm" ist.

Die zweite Hauptregel für die logische Eintheilung lautet: „Divisio sit adaequata, i. e. ne sit latior neve angustior suo diviso", d. h. die Eintheilung muß alle Eintheilungsglieder der Sphäre des Begriffs enthalten, aber auch nur diese. Zu weit wäre z. B. folgende Eintheilung: „Das Ausgedehnte zerfällt in Punkte, Linien, Flächen und Körper"; zu eng wäre folgende: „die Dreiecke sind entweder gleichseitig oder gleichschenkelig". — Gegen diese Fehler ist man geschützt, wenn man darauf achtet, daß die Eintheilungsglieder als Gegensätze sich ausschließen (membra divisionis sint opposita), was z. B. bei folgender Eintheilung nicht der Fall ist: „Die Dreiecke sind entweder rechtwinkelige oder schiefwinkelige oder spitzwinkelige oder stumpfwinkelige. Hierdurch wird auch der Fehler gegen die Stetigkeit, der Sprung in der Eintheilung (saltus in dividendo) vermieden. So sind die Winkel zunächst einzutheilen in rechte und schiefe, und nicht, wie das meistens geschieht, sofort in rechte, spitze und stumpfe. — Ebenso ist es den Gesetzen des Denkens angemessener z. B. bei dem indirekten Beweise des Satzes: „Dem größeren Dreieckswinkel liegt die größere Seite gegenüber" zu sagen: „Entweder ist die dem größeren Winkel gegenüberliegende Seite die größere, oder sie ist es nicht; sollte sie es nicht sein, so wäre sie der dem kleineren Winkel gegenüberliegenden Seite entweder gleich, oder sogar kleiner, als diese u. s. w.", als sofort zu sagen: „Entweder ist die dem größeren Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite größer, oder kleiner, als die dem kleinern Winkel gegenüberliegende Seite, oder sie ist dieser gleich u. s. w.

Geschieht die Eintheilung desselben Eintheilungsganzen nach Eintheilungsprinzipien, so entstehen Nebeneintheilungen (codivisio). Wird dagegen ein Eintheilungsglied wiederum als logisches Ganze (Gattung) betrachtet, welches in seine Theile (Arten) zerlegt werden soll, so entsteht die Untereintheilung (subdivisio). Nebeneintheilungen sind die Eintheilungen der Parallelogramme in gleichseitige und ungleichseitige einerseits und in gleichwinkelige (rechtwinkelige) und ungleichwinkelige (schiefwinkelige) andererseits. Die gleichseitigen Parallelogramme sowie auch die ungleichseitigen sind nun entweder rechtwinkelig oder schiefwinkelig (sowie auch umgekehrt); und so entsteht die Untereintheilung der Parallelogramme in gleichseitige rechtwinkelige (Quadrate), gleichseitige schiefwinkelige (Rhomben), ungleichseitige rechtwinkelige (Rechtecke) und ungleichseitige schiefwinkelige (Rhomboide).

Die Eintheilungs- und Untereintheilungsglieder verhalten sich zu dem Eintheilungsganzen, wie die Aeste, Zweige und Nebenzweige sich zu dem Baume verhalten. Dies zeigt sich recht deutlich in folgender Darstellungsweise. Wir wählen die Eintheilung des Begriffs „Viereck", weil im Vorhergehenden die Erläuterung des aufzustellenden Schema's gegeben ist.

- Viereck
  - Seiten
    - Lage
      - je zwei Gegenseiten parallel = Parallelogramm.
      - zwei Gegenseiten parallel = Paralleltrapez.
      - keine parallele Seiten = Trapez.
    - Größe
      - gleichseitig
        - gleichwinkelig = Quadrat.
        - ungleichwinkelig = Rhombus.
      - ungleichseitig
        - gleichwinkelig = Rechteck.
        - ungleichwinkelig
          - Parallelogramm = Rhomboid.
          - Paralleltrapez.
          - Trapez.
  - Winkel (Größe)
    - gleichwinkelig
      - gleichseitig = Quadrat.
      - ungleichseitig = Rechteck.
    - ungleichwinkelig
      - gleichseitig = Rhombus.
      - ungleichseitig
        - Parallelogramm = Rhomboid.
        - Paralleltrapez.
        - Trapez.

Es wurde schon bemerkt, daß man Anfangs nicht zu entfernteren Nebeneintheilungen schreiten dürfe, deren Verständniß mit dem Eintheilungsganzen nicht unmittelbar gegeben ist. Eintheilungen, welche bis zu den äußersten Verzweigungen des Begriffs reichen, können in der Regel erst gegeben oder wenigstens zum klaren Verständniß gebracht werden, nachdem gewisse Wahrheiten über den betreffenden Begriff durch Beweise festgestellt sind.

Die Urtheile (an und für sich) betrachtet die Logik nach ihrer Qualität, Quantität, Relation und Modalität und theilt sie nach diesen vier Rücksichten ein: nach der Qualität in bejahende und verneinende, nach der Quantität in allgemeine (universalia), besondere (particularia) und individuelle (singularia), nach der Relation in kategorische, hypothetische und disjunktive, nach der Modalität endlich in problematische, assertorische und apodiktische. — Es sei hierüber in Beziehung auf die Mathematik Folgendes bemerkt.

Die Sätze der Mathematik können wegen ihrer allgemeinen Gültigkeit nur allgemeine Urtheile sein; und tritt ein Satz in singulärer Form auf, so hat er doch, wie jedes singuläre Urtheil, in seiner logischen Bedeutung die Kraft des allgemeinen Urtheils. — Allerdings läßt die Mathematik in rein formeller Hinsicht auch die Bildung partikulärer Urtheile zu, z. B. „Einige Dreiecke sind gleichseitig"; doch haben solche partikuläre Urtheile für die Mathematik selbst keine Bedeutung.

Die Eintheilung der Urtheile nach der Relation in kategorische, hypothetische und disjunktive entspricht den Denkprinzipien, insofern einem Subjekte ein Prädikat zu- oder abgesprochen werden kann nach dem Gesetze der Identität oder Nicht-Identität (Widerspruch), oder nach dem Gesetze der Causalität, oder nach dem Gesetze des ausgeschlossenen Dritten. Der Ausdruck „Relation" ist hergenommen von der Art und Weise, wie ein Prädikat auf ein Subjekt bezogen (referre) wird. Der Verstand setzt aber entsprechend jenen Denkgesetzen die Synthesis zwischen Subjekt und Prädikat entweder als vorhanden (kategorisch), oder er macht dieselbe von einer Bedingung abhängig (hypothetisch), oder er stellt dieselbe als unentschieden hin zwischen zwei contradiktorischen Gegensätzen (disjunktiv). — Kategorische Urtheile stellt die Mathematik in ihren Axiomen auf, in welchen die Synthesis zwischen Subjekt und Prädikat unmittelbar nach dem Gesetze der Identität ausgesprochen wird (*Κατηγορεῖν*). Hypothetische Urtheile sind alle Lehrsätze der Mathematik, obgleich diese häufig formell als kategorische Urtheile auftreten, wie z. B. der Satz: „Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichwinkelig." Solche kategorische Sätze lassen sich immer in hypothetische verwandeln, so daß deutlich Vordersatz (Annahme, Voraussetzung, hypothesis) und Nachsatz (Behauptung, Satz, thesis) hervortreten. (Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinkelig). Diese Umformung der mathematischen Lehrsätze ist bei einem Anfänger durchaus nothwendig, damit er deutlich erkennt, was Hypothesis und was Thesis sei; denn auf der klaren Unterscheidung dieser beiden Stücke beruhet zuvörderst das ganze Verständniß eines Lehrsatzes und seines Beweises.

Die Eintheilung der Urtheile in problematische, assertorische und apodiktische beruhet auf der Verschiedenheit des Verhältnisses, in welchem die Synthesis zwischen Subjekt und Prädikat dem Verstande erscheinen kann. Der Modus (Modalität) dieser Synthesis ist entweder die Möglichkeit (problematische Urtheile), oder die Wirklichkeit (assertorische), oder die Nothwendigkeit (apodiktische). — Problematische Sätze stellt die Mathematik auf in ihren Postulaten und Problemen. Denn wenn auch die Satzform der mathematischen Aufgabe die des Imperativsatzes ist, so schließt doch die Forderung des zu Leistenden die Möglichkeit, das Geforderte zu leisten, (wenigstens vorläufig) ein. Die Aufgabe „Einen Winkel zu halbiren" involvirt den problematischen Satz: „Jeder Winkel kann halbirt werden". — Ergibt sich aber im Verlaufe der Untersuchung die Unlösbarkeit einer Aufgabe, wie das der Fall ist bei der Aufgabe der Dreitheilung des Winkels, so erhält dies darin seinen Ausdruck, daß das von vorn herein zu setzende problematisch-bejahende

Urtheil: „Jeder Winkel läßt sich (durch eine allgemein gültige elementare Construction) in drei gleiche Theile theilen" zu einem problematisch-verneinenden wird: „Winkel können nicht (durch eine allgemein gültige elementare Construction) in drei gleiche Theile getheilt werden."

Mit der Unterscheidung der assertorischen und apodiktischen Urtheile ist der wesentliche Unterschied zwischen dem direkten und indirekten Beweise gegeben, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Bei der Vergleichung der Urtheile unter einander hebt die Logik besonders den Unterschied des contradiktorischen (negativen) und conträren (positiven) Widerspruchs hervor. — Für die Mathematik hat diese Unterscheidung keine Bedeutung, da der conträre Widerspruch wegen seiner Unbestimmtheit keine bestimmte Schlußfolge involvirt. Nur bei contradiktorisch entgegengesetzten Urtheilen folgt aus der Wahrheit des einen die Falschheit des andern und umgekehrt. Dagegen können conträr entgegengesetzte Urtheile zwar nicht beide wahr, aber wohl beide falsch sein, so daß also nicht von der Falschheit des einen auf die Wahrheit des andern geschlossen werden kann.

In der Lehre von der Umkehrung der Urtheile unterscheidet die Logik die Conversion und Contraposition, je nachdem bei der Umkehrung die Qualität des Urtheils dieselbe bleibt, oder nicht. Die Conversion ist dann wieder entweder eine reine (conversio simplex), wenn auch die Quantität des Urtheils dieselbe bleibt, oder eine Umkehrung mit veränderter Quantität (conversio per accidens). Letztere ist für die Mathematik ohne Bedeutung wegen der Partikularität des dadurch entstehenden Urtheils.

Betreffend die Conversion der Urtheile lehrt die Logik: „Allgemein bejahende Urtheile lassen, wenn der Prädikatsbegriff einen größeren Umfang hat, als der Subjektsbegriff, nur eine conversio per accidens zu." — Diesem könnte die Umkehrung des Satzes: „Alle gleichseitigen Dreiecke sind gleichwinkelig", in welchem der Prädikatsbegriff (wie er hier aufgestellt ist) einen größeren Umfang hat, als der Subjektsbegriff, zu widersprechen scheinen; denn die Umkehrung jenes Satzes lautet: „Alle gleichwinkeligen Dreiecke sind gleichseitig;" die Umkehrung ist also eine conversio simplex. — Der scheinbare Widerspruch löset sich einfach durch die Bemerkung auf, daß in der Umkehrung der an sich allerdings weitere Prädikatsbegriff dahin begrenzt wird, daß er mit dem Subjektsbegriffe gleichen Umfang annimmt, und somit die reine Umkehrung eintritt.

Beachtung möchte noch verdienen die Umkehrung solcher Sätze, bei denen der Subjektsbegriff Attribute hat, welche die Bedingungen enthalten für die Synthesis zwischen Subjekt und Prädikat. In solchen Fällen besteht die Umkehrung darin, daß eine Vertauschung jedesmal eines der Attribute mit dem Prädikate eintritt. Ein solcher Satz läßt deßhalb im Allgemeinen so viele Umkehrungen zu, als Attribute vorhanden sind. So gestattet der Satz: „Die vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbirt die Sehne" zwei Umkehrungen:

1. „Die vom Mittelpunkte eines Kreises zum Halbirungspunkte einer Sehne gezogene Linie steht auf der Sehne senkrecht" und
2. „Die auf einer Sehne in ihrem Halbirungspunkte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises."

Wie die Mathematik die Contraposition der Urtheile in ihren Demonstrationen zur

Anwendung bringt, möge folgender Beweis uns zeigen. Will man etwa beweisen, daß ein Dreieck, welches die Seiten 2, 3, 4 hat, nicht rechtwinkelig sei, so sagt man: Bei einem rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate. Nun ist aber nicht $4^2 = 2^2 + 3^2$; folglich ist das fragliche Dreieck nicht rechtwinkelig; denn ein Dreieck, in welchem nicht das Quadrat einer Seite gleich ist der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, ist nicht rechtwinkelig. (Die Contraposition des pythagoräischen Lehrsatzes).

Die wesentliche Form des Schlusses ist abhängig von der allgemeinen Regel (Obersatz, propositio maior), welche demselben zu Grunde liegt: je nachdem diese ein kategorisches oder hypothetisches oder disjunktives Urtheil ist, heißt auch der Schluß ein kategorischer, oder hypothetischer, oder disjunktiver.

Ein kategorischer Schluß: Das Volumen der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi r^3$; die Kugel K hat den Radius 5; folglich ist das Volumen der Kugel K gleich $\frac{4}{3}\pi . 5^3$.

Ein hypothetischer Schluß: Wenn in einem Vierecke die Summe der Gegenwinkel = 2 R ist, so ist es ein Kreisviereck; in dem Vierecke V ist die Summe der Gegenwinkel = 2 R; folglich ist das Viereck V ein Kreisviereck.

Ein disjunktiver Schluß: Die Gegenseiten gleicher Dreieckswinkel sind entweder gleich oder ungleich; ungleichen Dreiecksseiten liegen aber (bekanntlich) ungleiche Winkel gegenüber; folglich sind die Gegenseiten gleicher Dreieckswinkel einander gleich.

Ist der Obersatz ein hypothetisch-disjunktives Urtheil, so heißt der Schluß ein Dilemma resp. Polylemma, jenachdem die Disjunktion zwei, oder mehrere Glieder hat.

Ein Dilemma ist z. B. der Beweis, daß dem größeren Dreieckswinkel die größere Seite gegenüberliegt: Wäre die dem größeren Winkel gegenüberliegende Seite a nicht die größere, so wäre sie der dem kleineren Winkel gegenüberliegenden Seite b entweder gleich, oder sogar kleiner als diese; nun kann aber (nach Früherem) weder $a = b$, noch auch $a < b$ sein; folglich ist $a > b$.

Bei diesem Schlußverfahren ist besonders zu beachten, daß die Disjunktion im Obersatze vollständig sei, und daß im Untersatze sämmtliche Disjunktionsglieder aufgehoben werden müssen.

Der hypothetisch-disjunktive Obersatz läßt sich immer als ein rein disjunktiver darstellen, indem man den hypothetischen Vordersatz zu einem Gliede der Disjunktion macht, wodurch diese absolut vollständig wird. Der Untersatz hebt dann sämmtliche Disjunktionsglieder auf bis auf eines, und der Schlußsatz folgert dann die Position dieses einen Disjunktionsgliedes. Demnach würde das obige Beispiel folgende Form annehmen: Bezeichnet a die Gegenseite des größeren und b die Gegenseite des kleineren Dreieckswinkels, so ist entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$; nun ist aber (nach Früherem) weder $a = b$, noch $a < b$; folglich ist $a > b$.

Der Schluß (syllogismus) ist entweder einfach (monosyllogismus), oder zusammengesetzt (polysyllogismus), je nachdem er zwei, oder mehrere Prämissen hat. Sind sämmtliche Prämissen, welche zu einem Schlusse nothwendig sind, ausdrücklich dargestellt, so heißt der Schluß vollständig; im Gegentheil heißt er unvollständig oder ein Enthymema (weil man gewissermaßen eine Prämisse im Sinne behält). Ein Enthymem ist folgender Schluß: Wenn das Quadrat einer Dreieckseite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, so ist das Dreieck rechtwinkelig; folglich sind 5, 4, 3 Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks. — Es fehlt hier der Untersatz: Nun ist aber $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Oft besteht ein Schluß nur aus einem einzigen, aber zusammengezogenen Satze, daher man den Schluß selbst einen zusammengezogenen nennt. Z. B.: Das Volumen des Kegels als einer Pyramide (deren Grundfläche ein Kreis ist) ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und einem Drittel der Höhe $= \frac{g \,.\, h}{3} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$. Der Mittelbegriff ist „Pyramide" und vollständig heißt der Schluß:

Obersatz: Das Volumen der Pyramide $= \frac{g \,.\, h}{3}$;

Untersatz: Der Kegel ist eine Pyramide;

Schlußsatz: Das Volumen des Kegels $= \frac{g \,.\, h}{3} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$.

Bei klarer Einsicht in den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, Grund und Folge pflegt man, wie überhaupt, so auch in der Mathematik nur selten einen Schluß in seiner logischen Vollständigkeit darzustellen; unsere Schlüsse sind dann meistens Enthymeme. Weiß man z. B., daß ein Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist, so schließt man sofort, daß der Winkel ein rechter sei, ohne erst immer anzuführen, daß ein Winkel dann ein rechter sei, wenn er seinem Nebenwinkel gleich ist. — Als Lehrer hat man sich wohl zu hüten, daß man nicht beim ersten Unterrichte solche Enthymeme anwendet, auch nicht in den einfachsten Fällen, da man zu leicht die Fassungskraft des Kindes überschätzt, und sollte der Fortschritt auch noch so langsam sein. Es wird dadurch dem schon besprochenen großen Fehler, welchen Anfänger so leicht machen, Vorschub geleistet, daß sie nämlich dem Lehrer etwas bloß mit dem Gedächtniß Aufgefaßtes nachsagen, ohne in das klare Verständniß der Sache eingedrungen zu sein. — Hält man im Anfange fest, daß jedes Kleinste gehörig verstanden wird, so wird der Knabe späterhin im Schließen desto geübter und sicherer sein; dann kann man Enthymeme machen und die früher scheinbar verlorene Zeit doppelt und dreifach wieder ausgewinnen.

Eine besonders wichtige Rolle spielt, wie in der Lehre vom Denken überhaupt, so insbesondere in der Lehre vom Schlusse, die Unterscheidung zwischen „analytisch" und „synthetisch". Die Anwendung dieser gegensätzlichen Bezeichnung ist eine so ausgedehnte, daß man bisweilen in Verlegenheit kommt in Betreff ihrer eigentlichen Bedeutung. Im Allgemeinen bezieht sich jener Gegensatz auf die Methode des Denkens in seinen verschiedenen Operationen. Das Verfahren ist analytisch (regressiv), wenn man von dem Bedingten (zu Begründenden) zu den ersten Gründen zurückgeht, synthetisch (progressiv), wenn man von dem Bedingenden (Grunde) zu dem Bedingten, zu Begründenden fortschreitet. Auch sagt man wohl, man verfahre analytisch, wenn man vom Besonderem (dem zu Begründenden) zum Allgemeinen (der allgemeinen Regel, dem Grunde) zurückgehe; synthetisch, wenn man vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreite. — In der Frage dagegen, welche Kant an die Spitze seiner Kritik des Erkenntnißvermögens stellte: „Wie sind synthetische Urtheile a priori möglich?" bezieht sich der Gegensatz zwischen synthetischen und analytischen Urtheilen auf den Zweck des Denkens, indem Kant unter synthetischen

Urtheilen solche versteht, wodurch eine Erweiterung im Erkennen erzielt wird, unter analytischen Urtheilen aber solche, welche die Erläuterung oder Aufklärung eines Begriffs bezwecken.

Auch die Mathematik macht den Unterschied zwischen analytischem und synthetischem Verfahren geltend, namentlich in den Beweisen als syllogistischen Schlußreihen und bei der Behandlung der Aufgaben. — Ein Beweis ist synthetisch, wenn man die Wahrheit einer Behauptung in der Weise begründet, daß man von einer anerkannten Wahrheit als erstem Grunde ausgehend, von Folge zu Folge fortschreitet (progressus a principiis ad principiata) und diese Folgerung schließt mit der Anerkennung der aufgestellten Behauptung; analytisch heißt ein Beweis, wenn man von der zu beweisenden Behauptung als dem zuerst Bedingten rückschreitend (regressus a principiatis ad principia) von Bedingung zu Bedingung fortgeht und zu einer ersten Bedingung gelangt, welche als anerkannt die Wahrheit aller anderen Bedingungen und so auch die Wahrheit der aufgestellten Behauptung in sich schließt.

Ein bekannter Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes z. B. würde analytisch dargestellt sich etwa gestalten, wie folgt: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Kathetenquadrate, wenn das Hypotenusenquadrat sich in zwei Theile (hier Rechtecke) zerlegen läßt, welche beziehlich den Kathetenquadraten gleich sind; ein solches Rechteck ist aber dem entsprechenden Quadrate gleich, wenn die Hälften dieser Parallelogramme, hier Dreiecke, welche mit den Parallelogrammen beziehlich gleiche Grundlinie und Höhe haben, einander gleich sind; Dreiecke sind aber gleich, wenn sie congruent sind; Dreiecke sind aber congruent, wenn sie etwa in zwei Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Nun ergeben sich aber in zwei Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel übereinstimmende, also congruente Dreiecke, welche beziehlich mit dem Rechteck und Quadrate gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, also beziehlich die Hälften davon sind; folglich sind auch Rechteck und Quadrat einander gleich; folglich die Summe der beiden Rechtecke, d. i. das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Mehr, als bei den Beweisen der Lehrsätze pflegt das analysirende Schlußverfahren geübt zu werden bei der Behandlung der sogenannten analytischen Aufgaben, wo man die aufgestellte Forderung als gelöset annehmend durch Schlüsse dieselbe mit einer lösbaren Aufgabe in einen solchen logischen Zusammenhang bringt, daß mit der Lösung letzterer Aufgabe auch die Lösung der ersteren gegeben ist. — Die Construction und den Beweis für die Richtigkeit derselben machen die Synthesis der Aufgabe aus, und zwar ist der Beweis nichts, als eine Umkehrung der Analysis. — Es verhält sich hiermit ähnlich, wie mit der Ausführung eines Baues nach einem vorhandenen Muster. Man wird von der Spitze anfangend, den Bau zergliedern (auflösen), wird, niedersteigend bis zum Grundstein darauf achten, wie Höheres sich auf Tieferes stützt, um dann in aufsteigender Folge auf einem festen Fundamente die einzelnen Theile in der rechten Ordnung zusammenzufügen, ohne einen Stein zu viel und zu wenig einzuschieben, so daß ohne Tadel der Bau sich erhebt.

Beispielshalber soll folgende Aufgabe analysirt werden: In einer Linie MN einen Punkt X zu bestimmen von der Lage, daß die Linien, welche ihn mit zwei außerhalb der Linie MN gegebenen Punkten A und B verbinden, mit der Linie MN gleiche Winkel bilden.

Der Punkt X, so sagt man, wird gegeben sein, wenn in einer der Linien AX und BX, z. B. in der BX sich irgend ein Punkt bestimmen läßt, etwa der Punk D, für welchen DX = AX. Der

Punkt D wird aber gegeben sein, wenn die Richtung der Linie AD gegeben ist und das Verhältniß ihrer Theile AE und DE, welche durch die schneidende MN gebildet werden. Die Richtung der AD ist aber gegeben, wenn ihre Neigung gegen die MN gegeben ist, insbesondere also, wenn AD $\perp$ MN ist, und der Punkt D selbst wird gegeben sein, wenn DE $=$ AD. Nun ist aber Dreieck AXD $\cong$ EXD; folglich in der That AD $\perp$ MN und DE $=$ AE; folglich ist der Punkt D gegeben; folglich die DB; folglich der Punkt X.

Unser Denken ist im Grunde jedesmal, wenn wir einen Beweis suchen oder die Lösung einer Aufgabe, zunächst ein analysirendes, obwohl wir uns dessen nicht immer bewußt werden, indem der Verstand die Gedankenreihe der Schlüsse rückwärts und vorwärts mit Blitzesschnelle durchläuft; denn, wenn wir etwas beweisen wollen, so ist unser Denken immer zunächst auf das zu Beweisende gerichtet, um dasselbe mit seinem Grunde in logische Verbindung zu setzen.

Der Zweck eines jeden Beweises ist die Anerkennung der Wahrheit einer Behauptung. Der Modus dieser Anerkennung kann aber ein doppelter sein: entweder erfolgt dieselbe aus Einsicht in den Zusammenhang des zu Beweisenden und seiner Gründe, und dann wird die Anerkennung zur Erkenntniß; oder aber es erfolgt die Anerkennung aus bloßem Zwang, indem der Verstand, wollte er der aufgestellten Behauptung seine Anerkennung versagen, genöthigt sein würde, einen Widerspruch zu setzen. Im ersten Falle heißt der Beweis direkt, im andern Falle indirekt. — Man könnte diese Eintheilung der Beweise eine Eintheilung nach der Modalität nennen. (Vgl. S. 12).

Der direkte Beweis zeigt, daß eine Behauptung wahr ist, der indirekte zeigt, daß sie wahr sein muß, und zwar geschieht Letzteres in der Weise, daß man aus der Setzung des contradiktorischen Gegentheils der aufgestellten Behauptung einen Widerspruch, eine Unmöglichkeit herleitet. Daher wird der indirekte Beweis auch apagogisch genannt (ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον, deductio ad absurdum).

In der Beweiskraft besteht zwischen beiden Beweisarten kein Unterschied; doch ist der direkte Beweis dem indirekten in sofern vorzuziehen, als dieser nur Ueberzeugung, jener dagegen auch Einsicht gewährt.

Der Beweis soll uns im Allgemeinen Gewißheit geben in Beziehung auf die Wahrheit einer Behauptung. Der Grund der Gewißheit liegt aber entweder in uns, oder außer uns. Ist der Grund der Gewißheit Thatsache des innern Bewußtseins, so ist das Erkennen ein Wissen; liegt aber der Grund der Gewißheit außer uns, so ist das Erkennen nur dann mit Gewißheit verbunden, wenn es sich auf einen untrüglichen Zeugen stützt; in diesem Falle heißt der Beweis ein Auctoritätsbeweis und führt zum Glauben. — Haben wir für die Wahrheit von Thatsachen, deren Gewißheitsprinzip außer uns liegt, eine solche untrügliche Auctorität nicht, so können wir in Beziehung auf sie in unserem Erkennen nur zu einer größeren oder geringeren Wahrscheinlichkeit gelangen. Letzteres ist der Fall bei all' unserem Erkennen durch Erfahrung.

Aber, möchte vielleicht in Beziehung auf das Letztere mancher einwenden, es ist doch ganz gewiß, und nicht bloß wahrscheinlich, daß ein Stein, welcher in die Höhe geworfen wird, nach einiger Zeit zur Erde fällt; es ist ferner gewiß, daß das Wasser, sich selbst überlassen, in die Tiefe fließt, und so in tausend anderen Fällen. — Solche Einwendungen kann im Ernste nur der Naturalist (Atheist) machen, welcher die Natur für autonom hält und nicht an einen persönlichen Gott glaubt, als den Schöpfer der Natur und ihren höchsten Gesetzgeber, welcher die Natur aus dem Nichts in das Dasein gerufen und den Kräften derselben, wie es ihm gefiel, ihre Gesetze vorschrieb. Wer an einen persönlichen Gott glaubt, der weiß, daß derselbe Gott, welcher die Macht hat, der Natur Gesetze zu geben, auch die Macht hat, diese Gesetze aufzuheben, und daß er von dieser Gewalt in seinen Wundern Gebrauch macht. — Die h. Schrift berichtet uns (II. Mos. XIV. 21—30), daß, als die Israeliten bei ihrem Auszuge aus Aegypten an das rothe Meer kamen, die Wasser, wie Mauern sich aufthürmten, und so die Israeliten trockenen Fußes hindurchgingen. — Gott hob für die Zeit des Durchzugs das Gesetz der Schwere auf und gab diesem Gesetze seine Kraft wieder, als die Israeliten am jenseitigen Ufer angelangt waren. — Die Gesetze des Geistes dagegen sind, weil in dem ewigen Geiste gegeben, unabänderlich, wie Gott selbst; und deßhalb hat unser Erkennen aus geistigen Prinzipien den Charakter der Gewißheit. —

Die Wahrscheinlichkeit hat ihre Gründe, und die logische Zusammenstellung dieser Gründe heißt ein Wahrscheinlichkeitsbeweis, im Gegensatze zu welchem man den Beweis, welcher Gewißheit gibt, apodiktisch nennt, weil er uns mit Nothwendigkeit auf die Wahrheit hinweiset.

Als Wahrscheinlichkeitsbeweise behandelt die Logik die Beweise durch Analogie und Induktion.

Der Beweis durch Analogie (Verhältniß, Vergleichung) besteht darin, daß man aus der Uebereinstimmung zweier Gegenstände in mehreren bekannten Merkmalen auf die Uebereinstimmung in anderen, unbekannten Merkmalen schließt. Die Form des Beweises ist also: Was die Merkmale a, b, c, d, e . . . hat, ist P; nun hat S die Merkmale a, b, c; folglich ist wahrscheinlich, daß S auch die Merkmale d, e . . . . hat, also P ist. — Die Analogie bezieht sich also auf den Inhalt der Begriffe, und der Mangel an Gewißheit bei dem analogischen Schlusse beruhet auf der Mangelhaftigkeit des Untersatzes.

Der Beweis durch Induktion beruhet auf folgendem Satze: Wenn ein Merkmal einer Anzahl von Theilen, welche den Subjektsbegriffs ausmachen, zukommt, so ist es wahrscheinlich, daß das Merkmal auch den übrigen Theilen, und somit dem ganzen Umfange des Subjektsbegriffs zukommt. Die Form des Induktionsschlusses ist: a, b, c, d ist P; nun gehören a, b, c, d zum Umfange von S (= a, b, c, d, e, f . . . .); folglich ist wahrscheinlich auch e, f . . . . = P, d. h. S = P. — Die Induktion bezieht sich also auf den Umfang der Begriffe, und der Mangel an Gewißheit beruhet bei derselben auf der Mangelhaftigkeit des Obersatzes.

Was den Grad der Wahrscheinlichkeit angeht, so pflegt man darüber zu lehren, daß derselbe bei der Analogie abhängig sei von der Anzahl der erkannten Merkmale, und bei der Induktion von der Anzahl der erkannten Gegenstände oder Fälle, daß aber durch diese Schlüsse eben nur Wahrscheinlichkeit, nie Gewißheit erlangt werden könne.

Auch in der Mathematik ist von Wahrscheinlichkeit die Rede, und man versteht unter mathematischer Wahrscheinlichkeit das Verhältniß der Anzahl der einem Ereigniß günstigen, d. h. dasselbe wirklich herbeiführenden Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle. So ist die Wahrscheinlichkeit w, mit einem Würfel eine bestimmte Anzahl Augen zu werfen, $\frac{1}{6}$. — Ist $w = 1$, so ist das Ereigniß gewiß; ist $w = \frac{1}{2}$, so ist es zweifelhaft; ist $w > \frac{1}{2}$, so ist es wahrscheinlich im gewöhnlichen Sinne des Wortes; ist endlich $w < \frac{1}{2}$, so ist das Ereigniß unwahrscheinlich. — Läßt sich die Anzahl der Fälle aus Gründen, also aus apriorischen Prinzipien bestimmen, so heißt die Wahrscheinlichkeit a priori; ist die Bestimmung der Anzahl der Fälle aber von der Erfahrung abhängig, so heißt die Wahrscheinlichkeit a posteriori.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit bezieht sich also nicht auf die Erkenntniß der mathematischen Wahrheiten als solcher; in Beziehung hierauf kann von keiner Wahrscheinlichkeit die Rede sein; die mathematische Erkenntniß fordert Gewißheit. Demnach müßten also, da gelehrt wird, die Schlüsse durch Analogie und Induktion geben nie Gewißheit, dieselben in der Mathematik keine Anwendung finden können. Und doch ist dies der Fall, wenn auch nicht in der Geometrie, so doch in der Arithmetik.

Durch Analogie schließt man z. B. von $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auf $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, von $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ auf $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$. Ein analogischer Schluß ist es, wenn man von der Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten auf die Gültigkeit desselben für negative und gebrochene Exponenten schließt. — Ein Induktionsschluß ist es, wenn man an einigen Beispielen, oder auch nur an einem einzigen die Regel für die Verwandlung der periodischen Decimalbrüche in gemeine Brüche entwickelt hat und nun auf die allgemeine Gültigkeit der Regel schließt. Ebenso schließt man durch Induktion in der Entwickelung der Zinseszinsformeln von $v_1 = ap$, $v_2 = ap^2$ u. s. w. auf $v_n = ap^n$, und von $v_1 = ap \pm r$, $v_2 = ap^2 \pm rp \pm r$, $v_3 = ap^3 \pm rp^2 \pm rp \pm r$ u. s. w. auf $v_n = ap^n \pm rp^{n-1} \pm rp^{n-2} \pm rp^{n-3} \ldots\ldots \pm rp \pm r$. Und diese Schlüsse haben volle Gewißheit.

Was also über die Beweiskraft der Analogie und Induktion gelehrt zu werden pflegt, daß sie nämlich nur Wahrscheinlichkeit geben, kann keine allgemeine Gültigkeit haben; es kann sich nur auf die Erfahrungswissenschaften beziehen; in der apriorischen mathematischen Wissenschaft schließt man auch durch Analogie und Induktion mit Gewißheit, indem das gegebene Zukommen eines oder mehrerer Merkmale das Setzen des (oder der) fraglichen a priori fordert, und ebenso die Synthesis zwischen einem Prädikate und einem oder mehreren Theilen im Umfange des Subjektsbegriffs die Synthesis auch für die übrigen Theile a priori einschließt. Ueberhaupt aber ist es nicht die Anzahl der beobachteten Merkmale oder Fälle, wovon, wie gelehrt wird, im Wesentlichen die größere oder geringere Wahrscheinlichkeit bei der Analogie und Induktion abhängt; vielmehr ist ihre Beweiskraft bedingt durch den höheren oder geringeren Grad der Innigkeit in der causalen Wechselbeziehung zwischen den beobachteten Merkmalen und dem in Frage stehenden, oder zwischen den beobachteten Fällen und dem z. B. als unter eine gewisse Regel fallend zu beweisenden. Ist das Verhältniß in jener Wechselbeziehung das der Nothwendigkeit, so ist der Schluß durch Analogie und Induktion ein Schluß mit Gewißheit. Und Letzteres ist eben bei den analogischen und Induktionsschlüssen der Mathematik der Fall. — Den ausdrücklichen Nachweis für die Nothwendigkeit in dem Causalnexus der einzelnen Fälle pflegt die Mathematik bei ihren Induktionsbeweisen zu führen durch den sogenannten Schluß von n auf n + 1, indem gezeigt wird, daß, wenn etwas in einem (n ten) Falle gilt, es auch für den folgenden (n + 1 ten) Fall Geltung habe.

Daß das über die Beweiskraft der Wahrscheinlichkeitsbeweise Gesagte selbst für die Erfahrungswissenschaften gilt, daß es nämlich mehr auf die Innigkeit in der Beziehung zwischen den erkannten und fraglichen Merkmalen oder Fällen ankomme, als auf die Anzahl derselben, mag folgendes Beispiel zeigen.

Man schließt aus der Abplattung der Erde auf die des Mondes. Und weßhalb? — Nicht etwa, weil beide Körper kugelförmig sind, oder weil beide von der Sonne erleuchtet werden und sich um diese bewegen, oder weil auf beiden Berge und Thäler sind, oder weil sie noch in diesem und jenem Merkmale übereinstimmen. Es ist vielmehr das eine Merkmal der Achsendrehung, welches auf das Merkmal der Abplattung schließen läßt unter der Voraussetzung einer ursprünglich weichen Masse, und zwar unter dieser Voraussetzung, und so lange die betreffenden Naturgesetze in Kraft sind, sogar mit Gewißheit, weil dann Achsendrehung und Abplattung durch die Wirkung der Centrifugalkraft nothwendig verbunden sind.

Trugschlüsse sind in der Mathematik leichter zu vermeiden, als in andern Wissenschaften wegen der im Allgemeinen größeren Klarheit in ihren Begriffen und der größeren Evidenz in der Beziehung der Urtheile, welche im Schlusse mit einander verbunden werden. Deßhalb lassen sich in der Mathematik auch leichter, als in andern Wissenschaften Trugschlüsse entdecken und aufdecken. —

Der Fehler, welcher von Anfängern in der Mathematik beim Beweisen am häufigsten gemacht wird, ist die sogenannte petitio principii, wohin auch der circulus in demonstrando und das ὕστερον πρότερον zu rechnen ist.

Obgleich sich die Mathematik wegen der in ihr herrschenden Klarheit zu Sophismen d. h. beabsichtigten Trugschlüssen weniger eignet, so hat doch auch sie einige sophistische Spielereien aufzuweisen. Es sollen hier zwei angeführt werden, nämlich das bekannte Sophisma des Zeno und ein Beweis, daß $2 \times 2 = 5$ ist.

Zeno behauptete, Achilles sei nicht im Stande gewesen, bei einer zwölfmal größeren Geschwindigkeit eine in einer Entfernung von 1 Stadium sich vor ihm her bewegende Schildkröte einzuholen; „denn", sagte er, „kommt Achilles an der Stelle an, wo die Schildkröte sich Anfangs befand, so ist diese um $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadium, so ist die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium weiter u. s. f. Achilles wird sich also der Schildkröte zwar immer mehr nähern, aber er wird dieselbe nie einholen." —

Jeder fühlt es, daß dies ein Trugschluß ist; allein, wo der Fehler recht steckt, das wird nur derjenige klar einsehen, welcher durch die Gesetze der geometrischen Progression erkannt hat, daß eine convergirende unendliche Reihe eine endliche Summe hat; denn darin liegt das Trügerische in jenem Schlusse, daß der Werth einer allerdings unendlichen aber rasch convergirenden Reihe $= \infty$ gesetzt wird. — Achilles würde die Schildkröte schon in einer Entfernung von $1\frac{1}{11}$ Stadium einholen.

Der andere Trugschluß ist folgender: Es ist $45 - 36 = 25 - 16$; folglich auch $16 - 36 = 25 - 45$; folglich auch $16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$; folglich auch $\sqrt{16 - 36 + \frac{81}{4}} = \sqrt{25 - 45 + \frac{81}{4}}$, d. h. $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$; folglich $4 = 5$, d. h. $2 \times 2 = 5$.

Der Fehler steckt hier darin, daß aus der Gleichheit zweier Quadrate auf die absolute Gleichheit ihrer Wurzeln geschlossen wird, während die Wurzeln nur quantitativ gleich sind, dem Vorzeichen nach aber wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel entgegengesetzt sein können. So wird im vorliegenden Falle $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ gesetzt.

Aus dieser Betrachtung der Mathematik in ihrem Verhältnisse zur philosophischen Propädeutik möchte wohl zur Genüge erhellen, daß des Studium der Mathematik ein nicht genug zu schätzendes Bildungsmittel für den Geist ist. — Zwar operirt hier zunächst hauptsächlich der Verstand; doch gehen auch die übrigen Seelenvermögen, wie gelegentlich schon angedeutet wurde, mehr oder weniger nicht leer aus. — Es soll hier zum Schlusse mit einigen Worten noch darauf hingewiesen werden, daß die Uebung des Verstandes insbesondere auch einen erheblichen Einfluß hat auf die Vernunft, indem sie auch diese zur Thätigkeit anregt und in diese Thätigkeit Ordnung und größere Gewandtheit bringt. — **Verstand** und **Vernunft** sind dieselbe Denkkraft, jener auf dem Gebiete der **Erscheinungen** und **Begriffe**, diese auf dem Gebiete der **Realitäten** und **Ideen**. — Hat die Mathematik den Verstand fort und fort angehalten, bei jedem Gedanken und jedem Ausspruche sich die Frage zu beantworten: Warum ist das so? (principium cognoscendi), so wurde dadurch auch die Vernunft angeregt und gewöhnt, bei jeder Erscheinung sich die Frage vorzuhalten: Hat die Erscheinung Realität, und wo ist der zureichende Grund für dieselbe? (principium essendi). — Und hat der Verstand richtig operiren gelernt, so wird er vielfach die Vernunft vor verkehrten Operationen bewahren und, wenn sie auf falscher Fährte ist, ihr den rechten Weg wiederfinden helfen; denn die Gesetze der geistigen Thätigkeit sind dieselben, sie mag als Verstand auftreten, oder als Vernunft.