Beitrag zu einer elementaren Behandlung schwingender Bewegungen.

§ 1. **Einleitende Erklärungen.** Bei gleichförmiger Bewegung legt ein Punkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg nennt man seine Geschwindigkeit. Bezeichnet also s seinen Weg während der Zeit t, v seine Geschwindigkeit, so ist:

$$v = \frac{s}{t}$$

Hat man zwei Bewegungen von entgegengesetzter Richtung zu betrachten, so kann man durch das Vorzeichen von v diese Richtungen unterscheiden.

Bei ungleichförmiger Bewegung denkt man sich die Zeit in so viele so kleine Theile getheilt, daß man während jedes solchen Zeittheilchens die Bewegung als gleichförmig betrachten kann. Ist τ ein solches Zeittheilchen, σ der während desselben zurückgelegte Weg, so ist $\frac{\sigma}{\tau}$ die Geschwindigkeit während desselben, und bliebe die Bewegung fortan gleichförmig, so würde $\frac{\sigma}{\tau}$ ihre constante Geschwindigkeit sein.

Unter der Geschwindigkeit zur Zeit t versteht man die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punkt in der auf t folgenden Zeit haben würde, wenn er sich während derselben gleichmäßig bewegte. Bezeichnet v diese Geschwindigkeit, s den Weg während der Zeit t, s^1 den Weg während der Zeit $t + \tau$, so ist $\sigma = s^1 - s$, also

$$v = \frac{s^1 - s}{\tau}$$

Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der Zuwachs der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich groß; den Zuwachs der Geschwindigkeit während der Zeiteinheit nennt man die Beschleunigung. Bedeutet g die Beschleunigung, v die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist demnach

$$g = \frac{v}{t}$$

Bezeichnet v die Geschwindigkeit zur Zeit t, v_1 die Geschwindigkeit zur Zeit t_1, also $v_1 - v$ den Zuwachs der Geschwindigkeit während der Zeit $t_1 - t$, so ist:

$$g = \frac{v_1 - v}{t_1 - t}$$

Bewirkt g eine Abnahme des absoluten Werthes von v, d. h. haben v und g verschiedene Vorzeichen, so nennt man die Bewegung eine gleichförmig verzögerte, den absoluten Werth von g die Verzögerung.

Bei einer ungleichförmig beschleunigten Bewegung versteht man unter der Beschleunigung zur Zeit t die Beschleunigung, welche der bewegte Punkt nach Ablauf der Zeit t erhalten würde, wenn fortan die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte wäre. Bezeichnet τ eine so kleine Zeit, daß man während derselben die Bewegung als eine gleichförmig beschleunigte betrachten darf, v die Geschwindigkeit zur Zeit t, v^1 die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \tau$, so ist:

$$g = \frac{v^1 - v}{\tau}$$

Ein negativer Werth von g entspricht einer verzögerten Bewegung, wenn man die Geschwindigkeit positiv rechnet; rechnet man aber v negativ, so entspricht ein negativer Werth von g einer beschleunigten, ein positiver einer verzögerten Bewegung.

§ 2. Lehrsatz. Bewegt sich ein Punkt P_1 mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Kreise A und gleichzeitig ein zweiter Punkt P auf einem Durchmesser des Kreises BB_1 so, daß beide Punkte von dem auf BB_1 senkrechten Durchmesser OO_1 stets dieselbe Entfernung haben: so ist die Bewegung des Punktes P eine ungleichförmig beschleunigte, wenn P sich dem Mittelpunkte des Kreises A nähert, dagegen eine ungleichförmig verzögerte, wenn P sich von A entfernt, und zwar ist die Beschleunigung resp. Verzögerung seinem jedesmaligen Abstande von A proportional.

Beweis. Der Mittelpunkt des Kreises A (Figur 1) mit dem Radius a sei Anfangspunkt der Coordinaten, B_1B die Abscissen-, O_1O die Ordinatenaxe, $DC = y$ die Ordinate, $AC = x$ die Abscisse eines beliebigen Punktes D auf dem Kreise: dann befinden sich nach unserer Voraussetzung P_1 und P gleichzeitig in O und A, P_1 gelangt nach D, wenn P in C anlangt, Bogen OD ist der Weg von P_1 während der Zeit, in welcher P den Weg von A nach C zurücklegt. Liegt D im ersten Quadranten, so ist AC selbst dieser Weg von P; liegt dagegen D im zweiten oder dritten Quadranten, so ist $AB + BC$ dieser Weg, und liegt D im vierten Quadranten, so hat P den Weg $AB + BB_1 + B_1C$ zu durchlaufen, während P_1 in der Richtung wie der Zeiger einer Uhr von O nach D sich bewegt.

Um zu zeigen, daß P nicht in je 2 gleichen Zeiten gleiche Wege durchläuft, wählen wir der Einfachheit wegen Bogen $OD = DE$ so, daß auch E noch im ersten Quadranten liegt und fällen $EF \perp AB$, dann werden die Wege OD und DE von P_1, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, in gleichen Zeiten zurückgelegt; und wenn wir die entsprechenden Wege von P: s und s_1, $\angle OAD = \angle DAE = \alpha$ nennen, so ist $s = AC = a \sin \alpha$ und $s + s_1 = AF = a \sin 2\alpha$. Da aber $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha . \cos \alpha < 2 \sin \alpha$, also $s + s_1 < 2s$ ist, so ist $s_1 < s$, während P für den Weg s_1 dieselbe Zeit braucht, wie für s.

Um die Geschwindigkeit des Punktes P kennen zu lernen, bezeichnen wir diese Geschwindigkeit zu der Zeit, wo P durch C geht, mit v, die constante Geschwindigkeit des Punktes P_1 durch v_1, unter τ denken wir uns eine so kleine Zeit, daß v während derselben constant ist und erst am Ende derselben einen anderen Werth annimmt. Bewegt sich während dieser Zeit der Punkt P von C nach G, so ist $CG = v . \tau$; den gleichzeitigen Weg des Punktes P_1 finden wir, wenn wir in G die Ordinate GH errichten, es ist alsdann dieser Weg $DH = v_1 \tau$. Da aber τ, also auch CG und DH unendlich klein sind, so können wir DH als Bogen, Sehne oder Tangente des Kreises betrachten. Construiren wir noch $HJ \perp DC$, so ist $\angle JDH = \angle DAC$, also $\triangle DJH \sim \triangle DAC$, folglich:

$$JH : DH = DC : AD.$$

Setzen wir hierin $JH = CG = v\tau$, $DH = v_1\tau$, $DC = y$, $AD = a$ ein, so ergibt sich:

$$v = \frac{v_1}{a} y$$

Da v_1 und a constant sind, so ist v p r o p o r t i o n a l y. Rechnet man y oberhalb BB_1 positiv, unterhalb negativ, so kann das Zeichen von y auch über die Richtung der Bewegung Aufschluß geben, wenn man v bei der Bewegung in der Richtung B_1B positiv, in der Richtung BB_1 negativ zählt. Der absolute Werth von y nimmt ab von a bis o, wenn P_1 von O nach B oder von O_1 nach B_1 geht, also wenn P sich von A nach B oder B_1 entfernt, in diesem Falle nimmt auch der absolute Werth von v ab von v_1 bis o; bewegt sich dagegen P_1 von B nach O_1 oder von B_1 nach A, nähert sich also P von B oder von B_1 her dem Mittelpunkt A, so nimmt der absolute Werth von y zu von o bis a, folglich der von v von o bis v_1; im ersteren Falle hat P eine verzögerte, im letzteren eine beschleunigte Bewegung.

Um die Größe der Beschleunigung oder Verzögerung zu finden, nennen wir den Werth, welchen v am Ende der Zeit τ, also im Punkte G erhält, v^1; dann ist:

$$v^1 = \frac{v_1}{a} GH, \text{ und da}$$

$$v = \frac{v_1}{a} DC$$

$$v^1 - v = -\frac{v_1}{a}(DC - GH)$$

$$= -\frac{v_1}{a} DJ.$$

Da aber $DJ : DH = AC : AD$
$DH = v_1\tau,\ AC = x,\ AD = a,$

so folgt: $DJ = \frac{v_1}{a}\tau.\ x,$

also $v^1 - v = -\frac{{v_1}^2}{a^2}\tau\ x.$

Nennen wir also die Beschleunigung des Punktes P zu der Zeit, wo er durch C geht, g, so ist:

$$g = \frac{v^1 - v}{\tau} = -\frac{{v_1}^2}{a^2} x.$$

Da v_1 und a constant sind, so ist g proportional x, wie unser Lehrsatz behauptet.

Rechnen wir x rechts von OO_1 positiv, links davon negativ, so ist g im ersteren Falle negativ, im letzteren positiv, es hat also, während P von A nach B oder B_1 geht, mit v entgegengesetztes, während P sich A nähert, gemeinsames Vorzeichen, dort vermindert, hier vermehrt es den absoluten Werth von v, es ist übereinstimmend mit dem bereits Erwiesenen die Bewegung von A nach B oder B_1 hin eine verzögerte, nach A hin eine beschleunigte.

Bezeichnen wir $\frac{{v_1}^2}{a^2}$ durch k, so daß $g = -kx$, dann ist $v_1 = a\sqrt{k}$; $v = \sqrt{k}\ y.$

§ 3. Umkehrung des Lehrsatzes. Bewegt sich der Punkt P um seine Gleichgewichtslage A auf der graden Linie B_1B so, daß bei einer Entfernung von A seine Verzögerung, bei einer Annäherung seine Beschleunigung seinem jedesmaligen Abstande von A proportional ist: dann läßt sich, — wenn wir die Geschwindigkeit v für die Bewegungsrichtung B_1B positiv, für die entgegengesetzte B_1B negativ, die Entfernung von A, x, nach rechts positiv, nach links negativ rechnen, — sowohl die Verzögerung als auch die Beschleunigung des Punktes P durch dieselbe Größe $g = -kx$ ausdrücken, wo k eine Constante ist.

Errichtet man in einem beliebigen Punkte der Bahn (Figur 1) des Punktes P, in C, durch welchen P mit der Geschwindigkeit v hindurchgehe, eine Senkrechte auf B_1B, $CD = \frac{v}{\sqrt{k}}$ und schlägt mit AD um A einen Kreis, so läßt sich, wenn man BB_1 zur Abscissen-, den darauf senkrechten Durchmesser OO_1 zur Ordinatenaxe nimmt, für jede Ordinate dieses Kreises, y, beweisen, daß $y = \frac{V}{\sqrt{k}}$ ist, wenn V die Geschwindigkeit des Punktes P in ihrem Fußpunkte bedeutet.

Beweis. Während der unendlich kleinen Zeit τ bewege sich P von C nach B hin bis G, dann ist: $CG = v.\tau$ Bedeutet v^1 die Geschwindigkeit von P in G, so ist:

$$\frac{v^1 - v}{\tau} = g = -kx;\ x = AC,\ \text{also: } AC = -\frac{v^1 - v}{k\tau} = \frac{v - v^1}{k\tau}$$

Wenn nun GH die Ordinate des Kreises in G und $HJ \perp CD$ ist, und DH als Tangente des Kreises betrachtet wird, so ist $\triangle DHJ \sim \triangle ADC$, also:

$$DJ = \frac{JH.\ AC}{DC}$$

Setzt man hierin $JH = CG = v\tau$, $AC = \frac{v - v^1}{k\tau}$ und $DC = \frac{v}{\sqrt{k}}$ ein, so ergibt sich:

$$DJ = \frac{v - v^1}{\sqrt{k}}$$

Daraus folgt:
$$GH = DC - DJ = \frac{v}{\sqrt{k}} - \frac{v - v^1}{\sqrt{k}} = \frac{v^1}{\sqrt{k}}$$

Da aber unsere Behauptung für die Ordinate GH, welche der beliebigen Ordinate CD unendlich nahe liegt, richtig ist, so muß sie auch für die folgende Ordinate, welche GH unendlich nahe ist, gelten u. s. f., es ist also in der That jede Ordinate $y = \frac{v}{\sqrt{k}}$

Für $v = o$ wird $y = o$, d. h. der Kreis schneidet die Linie B_1B in den Punkten, in welchen P seine Bewegungsrichtung ändert. Sind B_1 und B diese Punkte und $AB = AB_1 = a$, so ist a der Radius des Kreises, dessen Ordinaten proportional den Geschwindigkeiten des Punktes P sind.

Bewegt sich nun auf dem mit a um A geschlagenen Kreise der Punkt P_1 mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_1 = a\sqrt{k}$ in demselben Sinne, wie der Zeiger einer Uhr, so entfernt er sich durch den Weg von D nach H von dem auf BB_1 senkrechten Durchmesser OO_1 um die Strecke JH. Bedeutet τ die Zeit, welche P_1 zu dieser Bewegung braucht, und ist $\angle DHJ = \alpha$, so ist: $DH = v_1\tau = a\sqrt{k}\,\tau$, und wenn τ so klein ist, daß DH als eine grade Linie betrachtet werden kann, $JH = DH.\cos\alpha = a\sqrt{k}\cos\alpha.\ \tau$.

Im Punkt C aber hat P die Geschwindigkeit $v = \sqrt{k}.\ CD$, und da $\angle ADC = \angle DHJ = \alpha$, so ist $CD = a.\cos\alpha$, $v = a\sqrt{k}.\cos\alpha$; während derselben unendlich kleinen Zeit τ also, während welcher sich P_1 um JH von OO_1 entfernt, entfernt sich P um $v\tau = a\sqrt{k}.\cos\alpha.\ \tau$ von OO_1, also um ebenso viel als P_1. Befinden sich also gleichzeitig P_1 in D und P in C, d. h. sind sie in irgend einem Punkte ihrer Bahn gleichweit von OO_1 entfernt, so sind sie auch nach Verlauf der Zeit τ, ebenso nach 2τ &c., mithin fortwährend gleichweit von OO_1 entfernt. Diese Bedingung aber ist erfüllt, wenn man P_1 von O und P gleichzeitig von A ausgehen läßt. Der Lehrsatz des vorigen Paragraphen läßt sich also umkehren.

§ 4. Erklärung. Bewegt sich ein Punkt P so um seine Gleichgewichtslage A, daß er sich bis zu einem gewissen Punkte B von A entfernt, dann nach A zurückkehrt, über A hinaus bis B_1 und von da nach A zurückgeht, um dieselbe Bewegung von Neuem zu beginnen: so nennt man seine Bewegung eine schwingende, oscillatorische, — eine einmalige derartige Bewegung eine Schwingung, — die Zeit, welche P zu einer Schwingung gebraucht, Schwingungs- (Oscillations-) dauer, — die größte Entfernung des Punktes P von A, AB, die Weite oder Amplitude der Schwingung. Man pflegt die Schwingungsdauer durch T, die Amplitude durch a zu bezeichnen.

§ 5. Ergebniß. Entsteht eine schwingende Bewegung dadurch, daß der Punkt P in jedem Punkte seiner Bahn eine Anziehung nach A hin erleidet, welche seinem Abstande von A proportional ist, so zeigen die vorigen Betrachtungen, wie man seinen Weg und seine Geschwindigkeit für jede gegebene Zeit construiren und berechnen kann, wenn die Größen a und k oder T bekannt sind.

Construction. Mit der Amplitude a beschreibe man um A einen Kreis und denke sich auf demselben einen Punkt P_1 so bewegt, daß er mit P gleichzeitig durch B und B_1 geht, also jeden Umlauf in derselben Zeit T vollendet, welche P zu einer Schwingung braucht. Nimmt man dann die Grade B_1B zur Abscissenaxe, den darauf senkrechten Durchmesser zur Ordinatenaxe, so gibt für jeden Punkt M des Kreises die zugehörige Abscisse an, wie weit P von A zu der Zeit entfernt ist, wo P_1 durch M geht, die zugehörige Ordinate MN ist der Geschwindigkeit des Punktes P zu dieser Zeit proportional, und wenn man v bei der Bewegung von B_1 nach B positiv, bei der entgegengesetzten aber negativ zählt, so kann man aus den üblichen Vorzeichen der Ordinate erkennen, ob P sich A nähert oder davon entfernt.

Theilt man z. B. den Kreisumfang (Figur 2) von O aus in 8 gleiche Theile $OM_1 = M_1B = BM_3 = M_3O_1 = O_1M_5 = M_5B_1 = B_1M_7 = M_7O$, und nennt die Fußpunkte der zugehörigen Ordinaten N_1 und N_7, so wird P_1 von einem Theilpunkt zum andern die Zeit $\frac{T}{8}$ brauchen. Rechnet man die Zeit von dem Augenblicke an, wo P in A, P_1 in O seine Bewegung beginnt, so befindet sich P zur Zeit $\frac{T}{8}$ in N_1, seine Geschwindigkeit ist dabei gleich $\sqrt{k}.\ M_1N_1$, und da M_1N_1 positiv ist, so entfernt sich P von A nach B; zur Zeit $\frac{3T}{8}$ befindet sich P wieder in N_1, weil P_1 bis M_3 gelangt ist, seine Geschwindigkeit ist aber gleich $\sqrt{k}.\ M_3N_1$, und da M_3N_1 negativ ist, so bewegt sich jetzt P von B nach A hin u. s. w.

Um für eine beliebige gegebene Zeit t den Ort des Punktes P zu finden, drückt man t durch T aus, etwa $t = \frac{n}{m}T$; dann theilt man die Peripherie von O aus in m gleiche Theile, zählt von O aus n derselben ab und fällt vom Endpunkt des letzten eine Senkrechte auf BB_1, dann ist deren Fußpunkt der Ort des Punktes P zur Zeit t, die Senkrechte selbst seiner Geschwindigkeit proportional.

§ 6. Bewegungsgleichungen. Die constante Geschwindigkeit v_1, welche dem Punkte P_1 beizulegen, ist nach den obigen Auseinandersetzungen gleich $a\sqrt{k}$, also ist der Weg des Punktes P_1 während der Zeit T gleich $a\sqrt{k}\,T$; dieser Weg ist aber die Peripherie eines Kreises mit dem Radius a, also gleich $2a\pi$, folglich ist:

$$2a\pi = a\sqrt{k}\,T$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

Die Schwingungsdauer ist also nicht von der Amplitude, sondern nur von der beschleunigenden Kraft abhängig.

Bei zwei schwingenden Bewegungen von den Schwingungsdauern T und T_1, deren beschleunigende Kräfte k und k_1 proportional sind, ist

$$T : T_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} : \frac{1}{\sqrt{k_1}}$$

$$\text{und } k : k_1 = \frac{1}{T^2} : \frac{1}{T_1^{\,2}}$$

Nennt man Schwingungszahl die Anzahl der Schwingungen in 1 Secunde, und bezeichnet diese Zahl durch n, so ist $T = \frac{1}{n}$ und $n = \frac{1}{T}$, also $k : k_1 = n^2 : n_1^2$, d. h. die Beschleunigung einer schwingenden Bewegung ist dem Quadrate der Schwingungszahl proportional, während sie dem Quadrate der Schwingungsdauer umgekehrt proportional ist.

Bedeuten x, y die Coordinaten eines Punktes M auf dem Kreise A mit dem Radius a, und ist $\angle OAM = \alpha$, so ist

$$x = a.\ \sin\alpha$$

$$y = a.\ \cos\alpha.$$

Durchläuft nun Punkt P_1 den Bogen OM in der Zeit t, während er in der Zeit T die ganze Peripherie $2a\pi$ zurücklegt, so verhält sich $OM : 2a\pi = t : T$, bei gleichförmiger Bewegung verhalten sich die Wege wie die dazu gebrauchten Zeiten,

$$\text{also: } \alpha : 2\pi = t : T;\ \alpha = \frac{2\pi t}{T}$$

Für den Punkt P ist aber nach der Zeit t der Abstand von A gleich x, die Geschwindigkeit v gleich $\sqrt{k}.\ y$; also erhält man als Bewegungsgleichungen für den Punkt P:

$$x = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$v = a\sqrt{k}.\ \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

wenn $g = -kx$.

Anmerkung. Wir übergehen hier die Anwendungen, welche sich von diesen Entwickelungen auf die Bewegung des Pendels, schwingender Saiten u. s. w. machen lassen, um noch einige Aufgaben theils auszuführen, theils anzudeuten, welche über das mathematische Pensum einer Realschule nicht hinausgreifen und zu Aufgaben für Primaner auch darum sich eignen dürften, weil sich ihre Resultate mit einer kleinen Fessel'schen Wellenmaschine bestätigen lassen.

Fortpflanzung einer schwingenden Bewegung. — Wellenbewegung.

§ 7. Gesetzt, die Grade AX bestehe aus einer Reihe materieller Punkte, welche nacheinander um ihren Ort auf AX dieselbe oscillatorische Bewegung ausführen, wie der Punkt P um A: dann nennt man die Gesammtheit dieser schwingenden Bewegungen eine Wellenbewegung. Es schreitet hier also in der Richtung AX nicht der Punkt P selbst vorwärts, wohl aber seine Bewegung.

Unter der Voraussetzung, daß diese Bewegung in gleichen Zeiten um gleiche Strecken vorrückt, nennt man die Strecke, um welche sich die schwingende Bewegung in einer Secunde fortpflanzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Bezeichnen wir diese Größe durch c, so bedeutet hiernach c die Entfernung desjenigen Punktes von A, in welchem die Bewegung eine Secunde später beginnt, als in A.

Ferner versteht man unter Wellenlänge diejenige Strecke, um welche sich die schwingende Bewegung während einer Schwingungsdauer fortpfanzt.

Bedeutet λ die Wellenlänge, T die Schwingungsdauer, so ist demnach:

$$cT = \lambda,$$

und wenn n die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde angibt,

$$c = n\lambda.$$

Der Punkt P^1, welcher um λ von A entfernt ist, beginnt seine erste Schwingung, wenn P von A aus seine zweite anfängt, und da P^1 dieselbe Bewegung ausführt, wie P, so wird er immer dieselbe Entfernung von der Gleichgewichtslage, dieselbe Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung haben wie P; man sagt: die beiden Punkte befinden sich zu derselben Zeit in derselben Phase der Bewegung. Ueberhaupt haben zwei Punkte dieselbe Phase zu derselben Zeit, wenn sie um eine ganze Anzahl Wellenlängen von einander entfernt sind.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf den Fall, daß alle Punkte von AX ihre Bewegungen senkrecht zu AX ausführen (transversale Schwingungen machen). Liegen überdies alle Bewegungsrichtungen in derselben Ebene, so entsteht eine ebne Welle.

Nehmen wir AX zur Abscissenaxe, die Senkrechte darauf in A, nach deren Richtung alle Schwingungen erfolgen, zur Ordinatenaxe an, so drückt die Gleichung:

$$y = a.\ \sin 2\pi \frac{t^1}{T}$$

für einen beliebigen Punkt auf AX die Entfernung von seiner Gleichgewichtslage B aus, wenn er sich während t^1 Secunden in einer Schwingung von der Amplitude a und der Dauer T befindet. Nach der Voraussetzung beginnt aber im Punkte B die Bewegung später als im Punkte A, gesetzt um t_1 Secunden später, dann ist, wenn A t Secunden in Bewegung ist, $t^1 = t - t_1$. Rechnet man also die Zeit von dem Anfange der Bewegung in A an, so ist zur Zeit t

$$y = a. \sin 2\pi \frac{t - t_1}{T}$$

die Entfernung des bewegten Punktes von B.

Ist der Punkt B von A um die Länge x entfernt, so ist die Zeit t_1, in welcher sich die Bewegung bis B fortpflanzt, bestimmt durch die Gleichung:

$$ct_1 = x$$

und da $cT = \lambda$, so ist $\frac{t_1}{T} = \frac{x}{\lambda}$, also:

$$y = a. \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

Ebenso findet man für die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v = a \sqrt{k} \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

während $g = -k. y.$ die Beschleunigung zur Zeit t ausdrückt.

Je zwei Punkte, welche um $\frac{\lambda}{2}$ von einander entfernt sind, befinden sich in entgegengesetzten Phasen.

Denn ist x die Entfernung des einen, $x + \frac{\lambda}{2}$ die des zweiten Punktes vom Anfangspunkte der Bewegung, so gelten für den ersten die eben entwickelten Gleichungen, für den zweiten ist:

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sin \left[2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] - \pi\right] \\ &= -a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] \\ &= -y \\ v_1 &= a\sqrt{k}. \cos\left[2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] - \pi\right] \\ &= -a\sqrt{k} \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] \\ &= -v \end{aligned}$$

§ 8. Construction. Um y zu construiren, schlage man um B mit a einen Kreis, welcher AX in O schneide. Ist dann $t = \frac{n}{m} T$ und $x = \frac{p}{q} \lambda$, also $y = a. \sin \frac{nq - mp}{mq} 2\pi$, so theile man von O aus die Peripherie in mq gleiche Theile und fälle aus dem (nq—mp)ten Theilpunkte eine Senkrechte auf BO, so ist diese Senkrechte gleich y. Errichtet man in B senkrecht zu AO den Durchmesser $B_1 B_2$ und fällt auf diesen die Senkrechte von dem (nq—mp)ten Theilpunkte der Peripherie, so ist ihr Fußpunkt der Ort des um B schwingenden Punktes zur Zeit t.

Um zu finden, wie weit der Punkt, dessen Abstand von A, $x = \frac{p}{q} \lambda$ beträgt, in dem Augenblicke, in welchem P in A eine neue Schwingung beginnt, von seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, hat man $y = -a. \sin \frac{p}{q} 2\pi$ zu construiren, muß also die Peripherie in q gleiche Theile theilen; rechnet man alsdann y oberhalb AX positiv, unterhalb negativ, und zählt die Theilpunkte auf der Peripherie in der Richtung, in welcher der Zeiger einer Uhr sich bewegt, so trifft die vom pten Theilpunkte auf $B_1 B_2$ gefällte Senkrechte den gesuchten Punkt.

§ 9. Wenn man in der Gleichung

$$(1) \quad y = a. \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

t einen constanten Werth beilegt und nur y und x als veränderlich betrachtet, so drückt sie die Curve aus, auf welcher die materiellen Punkte der graden Linie AX zur Zeit t liegen.

Für $t = n\ T$ ist z. B.

$$(2) \quad y = -a \sin \frac{x}{\lambda} 2\pi$$

Von dieser Curve (Figur 3) kann man beliebig viele Punkte construiren (für $x = \frac{p}{q}\lambda$ ist die Construction eben angegeben). Auf AX sei $AL = \lambda$, $BB_1 \perp AX$, $AB = a$; dann theile man AL in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (etwa 12), schlage um A mit AB einen Kreis, der AL in C schneide, theile von C aus die Peripherie in ebensoviel (hier 12) gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte auf AL Parallele zu BB_1 und durch die Theilpunkte der Peripherie Parallele zu AX, dann geben, wenn man auf dem Kreise in der Richtung zählt, in welcher sich ein Uhrzeiger bewegt, die Durchschnittspunkte der gleichvielten Parallelen Punkte der Curve.

Die construirte Curve heißt die Wellenlinie, der unterhalb AX liegende Theil das Wellenthal, der darüber liegende Theil Wellenberg.

Für jeden andern Werth von t kann man die Gleichung (1) durch eine Verlegung des Coordinatenanfangspunktes auf die Form (2) bringen.

Setzt man nämlich $\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = -\frac{x^1}{\lambda}$, also $x = x^1 + \frac{t}{T}\lambda$, d. h. verlegt man den Nullpunkt um $\frac{t}{T}\lambda$ auf der Abscissenaxe nach rechts, so erhält man die Gleichung $y = -a \sin \frac{x^1}{\lambda} 2\pi$.

Man hat also, um die allgemeine Gleichung (1) zu construiren, die eben an A ausgeführte Construction an dem neuen Anfangspunkt der Coordinaten vorzunehmen, mit andern Worten: man kann die eben construirte Curve um $\frac{t}{T}\lambda$ nach rechts verschieben.

Gibt man t nach einander alle Werthe von o bis T, so verschiebt sich nach und nach die ganze Curve um eine Wellenlänge, so daß man also nicht nur von einem Fortschreiten der schwingenden Bewegung, sondern auch von einem Fortschreiten der Welle sprechen kann.

Zusammensetzung und Zerlegung der Wellenbewegungen.

§ 10. **Grundsatz.** Ein Punkt, welcher gleichzeitig zwei oder mehr Bewegungen ausführt, gelangt dadurch nach Verlauf jeder beliebigen Zeit an denselben Ort, an welchen er gekommen wäre, wenn er diese Bewegungen nach einander dieselbe Zeit lang ausgeführt hätte; umgekehrt: Man kann jede Bewegung eines Punktes durch beliebig viele andre Bewegungen ersetzen, wenn sie ihn zu jeder Zeit an denselben Ort bringen, wie die ursprüngliche Bewegung.

§ 11. I. Ein Punkt habe zwei oscillatorische Bewegungen nach derselben Richtung auszuführen.

Ist die Entfernung des Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit t in Folge der ersten Bewegung allein y_1, in Folge der zweiten allein y_2, und wenn beide Bewegungen gleichzeitig ausgeführt werden, y, so ist nach obigem Grundsatz: $y = y_1 + y_2$.

§ 12. Seien auf AX die Punkte A und A_1 die Ausgangspunkte zweier zu AX senkrechter paralleler Wellenbewegungen von derselben Amplitude a, derselben Schwingungsdauer T und derselben Wellenlänge λ. Die Entfernung AA_1, der Gangunterschied der beiden Wellen, sei δ. Ist B die Gleichgewichtslage eines beliebigen Punktes und $AB = x$, so ist $A_1B = x - \delta$, also für eine gewisse Zeit t:

$$(1) \quad y_1 = a.\ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

$$(2) \quad y_2 = a.\ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda}\right]$$

$$y = a \left\{ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] + \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda}\right]\right\}$$

Da aber: $\sin\alpha + \sin\beta = 2.\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, so ist:

$$(3) \quad y = 2a.\ \cos\frac{\pi\delta}{\lambda}.\ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{\delta}{2}}{\lambda}\right]$$

In diesem Ausdruck ist $2a.\ \cos\frac{\pi\delta}{\lambda}$ von t und x unabhängig, während $x - \frac{\delta}{2}$ die Entfernung des Punktes B von dem Halbirungspunkte der Strecke AA_1 angibt. Der um B schwingende Punkt würde also dieselbe Bewegung ausführen, wenn von diesem Halbirungspunkte von AA_1 eine Welle von derselben Schwingungsdauer und Wellenlänge, aber von der Amplitude $a^1 = 2a.\ \cos\frac{\pi\delta}{\lambda}$ ausginge.

Umkehrung. Man kann jede ebne Welle von der Amplitude a^1 zerlegen in zwei andere gleichgerichtete Wellen von derselben Schwingungsdauer und Wellenlänge, von denen die erste der gegebenen um $\frac{\delta}{2}$ voraus, die andere um $\frac{\delta}{2}$ hinter ihr zurück ist, wenn man beiden die Amplitude $a = \frac{a^1}{2\cos\frac{\pi\delta}{\lambda}}$ beilegt.

Für $\delta = \frac{\pi}{4}$ ist $a = \frac{a^1}{\sqrt{2}}$

Besondere Fälle. Für $\delta = \frac{\lambda}{2}$, überhaupt $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ ergibt die Gleichung (3) $y = o$, da $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = o$. Daraus folgt:

Zwei gleiche und gleichgerichtete Wellenbewegungen heben einander auf, wenn ihr Gangunterschied eine ungrade Anzahl halber Wellenlängen beträgt.

Für $\delta = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}$ erhält man:

$$y_2 = a.\ \sin \left[2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] + 2n\pi\right] = y_1, \text{ also}$$

$$y = 2y_1 = 2a.\ \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right], \text{ d. h.:}$$

Zwei gleiche und gleichgerichtete Wellen, deren Gangunterschied eine grade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, setzen sich zu einer Welle von derselben Schwingungsdauer und Wellenlänge, aber doppelter Amplitude zusammen.

§ 13. Gesetzt, die beiden von A und A_1 ausgehenden Wellen, deren Gangunterschied wieder $AA_1 = \delta$ sei, haben verschiedene Amplituden, die der ersten sei a_1, die der zweiten a_2, dann ist unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie vorhin:

$$y_1 = a_1.\ \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

$$y_2 = a_2.\ \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda}\right]$$

oder, wenn wir setzen:

$$2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right]=\alpha;\ 2\pi\ \frac{\delta}{\lambda}=\beta;$$

$$y_1 = a_1 \sin \alpha$$
$$y_2 = a_2 \sin (\alpha + \beta)$$
$$y = a_1 \sin \alpha + a_2 \sin a.\cos \beta + a_2 \cos \alpha.\sin \beta$$
$$= (a_1 + a_2 \cos \beta) \sin \alpha + a_2 \sin \beta.\cos \alpha.$$

Bestimmen wir nun die Größen a und γ so, daß:

$$a_1 + a_2 \cos \beta = a \cos \gamma$$
$$a_2 \sin \beta = a \sin \gamma$$
$$(a_1 + a_2 \cos \beta)^2 + (a_2 \sin \beta)^2 = a^2.$$
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\ a_2 \cos \beta}$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_2 \sin \beta}{a_1 + a_2 \cos \beta}$$

so ist: $\quad y = a. \sin (\alpha + \gamma).$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für y_2, so zeigt sich, daß eine neue ebne Welle von derselben Richtung, Länge und Oscillationsdauer entstanden ist. Ihren Gangunterschied gegen die von A ausgehende Welle, welchen wir δ_1 nennen, finden wir aus der Gleichung:

$$2\pi\ \frac{\delta_1}{\lambda} = \gamma,\ \text{nämlich}\ \delta_1 = \frac{\gamma}{2\pi}\ \lambda,$$

ihre Amplitude ist: $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\ a_2 \cos \beta}$.

Construirt man ein Parallelogramm (Figur 4), dessen Seiten a_1 und a_2 den Winkel β einschließen, so ist die vom Scheitelpunkt des Winkels β auslaufende Diagonale gleich a, der Winkel, welchen sie mit a_1 einschließt, gleich γ.

Hieraus ergibt sich, wie man eine ebne Welle von der Amplitude a in zwei andere von derselben Richtung, Länge und Geschwindigkeit, aber verschiedenen Amplituden zerlegen kann, wenn von den 4 Größen a_1, a_2, β, γ (oder δ, δ_1) zwei gegeben sind.

Besondere Fälle. a wird ein Minimum, wenn $\cos \beta = -1$, also $\beta = (2n + 1)\ \pi$, $\delta = (2n + 1)\ \frac{\lambda}{2}$ ist, dann ist: $a = a_1 - a_2$, $\gamma = 0$.

a wird ein Maximum, wenn $\cos \beta = + 1$, also $\beta = 2n\pi$, $\delta = 2n\ \frac{\lambda}{2}$ ist, dann ist: $a = a_1 + a_2$, $\gamma = 0$.

Für $\delta = \frac{\lambda}{4}$ ist $\beta = \frac{\pi}{2}$, $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_2}{a_1}$.

§ 14. Der allgemeine Fall, daß zwei in derselben Ebne liegende Wellen:

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right]$$
$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} + \frac{\delta}{\lambda_2}\right]$$

sich zusammensetzen, läßt sich, da nach § 11 immer $y = y_1 + y_2$ ist, durch Construction darstellen, wenn man jede der beiden Wellen nach § 9 construirt, und jeder Abscisse x die algebraische Summe der construirten Ordinaten zur Ordinate gibt.

In der Figur (5) ist $a_1 = a_2 = AO$; $\lambda_2 = AL_2 = 2AL_1 = 2\lambda_1$; $T = 2T_1$; $\delta = 0$.

Durch die Punkte N_1, N_2 2c. ist AL_1 in 6 gleiche Theile getheilt, dem entsprechend ist $OO_2 = O_2O_4 = \cdots = \frac{2\pi}{6}$, daher ergeben die Durchschnittspunkte der Linien $N_1 M_1$ und $O_2 O_4$, $N_2 M_2$ und $O_4 O_2$, 2c. Punkte der ersten Welle. Dagegen ist AL_2 durch N_1, N_2 2c. in 12 gleiche Theile getheilt, denen $OO_1 = O_1 O_2 = \cdots = \frac{2\pi}{12}$ entsprechen, so daß die Linien $N_1 M_1$ und $O_1 O_5$, $N_2 M_2$ und $O_2 O_4$ 2c. sich in Punkten der zweiten Welle schneiden. Die Ordinaten $N_1 W_1{}^1$ und $N_1 W_1{}''$ sind beide negativ, daher ist ihre algebraische Summe $N_1 W_1$ ebenfalls negativ; dagegen ist $N_4 W_4{}^1 = - N_4 W_4{}''$, ihre Summe also gleich Null, während $N_5 W_5$ positiv und gleich $N_5 W_5{}^1 - N_5 W_5{}''$ ist.

Für $\delta = \frac{\lambda_2}{12}$ hätte man die Welle $AW_1{}'' W_2{}'' \ldots L_2$ um AN_1 verschieben müssen u. s. w.

Die in den beiden vorigen §§ behandelten besonderen Fälle lassen einfachere Constructionen zu.

II. Ein Punkt P habe gleichzeitig zwei aufeinander senkrechte oscillatorische Bewegungen auszuführen.

§ 15. Es seien BX, BY, BZ drei auf einander senkrechte grade Linien. Auf BX liegen A und A_1 so, daß $AA_1 = \delta$, $AB = x$, $A_1B = x - \delta$; von A gehe eine schwingende Bewegung aus parallel BY, von A_1 eine andre parallel BZ. In der Zeit t entferne die erste Bewegung allein den Punkt P um y von der Gleichgewichtslage B, die zweite allein um z, dann ist, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten:

$$y = a_1 \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right]$$

$$z = a_2 \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} + \frac{\delta}{\lambda_2}\right]$$

Den wahren Ort des Punktes P zur Zeit t findet man nach § 10, wenn man P erst um y in der Richtung BY, dann um z senkrecht dazu bewegt, also in der Ebne YBZ einen Punkt mit den Coordinaten y, z construirt. Für jeden Werth von t erhält man einen solchen Punkt; die Linie, auf welcher alle diese Punkte liegen, ist die Bahn des Punktes P. Ihre Gleichung findet man, wenn man zwischen y und z eine Gleichung herstellt, in welcher t nicht mehr vorkommt.

§ 16. Die von A und A_1 ausgehenden Wellen haben dieselbe Amplitude a, dieselbe Schwingungsdauer T, dieselbe Länge λ. Dann ist:

$$(1)\quad y = a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

$$(2)\quad z = a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda}\right]$$

oder, wenn man $2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = \alpha$; $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \beta$ setzt,

$$y = a \sin \alpha$$

$$z = a \sin (\alpha + \beta)$$

$$z = a \sin \alpha . \cos \beta + a \cos \alpha \sin \beta$$

$$= y \cos \beta + \sqrt{a^2 - y^2} \sin \beta$$

$$(z - y \cos \beta)^2 = (a^2 - y^2) \sin^2 \beta.$$

$$(3)\quad z^2 + y^2 - 2zy \cos \beta = a^2 \sin^2 \beta.$$

Dreht man die Coordinatenaxen um 45°, setzt also:

$$y = \frac{y^1 + z^1}{\sqrt{2}}; \quad z = \frac{z^1 - y^1}{\sqrt{2}}$$

so erhält man:

$$(4)\quad \frac{y'^2}{2a^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{z'^2}{2a^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = 1.$$

Die Bahn des Punktes P ist also im Allgemeinen eine Ellipse, deren Halbaxen

$$B = a\sqrt{2}\,\sin\frac{\beta}{2},\quad C = a\sqrt{2}\,\cos\frac{\beta}{2}$$

unter einem Winkel von 45° gegen die ursprünglichen Schwingungsrichtungen geneigt sind.

Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, daß sowohl y, als auch z jedesmal, wenn t um T wächst, genau denselben Werth annimmt, also wird der Punkt P in der Zeit T einmal seine Bahn durchlaufen.

Die Gleichung (3) oder (4) ist nicht nur von t, sondern auch von x unabhängig, folglich sind die Bahnen aller Punkte der Linie AX einander völlig gleich, sie bilden zusammen einen elliptischen Cylinder. Auf diesem Cylinder aber liegen, wie die Gleichungen (1) und (2) zeigen, zu einer bestimmten Zeit t nur diejenigen Punkte in grader Linie, für welche x um λ, 2λ, überhaupt $n\lambda$ verschieden ist, welche also um eine ganze Zahl von Wellenlängen von einander entfernt sind, alle dazwischen liegenden Punkte bilden eine um den Cylinder gewundene Linie (Spirale).

Man nennt die entstandene Welle eine elliptische von der Wellenlänge λ und der Schwingungsdauer T.

Besondere Fälle. 1) Für $\delta = 2n\,\frac{\lambda}{2}$ wird $\beta = 2n\pi$, $B = o$, $C = a\sqrt{2}$, auch folgt aus den Gleichungen (1) und (2) $y = z$, d. h. wenn der Gangunterschied eine grade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, ist die Bahn eine grade Linie, unter 45° gegen BZ geneigt, von der Länge der Diagonale des Quadrats über a.

2) Für $\delta = (2n + 1)\,\frac{\lambda}{2}$ ist $\frac{\beta}{2} = (2n + 1)\,\frac{\pi}{2}$, $B = a\sqrt{2}$, $C = o$, auch ergeben die Gleichungen (1) und (2) $y = -z$, d. h. wenn der Gangunterschied eine ungrade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, ist die Bahn eine grade Linie, unter 135° gegen BZ geneigt, von der Länge der Diagonale des Quadrats über a.

3) Ist $\delta = \frac{\lambda}{4}$ oder $\frac{3\lambda}{4}$, oder $(2n + 1)\,\frac{\lambda}{4}$, also $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ oder $(2n + 1)\,\frac{\pi}{4}$, so wird $\sin^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, also $B^2 = C^2 = a^2$ und Gleichung (4) geht über in: $y^2 + z^2 = a^2$, d. h. wenn der Gangunterschied eine ungrade Anzahl Viertel-Wellenlängen beträgt, ist die Bahn ein Kreis mit dem Radius a

Geht man auf die ursprünglichen Gleichungen zurück, so ist für $\delta = \frac{\lambda}{4}$,

$$y = a.\,\sin\alpha,\quad z = a\,\sin\left[\alpha + \frac{\pi}{2}\right] = a\,\cos\alpha.$$

Während also α von 0° bis 90° wächst, sind y und z beide positiv, der durch sie bestimmte Punkt P liegt im ersten Quadranten; während α von 90° bis 180° zunimmt, ist y positiv, z negativ, P durchläuft den zweiten Quadranten u. s. w., der Punkt P bewegt sich also umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr; man nennt eine solche Bewegung eine linksherum gehende.

Für $\delta = \frac{3\lambda}{4}$ ist dagegen: $y = a\,\sin\alpha$, $z = a\,\sin\left[\alpha + \frac{3\pi}{2}\right] = -\,a\,\cos\alpha$.

Läßt man hier α von 0° bis 360° wachsen, so zeigt sich, daß Punkt P erst im zweiten, dann im ersten, vierten, zuletzt im dritten Quadranten sich befindet, also bewegt er sich in demselben Sinne wie der Zeiger einer Uhr, oder rechtsherum.

Umkehrungen. Eine gradlinige Schwingung von der Amplitude B kann man in zwei aufeinander senkrechte von der Amplitude $a = \frac{B}{\sqrt{2}}$ zerlegen, welche mit der ursprünglichen Schwingungsrichtung Winkel von 45° bilden.

Eine kreisförmige Welle kann durch zwei aufeinander senkrechte ebne Wellen ersetzt werden, welche einen Gangunterschied von $\frac{\lambda}{4}$ oder $\frac{3\lambda}{4}$ haben, je nachdem die Bewegung eine linksherumgehende oder rechtsherumgehende war.

Construction. (Figur 6.) Schlägt man um B mit $BO = a$ einen Kreis, theilt seine Peripherie in 12 gleiche Theile $OO_1 = O_1O_2 = O_2O_3$ ꝛc. $= \frac{2\pi}{12}$ und fällt von den Theilpunkten Senkrechte auf ZZ^1 und YY^1, deren Fußpunkte $Z_1, Z_2 \cdots, Y_1, Y_2 \cdots$ seien, dann durchläuft Punkt P nach § 5 in der Richtung ZZ^1 die Strecken BZ_1, Z_1Z_2, Z_2O, OZ_2 ꝛc. jedesmal in der Zeit $\frac{T}{12}$, ebenso in der Richtung YY^1 die Strecken BY_1, Y_1Y_2, Y_2O_9, O_9Y_2 ꝛc. in je $\frac{T}{12}$ Secunden. —

Beginnen beide Bewegungen gleichzeitig in B, so sind BZ_1 und BY_1, BZ_2 und BY_2, BO und BO_9 ꝛc. zusammengehörige Coordinaten des Punktes P, welcher also von B in grader Linie nach G, von da zurück bis G^1 und von dort wieder nach B sich bewegt. —

Liegt der Punkt A_1, von welchem die ZZ^1 parallele Welle ausgeht, um $\frac{\lambda}{4}$ näher an B, als A, der Ausgangspunkt der andern Welle, so hat P sich schon $\frac{T}{4}$ Secunden in der Richtung BZ, also bis O bewegt, ehe er eine Bewegung nach YY^1 hin erhält; er muß also gleichzeitig um OZ_2 und BY_1, um Z_2Z_1 und Y_1Y_2, um Z_1B und Y_2O_9 ꝛc. seine Lage ändern, also nach O_{11}, O_{10}, O_9 ꝛc. gelangen, d. h. den Kreis selbst linksherum durchlaufen.

In ähnlicher Weise erhält man für $\delta = \frac{\lambda}{12}$ die Ellipse $Z_1\ O_{11}\ E\ Z_{11}\ E^1$ linksherum, für $\delta = \frac{11\lambda}{12}$ dieselbe Ellipse rechtsherum durchlaufen, u. s. w.

§ 17. Haben die beiden Wellen auch noch verschiedene Amplituden, a und a_1, so lauten ihre Gleichungen, wenn wir wieder

$$2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = \alpha; \quad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \beta$$

setzen:

$$y = a.\ \sin\alpha; \quad z = a_1\ \sin(\alpha + \beta).$$

Daraus folgt:

$$\sin\alpha = \frac{y}{a};\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$$

$$\frac{z}{a_1} = \sin\alpha.\ \cos\beta + \cos\alpha.\ \sin\beta$$

$$= \frac{y}{a}.\ \cos\beta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.\ \sin\beta$$

$$\left[\frac{z}{a_1} - \frac{y}{a}\ \cos\beta\right]^2 = \left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]\sin^2\beta$$

$$\frac{z^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2.\cos\beta\,\frac{z}{a_1}\,\frac{y}{a} = \sin^2\beta.$$

Da hierin $\frac{\cos^2\beta.}{a^2.\ a_1^2} - \frac{1}{a^2.\ a_1^2}$ negativ ist, weil $\cos^2\beta < 1$, so stellt diese Gleichung eine Ellipse dar.

Bezeichnet φ den Winkel, unter welchem die Hauptaxen derselben gegen die bisherigen Axen geneigt sind, während die halben Längen dieser Axen B und A heißen mögen, so ergibt sich, wenn man die obige Gleichung durch Transformation der Coordinaten auf die Form:

$$B^2\ z^2 + A^2\ y^2 = B^2\ A^2$$

bringt,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2aa_1\ \cos\beta}{a_1^2 - a^2}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\,a^2\,a_1^2\cos^2\beta} - (a_1^2 - a^2)}{2\sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\,a^2\,a_1^2\cos^2\beta}}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\,a^2\,a_1^2\cos^2\beta} + a_1^2 - a^2}{2\sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\,a^2\,a_1^2\cos^2\beta}}$$

$$B^2 = \frac{1}{2}\left\{(a^2 + a_1^2) - \sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\ a^2\ a_1^2\ \cos^2\beta}\right\}$$

$$A^2 = \frac{1}{2}\left\{(a^2 + a_1^2) + \sqrt{(a_1^2 - a^2)^2 + 4\ a^2\ a_1^2\ \cos^2\beta}\right\}$$

Besondere Fälle. 1) $\delta = o$, oder $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$, folglich $\beta = 2n\pi$,

$y = a \sin\alpha$; $z = a_1 \sin(\alpha + 2n\pi) = a_1 \sin.\alpha$, dann ist: $y = \frac{a}{a_1}.z$.

Die Bahn des bewegten Punktes ist also die Diagonale des Rechtecks, dessen Seiten a und a_1 sind; ihr Länge $l = \sqrt{a^2 + a_1^2}$.

Nennt man u die Entfernung des Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit t, so ist:

$$u^2 = y^2 + z^2 = (a^2 + a_1^2)\ \sin^2 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right];\ u = \sqrt{a^2 + a_1^2}\ \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

Es ist also wiederum eine ebne Welle entstanden, deren Amplitude $a_2 = \sqrt{a^2 + a_1^2}$ ist; nennt man φ den Winkel, welchen sie mit der Welle von der Amplitude a_1 einschließt, so ist:

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{a}{a_1};\ \sin\varphi = \frac{a}{a_2};\ \cos\varphi = \frac{a_1}{a_2}$$

2) $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$; $\beta = (2n+1)\pi$; $y = a.\sin\alpha$; $z = -a_1 \sin\alpha$, folglich $y = -\frac{a}{a_1}z$.

Es ändert sich also an der vorigen Betrachtung nur das eine, daß φ ein stumpfer Winkel wird, $\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{a}{a_1}$; $\sin\varphi = \frac{a}{a_2}$; $\cos\varphi = -\frac{a_1}{a_2}$.

Umgekehrt kann man also jede gradlinige Wellenbewegung von der Amplitude a_2 ersetzen durch zwei andere auf einander senkrechte gradlinige Wellenbewegungen von derselben Wellenlänge und Schwingungsdauer. Ist der Winkel φ, welchen die eine derselben mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung einschließt, ein spitzer, so hat man den beiden neuen Bewegungen die Amplituden:

$$a = a_2 \sin\varphi, \qquad a_1 = a_2 \cos\varphi,$$

und keinen Gangunterschied gegen die ursprüngliche Bewegung zu geben; ist dagegen der Winkel φ ein stumpfer, so erhalten die beiden neuen Wellen die Amplituden:

$$a = a_2 \sin\varphi, \qquad a_1 = -a_2 \cos\varphi,$$

und nur die erstere beginnt und endet gleichzeitig mit der gegebnen, die zweite hat einen Gangunterschied von einer ungraden Anzahl halber Wellenlängen.

3) $\delta = \frac{\lambda}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; $y = a \sin\alpha$; $z = a_1 \cos\alpha$, folglich: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a_1^2} = 1$.

Die Bahn ist also eine Ellipse, deren Hauptaxen mit den gegebenen Schwingungsrichtungen zusammenfallen und den Amplituden gleich sind.

Läßt man α von 0^0 bis 360^0 wachsen, so zeigt sich, daß die Ellipse linksherum durchlaufen wird.

4) Für $\delta = \frac{3\lambda}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$ ist $y = a \sin\alpha$; $z = -a_1 \cos\alpha$, also: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a_1^2} = 1$,

die Bahn ist also wiederum eine Ellipse, sie wird aber rechtsherum zurückgelegt.

Umgekehrt kann man eine elliptische Welle durch zwei aufeinander senkrechte ebne Wellen ersetzen, deren Schwingungsrichtungen und Amplituden die Hauptaxen der Ellipse sind, wenn man ihnen einen Gangunterschied von $\frac{\lambda}{4}$ für eine linksherum, von $\frac{3\lambda}{4}$ für eine rechtsherum gehende Bewegung beilegt.

Construction. (Figur 7.) Schlägt man um B mit $BO = a_1$ und $BQ = a$ Kreise, theilt die Peripherie eines jeden in 12 gleiche Theile und fällt von den Theilpunkten des ersten $O_1, O_2, O_3 \cdots$ Senkrechte auf ZZ^1, von denen des zweiten $Q_1, Q_2, Q_3 \cdots$ Senkrechte auf YY^1, so sind in der Richtung ZZ^1 die Strecken BZ_1, Z_1Z_2, Z_2O, OZ_2 ꝛc. und in der Richtung YY^1 die Strecken BY_1, Y_1Y_2, Y_2O_9, O_9Y_2 ꝛc. Wege, zu welchen der Punkt P immer $\frac{1}{12}T$ Secunden gebraucht.

Betrachtungen, wie die im vorigen §, zeigen, daß für $\delta = o$ P die grade Linie BGG^1B, für $\delta = \frac{\lambda}{2}$ die Grade $BG_1G_1'B$ durchläuft, während er sich für $\delta = \frac{\lambda}{4}$ auf der Ellipse $OQ_9O_6Q_3$ linksherum, für $\delta = \frac{3\lambda}{4}$ auf derselben Ellipse rechtsherum bewegt, und für $\delta = \frac{2\lambda}{12}$ die Ellipse $Z_2Y_2Z_8Y_8$ linksherum, für $\delta = \frac{8\lambda}{12}$ diese Ellipse in der Richtung $Z_8Y_2Z_2Y_8$, also rechtsherum zurücklegt.

§ 18. Die beiden aufeinander senkrechten Wellen haben dieselbe Amplitude, aber verschiedene Schwingungsdauer, und zwar mögen die Schwingungen in der Richtung ZZ^1 doppelt so lange währen, als die in der Richtung YY^1, so daß in den Gleichungen des § 15 $a_1 = a_2 = a$, $T_2 = 2T_1$ zu setzen ist. Haben die beiden Wellen dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, so ist nach § 7: $cT_1 = \lambda_1$, und $cT_2 = \lambda_2$, also für $T_2 = 2T_1$, auch $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Man erhält also, wenn $AA_1 = \delta$:

$$y = a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right]; \quad z = a \sin \pi \left[\frac{t}{T_1} - \frac{x - \delta}{\lambda_1}\right]$$

oder, wenn: $2\pi \left[\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right] = 2\alpha$, $\frac{\pi\delta}{\lambda_1} = \beta$ gesetzt wird: $y = a \sin 2\alpha$; $z = a \sin (\alpha + \beta)$.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{y}{a} = 2 \sin \alpha . \cos \alpha,$$

und da: $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

$$\sqrt{1 + \frac{y}{a}} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$\sqrt{1 - \frac{y}{a}} = \sin \alpha - \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{y}{a}} + \sqrt{1 - \frac{y}{a}} \right\} = \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{y}{a}} - \sqrt{1 - \frac{y}{a}} \right\} = \cos \alpha$$

da: $z = a (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta)$

$$z = \frac{1}{2} a (\cos \beta + \sin \beta) \sqrt{1 + \frac{y}{a}} + \frac{1}{2} a (\cos \beta - \sin \beta) \sqrt{1 - \frac{y}{a}}$$

Da die Vorzeichen vor den Wurzeln positiv oder negativ sein können, so entsprechen jedem Werth von y im Allgemeinen 4 Werthe von z, welche abgesehen vom Vorzeichen paarweise einander gleich sind. Für $y = \pm a$ wird eine der beiden Wurzeln gleich Null, es bleiben nur zwei Werthe von z, die einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind.

Löst man die Gleichung nach y auf, so erhält man:

$$y = a \left\{ \sin 2\beta \left[\frac{2z^2}{a^2} - 1\right] \pm \cos 2\beta . \frac{2z}{a} \sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} \right\}$$

Zu den Werthen $z = o$ und $z = \pm a$ gehört also nur ein Werth von y, jedem andern Werth von z entsprechen 2 Werthe von y.

Besondere Fälle. 1) Für $\delta = o$ ist $\beta = o$, $\sin 2\beta = o$, $\cos 2\beta = 1$, auch ist für $\delta = n\frac{\lambda_1}{2}$ $2\beta = n\pi$, $\sin 2\beta = o$, $\cos 2\beta = \pm 1$, also:

$$y = \pm 2z\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} = \pm\frac{2z}{a}\sqrt{a^2 - z^2} \quad \text{oder} \quad \frac{4z^4}{a^4} - \frac{4z^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = o.$$

Daraus ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von y und z:

$$z = o,\ y = o;\ z = \pm\frac{a}{2},\ y = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}};\ z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \pm a;\ z = \pm a,\ y = o.$$

Aus der Gleichung der Curve folgt ferner:

$$y : 2\sqrt{a^2 - z^2} = z : a,$$

woraus man eine einfache Construction beliebig vieler Punkte der Curve ableiten kann.

2) Für $\delta = \frac{\lambda_1}{4}$ ist $2\beta = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\beta = 1$, $\cos 2\beta = o$, also: $y = \frac{2z^2 - a^2}{a}$ oder: $z^2 = \frac{a}{2}(y + a)$. Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Axe in die Richtung YY^1 fällt, deren Scheitelpunkt in $y = -a$, $z = o$ liegt und deren Parameter $\frac{a}{2}$ ist.

3) Für $\delta = \frac{3\lambda_1}{4}$ erhält man $2\beta = \frac{3\pi}{2}$, $\sin 2\beta = -1$, $\cos 2\beta = o$, also: $z^2 = \frac{a}{2}(a - y)$, d. i. eine Parabel wie die vorige, deren Scheitelpunkt aber in $y = a$, $z = o$ liegt.

Construction. (Figur 8.) Schlägt man um B mit $BO = a$ einen Kreis, theilt denselben in 12 gleiche Theile und fällt von den Theilpunkten Senkrechte auf YY^1, so werden die Strecken BY_1, Y_1Y_2 ꝛc. in je $\frac{T_1}{12}$ Secunden durchlaufen; theilt man ferner den Kreisumfang in 24 gleiche Theile und fällt von den Theilpunkten Senkrechte auf ZZ^1, so werden die Strecken BZ_1, Z_1Z_2 ꝛc. in $\frac{T_2}{24} = \frac{T_1}{12}$ Secunden, also in derselben Zeit wie die auf YY^1 construirten zurückgelegt.

Beginnen nun die Bewegungen nach beiden Richtungen gleichzeitig, so sind BZ_1 und BY_1, BZ_2 und BY_2 ꝛc. zusammengehörige Coordinaten des Punktes P, seine Bahn ist die Curve $BE_1\,OE_2\,BE_3\,O_{12}\,E_4\,B$.

Für $\delta = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\lambda_2}{8}$ ist P in der Richtung Z^1Z schon $\frac{T_2}{8} = \frac{3T_2}{24}$ Secunden in Bewegung, also bei Z_3 fortgeschritten, wenn seine Bewegung in der Richtung Y^1Y beginnt; es sind also BZ_3, Null; BZ_4, BY_1 ꝛc. zusammengehörige Coordinaten, mithin $Z_3\,CZ_3\,O_6\,Z_{15}\,C_1\,Z_{15}\,O_6\,Z_3$ die Bahn von P.

In derselben Weise findet man für $\delta = \frac{\lambda_1}{6} = \frac{2\lambda_2}{24}$ und andere Werthe von δ die Bahn des Punktes P.

§ 19. Langen zwei oder mehr ebne, kreisförmige, elliptische oder parabolische Wellen gleichzeitig in einem Punkte an, so kann man jede derselben ersetzen durch zwei aufeinander senkrechte ebne Wellen, deren Schwingungen zwei festen Richtungen YY^1 und ZZ^1 parallel sind. Dann kann man nach § 11 erst alle parallel YY^1 erfolgenden Schwingungen und ebenso alle ZZ^1 parallelen, zuletzt die beiden resultirenden Bewegungen nach § 15 zusammensetzen.

Beispiel. Eine linksgedrehte und eine rechtsgedrehte kreisförmige Welle, welche dieselbe Amplitude a, dieselbe Schwingungsdauer T und dieselbe Länge λ, aber den Gangunterschied δ haben, setzen sich zu einer ebnen Welle zusammen, deren Richtung von δ abhängig ist, und deren Gleichung lautet: $u = 2a \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\delta}{2\lambda}\right]$