I.

1. Unter den trimetrischen oder homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P der Ebene versteht man die Normalen, welche von diesem Punkte auf die Seiten eines Dreiecks $A_1\ A_2\ A_3$ gefällt werden. Dieses Dreieck nennt man das Fundamental- oder Axen-Dreieck; die Geraden auf welchen die Seiten liegen, heissen die Coordinatenaxen.

Es leuchtet ein, dass es für homogene Gleichungen in trimetrischen Coordinaten nicht auf die wirklichen Längen der Coordinaten, sondern nur auf die gegenseitigen Verhältnisse derselben ankommt, und hierin besteht ein wesentlicher Vorzug der trimetrischen Coordinaten vor den orthogonalen.

2. Wenn wir die Seiten des Fundamental-Dreiecks, welche den Ecken A_1, A_2, A_3 gegenüberliegen, mit s_1, s_2, s_3 bezeichnen und festsetzen, dass die Coordinate x_k (für $k = 1, 2, 3$) positiv gerechnet wird, wenn P mit A_k auf derselben Seite von s_k liegt, — dagegen negativ, wenn auf der entgegengesetzten Seite, — so besteht zwischen den Seiten und den zugehörigen Coordinaten des Punktes P die Relation:

$$s_1\ x_1 + s_2\ x_2 + s_3\ x_3 = F,$$

wenn F den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks angibt. Da

$$s_1 : s_2 : s_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3,$$

so muss auch

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3$$

gleich einer Constanten sein.

3. Ist das Verhältniss der trimetrischen Coordinaten eines Punktes $a_1 : a_2 : a_3$, so sind die wirklichen Längen derselben:

$$x_1 = \rho\ a_1;\ x_2 = \rho\ a_2;\ x_3 = \rho\ a_3;$$

und es ergibt sich ρ aus:

$$\rho\ (s_1\ a_1 + s_2\ a_2 + s_3\ a_3) = F.$$

Aus

$$F = s_1\ s_2 \sin A_3 = s_2\ s_3 \sin A_1 = s_3\ s_1 \sin A_2$$

sowie

$$s_1 = 2\ r \sin A_1;\ s_2 = 2\ r \sin A_2;\ s_3 = 2\ r \sin A_3;$$

wenn r den Radius des durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kreises bezeichnet, ergibt sich:

$$r^2 = \frac{F}{4 \sin A_1 .\ \sin A_2 .\ \sin A_3}$$

und

$$\rho = \frac{F}{2\ r\ (a_1 \sin A_1 + a_2 \sin A_2 + a_3 \sin A_3)}$$

aslo auch:

$$\rho = \frac{2\ r \sin A_1 .\ \sin A_2 .\ \sin A_3}{a_1 \sin A_1 + a_2 \sin A_2 + a_3 \sin A_3}.$$

4. Ist

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

die Gleichung einer Geraden in orthogonalen Coordinaten, worin p immer positiv gerechnet, die Länge der Normalen vom Coordinaten-Anfangspunkt auf die Gerade und α den Winkel, welchen diese Normale mit der positiven Abscissenaxe bildet, bedeuten, so repräsentirt bekanntlich die linke Seite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$$

die Länge der Normalen vom Punkte (x y) auf diese Gerade; mithin sind, wenn

$$x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k - p_k = 0$$

für k = 1, 2, 3 die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind, die homogenen Coordinaten eines Punktes P

$$x_1 = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$$
$$x_2 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2$$
$$x_3 = x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3$$

5. Die Gleichung einer Geraden in solchen Coordinaten hat die Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

denn setzen wir in dieselbe für x_1, x_2, x_3 die vollen Werthe aus (4) ein und vereinigen die Glieder mit x und y, so wird dieselbe zu:

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3)\, x + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3)\, y - (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) = 0$$

Diese Gleichung ist die einer Geraden und identisch mit

$$ax + by + c = 0,$$

wenn

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = a$$
$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = b$$
$$-(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) = c$$

gesetzt wird.

Die Grössen a_1, a_2, a_3 lassen sich aber immer so bestimmen, dass sie diesen drei Gleichungen genügen, so lange die Geraden

$$x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k - p_k = 0$$

für k = 1, 2, 3 ein Dreieck bilden, d. h. nicht durch einen Punkt gehen. In diesem Falle würde die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

auch durch denselben Punkt gehen.

6. Die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte x_1' x_2' x_3' und x_1'' x_2'' x_3'' geht, wird aus den Bedingungsgleichungen:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$a_1 x_2' + a_2 x_2' + a_3 x_3' = 0$$
$$a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + a_3 x_3'' = 0$$

durch Elimination von a_1, a_2, a_3 als:

$$x_1 (x_2' x_3'' - x_3' x_2'') + x_2 (x_3' x_1'' - x_1' x_3'') + x_3 (x_1' x_2'' - x_2' x_1'') = 0$$

gefunden.

7. Sind x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3' und x_1'', x_2'', x_3'' die wirklichen Längen der Normalen von drei Punkten P, P′, P″ auf die Seiten des Fundamentaldreiecks und theilt Punkt P den Abstand der Punkte P′ P″ im Verhältniss m: n, so gelten gerade so, wie für orthogonale Coordinaten die Relationen:

$$x_1 = \frac{m x_1'' + n x_1'}{m + n};\; x_2 = \frac{m x_2'' + n x_2'}{m + n};\; x_3 = \frac{m x_3'' + n x_3'}{m + n}$$

und ist:

$$\frac{m}{n} = \frac{x_1' - x_1}{x_1 - x_1''} = \frac{x_2' - x_2}{x_2 - x_2''} = \frac{x_3' - x_3}{x_3 - x_3''}.$$

Liegt der Theilpunkt P auf der Verlängerung von P′ P″ d. h. ist das Theilverhältniss $-\frac{m}{n}$, so ist

$$x_1 = \frac{mx_1'' - nx_1'}{m - n}; \; x_2 = \frac{mx_2'' - nx_2'}{m - n}; \; x_3 = \frac{mx_3'' - nx_3'}{m - n}$$

Für nicht metrische Relationen, d. h. solche, welche sich nur auf die Lage der Punkte beziehen, können natürlich die constanten Nenner $(m + n)$ resp. $(m - n)$ weggelassen werden.

8. Die Punktpaare P, P′ und P″, P‴ heissen harmonisch, wenn sie so liegen, dass

$$P\,P' : P''\,P' = -\,P\,P''' : P'''\,P'$$

ist. Finden nun zwischen den Coordinaten der Paare P″, P‴ und P, P′ die Relationen statt:

$$x''_k = mx_k + nx'_k,$$
$$x'''_k = mx_k - nx'_k,$$

für $k = 1, 2, 3$ statt, so ist:

$$P\,P'' : P''\,P = m : n$$
$$P\,P''' : P'''\,P = -\,m : n$$

d. h. P, P′ und P″, P‴ sind harmonische Punktpaare.

9. Sind

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = 0$$
$$a_1'\,x + a_2'\,x_2 + a_3'\,x_3 = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden und führen wir dieselben durch Einsetzung der vollen Werthe für x_k aus (2) über in die Formen der Gleichungen von Geraden für orthogonale Coordinaten

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b'y + c' = 0$$

nämlich:

$$(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3)\,x + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3)\,y - (a_1\,p_1 + a_2\,p_2 + a_3\,p_3) = 0$$

und

$$(a'_1 \cos\alpha + a_2' \cos\alpha_2 + a_3' \cos\alpha_3)\,x + (a_1' \sin\alpha_1 + a_2' \sin\alpha_2 + a_3' \sin\alpha_3)\,y - (a_1'\,p_1 + a_2'\,p_2 + a_3'\,p_3) = 0$$

so liefert die für diese Gleichungen bekannte Bedingung der Orthogonalität der Geraden

$$a\,a' + b\,b' = o$$

für homogene Coordinaten nach gehöriger Reduction die Bedingung:

$$a_1\,a_1' + a_2\,a_2' + a_3\,a_3' + (a_1\,a_2' + a_2\,a_1')\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$+ (a_2\,a_3' + a_3\,a_2')\cos(\alpha_2 - \alpha_3) + (a_3\,a_1' + a_1\,a_3')\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$

Denken wir uns der Einfachheit halber den Anfangspunkt innerhalb des Dreiecks gelegt, so sind die Winkel A_1, A_2, A_3 die Supplemente von $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$, wodurch die vorstehende Gleichung übergeht in:

$$a_1\,a_1' + a_2\,a_2' + a_3\,a_3' - (a_1\,a_2' + a_2\,a_1')\cos A_3$$
$$-(a_2\,a_3' + a_3\,a_2')\cos A_1 - (a_3\,a_1' + a_1\,a_3')\cos A_2 = 0$$

10. Die Bedingung, dass zwei Gerade parallel laufen, ist bekanntlich die, dass ihre Gleichungen nur um eine Constante differiren und da nach (2)

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = \text{Const.}$$

ist, so wird die Gleichung

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + \mu\,(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) = 0$$

immer eine zur Geraden:

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = 0$$

parallele Gerade vorstellen, wenn μ irgend eine Verhältnisszahl ist.

11. Die Coordinaten x_1', x_2', x_3' des Schnittpunktes zweier Geraden, deren Gleichungen

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 = 0$$
$$a_1'\, x_1 + a_2'\, x_2 + a_3'\, x_3 = 0$$

sind, werden aus den drei Bedingungsgleichungen:

$$a_1\, x_1' + a_2\, x_2' + a_3\, x_3' = 0$$
$$a_1'\, x_1' + a_2'\, x_2' + a_3'\, x_3' = 0$$
$$s_1\, x_1' + s_2\, x_2' + s_3\, x_3' = F$$

gefunden:

$$x_1' = \frac{F\,(a_2\, a_3' - a_3\, a_2')}{s_1\,(a_2\, a_3' - a_3\, a_2') + s_2\,(a_3\, a_1' - a_1\, a_3') + s_3\,(a_1\, a_2' - a_2\, a_1')}$$
$$x_2' = \frac{F\,(a_3\, a_1' - a_1\, a_3')}{s_1\,(a_2\, a_3' - a_3\, a_2') + s_2\,(a_3\, a_1' - a_1\, a_3') + s_3\,(a_1\, a_2' - a_2\, a_1')}$$
$$x_3' = \frac{F\,(a_1\, a_2' - a_2\, a_1')}{s_1\,(a_2\, a_3' - a_3\, a_2') + s_2\,(a_3\, a_1' - a_1\, a_2') + s_3\,(a_1\, a_2' - a_2\, a_1')}$$

welche Ausdrücke mit Rücksicht auf die Bemerkung in (1) kürzer als:

$$x_1' = a_2\, a_3' - a_3\, a_2'$$
$$x_2' = a_3\, a_1' - a_1\, a_3'$$
$$x_3' = a_1\, a_2' - a_2\, a_1'$$

geschrieben werden können.

12. Sind in abgekürzter Bezeichnung $S_1 = o$ und $S_2 = o$ die Gleichungen zweier Geraden, so werden alle Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden gehen, durch die Gleichung

$$S_1 - \mu\, S_2 = 0$$

repräsentirt, denn die Coordinaten, welche den beiden ersten Gleichungen gleichzeitig genügen, befriedigen auch die dritte.

Aus $S_1 - \mu\, S_2 = o$ folgt $\mu = \frac{S_1}{S_2}$ d. h. nach (4), μ gibt das Verhältniss der Normalen, welche von einem Punkte der dritten Geraden auf die beiden ersten gefällt werden, oder auch das Verhältniss der sinus der Winkel an, in welche der von den beiden ersten Geraden gebildete Winkel durch die dritte getheilt wird.

Die Bedingung, dass drei Gerade, deren Gleichungen

$$S_1 = o,\ S_2 = o,\ S_3 = o$$

sind, durch denselben Punkt gehen, ist also die Relation:

$$\lambda\, S_1 + \mu\, S_2 + \nu\, S_3 = o$$

denn die Werthe der Coordinaten, welche zwei Glieder dieser Gleichung einzeln $= o$ machen, setzen auch das dritte Glied $= o$.

13. Die Gleichung einer Curve zweiten Grades, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht, ist:

$$a_1\, x_2\, x_3 + a_2\, x_3\, x_1 + a_3\, x_1\, x_2 = o,$$

denn es genügen ihr die Coordinaten

$$\left.\begin{matrix} x_1 = o \\ x_2 = o \end{matrix}\right\},\ \text{wie}\ \left.\begin{matrix} x_2 = o \\ x_3 = o \end{matrix}\right\},\ \text{und}\ \left.\begin{matrix} x_3 = o \\ x_1 = o \end{matrix}\right\}$$

Führen wir wieder für $x_k = o$ die vollen Werthe aus (4) ein und ordnen nach den Potenzen von x und y, so geht dieselbe über in:

$$\begin{aligned}
&(a_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + a_2 \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 + a_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2)\, x^2 \\
&+ (a_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + a_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_1 + a_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2)\, y^2 \\
&+ [a_1 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]\, x\, y \\
&- [a_1 (p_3 \cos\alpha_2 + p_2 \cos\alpha_3) + a_2 (p_1 \cos\alpha + p_3 \cos\alpha_1) + a_3 (p_2 \cos\alpha_1 + p_1 \cos\alpha_2)]\, x \\
&- [a_1 (p_3 \sin\alpha_2 + p_2 \sin\alpha_3) + a_2 (p_1 \sin\alpha_3 + p_3 \sin\alpha_1) + a_3 (p_2 \sin\alpha_1 + p_1 \sin\alpha_2)]\, y \\
&+ a_1\, p_2\, p_3 + a_2\, p_3\, p_1 + a_3\, p_1\, p_2 = 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung repräsentirt bekanntlich einen Kreis, wenn die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind und wenn der Coefficient von xy gleich o ist, wenn also:

$$a_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + a_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + a_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$
$$a_1 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

Hieraus bestimmen sich:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \text{ und } \frac{a_2}{a_3} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

also ist nach dem in (9) über die Winkel $(\alpha_1 - \alpha_2)$ etc. etc. Bemerkten:

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3$$

und

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0$$

ist die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises, welcher der Umkreis heissen soll.

14. Da die Gleichungen aller Kreise in orthogonalen Coordinaten so umgeformt werden können, dass die Glieder vom zweiten Grad $x^2 + y^2$ dieselben sind, so leuchtet ein, dass Kreisgleichungen nur im linearen Theil differiren. Es gilt dies natürlich auch für die Gleichungen derselben in trimetrischen Coordinaten, und da wir in (12) die Gleichung eines Kreises in solchen Coordinaten gefunden haben, so können wir die Gleichungen aller Kreise aufstellen, indem wir zu dieser, wenn sie mit einem beliebigen Factor multiplicirt ist, den linearen Ausdruck $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ addiren, welchen wir noch um die Gleichung homogen zu machen mit der Constanten $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3$ multipliciren, und erhalten als die allgemeine Kreisgleichung:

$$k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3)$$
$$+ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) = 0.$$

15. Die Gleichung einer Curve 2. Grads, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt, ist:

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 a_1 x_3 x_1 = 0$$

da sie für $x_1 = 0$ das Quadrat $(a_2 x_2 - a_3 x_3)^2 = 0$ liefert, d. h. die Seite s_1 schneidet die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten oder berührt dieselbe etc. etc.

Soll diese Gleichung einen Kreis vorstellen, so muss sie (nach 14) in der Form:

$$(a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$+ k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0$$

oder, da hieraus sofort $a_1^2 = a'_1 \sin A_1$ etc. etc. folgt, in der Form:

$$\left(\frac{a_1^2}{\sin A_1} x_1 + \frac{a_2^2}{\sin A_2} x_2 + \frac{a_3^2}{\sin A_3} x_3\right)\left(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3\right)$$
$$+ k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0$$

dargestellt werden können.

Es müssen also weiter:

$$-2 a_1 a_2 = \frac{a_1^2}{\sin A_1} \sin A_2 + \frac{a_2^2}{\sin A_2} \sin A_1 + k \sin A_3$$

$$-2 a_2 a_3 = \frac{a_2^2}{\sin A_2} \sin A_3 + \frac{a_3^2}{\sin A_3} \sin A_2 + k \sin A_1$$

$$-2 a_3 a_1 = \frac{a_3^2}{\sin A_3} \sin A_1 + \frac{a_1^2}{\sin A_1} \sin A_3 + k \sin A_2$$

sein, woraus die Bedingung:

$$a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1 = \pm (a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2) = \pm (a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_3)$$

springt.

*

Die vier verschiedenen Formen, in welchen diese Bedingungsgleichungen geschrieben werden können, geben an, dass es vier verschiedene Kreise gibt, welche die Seiten des Dreiecks berühren.

Wählen wir die Form

$$a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1 = a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2$$
$$a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1 = a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_3$$

so erhalten wir:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{\sin A_1 (-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)}{\sin A_3 (\sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3)} = \frac{\cos^2 \frac{A_1}{2}}{\cos^2 \frac{A_3}{2}}$$

und

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\sin A_2 (\sin A_1 - \sin A_2 + \sin A_3)}{\sin A_3 (\sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3)} = \frac{\cos^2 \frac{A_2}{2}}{\cos^2 \frac{A_3}{2}}$$

oder:

$$a_1 : a_2 : a_3 = \cos^2 \frac{A_1}{2} : \cos^2 \frac{A_2}{2} : \cos^2 \frac{A_3}{2}$$

Es ist daher die Gleichung des die Seiten des Dreiecks berührenden Kreises, welchen wir den Inkreis nennen wollen:

$$x_1^2 \cos^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \cos^4 \frac{A_2}{2} + x_3^3 \cos^4 \frac{A_3}{2} - 2 \cos^2 \frac{A_1}{2} \cos^2 \frac{A_2}{2} x_1 x_2 - 2 \cos^1 \frac{A_2}{2} \cos^2 \frac{A_3}{2} x_2 x_3$$
$$- 2 \cos^2 \frac{A_3}{2} \cos^2 \frac{A_1}{2} x_3 x_1 = o.$$

Aus den drei übrigen Formen erhalten wir:

$$a_1 : a_2 : a_3 = - \cos^2 \frac{A_1}{2} : \sin^2 \frac{A_2}{2} : \sin^2 \frac{A_3}{2}$$
$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin^2 \frac{A_1}{2} : - \cos^2 \frac{A_2}{2} : \sin^2 \frac{A_3}{2}$$
$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin^2 \frac{A_1}{2} : \sin^2 \frac{A_2}{2} : - \cos^2 \frac{A_3}{2}$$

und sind daher die Gleichungen der drei anderen Kreise, welche je eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen berühren und die wir Ankreise nennen wollen:

$$x_1^2 \cos^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \sin^4 \frac{A_2}{2} + x_3^2 \sin^4 \frac{A_3}{2} + 2 \cos^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} x_1 x_2 - 2 \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2} x_2 x_3$$
$$+ 2 \sin^2 \frac{A_3}{2} \cos^2 \frac{A_1}{2} x_3 x_1 = o$$

$$x_1^2 \sin^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \cos^4 \frac{A_2}{2} + x_3^2 \sin^4 \frac{A_3}{2} + 2 \sin^2 \frac{A_1}{2} \cos^2 \frac{A_2}{2} x_1 x_2 + 2 \cos^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2} x_2 x_3$$
$$- 2 \sin^2 \frac{A_3}{2} \sin^2 \frac{A_1}{2} x_3 x_1 = o$$

$$x_1^2 \sin^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \sin^4 \frac{A_2}{2} + x_3^2 \cos^4 \frac{A_3}{2} - 2 \sin^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} x_1 x_2 + 2 \sin^2 \frac{A_2}{2} \cos^2 \frac{A_3}{2} x_2 x_3$$
$$+ 2 \cos^2 \frac{A_3}{2} \sin^2 \frac{A_1}{2} x_3 x_1 = o.$$

Um diese Gleichungen in die allgemeine Form der Kreisgleichung in trimetrischen Coordinaten zu bringen, bestimmen wir den Factor k aus den auf der vorigen Seite aufgestellten Gleichungen:

$$- 2 a_1 a_2 = \frac{a_1^2}{\sin A_1} \sin A_2 + \frac{a_2^2}{\sin A_2} \sin A_1 + k \sin A_3.$$

etc. etc.

Für den Inkreis wird

$$k = -\frac{4\cos^2\frac{A_1}{2}\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^3\frac{A_3}{2}}{\sin A_1 \quad \sin A_2 \quad \sin A_3}$$

gefunden, und ist somit die Gleichung des Inkreises:

$$\left(x_1\frac{\cos^4\frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + x_2\frac{\cos^4\frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + x_3\frac{\cos^4\frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$

$$-\frac{4\cos^4\frac{A_1}{2}.\cos^4\frac{A_2}{2}.\cos^4\frac{A_3}{2}}{\sin A_1.\ \sin A_2.\ \sin A_3}(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

16. Die Gleichung des Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten des Fundamentaldreiecks geht, hat die Form:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) +$$
$$k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = o.$$

Die Mitten der Seiten s_1 s_2 s_3 haben die Coordinaten: $(o, \sin A_3, \sin A_2)$; $(\sin A_3, o, \sin A_1)$; $(\sin A_2, \sin A_1, o,)$ welche der Reihe nach in die vorstehende Gleichung eingesetzt, die Bedingungsgleichungen

$$a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2 = -\frac{k}{2} \sin A_1$$

$$a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_3 = -\frac{k}{2}. \sin A_2$$

$$a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1 = -\frac{k}{2} \sin A_3$$

liefern. Hieraus erhält man:

$$a_1 = -\frac{k}{2}. \cos A_1; \quad a_2 = -\frac{k}{2}. \cos A_2; \quad a_3 = -\frac{k}{2}. \text{xos } A_3$$

und ist mithin die Gleichung des sog. Mittenkreises:

$$(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_2 \cos A_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$-2(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

oder in anderer Form:

$$x^2_1 \sin A_1 \cos A_1 + x^2_2 \sin A_2 \cos A_2 + x^2_3 \sin A_3 \cos A_3$$
$$+ (x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2.\sin A_3) = o.$$

Diese Gleichung wird auch durch die Coordinaten der Fusspunkte der Höhen des Fundamentaldreiecks, welche $(0, \cos A_3, \cos A_2)$; $(\cos A_3, 0, \cos A_1)$; $(\cos A_2, \text{eos } A_1, o)$ sind, befriedigt, mithin liegen diese Punkte auf der Peripherie des Mittenkreises.

17. Sind in abgekürzter Bezeichnung $S = o$ und $S_1 = o$ die Gleichungen zweier Kreise in orthogonalen Coordinaten, so repräsentirt die Gleichung $S - k S_1 = o$ bekanntlich einen durch die Schnittpunkte der beiden ersten Kreise gehenden Kreis. Für $k = 1$ jedoch stellt die Gleichung eine Gerade vor und zwar die Radicalaxe der beiden Kreise. In trimetrischen Coordinaten findet man die Gleichung der Radicalaxe zweier Kreise, nachdem man die Gleichungen derselben in die Formen:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) + k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$
$$(a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) + k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

gebracht hat, durch einfache Subtraction als:

$$(a_1 - a'_1) x_1 + (a_2 - a'_2) x_2 + (a_3 - a'_3) x_3 = o.$$

II.

Untersuchung der merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Anwendung der vorstehenden Sätze.

A.

Wir betrachten zunächst die vier bekannten Punkte, den Schwerpunkt S, den Höhenschnittpunkt H, den Mittelpunkt U des Umkreises und den Mittelpunkt M des Mitten- oder Feuerbach'schen Kreises, von welchen bereits Steiner (geometrische Constructionen II, §. 52) nachgewiesen hat, dass sie auf einer Geraden liegen und harmonische Punktpaare sind.

1) Der Schwerpunkt S.

Derselbe wird bestimmt als der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Ecken mit den Mitten der Gegenseiten, der sog. Schwerlinien.

Die Gleichung der von der Ecke A_1 ausgehenden Schwerlinie hat nach (I, 12) da A_1 der Schnittpunkt der Seiten s_2 und s_3 ist, deren Gleichungen $x_2 = o$ und $x_3 = o$ sind, die Form:

$$x_2 - \mu\, x_3 = o$$

Der Factor μ ergibt sich sofort $=$ sin A_3: sin A_2 mithin ist die Gleichung:

$$x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3 = o.$$

Die Gleichungen der von den Ecken A_2 und A_3 ausgehenden Schwerlinien sind:

$$x_3 \sin A_3 - x_1 \sin A_1 = o$$
$$x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 = o$$

Die Summe dieser drei Gleichungen ist identisch $= o$, mithin gehen nach (I, 12) die von ihnen repräsentirten Geraden durch denselben Punkt.

Die Coordinaten dieses Punktes werden nach (I, 10) gefunden:

$$x_1 = \sin A_2 . \sin A_3$$
$$x_2 = \sin A_3 . \sin A_1$$
$$x_3 = \sin A_1 . \sin A_2 .$$

2) Der Schnittpunkt der Höhen H.

Die Gleichung der von der Ecke A_1 ausgehenden Höhe hat wieder die Form:

$$x_2 - \mu\, x_3 = o$$

Der Factor μ ergibt sich hier $=$ cos A_3: cos A_2 mithin ist die Gleichung

$$x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3 = o.$$

Die Gleichungen der von den Ecken A_2 und A_3 ausgehenden Höhen sind entsprechend:

$$x_3 \cos A_3 - x_1 \cos A_1 = o$$
$$x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2 = o.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen ist wieder identisch $= o$ d. h. die von ihnen repräsentirten Geraden gehen durch denselben Punkt.

Die Coordinaten dieses Punktes werden gefunden:

$$x_1 = \cos A_2 . \cos A_3$$
$$x_2 = \cos A_3 . \cos A_1$$
$$x_3 = \cos A_1 . \cos A_2 .$$

3) Der Mittelpunkt des Umkreises U.

Derselbe wird bestimmt als der Schnittpunkt der auf den Seiten des Dreiecks in ihren Mitten errichteten Normalen.

Die Mitte der Seite s_1 ist der Schnittpunkt dieser Seite, deren Gleichung $x_1 = o$, ist und der Schwerlinie von der Ecke A_1 aus, deren Gleichung als $x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3 = o$ gefunden wurde, mithin hat die Gleichung der auf s_1 in der Mitte errichteten Normalen die Form:

$$x_1 - \mu (x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3) = o.$$

Der Factor μ wird aus der Bedingung, dass die Gerade auf $x_1 = o$ normal ist, nach (I. 9) gefunden, als:

$$\mu = - \frac{1}{\sin (A_2 - A_3)}$$

mithin ist die Gleichung der Normalen:

$$x_1 \sin (A_2 - A_3) + x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3 = o.$$

Die Gleichungen der auf s_2 und s_3 in den Mitten errichteten Normalen sind analog:

$$- x_1 \sin A_1 + x_2 \sin (A_3 - A_1) + x_3 \sin A_3 = o$$
$$x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin (A_1 - A_2) = o$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin^2 A_1$, die zweite mit $\sin^2 A_2$ und die dritte mit $\sin^2 A_3$, so ist ihre Summe identisch $= o$, d. h. die drei Normalen gehen durch denselben Punkt.

Die Coordinaten dieses Punktes werden gefunden:

$$* \; x_1 = \cos A_1$$
$$x_2 = \cos A_2$$
$$x_3 = \cos A_3$$

4) Der Mittelpunkt des Mittenkreises M.

Wir bestimmen den Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten des Dreiecks geht, als Schnittpunkt der Normalen, welche auf den Verbindungslinien der Mitten der Seiten in deren Mitten errichtet werden.

Die Coordinaten der Mitte der Geraden, welche die Mitten der Seiten s_2 und s_3 verbindet, werden leicht (nach I, 7) aus den Coordinaten der Mitten dieser Seiten gefunden, als:

$$x_1 = 2 \frac{\sin A_2 . \sin A_3}{\sin A_1}$$
$$x_2 = \sin A_3$$
$$x_3 = \sin A_2$$

Die auf der Verbindungslinie der Mitten von s_2 und s_3 errichtete Normale ist der von A_1 ausgehenden Höhe, deren Gleichung als $x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3 = o$ gefunden wurde, parallel und hat daher ihre Gleichung nach (I, 10) die Form:

$$(x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3) + \mu (x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) = o.$$

Der Factor μ wird aus der Bedingung, dass die vorstehenden Coordinaten die Gleichung befriedigen, gefunden:

$$\mu = \frac{\sin (A_2 - A_3)}{4. \sin A_2 \sin A_3},$$

welcher Werth eingesetzt, die Gleichung liefert:

$$x_1 \sin A_1 \sin (A_2 - A_3) + x_2 \sin A_2 [\sin (A_2 - A_3) + 4 \sin A_3 \cos A_2] + x_3 \sin A_3 [\sin (A_2 - A_3) - 4 \sin A_2 \cos A_3] = o.$$

Die Gleichungen der entsprechenden Normalen auf den Geraden, welche die Mitten der Seiten s_3 und s_1, sowie s_1 und s_2 verbinden, sind:

$$x_1 \sin A_1 [\sin (A_3 - A_1) - 4 \sin A_3 \cos A_1] + x_2 \sin A_2 \sin (A_3 - A_1) + x_3 \sin A_3 [\sin (A_3 - A_1) + 4 \sin A_1 \cos A_3] = o$$
$$x_1 \sin A_1 [\sin (A_1 - A_2) + 4 \cos A_1 \sin A_2] + x_2 \sin A_2 [\sin (A_1 - A_2) - 4 \sin A_1 \cos A_2] + x_3 \sin A_3 \sin (A_1 - A_2) = o.$$

---

* Dass sich dieselben planimetrisch sehr einfach als $r. \cos A_1$, $r \cos A_2$, $r \cos A_3$ ergeben, wenn r den Radius des Umkreises bedeutet, bedarf kaum der Erwähnung.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit sin A_1, die zweite mit sin A_2, die dritte mit sin A_3, so ist ihre Summe identisch = o, d. h. die von ihnen repräsentirten Geraden gehen durch denselben Punkt.

Die Coordinaten dieses Punktes werden gefunden:

$$x_1 = \cos (A_2 - A_3)$$
$$x_2 = \cos (A_3 - A_1)$$
$$x_3 = \cos (A_1 - A_2)$$

Die Relationen

$$\cos A_1 = - \cos (A_2 + A_3) = \sin A_2 \sin A_3 - \cos A_2 \cos A_3$$
$$\cos (A_2 - A_3) = \sin A_2 \sin A_3 + \cos A_2 \cos A_3$$

lassen nach (I, 7 und 8) sofort erkennen, dass die Punkte U und M auf der durch die Punkte S und H bestimmten Geraden liegen und ein denselben zugeordnetes harmonisches Punktpaar bilden.

Die Gleichung ihrer Geraden ist:

$$x_1 \cos A_1 \sin A_1 \sin (A_2 - A_3) + x_2 \cos A_2 \sin A_2 \sin (A_3 - A_1) + x_3 \cos A_3 \sin A_3 \sin (A_1 - A_2) = o$$

Wir bestimmen schliesslich noch das Verhältniss der Strecken, in welche der Abstand H S durch den Punkt M resp. U getheilt wird.

Setzen wir in die unter (I, 3) gefundene Formel:

$$\rho = \frac{2 r \sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3}{x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3}$$

für x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des Schwerpunkts S ein, so wird

$$\rho = \frac{2}{3} r.$$

In derselben Weise finden wir für die Coordinaten des Höhenpunkts H:

$$\rho = 2 r,$$

für die Coordinaten des Mittelpunkts des Umkreises U:

$$\rho = r,$$

für die Coordinaten des Mittelpunkts des Mittenkreises M:

$$\rho = \frac{1}{2} r.$$

Multipliciren wir nun die gefundenen Coordinaten der betr. Punkte mit dem zugehörigen Werthe von ρ so geben die Resultate die wirklichen Längen der Normalen von den betreffenden Punkten auf die Seiten des Fundamentaldreiecks an, aus welchen sich nach (I, 7) die Theilverhältnisse ergeben, als:

$$\frac{MS}{MH} = + \frac{1}{3}$$
$$\frac{US}{UH} = - \frac{1}{3}$$

B.

Dieselbe interessante Beziehung liefert die Betrachtung des Mittelpunkts des Inkreises J., des Radicalcentrums der drei Ankreise R, und des Schnittpunkts T derjenigen drei Geraden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten und der Ankreise verbinden, zu welchen als vierter Punkt wieder der Schwerpunkt S tritt.

1) Der Mittelpunkt des Inkreises J.

Derselbe wird bestimmt als der Schnittpunkt der Halbirungslinien der Winkel A_1, A_2, A_3. Die Gleichungen dieser Geraden sind:

$$x_2 - x_3 = o; \quad x_3 - x_1 = o; \quad x_1 - x_2 = o$$

Da die Summe identisch $= o$ ist, so gehen die Geraden durch denselben Punkt, dessen Coordinaten 1, 1, 1 sind.

2) Das Radicalcentrum der Ankreise R.

Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Ankreise mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ wenn sie mit A_1, A_2, A_3 resp. auf verschiedenen Seiten von s_1, s_2, s_3 liegen und bringen die in I, 14 aufgestellten Gleichungen der Ankreise in die Form:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) + k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

so erhalten wir durch Bestimmung des Factors k, wie diese dort für die Gleichung des Inkreises angegeben, worden ist, für die Kreise um $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ der Reihe nach die Gleichungen:

$$\left(x_1 \frac{\cos^4 \frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + x_2 \frac{\sin^4 \frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + x_3 \frac{\sin^4 \frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- \frac{4 \cos^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2}}{\sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3}(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

$$\left(x_1 \frac{\sin^4 \frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + x_2 \frac{\cos^4 \frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + x_3 \frac{\sin^4 \frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- \frac{4. \sin^2 \frac{A_1}{2} . \cos^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2}}{\sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3}(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o$$

$$\left(x_1 \frac{\sin^4 \frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + x_2 \frac{\sin^4 \frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + x_3 \frac{\cos^4 \frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- \frac{4. \sin^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2} . \cos^2 \frac{A_3}{2}}{\sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3}(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = o.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung bestimmen wir nach (I, 17) die Radicalaxe der Kreise um $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ als

$$x_1 \sin A_1 \cos \frac{A_1 - A_2}{2} - x_2 \sin A_2 \cos \frac{A_1 - A_2}{2} + x_3 2 . \sin^2 \frac{A_3}{2} \sin \frac{A_1 - A_2}{2} = o.$$

Die Gleichungen der Radicalaxen der Ankreise um $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$, sowie um $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_1$ sind analog:

$$x_1 2 \sin^2 \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \sin A_2 . \cos \frac{A_2 - A_3}{2} - x_3 \sin A_3 . \cos \frac{A_2 - A_3}{2} = o$$

$$- x_1 \sin A_1 \cos \frac{A_3 - A_1}{2} + x_2 2 \sin^2 \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 . \cos \frac{A_3 - A_1}{2} . = o.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $\sin A_3 . \cos \frac{A_3}{2}$, die zweite mit $\sin A_1 . \cos \frac{A_1}{2}$, die dritte mit $\sin A_2 . \cos \frac{A_2}{2}$ so verschwindet ihre Summe identisch, d. h. die durch diese Gleichungen vorgestellten Radicalaxen gehen durch denselben Punkt.

Die Coordinaten des Schnittspunkts dieser drei Geraden, also des Radicalcentrums R, werden gefunden

$$x_1 = \sin \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2} . \cos \frac{A_2 - A_3}{2}$$

$$x_2 = \sin \frac{A_3}{2} . \sin \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_3 - A_1}{2}$$

$$x_3 = \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_1 - A_2}{2}$$

3) Der Punkt T.

Der Punkt T ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Ecken A_1, A_2, A_3 mit den Berührungspunkten der resp. Seiten s_1, s_2, s_3 und der Ankreise.

Setzen wir in der Gleichung des Ankreises um $\mathfrak{A}_1$,

$$x_1^2 \cos^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \sin^4 \frac{A_2}{2} + x_3 \sin^4 \frac{A_3}{2} + 2 x_1 x_2 \cos^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} - 2 x_2 x_3 \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2}$$

$$+ 2 x_3 x_1 \sin^2 \frac{A_3}{2} \cos^2 \frac{A_1}{2} = 0$$

$x_1 = 0$, so erhalten wir:

$$\left(x_2 \sin^2 \frac{A_2}{2} - x_3 \sin^2 \frac{A_3}{2} \right)^2 = 0$$

woraus:

$$x_2 : x_3 = \sin^2 \frac{A_3}{2} : \sin^2 \frac{A_2}{2}$$

folgt, mithin sind die Coordinaten des Berührungspunkts der Seite s_1 und des Ankreises um $\mathfrak{A}_1$:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \sin^2 \frac{A_3}{2}; \; x_3 = \sin^2 \frac{A_2}{2}$$

Die Gleichung:

$$x_2 \sin^2 \frac{A_2}{2} - x_3 \sin^2 \frac{A_3}{2} = 0$$

stellt eine durch die Ecke A_1 (den Schnittpunkt der Seiten s_2 und s_3) gehende Gerade vor und da ihr die vorstehenden Coordinaten genügen, so ist sie die Gleichung der Verbindungslinie von A_1 mit dem Berührungspunkt der Seite s_1 und des Ankreises um $\mathfrak{A}_1$.

Die Gleichungen der die Ecken A_2 und A_3 mit den entsprechenden Punkten der Seiten s_2 und s_3 verbindenden Geraden sind:

$$x_3 \sin^2 \frac{A_3}{2} - x_1 \sin^2 \frac{A_1}{2} = 0$$

$$x_1 \sin^2 \frac{A_1}{2} - x_2 \sin^2 \frac{A_2}{2} = 0$$

Die Summe dieser Gleichungen ist wieder identisch $= 0$ d. h. die Geraden gehen durch denselben Punkt. Die Coordinaten dieses Punktes T sind:

$$x_1 = \sin^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2}$$

$$x_2 = \sin^2 \frac{A_3}{2} . \sin^2 \frac{A_1}{2}$$

$$x_3 = \sin^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2}$$

4) Die Coordinaten des Schwerpunkts S siehe unter II, A, 1.

Die Addition der vierfachen Coordinaten des Punktes T zu den Coordinaten des Schwerpunkts liefert:

$$\sin A_2 . \sin A_3 + 4 \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2} = 4 \sin \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2} \cos \frac{A_2 - A_3}{2}$$

$$\sin A_3 . \sin A_1 + 4 \sin^2 \frac{A_3}{2} \sin^2 \frac{A_1}{2} = 4 \sin \frac{A_3}{2} . \sin \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_3 - A_1}{2}$$

$$\sin A_1 . \sin A_2 + 4 \sin^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} = 4 \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_1 - A_2}{2} .$$

Dies sind die Coordinaten des Punkts R, d. h. R liegt auf der durch S und T bestimmten Geraden.

Die Subtraction derselben dagegen liefert:

$$\sin A_2 . \sin A_3 - 4 \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2} = 4 \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2} .$$

$$\sin A_3 . \sin A_1 - 4 \sin^2 \frac{A_3}{2} \sin^2 \frac{A_1}{2} = 4 \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2} .$$

$$\sin A_1 . \sin A_2 - 4 \sin^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} = 4 \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2} .$$

Dies sind Werthe, deren Verhältnisse = 1 sind, oder die Coordinaten des Punktes J; mithin liegt dieser Punkt auf der Verbindungslinie von S und T.

Nach (I, 8) ist auch R und J ein dem Punktpaar S und T harmonisch conjugirtes. Die Gleichung der Geraden dieser 4 Punkte ist:

$$x_1 \sin A_1 (\sin A_2 - \sin A_3) + x_2 \sin A_2 (\sin A_3 - \sin A_1) + x_3 \sin A_3 (\sin A_1 - \sin A_2) = o,$$

oder:

$$x_1 \sin A_1 \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \sin A_2 \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 . \sin \frac{A_3}{2} \sin \frac{A_1 - A_2}{2} = o.$$

Um die Theilverhältnisse des Abstandes ST durch die Punkte R und J zu finden, berechnen wir wieder nach (I, 3) die Factoren ρ, mit welchen die gefundenen proportionalen Theile der Coordinaten der Punkte multiplicirt werden müssen, um die wirklichen Längen zu liefern.

Für die Coordinaten des Punkts S ist oben gefunden:

$$\rho = \frac{2}{3} r$$

Für die Coordinaten des Punkts T finden wir:

$$\rho = 8 r,$$

für die Coordinaten des Punkts R:

$$\rho = 2 r,$$

für die Coordinaten des Punkts J:

$$\rho = 4 r \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2} .$$

Multipliciren wir wieder die gefundenen Coordinaten mit diesen zugehörigen Werthen von ρ und bestimmen nach (I, 7) die Theilverhältnisse, so finden wir:

$$\frac{RS}{RT} = +\frac{1}{3},$$

$$\frac{JS}{JT} = -\frac{1}{3}.$$

C.

Drei weitere Gruppen harmonischer Punktpaare, welche der vorigen entsprechen, erhalten wir, wenn wir den Mittelpunkt je eines Ankreises, das Radicalcentrum des Inkreises und je zweier Ankreise, den Schwerpunkt und einen dem Punkt T entsprechenden Schnittpunkt der Verbindungslinie je einer Ecke mit dem Berührungspunkt der Gegenseite und des Inkreises mit den Verbindungslinien der beiden anderen Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten und der diese Seiten von Aussen berührenden Ankreise in Vertauschung ins Auge fassen.

1) Die Mittelpunkte der Ankreise $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$.

Der Mittelpunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_1$ ist der Schnittpunkt der Halbirungslinien des Winkels A_1 und der Nebenwinkel von A_2 und A_3. Die Gleichungen dieser Geraden sind:

$$x_2 - x_3 = o,$$
$$x_3 + x_1 = o,$$
$$x_1 + x_2 = o.$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung mit -1, so ist ihre Summe identisch $= o$, d. h. die Geraden gehen durch einen Punkt, dessen Coordinaten

$$x_1 = -1,$$
$$x_2 = +1,$$
$$x_3 = +1$$

sind. Die Coordinaten der Mittelpunkte $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ sind:

$$x_1 = +1, \qquad\qquad x_1 = +1,$$
$$x_2 = -1, \qquad \text{und} \qquad x_2 = +1,$$
$$x_3 = +1, \qquad\qquad x_3 = -1.$$

2) Die Radicalcentra des Inkreises und je zweier Ankreise R_1, R_2, R_3.

Verbinden wir nach (I, 17) die Gleichung des Inkreises J.:

$$\left(x_1 \frac{\cos^4 \frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + x_2 \frac{\cos^4 \frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + x_3 \frac{\cos^4 \frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right) (x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- \frac{4 \cos^2 \frac{A_1}{2}. \cos^2 \frac{A_2}{2}. \cos^2 \frac{A_3}{2}}{\sin A_1. \sin A_2. \sin A_3} (x_2\, x_3 \sin A_1 + x_3\, x_1 \sin A_2 + x_1\, x_2 \sin A_3) = o$$

der Reihe nach durch Subtraction mit den unter II, B, 2 aufgestellten Gleichungen der Ankreise um $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, so finden wir die Gleichungen der Radicalaxen des Inkreises und des Ankreises $\mathfrak{A}_1$:

$$x_1\, 2. \cos^2\frac{A_1}{2} \cos \frac{A_2 - A_3}{2} + x_2. \sin A_2 \sin \frac{A_2 - A_3}{2} - x_3 \sin A_3 \sin \frac{A_2 - A_3}{2} = o,$$

des Inkreises und des Ankreises $\mathfrak{A}_2$:

$$- x_1 \sin A_1 \sin \frac{A_3 - A_1}{2} + x_2\, 2 \cos^2 \frac{A_2}{2}. \cos\frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3. \sin\frac{A_3 - A_1}{2}. = o,$$

des Inkreises und des Ankreises $\mathfrak{A}_3$:

$$x_1 \sin A_1 \sin \frac{A_1 - A_2}{2} - x_2 \sin A_2 \sin \frac{A_1 - A_2}{2} + x_3 2. \cos^2\frac{A_3}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2} = o.$$

Multipliciren wir die zweite der vorstehenden Gleichungen mit $- \sin A_2. \sin\frac{A_2}{2}$, die dritte mit $\sin A_3. \sin \frac{A_3}{2}$, und die in II, B. 2 aufgeführte Gleichung der Radicalaxe der Ankreise $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ mit $\sin A_1. \sin\frac{A_1}{2}$, so verschwindet die Summe dieser drei Gleichungen identisch, d. h. die Radicalaxen der Kreise J und $\mathfrak{A}_2$, J und $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ gehen durch denselben Punkt. Die Coordinaten dieses Schnittpunkts, d. i. des Radicalcentrums R_1, der Kreise um J_1, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ werden gefunden:

$$x_1 = \cos \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2}. \cos \frac{A_2 - A_3}{2}$$
$$x_2 = \cos \frac{A_3}{2}. \sin \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_3 - A_1}{2}$$
$$x_3 = - \sin \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \sin \frac{A_1 - A_2}{2}$$

oder nach Division mit $\sin\frac{A_1}{2} . \cos\frac{A_2}{2} . \cos\frac{A_3}{2}$:

$$x_1 = + \frac{\cos\frac{A_2 - A_3}{2}}{\sin\frac{A_1}{2}}, \quad x_2 = + \frac{\sin\frac{A_3 - A_1}{2}}{\cos\frac{A_2}{2}}, \quad x_3 = - \frac{\sin\frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos\frac{A_3}{2}}.$$

Die Coordinaten der Radicalcentra R_2 und R_3 der Kreise um J, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_1$ und J, $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ sind entsprechend:

$$x_1 = - \frac{\sin\frac{A_2 - A_3}{2}}{\cos\frac{A_1}{2}}, \qquad x_1 = + \frac{\sin\frac{A_2 - A_3}{2}}{\cos\frac{A_1}{2}},$$

$$x_2 = + \frac{\cos\frac{A_3 - A_1}{2}}{\sin\frac{A_2}{2}}, \quad \text{und} \quad x_2 = - \frac{\sin\frac{A_3 - A_1}{2}}{\cos\frac{A_2}{2}},$$

$$x_3 = + \frac{\sin\frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos\frac{A_3}{2}}, \qquad x_3 = + \frac{\cos\frac{A_1 - A_2}{2}}{\sin\frac{A_3}{2}}.$$

3) Die Punkte T_1, T_2, T_3.

Aus der Gleichung des Inkreises erhalten wir durch successives Einsetzen von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die Gleichungen:

$$1)\ x_2 \cos^2\frac{A_2}{2} - x_3 \cos^2\frac{A_3}{2} = 0,$$

$$2)\ x_3 \cos^2\frac{A_3}{2} - x_1 \cos^2\frac{A_1}{2} = 0,$$

$$3)\ x_1 \cos^2\frac{A_1}{2} - x_2 \cos^2\frac{A_2}{2} = 0,$$

welche nach dem unter II. B. 3 Bemerkten die Geraden repräsentiren, welche die Ecken A_1, A_2, A_3 mit den Berührungspunkten der resp. Gegenseiten s_1, s_2, s_3, und des Inkreises verbinden.

Die Gleichungen der drei Ankreise liefern nach demselben Verfahren die folgenden Gleichungen der entsprechenden Geraden und zwar der Ankreis um $\mathfrak{A}_1$:

$$4)\ x_2 \sin^2\frac{A_2}{2} - x_2 \sin^2\frac{A_3}{2} = 0,$$

$$5)\ x_3 \sin^2\frac{A_3}{2} + x_1 \cos^2\frac{A_1}{2} = 0,$$

$$6)\ x_1 \cos^2\frac{A_1}{2} + x_2 \sin^2\frac{A_2}{2} = 0;$$

der Ankreis um $\mathfrak{A}_2$:

$$7)\ x_2 \cos^2\frac{A_2}{2} + x_3 \sin^2\frac{A_3}{2} = 0,$$

$$8)\ x_3 \sin^2\frac{A_3}{2} - x_1 \sin^2\frac{A_1}{2} = 0,$$

$$9)\ x_1 \sin^2\frac{A_1}{2} + x_2 \cos^2\frac{A_2}{2} = 0;$$

der Ankreis um $\mathfrak{A}_3$:

$$10)\ x_2 \sin^2 \frac{A_2}{2} + x_3 \cos^2 \frac{A_3}{2} = o,$$

$$11)\ x_1 \cos^2 \frac{A_3}{2} + x_1 \sin^2 \frac{A_1}{2} = o,$$

$$12)\ x_1 \sin^2 \frac{A_1}{2} - x_2 \sin^2 \frac{A_2}{2} = o.$$

Die Summe der drei ersten Gleichungen ist identisch $= o$; ebenso die Summe der Gleichungen 4, 5, 6, sowie 7, 8, 9 und 10, 11, 12, wenn die Gleichungen 6, 7, 11 vorher mit -1 multiplicirt werden, d. h. die durch jede dieser 4 Gruppen von Gleichungen repräsentirten drei Geraden schneiden sich in demselben Punkte. Diese 4 Punkte werden wir später behandeln.

Jetzt fassen wir die Gleichungen 1, 11, 9 ins Auge und erkennen, dass, wenn 9 mit -1 multiplicirt wird, ihre Summe $= o$ ist, dass also auch die von ihnen vorgestellten Geraden durch denselben Punkt gehen.

Es repräsentirt aber die Gleichung (1) die Verbindungslinie der Ecke A_1 mit dem Punkte, in welchem der Inkreis J die Seite s_1 berührt; die Gleichung (11) die Verbindungslinie der Ecke A_2 mit dem Punkt, in welchem der Ankreis $\mathfrak{A}_3$ die Seite s_2 berührt, und die Gleichung (9) die Verbindungslinie der Ecke A_3 mit dem Punkt, in welchem der Ankreis $\mathfrak{A}_2$ die Seite s_3 berührt. Der Schnittpunkt dieser drei Geraden, welchen wir mit T_1 bezeichnen wollen, hat die Coordinaten:

$$x_1 = -\cos^2 \frac{A_2}{2} . \cos^2 \frac{A_3}{2},$$

$$x_2 = \cos^2 \frac{A_3}{2} . \sin^2 \frac{A_1}{2},$$

$$x_3 = \sin^2 \frac{A_1}{2} . \cos^2 \frac{A_2}{2}.$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte T_2 und T_3 werden aus den Gleichungen 2, 6, 10, sowie 3, 5, 8 erhalten:

$$x_1 = \sin^2 \frac{A_2}{2} . \cos^2 \frac{A_3}{2}, \qquad x_1 = \cos^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2},$$

$$x_2 = -\cos^2 \frac{A_3}{2} . \cos^2 \frac{A_1}{2}, \quad \text{und} \quad x_2 = \sin^2 \frac{A_3}{2} . \cos^2 \frac{A_1}{2},$$

$$x_3 = \cos^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2}, \qquad x_1 = -\cos^2 \frac{A_1}{2} . \cos^2 \frac{A_2}{2}.$$

Die Addition der Coordinaten des Radicalcentrums R_1 zu den Coordinaten des Mittelpunkts $\mathfrak{A}_1$ liefert:

$$-1 + \frac{\cos \frac{A_2 - A_3}{2}}{\sin \frac{A_1}{2}} = 2. \frac{\sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2}}{\sin \frac{A_1}{2}}$$

$$+1 + \frac{\sin \frac{A_3 - A_1}{2}}{\cos \frac{A_2}{2}} = 2. \frac{\sin \frac{A_3}{2} . \cos \frac{A_1}{1}}{\cos \frac{A_2}{2}}$$

$$+1 + \frac{\sin \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}} = 2. \frac{\sin \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_1}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}}$$

woraus sich durch Multiplication mit $2 \sin \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_3}{2}$ die Coordinaten des Schwerpunkts S ergeben.

Die Subtraction dagegen liefert:

$$-1 - \frac{\cos \frac{A_2 - A_3}{2}}{\sin \frac{A_1}{2}} = -2 . \frac{\cos \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_3}{2}}{\sin \frac{A_1}{2}},$$

$$+1 - \frac{\sin \frac{A_3 - A_1}{2}}{\cos \frac{A_2}{2}} = 2 . \frac{\sin \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_3}{1}}{\cos \frac{A_2}{2}},$$

$$+1 + \frac{\sin \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}} = 2 . \frac{\sin \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_2}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}},$$

woraus wir durch Multiplication mit $\frac{1}{2} \sin \frac{A_1}{2} \cos \frac{A_2}{2} \cos \frac{A_3}{2}$ die Coordinaten des Punkts T_1 erhalten.

Es liegen somit die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und R_1 auf der durch S und T_1 bestimmten Geraden und sind denselben harmonisch conjugirt.

Dasselbe gilt von den Punktpaaren $\mathfrak{A}_2$, R_2 und S, T_2; sowie von $\mathfrak{A}_3$, R_3 und S, T_3.

Die Gleichungen der Geraden, auf welchen diese Punkte liegen, sind:

$$x_1 \sin A_1 \sin \frac{A_1}{2} . \sin \frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \sin A_2 \cos \frac{A_2}{2} \cos \frac{A_3 - A_1}{2} - x_3 \sin A_3 \cos \frac{A_3}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2} = 0$$

$$- x_1 \sin A_1 \cos \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \sin A_2 \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 \cos \frac{A_3}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2} = 0$$

$$x_1 \sin A_1 \cos \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_2 - A_3}{2} - x_2 \sin A_2 \cos \frac{A_2}{2} \cos \frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 \sin \frac{A_3}{2} . \sin \frac{A_1 - A_2}{2} = 0.$$

Der Factor ρ, welcher durch Multiplication die gefundenen Verhältnisse der Coordinaten der hier behandelten Punkte in die wirklichen Längen überführt, wird

für die Coordinaten der Punkte R_1, R_2, R_3, gerade so, wie für R, als 2 r,

für die Coordinaten der Punkte T_1, T_2, T_3, gerade so, wie für T, als 8 r,

für die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, entsprechend J, als $4 . r . \sin \frac{A_1}{2} \cos \frac{A_2}{2} \cos \frac{A_3}{2}$; $4 r . \cos \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} \cos \frac{A_3}{2}$; $4 . r \cos \frac{A_1}{2} . \cos \frac{A_2}{2} . \sin \frac{A_3}{2}$ gefunden.

Aus den Längen bestimmen sich die Theilverhältnisse:

$$\frac{R_1 S}{R_1 T} = \frac{R_2 S}{R_2 T} = \frac{R_3 S}{R_3 T} = + \frac{1}{3}$$

$$\frac{\mathfrak{A}_1 S}{\mathfrak{A}_1 T} = \frac{\mathfrak{A}_2 S}{\mathfrak{A}_2 T} = \frac{\mathfrak{A}_3 S}{\mathfrak{A}_3 T} = - \frac{1}{3}$$

D.

Im Folgenden ziehen wir noch eine Reihe von Punkten in die Untersuchung, von welchen sich wohl nachweisen lässt, dass sie zu je dreien auf einer Geraden liegen, zu welchen jedoch den vierten harmonischen Punkt zu deuten, bis jetzt nicht gelungen ist.

1) Wir wenden uns zunächst zu den Punkten, welche bereits unter (C, 3) erwähnt worden sind.

Die Geraden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Punkten verbinden, in welchen der Inkreis die Gegenseiten berührt, liefern einen Schnittpunkt, welcher F heissen soll, dessen Coordinaten sich aus den in (C, 3) aufgestellten Gleichung 1, 2, 3 ergeben, als:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \cos^2 \frac{A_2}{2} . \cos \frac{A_3}{2}, \\
x_2 &= \cos^2 \frac{A_3}{2} . \cos^2 \frac{A_1}{2}, \\
x_3 &= \cos^2 \frac{A_1}{2} . \cos^2 \frac{A_2}{2}.
\end{aligned}
$$

Drei entsprechende Schnittpunkte F_1, F_2, F_3 liefern die Verbindungslinien der Ecken mit den Punkten, in welchen die Ankreise $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ die Gegenseiten berühren und bestimmen sich deren Coordinaten aus den eben dort aufgestellten Gleichungen (4, 5, 6,); (7, 8, 9,); (10, 11, 12) als:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = - \sin^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2}, & x_1 = \cos^2 \frac{A_2}{2} . \sin^2 \frac{A_3}{2}, & x_1 = \sin^2 \frac{A_2}{2} . \cos^2 \frac{A_3}{2}, \\
x_2 = + \sin^2 \frac{A_3}{2} . \cos^2 \frac{A_1}{2} & x_2 = - \sin^2 \frac{A_3}{2} . \sin^2 \frac{A_1}{2}, & x_2 = \cos^2 \frac{A_3}{2} . \sin^2 \frac{A_1}{2}, \\
x_3 = + \cos^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2}; & x_1 = \sin^2 \frac{A_1}{2} . \cos^2 \frac{A_2}{2}; & x_3 = - \sin^2 \frac{A_1}{2} . \sin^2 \frac{A_2}{2}.
\end{array}
$$

2) Wir untersuchen weiter die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Mittelpunkten der Ankreise mit den Berührungspunkten der Seiten des Dreiecks und der 4 Berührungskreise.

Durch successives Einsetzen von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in die Gleichungen des Inkreises bestimmen wir die Coordinaten der Berührungspunkte der Seiten des Dreiecks mit dem Inkreis und erhalten für den Punkt

$$
\begin{array}{lll}
\text{auf } s_1: & \text{auf } s_2: & \text{auf } s_3: \\
x_1 = 0, & x_1 = \cos^2 \frac{A_3}{2}, & x_1 = \cos^2 \frac{A_2}{2}, \\
x_2 = \cos^2 \frac{A_3}{2}, & x_2 = 0, & x_2 = \cos^2 \frac{A_1}{2}, \\
x_3 = \cos^2 \frac{A_2}{2}; & x_3 = \cos^2 \frac{A_1}{2}; & x_3 = 0;
\end{array}
$$

Die Gleichungen der Verbindungslinien dieser Punkte mit den Mittelpunkten der die betreffenden Seiten von Aussen berührenden Ankreise, deren Coordinaten $(-1, +1, +1)$; $(+1, -1, +1)$; $(+1, +1, -1)$ sind, findet man nach (I, 6):

$$
\begin{aligned}
x_1 \left(\cos^2 \frac{A_2}{2} - \cos^2 \frac{A_3}{2} \right) + x_2 \cos^2 \frac{A_2}{2} - x_3 \cos^2 \frac{A_3}{2} &= 0, \\
- x_1 \cos^2 \frac{A_1}{2} + x_2 \left(\cos^2 \frac{A_3}{2} - \cos^2 \frac{A_1}{2} \right) + x_3 \cos^2 \frac{A_3}{2} &= 0, \\
x_1 \cos^2 \frac{A_1}{2} - x_2 \cos^2 \frac{A_2}{2} + x_3 \left(\cos^2 \frac{A_1}{2} - \cos^2 \frac{A_2}{2} \right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos^2 \frac{A_1}{2}, \cos^2 \frac{A_2}{2}, \cos^2 \frac{A_3}{2}$, so verschwindet ihre Summe identisch, mithin gehen die durch sie vorgestellten Geraden durch denselben Punkt.

Die Coordinaten dieses Punkts, welcher E heissen soll, werden gefunden:

$$x_1 = \sin\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}\ \cos\frac{A_3}{2}, \qquad\qquad x_1 = \operatorname{tang}\frac{A_1}{2},$$

$$x_2 = \cos\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \cos\frac{A_3}{2}, \qquad \text{oder} \qquad x_2 = \operatorname{tang}\frac{A_2}{2},$$

$$x_3 = \cos\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2}. \qquad\qquad x_3 = \operatorname{tang}\frac{A_3}{2}.$$

Durch Einsetzen der Werthe $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = o$ in die Gleichungen der Ankreise erhalten wir die Coordinaten der Berührungspunkte dieser Kreise mit den Seiten des Dreiecks.

Der Ankreis $\mathfrak{A}_1$ berührt die Seiten:

s_1 in:	s_2 in:	s_3 in:
$x_1 = 0,$	$x_1 = -\sin^2\frac{A_3}{2},$	$x_1 = -\sin^2\frac{A_2}{2},$
$x_2 = \sin^2\frac{A_3}{2},$	$x_2 = 0,$	$x_2 = \cos^2\frac{A_1}{2},$
$x_3 = \sin^2\frac{A_2}{2}.$	$x_3 = \cos^2\frac{A_1}{2}.$	$x_3 = 0.$

Der Ankreis $\mathfrak{A}_2$ berührt die Seiten:

s_1 in:	s_2 in:	s_3 in:
$x_1 = o,$	$x_1 = \sin^2\frac{A_3}{2},$	$x_1 = \cos^2\frac{A_2}{2},$
$x_2 = -\sin^2\frac{A_3}{2},$	$x_2 = 0,$	$x_2 = -\sin^2\frac{A_1}{2},$
$x_3 = \cos^2\frac{A_2}{2}.$	$x_2 = \sin^2\frac{A_1}{2}.$	$x_3 = 0.$

Der Ankreis $\mathfrak{A}_3$ berührt die Seiten:

s_1 in:	s_2 in:	s_1 in:
$x_1 = 0,$	$x_1 = \cos^2\frac{A_3}{2},$	$x_1 = \sin^2\frac{A_2}{2}$
$x_2 = \cos^2\frac{A_3}{2},$	$x_2 = 0,$	$x_2 = \sin^2\frac{A_1}{2},$
$x_3 = -\sin^2\frac{A_2}{2}.$	$x_3 = -\sin^2\frac{A_1}{2}.$	$x_3 = 0.$

Hieraus erhalten wir in Verbindung mit den Coordinaten der Mittelpunkte des Inkreises und der resp. Ankreise die Gleichungen der betreffenden Verbindungslinien.

Die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt des Inkreises J mit dem Berührungspunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_1$ und der Seite s_1 verbindet, ist:

$$x_1\left(\sin^2\frac{A_2}{2} - \sin^2\frac{A_3}{2}\right) - x_2\sin^2\frac{A_2}{2} + x_3\sin^2\frac{A_3}{2} = o.$$

Die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_3$ mit dem Berührungspunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_1$ und der Seite s_2 verbindet, ist:

$$x_1\cos^2\frac{A_1}{2} + x_2\left(\sin^2\frac{A_3}{2} - \cos^2\frac{A_1}{2}\right) + x_3\sin^2\frac{A_1}{2} = 0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_2$ mit dem Berührungspunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_1$ und der Seite s_3 verbindet, ist:

$$-x_1\cos^2\frac{A_1}{2} - x_2\sin^2\frac{A_2}{2} + x_3\left(\cos^2\frac{A_1}{2} - \sin^2\frac{A_2}{2}\right) = o.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $-\cos^2\frac{A_1}{2}$, $\sin^2\frac{A_2}{2}$, $\sin^2\frac{A_3}{2}$ so verschwindet ihre Summe identisch. Die dadurch repräsentirten Geraden gehen also durch denselben Punkt E_1.

Die Coordinaten dieses Punktes werden gefunden:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \sin\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3}{2}, & & x_1 = \operatorname{tang}\frac{A_1}{2}, \\ x_2 = \cos\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3}{2}, & \text{oder auch} & x_2 = \operatorname{cotg}\frac{A_2}{2}, \\ x_3 = \cos\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2}. & & x_3 = \operatorname{cotg}\frac{A_3}{2}. \end{array}$$

In gleicher Weise schneiden sich in einem Punkte E_2 die Verbindungslinien der Mittelpunkte $\mathfrak{A}_3$, J, $\mathfrak{A}_1$ mit den resp. Berührungspunkten des Ankreises $\mathfrak{A}_2$ und der Seiten s_1, s_2, s_3; und endlich in einem Punkt E_3 die Verbindungslinien der Mittelpunkte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1$, J mit den resp. Berührungspunkten des Ankreises $\mathfrak{A}_3$ und der Seiten s_1, s_2, s_3.

Die Coordinaten dieser Punkte E_2 und E_3 sind:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \operatorname{cotg}\frac{A_1}{2}, & & x_1 = \operatorname{cotg}\frac{A_1}{2}, \\ x_2 = \operatorname{tang}\frac{A_2}{2}, & \text{und} & x_2 = \operatorname{cotg}\frac{A_2}{2}, \\ x_3 = \operatorname{cotg}\frac{A_3}{2}, & & x_3 = \operatorname{tang}\frac{A_3}{2}. \end{array}$$

Die Subtraction der Coordinaten des Punkts E von denen des Punkts F liefert:

$$\cos^2\frac{A_2}{2}.\cos^2\frac{A_3}{2} - \sin\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2} = \frac{1}{4}\sin A_2.\sin A_3,$$

$$\cos^2\frac{A_3}{2}.\cos^2\frac{A_1}{2} - \sin^2\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2}.\cos\frac{A_1}{2} = \frac{1}{4}\sin A_3.\sin A_1,$$

$$\cos^2\frac{A_1}{2}.\cos^2\frac{A_2}{2} - \sin^2\frac{A_3}{2}.\cos\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2} = \frac{1}{4}\sin A_1.\sin A_2,$$

also die Coordinaten des Schwerpunkts S. Es liegen also die Punkte E, F, S auf derselben Geraden.

Es gilt dasselbe von den Punkten E_1, F_1, S, sowie von E_2, F_2, S, und endlich von E_3, F_3, S.

Die Gleichung der Geraden der Punkte E, F, S ist:

$$x_1\sin A_1\cos\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2-A_3}{2} + x_2\sin A_2\cos\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3-A_1}{2} + x_3\sin A_3.\cos\frac{A_3}{2}\sin\frac{A_1-A_2}{2} = 0.$$

Die Gleichungen der Geraden E_1 F_1 S, E_2 F_2 S, und E_3 F_3 S sind:

$$x_1\sin A_1.\cos\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2-A_3}{2} - x_2.\sin A_2\sin\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3-A_1}{2} + x_3\sin A_3\sin\frac{A_3}{2}.\cos\frac{A_1-A_2}{2} = 0,$$

$$x_1\sin A_1\sin\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2-A_3}{2} + x_2\sin A_2\cos\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3-A_1}{2} - x_3\sin A_3.\sin\frac{A_3}{2}\cos\frac{A_1-A_2}{2} = 0.$$

$$-x_1\sin A_1\sin\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2-A_3}{2} + x_2\sin A_2.\sin\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3-A_1}{2} + x_3\sin A_3.\cos\frac{A_3}{2}.\cos\frac{A_1-A_2}{2}. = 0,$$

3) Bilden wir aus den Coordinaten der Mittelpunkte der Ankreise und den Coordinaten der Mitten der Seiten des Dreiecks, die Gleichungen der diese Punkte verbindenden Geraden, so erhalten wir der Reihe nach als Gleichungen der Verbindungslinien von $\mathfrak{A}_1$ mit der Mitte von s_1, von $\mathfrak{A}_2$ mit der Mitte von s_2 und von $\mathfrak{A}_3$ mit der Mitte von s_3:

$$x_1 (\sin A_2 - \sin A_3) + x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3 = 0,$$
$$- x_1 \sin A_1 + x_2 (\sin A_3 - \sin A_1) + x_3 \sin A_3 = 0,$$
$$x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 (\sin A_1 - \sin A_2) = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$, so verschwindet ihre Summe identisch. Die Coordinaten ihres Schnittpunkts G werden gefunden:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \cos\frac{A_1}{2} . \sin\frac{A_2}{2} . \sin\frac{A_3}{2}, & & \operatorname{cotg}\frac{A_1}{2}, \\ x_2 = \sin\frac{A_1}{2} . \cos\frac{A_2}{2} . \sin\frac{A_3}{2}, & \text{oder} & \operatorname{cotg}\frac{A_2}{2}, \\ x_3 = \sin\frac{A_1}{2} . \sin\frac{A_2}{2} . \cos\frac{A_3}{2}; & & \operatorname{cotg}\frac{A_3}{2}. \end{array}$$

Diesem Punkt G entsprechen drei weitere Punkte G_1, G_2, G_3. Es ist nämlich die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt J mit der Mitte von s_1 verbindet:

$$x_1 (\sin A_2 - \sin A_3) - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche den Mitelpunkt $\mathfrak{A}_3$ mit der Mitte von s_2 verbindet, ist:

$$x_1 \sin A_1 - x_2 (\sin A_3 + \sin A_1) - x_3 \sin A_3 = 0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt $\mathfrak{A}_2$ mit der Mitte von s_3 verbindet, ist:

$$- x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 (\sin A_1 + \sin A_2) = 0.$$

Auch diese drei Geraden gehen durch denselben Punkt, da die Summe ihrer Gleichungen identisch verschwindet, wenn sie der Reihe nach mit $- \sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$ multiplicirt werden.

Der Schnittpunkt derselben G_1 hat die Coordinaten:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \cos\frac{A_1}{2} . \cos\frac{A_2}{2} . \cos\frac{A_3}{2}, & & \operatorname{cotg}\frac{A_1}{2}, \\ x_2 = \sin\frac{A_1}{2} . \sin\frac{A_2}{2} . \cos\frac{A_3}{2}, & \text{oder} & \operatorname{tang}\frac{A_2}{2}, \\ x_3 = \sin\frac{A_1}{2} . \cos\frac{A_2}{2} . \sin\frac{A_3}{2}. & & \operatorname{tang}\frac{A_3}{2}. \end{array}$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte G_2 und G_3 sind:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \operatorname{tang}\frac{A_1}{2}, & & x_1 = \operatorname{tang}\frac{A_1}{2}, \\ x_2 = \operatorname{cotg}\frac{A_2}{2}, & \text{und} & x_2 = \operatorname{tang}\frac{A_2}{2}, \\ x_3 = \operatorname{tang}\frac{A_3}{2}, & & x_3 = \operatorname{cotg}\frac{A_3}{2}. \end{array}$$

Bilden wir die Gleichung der Geraden, welche den Punkt G mit dem Schwerpunkt des Dreiecks S verbindet, so erhalten wir:

$$x_1 \sin A_1 \cos\frac{A_1}{2} \sin\frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \sin A_2 \cos\frac{A_2}{2} \sin\frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 . \cos\frac{A_3}{2} \sin\frac{A_1 - A_2}{2} = 0.$$

Die Gleichung der Verbindungslinie von G_1 und S ist:

$$x_1 \sin A_1 . \cos\frac{A_1}{2} \sin\frac{A_2 - A_3}{2} - x_2 . \sin A_2 \sin\frac{A_2}{2} \cos\frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \sin A_3 \sin\frac{A_3}{2} . \cos\frac{A_1 - A_2}{2} = 0.$$

Es sind diese Gleichungen dieselben, welche wir oben für die Geraden gefunden haben, auf welchen die Punkte E, F, S sowie E_1, F_1, S liegen, mithin liegen die Punkte G, G_1 etc. etc. auf eben diesen Geraden; jedoch sind dieselben nicht die zu jenen Punkten 4ten harmonischen.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Verbindungslinien der Mittelpunkte der Berührungskreise mit den Fusspunkten der Höhen der Fusspunkte.

Es sind die Coordinaten der Fusspunkte der Höhen auf Seite

s_1:	s_2:	s_3:
$x_1 = 0,$	$x_1 = \cos A_3,$	$x_1 = \cos A_2,$
$x_2 = \cos A_3,$	$x_2 = 0,$	$x_2 = \cos A_1,$
$x_3 = \cos A_2;$	$x_3 = \cos A_1;$	$x_3 = 0,$

und es ergeben sich die Gleichungen der die Mittelpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ mit diesen Punkten verbindenden Geraden:

$$x_1 \; (\cos A_2 - \cos A_3) + x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3 = 0,$$
$$- x_1 \; \cos A_1 + x_2 \; (\cos A_3 - \cos A_1) + x_3 \cos A_3 = 0,$$
$$x_1 \; \cos A_1 - x_2 \cos A_2 + x_3 \; (\cos A_1 - \cos A_2) = 0.$$

Die Summe dieser Gleichungen verschwindet identisch, wenn dieselben der Reihe nach mit $\cos A_1$, $\cos A_2$, $\cos A_3$ multiplicirt werden. Die Coordinaten des Schnittpunkts K dieser Geraden sind:

$$x_1 = 4. \sin \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1,$$

$$x_2 = 4. \cos \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1,$$

$$x_3 = 4. \cos \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \sin \frac{A_3}{2} - 1.$$

Die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt J mit dem Fusspunkt der Höhe auf Seite s_1 verbindet, ist:

$$x_1 \; (\cos A_2 - \cos A_3) - x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Geraden, welche die Mittelpunkte $\mathfrak{A}_3$ resp. $\mathfrak{A}_2$ mit den Fusspunkten der Höhen auf s_2 resp. s_3 verbinden, sind:

$$x_1 \cos A_1 - x_2 \; (\cos A_3 + \cos A_1) - x_3 \cos A_3 = 0,$$
$$- x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \; (\cos A_1 + \cos A_2) = 0.$$

Die Summe dieser Gleichungen verschwindet identisch, wenn man dieselben der Reihe nach mit $- \cos A_1$, $\cos A_2$, $\cos A_3$ multiplicirt; es gehen also auch diese Geraden durch denselben Punkt K_1, dessen Coordinaten sich bestimmen, als:

$$x_1 = 1 + 4 \sin \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_2}{2}, \sin \frac{A_3}{2}.$$

$$x_2 = 4 \cos \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \sin \frac{A_3}{2} - 1,$$

$$x_3 = 4. \cos \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1.$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte K_2 und K_3 sind:

$$x_1 = 4. \cos \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \sin \frac{A_3}{2} - 1, \qquad x_1 = 4. \cos \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1,$$

$$x_2 = 1 + 4 \sin \frac{A_1}{2}. \sin \frac{A_2}{2}. \sin \frac{A_3}{2}, \quad \text{und} \quad x_2 = 4. \sin \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1,$$

$$x_3 = 4. \sin \frac{A_1}{2}. \cos \frac{A_2}{2}. \cos \frac{A_3}{2} - 1; \qquad x_3 = 1 + 4 \sin \frac{A_1}{2}, \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2}.$$

Mit diesen Punkten stehen in interessanter Beziehung die Schnittpunkte der Geraden, welche die Mittelpunkte der Berührungskreise mit den Berührungspunkten der Seiten des Dreiecks und der Ankreise verbinden.

Die Gleichungen der Geraden, welche die Mittelpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, der Ankreise mit den Berührungspunkten dieser Kreise und der Seiten s_1, s_2, s_3, — deren Coordinaten sich in (D, 2) finden, — sind:

$$x_1\left(\sin^2\frac{A_2}{2}-\sin^2\frac{A_3}{2}\right)+x_2\sin^2\frac{A_2}{2}-x_3\sin^2\frac{A_3}{2}=0,$$

$$-x_1\sin^2\frac{A_1}{2}+x_2\left(\sin^2\frac{A_3}{2}-\sin^2\frac{A_1}{2}\right)+x_3\sin^2\frac{A_3}{2}=0,$$

$$x_1\sin^2\frac{A_1}{2}-x_2\sin^2\frac{A_2}{2}+x_3\left(\sin^2\frac{A_1}{2}-\sin^2\frac{A_2}{2}\right)=0.$$

Die Summe dieser Gleichungen verschwindet identisch, wenn sie der Reihe nach mit $\sin^2\frac{A_1}{2}$, $\sin^2\frac{A_2}{2}$, $\sin^2\frac{A_3}{2}$ multiplicirt werden; es gehen also die Geraden durch denselben Punkt, welcher N heissen soll. Seine Coordinaten sind:

$$x_1=1-2\sin\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3}{2},$$

$$x_2=1-2\cos\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3}{2},$$

$$x_3=1-2\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2}.$$

Die Gerade, welche den Mittelpunkt J mit dem Berührungspunkt des Ankreises $\mathfrak{A}_1$ und der Seite s_1 verbindet, hat die Gleichung:

$$x_1\left(\sin^2\frac{A_2}{2}-\sin^2\frac{A_3}{2}\right)-x_2\sin^2\frac{A_2}{2}+x_3\sin^2\frac{A_3}{2}=0.$$

Die Geraden, welche die Mittelpunkte $\mathfrak{A}_3$ resp. $\mathfrak{A}_2$ mit den Berührungspunkten des Ankreises $\mathfrak{A}_2$ und der Seite s_2, resp. $\mathfrak{A}_3$ und der Seite s_3 verbinden, haben die Gleichungen:

$$x_1\sin^2\frac{A_1}{2}-x_2\left(\sin^2\frac{A_3}{2}+\sin^2\frac{A_1}{2}\right)-x_3\sin^2\frac{A_1}{2}=0.$$

$$-x_1\sin^2\frac{A_1}{2}+x_2\sin^2\frac{A_2}{2}+x_3\left(\sin^2\frac{A_1}{2}+\sin^2\frac{A_2}{2}\right)=0.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen mit $-\sin^2\frac{A_1}{2}$, $\sin^2\frac{A_2}{2}$, $\sin^2\frac{A_3}{2}$ lässt die Summe dieser Gleichungen identisch verschwinden, wesshalb auch diese Geraden durch denselben Punkt N_1 gehen. Die Coordinaten dieses Punkts sind:

$$x_1=1-2\sin\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2},$$

$$x_2=1-2\cos\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2},$$

$$x_3=1-2\cos\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \cos\frac{A_3}{2}.$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte N_2 und N_3 sind:

$$x_1=1-2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2},\qquad x_1=1-2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \cos\frac{A_3}{2},$$

$$x_2=1-2.\ \sin\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2},\qquad \text{und}\qquad x_2=1-2.\ \sin\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}.\ \cos\frac{A_3}{2},$$

$$x_3=1-2.\ \sin\frac{A_1}{2}.\ \cos\frac{A_2}{2}.\ \cos\frac{A_3}{2};\qquad x_3=1-2.\ \sin\frac{A_1}{2}.\ \sin\frac{A_2}{2}.\ \sin\frac{A_3}{2}.$$

Die Addition der Coordinaten der Punkte K und N liefert:

$$2.\ \sin\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2},$$

$$2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2},$$

$$2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3}{2}.$$

Diese Werthe sind die unter (D, 2) gefundenen Coordinaten des Punkts E; mithin liegen K, N, E auf derselben Geraden, deren Gleichung sich ergibt als:

$$x_1 \cos\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2 - A_3}{2} + x_2 \cos\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3 - A_1}{2} + x_3 \cos\frac{A_3}{2}\sin\frac{A_1 - A_2}{2} = 0.$$

Die Addition der Coordinaten der Punkte K_1 und N_1 dagegen liefert:

$$2.\left(1 + \sin\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3}{2}\right),$$

$$2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\cos\frac{A_2}{2}.\sin\frac{A_3}{2},$$

$$2.\ \cos\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}.\cos\frac{A_3}{2}.$$

Es sind diese Werthe die Coordinaten eines dem Punkte E entsprechenden Punktes, welcher der Schnittpunkt dreier Geraden ist, welche die Mittelpunkte J, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2$, mit den Berührungspunkten des Inkreises und der Seiten s_1, s_2, s_3 verbinden. Es liegt also dieser Punkt, den wir e_1 nennen wollen, mit K_1 und N_1 auf derselben Geraden. Dasselbe gilt von den Punkten K_2, N_2, e_2 und K_3, N_3, e_3.

Es lässt sich annehmen, dass auch diejenigen 4ten Punkte, welche mit den unter D behandelten Gruppen von je dreien, harmonische Punktsysteme bilden, einer geometrischen Interpretation fähig sind. Indem wir uns diese Untersuchung für später vorbehalten, fügen wir zum Schluss noch Folgendes an:

Verbinden wir die Mittelpunkte der Ankreise durch gerade Linien, so entsteht das Dreieck $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$.

Für dieses Dreieck ist der Umkreis des Dreiecks A_1 A_2 A_3 der Mittenkreis; der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks A_1 A_2 A_3 der Höhendurchschnitt; und der Punkt N der Mittelpunkt des durch die Ecken $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gehenden Kreises, also des Umkreises. Bezeichnen wir den Schwerpunkt dieses Dreiecks mit σ, so werden nach (II. A) die Punkte U und N ein den Punkten J und σ harmonisch zugeordnetes Punktpaar bilden.

Verbinden wir noch J mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, so erhalten wir drei Dreiecke J $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$, J $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{A}_1$, J $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$. Für jedes derselben ist der Umkreis um A_1 A_2 A_3 der Mittenkreis; die Höhenschnittpunkte derselben sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$. Die Mittelpunkte der Umkreise sind drei dem Punkt N entsprechende Punkte n_1, n_2, n_3, welche wir als die Schnittpunkte der Normalen von J, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2$; — $\mathfrak{A}_3$, J, $\mathfrak{A}_1$; — $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1$, J auf die Seiten s_1, s_2, s_3 erhalten. Nennen wir die Schwerpunkte dieser Dreiecke σ_1, σ_2, σ_3, so sind die Punktpaare: U, n_1; — U, n_2; — U, n_3; den Paaren $\mathfrak{A}_1$, σ_1; — $\mathfrak{A}_2$, σ_2; — $\mathfrak{A}_3$, σ_3; harmonisch conjugirt.